

अनुक्रमांक

नाम .

131

324(EZ)

2021

गणित

समय : 2 घण्टे 15 मिनट

पूर्णांक : 100

Time : 2 Hours 15 Mins. Total Marks : 100

निर्देश : प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्नपत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं।

**Note :** First 15 minutes are allotted for the candidates to read the question paper.

1. प्रश्न संख्या-1 बहुविकल्पीय है, जिसमें 5 खण्डों में से किन्हीं 3 खण्डों को हल कीजिए। प्रत्येक खण्ड 2 अंक का है।  $2 \times 3 = 6$  अंक
2. प्रश्न संख्या-2 अति लघु उत्तरीय है, जिसमें 5 खण्डों में से किन्हीं 2 खण्डों को हल कीजिए। प्रत्येक खण्ड 2 अंक का है।  $2 \times 2 = 4$  अंक

324(EZ)

2

3. प्रश्न संख्या-3 तथा प्रश्न संख्या-4 लघु उत्तरीय-I प्रकार का है। प्रश्न संख्या-3 में से किन्हीं 2 खण्डों को तथा प्रश्न संख्या-4 में से किन्हीं 2 खण्डों को हल कीजिए। प्रत्येक खण्ड 4 अंक का है।  $4 \times 4 = 16$  अंक
4. प्रश्न संख्या-5 तथा प्रश्न संख्या-6 लघु उत्तरीय-II प्रकार का है। प्रश्न संख्या-5 में से किन्हीं 3 खण्डों को तथा प्रश्न संख्या-6 में से किन्हीं 3 खण्डों को हल कीजिए। प्रत्येक खण्ड 10 अंक का है।

$10 \times 6 = 60$  अंक

5. प्रश्न संख्या-7, 8 तथा 9 दीर्घ उत्तरीय हैं। इनमें से किसी एक प्रश्न को हल कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 14 अंक का है।  $14 \times 1 = 14$  अंक

1. Question No. 1 is Multiple choice type. Answer any 3 parts out of 5 parts. Each part is of 2 marks.  $2 \times 3 = 6$  Marks
2. Question No. 2 is Very Short Answer type. Answer any 2 parts out of 5 parts. Each part is of 2 marks.  $2 \times 2 = 4$  Marks
3. Question No. 3 and Question No. 4 are Short Answer-I type. Answer any 2 parts from Question No. 3 and answer any 2 parts from Question No. 4. Each part is of 4 marks.  $4 \times 4 = 16$  Marks

4. Question No. 5 and Question No. 6 are Short Answer-II type. Answer any 3 parts from Question No. 5 and answer any 3 parts from Question No. 6. Each part is of 10 marks.  $10 \times 6 = 60$  Marks
5. Question Nos. 7, 8 and 9 are Long Answer type. Answer any one question from these. Each question is of 14 marks.  $14 \times 1 = 14$  Marks

1. क) अवकल समीकरण

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \sin\left(\frac{dy}{dx}\right) + 1 = 0$$

की घात है

- i) 3                      ii) 2  
iii) 1                     iv) परिभाषित नहीं है।

ख)  $\tan^{-1} \sqrt{3} - \sec^{-1}(-2)$  का मान बराबर है

- i)  $\pi$                       ii)  $-\frac{\pi}{3}$   
iii)  $\frac{\pi}{3}$                      iv)  $\frac{2\pi}{3}$

ग) समाकलन  $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$  बराबर है

- i)  $\frac{\pi}{3}$                       ii)  $\frac{2\pi}{3}$   
iii)  $\frac{\pi}{6}$                      iv)  $\frac{\pi}{12}$

घ) मान लीजिए कि  $f(x) = 3x$  द्वारा परिभाषित फलन  $f: K \rightarrow R$  है, तौ

- i)  $f$  एकैकी आच्छादक है  
ii)  $f$  बहुपद आच्छादक है  
iii)  $f$  एकैकी है परन्तु आच्छादक नहीं है  
iv)  $f$  न तो एकैकी है और न आच्छादक है।

ड) किस बिन्दु पर रेखा  $y = x + 1$ , वक्र  $y^2 = 4x$  की स्पर्श रेखा है ?

- i) (1, 2)                  ii) (2, 1)  
iii) (1, -2)              iv) (-1, 2)

1. a) The degree of differential equation

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \sin\left(\frac{dy}{dx}\right) + 1 = 0$$

is

- i) 3                      ii) 2  
iii) 1                    iv) not defined.

b)  $\tan^{-1} \sqrt{3} - \sec^{-1}(-2)$  is equal to

- i)  $\pi$                       ii)  $-\frac{\pi}{3}$   
iii)  $\frac{\pi}{3}$                      iv)  $\frac{2\pi}{3}$

c) Integral  $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$  is equal to

- i)  $\frac{\pi}{3}$       ii)  $\frac{2\pi}{3}$   
 iii)  $\frac{\pi}{6}$       iv)  $\frac{\pi}{12}$

d) Suppose that the function  $f: R \rightarrow R$  is defined by  $f(x) = 3x$ . Then

- i)  $f$  is one-one onto  
 ii)  $f$  is many-one onto  
 iii)  $f$  is one-one but not onto  
 iv)  $f$  is neither one-one nor onto.

e) On which point the line  $y = x + 1$  is tangent to the curve  $y^2 = 4x$ ?

- i)  $(1, 2)$       ii)  $(2, 1)$   
 iii)  $(1, -2)$       iv)  $(-1, 2)$

2. क) सिद्ध कीजिए कि समुच्चय  $\{1, 2, 3\}$  में

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)\}$$

द्वारा प्रदत्त संबंध स्वतुल्य है, परन्तु न तो सर्वात्मक है और न संक्रागक है।

ख)  $\int \frac{\sec^2 x}{\operatorname{cosec}^2 x} dx$  का मान ज्ञात कीजिए।

ग) समीकरण  $\begin{bmatrix} x+y & 2 \\ 5+z & xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$  से

$x, y$  तथा  $z$  के मान ज्ञात कीजिए।

घ) यदि  $2P(A) = P(B) = \frac{5}{13}$  और  $P(A/B) = \frac{2}{5}$

तो  $P(A \cup B)$  का मान ज्ञात कीजिए।

ड) सदिश  $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$  और

$\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$  के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

2. a) Prove that in set  $\{1, 2, 3\}$ , the relation given by

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)\}$$

is reflexive, but neither symmetric nor transitive.

b) Find the value of  $\int \frac{\sec^2 x}{\operatorname{cosec}^2 x} dx$ .

c) From equation

$$\begin{bmatrix} x+y & 2 \\ 5+z & xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}, \text{ find the values of } x, y \text{ and } z.$$

d) If  $2P(A) = P(B) = \frac{5}{13}$  and  $P(A/B) = \frac{2}{5}$  then find the value of  $P(A \cup B)$ .

- c) Find the angle between the vectors  
 $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$  and  
 $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ .

3. क) यदि  $\sin^{-1} x + \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ , तो सिद्ध कीजिए कि  $2x^2 + 1 = \sqrt{5}$ .

ख) दीर्घवृत्त के उस परिवार का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए जिनकी नाभि  $x$ -अक्ष पर और केन्द्र मूल बिन्दु पर है।

ग) यदि  $|\vec{a}| \neq 0, |\vec{b}| \neq 0$  और  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$  तो दिखाइए कि सदिश  $\vec{a}$  और  $\vec{b}$  परस्पर लम्ब हैं।

घ) दिखाइए कि बिन्दुओं  $(4, 7, 8)$ ,  $(2, 3, 4)$  से होकर जाने वाली रेखा, बिन्दुओं  $(-1, -2, 1)$  और  $(1, 2, 5)$  से होकर जाने वाली रेखा के समान्तर है।

3. a) If  $\sin^{-1} x + \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ , then prove that  $2x^2 + 1 = \sqrt{5}$ .

b) Find the differential equation of that family of ellipse whose focus is on the  $x$ -axis and centre is at the origin.

c) If  $|\vec{a}| \neq 0, |\vec{b}| \neq 0$  and  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ , then show that the vectors  $\vec{a}$  and  $\vec{b}$  are mutually perpendicular.

d) Show that the line passing through the points  $(4, 7, 8)$ ,  $(2, 3, 4)$  is parallel to the line passing through the points  $(-1, -2, 1)$  and  $(1, 2, 5)$ .

4. क)  $\sin x$  का  $\log x$  के सापेक्ष अवकलन गुणांक ज्ञात कीजिए।

ख) पूर्णाकों 1 से 11 तक में से दो पूर्णांक यादृच्छया चुने जाते हैं। यदि इनका योग सम है, तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि दोनों पूर्णांक विषम है।

ग) दिखाइए कि फलन  $f(x) = x^2 + 3x + 5$ ,  $x = 1$  पर संतत है।

घ) निम्न अवरोधों

$$x + y \leq 4$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0 \text{ के अन्तर्गत}$$

$Z = 3x + 4y$  का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए।

4. a) Find the differential coefficient of  $\sin x$  w.r.t.  $\log x$ .
- b) From integers 1 to 11, two integers are selected at random. If their sum is even, then find the probability that both the integers are odd.
- c) Show that the function  $f(x) = x^2 + 3x + 5$ , is continuous at  $x = 1$ .
- d) Under the following constraints  
 $x + y \leq 4$   
 $x \geq 0$   
 $y \geq 0$   
 find the maximum value of  $Z = 3x + 4y$ .

5. क) अन्तराल ज्ञात कीजिए जिसमें  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7$  से प्रदत्त फलन  $f$  (i) वर्धमान (ii) हासमान है।

ख) सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc \left( 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

ग) सिद्ध कीजिए कि

$$\sin^{-1} \frac{8}{17} + \sin^{-1} \frac{3}{5} = \tan^{-1} \frac{77}{36}$$

- घ)  $\int \frac{x^2 + 1}{x^2 - 5x + 6} dx$  का मान ज्ञात कीजिए।
- ङ) एक थैला A में 4 लाल और 5 काली गेंदें हैं। दूसरा थैला B में 6 लाल और 3 काली गेंदें हैं। एक गेंद थैला A से निकाल कर थैला B में स्थानान्तरित कर दी जाती है। इसके बाद थैला B से एक गेंद निकाली जाती है। इसके लाल होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
- च) वक्र  $y = \cos(x+y)$ ,  $-2\pi \leq x \leq 2\pi$  की स्पर्श रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा  $x + 2y = 0$  के समान्तर हैं।
5. a) Find the interval in which the function  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7$  is  
 (i) increasing (ii) decreasing.
- b) Prove that
- $$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc \left( 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$
- c) Prove that
- $$\sin^{-1} \frac{8}{17} + \sin^{-1} \frac{3}{5} = \tan^{-1} \frac{77}{36}$$
- d) Find the value of  $\int \frac{x^2 + 1}{x^2 - 5x + 6} dx$ .

- e) In a bag A there are 4 red and 5 black balls. In another bag B there are 6 red and 3 black balls. One ball is taken out from A and transferred in bag B. After this one ball is drawn from bag B. Find the probability of that to be red.
- f) Find the equations of the tangents to the curve  $y = \cos(x + y)$ ,  $-2\pi \leq x \leq 2\pi$  which are parallel to the line  $x + 2y = 0$ .
6. क) वक्र  $x^2 = 4y$  और सरल रेखा  $x = 4y - 2$  से घिरे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
- ख) आलेखीय विधि द्वारा निम्न अवरोधों के अन्तर्गत रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल कीजिए।
- $$x + 2y \geq 10$$
- $$3x + 4y \leq 24$$
- $$x \geq 0, y \geq 0$$
- एवं  $Z = 200x + 500y$  का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

- ग) अवकल समीकरण  $\frac{dy}{dx} + 2y = \sin x$  का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।
- घ) यदि A तथा B दो स्वतंत्र घटनाएँ हैं तो सिद्ध कीजिए कि A तथा B' भी स्वतंत्र घटनाएँ होंगी।
- ङ) समतलों  $\vec{r} \cdot (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 6$  और  $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) - 5 = 0$  के प्रतिच्छेदन और बिन्दु (2, 2, 1) से जाने वाले समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।
- च) यदि पूर्णाकों के समुच्चय Z में  $R = \{(a, b) \in Z \times Z : (a - b), 5 \text{ से विभाजित है}\}$  द्वारा प्रदत्त सम्बन्ध है, क्या R एक तुल्यता सम्बन्ध है ?
6. a) Find the area of the section enclosed between the curve  $x^2 = 4y$  and straight line  $x = 4y - 2$ .

- b) Solve the following linear programming problem by graphical method under the following constraints :

$$x + 2y \geq 10$$

$$3x + 4y \leq 24$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

Find the minimum value of  $Z = 200x + 500y$ .

- c) Find the general solution of the differential equation

$$\frac{dy}{dx} + 2y = \sin x.$$

- d) Prove that if  $A$  and  $B$  are independent events then  $A$  &  $B'$  are also independent events.

- e) Find the vector equation of a plane, passing through the intersection of the planes

$$\vec{r} \cdot (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 6 \text{ and}$$

$$\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) - 5 = 0 \text{ and the point } (2, 2, 1).$$

- f) If in the set of integers  $Z$ ,  $R = \{(a, b) \in Z \times Z : (a - b) \text{ is divisible by } 5\}$  be a given relation, then is  $R$  an equivalence relation?

7. क) निम्नलिखित समीकरण निकाय

$$x + y + z = 6$$

$$x - y + z = 2$$

$$2x + y - z = 1$$

को आव्यूह विधि से हल कीजिए।

- ख) i) यदि  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  तीन सदिश राशियाँ इस प्रकार हैं कि  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ , तो सिद्ध कीजिए कि

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}.$$

- ii)  $k$  का मान ज्ञात कीजिए यदि शीर्ष  $(k, 0)$ ,  $(4, 0)$  और  $(0, 2)$  वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल 4 वर्ग इकाई है।

7. a) Solve the following system of the equations by matrix method :

$$x + y + z = 6$$

$$x - y + z = 2$$

$$2x + y - z = 1$$

by matrix method.

- b) i) If  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  are three vector quantities, such that

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0, \text{ then prove}$$

$$\text{that } \vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}.$$

- ii) Find the value of  $k$ , if area of triangle with vertex  $(k, 0)$ ,  $(4, 0)$  and  $(0, 2)$  is 4 square unit.

8. क)  $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{\sin x + \cos x} dx$  का मान ज्ञात

कीजिए।

- ख) सिद्ध कीजिए कि वृत्त के अन्तर्गत महत्तम क्षेत्रफल वाला आयत एक वर्ग है।

8. a) Find the value of

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{\sin x + \cos x} dx.$$

- b) Prove that the rectangle of maximum area inside a circle is square.

9. क) दिखाइए कि अवकल समीकरण

$$(x - y) \frac{dy}{dx} = x + 2y \text{ समघातीय अवकल}$$

समीकरण है तथा इसका हल भी ज्ञात कीजिए।

- ख) i) यदि वक्र  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$  का अभिलम्ब  $x$ -अक्ष से  $\phi$  कोण बनाता है, तो दिखाइए कि इसका समीकरण  $y \cos \phi - x \sin \phi = a \cos 2\phi$  है।

- ii) यदि  $y = x^{\sin^{-1} x}$  है, तो  $\frac{dy}{dx}$  का मान

ज्ञात कीजिए।

9. a) Show that the differential equation  $(x - y) \frac{dy}{dx} = x + 2y$  is homogeneous

differential equation, and find also its solution.

- b) i) If normal to the curve  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$  makes an angle  $\phi$ , with the axis of  $x$ , then show that its equation is  $y \cos \phi - x \sin \phi = a \cos 2\phi$ .

- ii) If  $y = x^{\sin^{-1} x}$ , then find  $\frac{dy}{dx}$ .