

अनुक्रमांक

नाम

131

324(FJ)

2022

गणित

समय : तीन घण्टे 15 मिनट] पूर्णांक : 100

नोट : प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्नपत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं।

Note : First 15 minutes are allotted for the candidates to read the question paper.

- निर्देश :
- इस प्रश्नपत्र में कुल नौ प्रश्न हैं।
 - सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
 - प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं।
 - प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।
 - प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अन्त तक करते जाइए।
 - जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

Instructions :

- There are in all nine questions in this question paper.

324(FJ)

2

- All questions are compulsory.
- In the beginning of each question, the number of parts to be attempted are clearly mentioned.
- Marks allotted to the questions are indicated against them.
- Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.
- Do not waste your time over a question you cannot solve.

1. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

- क) $\tan^{-1} \sqrt{3} - \sec^{-1}(-2)$ का मान बराबर है
- π
 - $-\pi/3$
 - $\pi/3$
 - $2\pi/3$

ख) मान लीजिए कि समुच्चय N में

$$R = \{(a, b) : a = b - 2, b > 6\} \text{ द्वारा}$$

परिभाषित सम्बन्ध है तो

- $(2, 4) \in R$
- $(3, 8) \in R$
- $(8, 6) \in R$
- $(6, 8) \in R$

ग) 3×3 कॉर्ट के ऐसे आव्यूहों की कुल संख्या कितनी होगी जबकि प्रत्येक प्रविष्टि 0 या 1 है ?

- (i) 512 (ii) 81
(iii) 18 (iv) 27 ✓ 1

घ) कौन-सा फलन $x = 1$ पर अवकलनीय नहीं है ?

- (i) $f(x) = |x - 2|$
(ii) $f(x) = |x - 1|$
(iii) $f(x) = \frac{x}{|x|}$
(iv) $f(x) = |x + 1|$ ✓ 1

ङ) भुजा में 3% वृद्धि के कारण भुजा x cm के घन के आयतन में सन्निकट परिवर्तन है

- (i) $0.06 x^3 \text{ cm}^3$
(ii) $0.6 x^3 \text{ cm}^3$
(iii) $0.09 x^3 \text{ cm}^3$
(iv) $0.9 x^3 \text{ cm}^3$ ✓ 1

1. Attempt all parts of the following :

a) Value of $\tan^{-1} \sqrt{3} - \sec^{-1}(-2)$ is

- (i) π (ii) $-\pi/3$
(iii) $\pi/3$ (iv) $2\pi/3$ ✓ 1

b) A relation $R = \{(a, b) : a = b - 2, b > 6\}$ is defined on the set N . Then

- (i) $(2, 4) \in R$
(ii) $(3, 8) \in R$
(iii) $(8, 6) \in R$
(iv) $(6, 8) \in R$ 1

c) How many total number of matrices of order 3×3 are there whose entries are 0 or 1 ?

- (i) 512 (ii) 81
(iii) 18 (iv) 27 1

d) Which function is not differential on $x = 1$?

- (i) $f(x) = |x - 2|$
(ii) $f(x) = |x - 1|$
(iii) $f(x) = \frac{x}{|x|}$
(iv) $f(x) = |x + 1|$ 1

e) What is the approximate change in the volume of a cube whose side is x cm, caused by increase of 3% in the side ?

- (i) $0.06 x^3 \text{ cm}^3$
(ii) $0.6 x^3 \text{ cm}^3$
(iii) $0.09 x^3 \text{ cm}^3$
(iv) $0.9 x^3 \text{ cm}^3$ ✓ 1

2. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) $\int \frac{dx}{1+\tan x}$ का मान ज्ञात कीजिए। 1

ख) वक्र $y^2 = 4x$, y -अक्ष एवं रेखा $y = 3$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 1

ग) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{y-2}$ ($y \neq 2$) का व्यापक हल ज्ञात कीजिए। 1

घ) सदिशों $\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ और $3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए। 1

ङ) यदि A तथा B दो स्वतंत्र घटनाएँ हैं जहाँ $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.6$ हों तो $P(A \cap B)$ ज्ञात कीजिए। 1

2. Attempt all parts of the following :

a) Evaluate $\int \frac{dx}{1+\tan x}$. 1

b) Find the area of the region bounded by the curve $y^2 = 4x$, y -axis and line $y = 3$. 1

c) Find the general solution of the differential equation $\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{y-2}$ ($y \neq 2$). 1

d) Find the angle between the vectors $\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ and $3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$. 1

e) If A and B are two independent events where $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.6$ then find $P(A \cap B)$. 1

3. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) सिद्ध कीजिए कि पूर्णाकों के समुच्चय Z में $R = \{(a, b) : 2, (a - b) \text{ को विभाजित करती है ; द्वारा प्रदत्त सम्बन्ध एक तुल्यता सम्बन्ध है।} 2$

ख) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ तो दिखाइए $|2A| = 4|A|$. 2

ग) x के सापेक्ष $x^{\sin x}$ का अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए ($x > 0$). 2

घ) किस अन्तराल में फलन $f(x) = x^2 - 4x + 6$ वर्धमान है ? 2

3. Attempt all parts of the following :

a) Prove that a relation $R = \{(a, b) : 2 \text{ divides } (a - b)\}$ on the set of integers Z , is an equivalence relation. 2

- b). If $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ then show that $|2A| = 4|A|$. 2
- c) Find differential coefficient of $x^{\sin x}$ with respect to x ($x > 0$). 2
- d) In which interval is the function $f(x) = x^2 - 4x + 6$ increasing? 2

4. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

- क) $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$ का मान ज्ञात कीजिए। 2
- ख) बिन्दुओं $(-2, 4, -5)$ और $(1, 2, 3)$ को मिलाने वाली रेखा की दिक्-कोसाइन ज्ञात कीजिए। 2
- ग) निम्न अवरोधों के अन्तर्गत $Z = 3x + 9y$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए :
 $x + 3y \leq 60, x + y \geq 10, x \leq y, x \geq 0, y \geq 0$. 2
- घ) एक परिवार में दो बच्चे हैं, इनमें कम से कम एक बच्चा लड़का है, तो दोनों बच्चों के लड़का होने की क्या प्रायिकता है? 2

4. Attempt all the parts of the following :

- a) Evaluate $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$. 2
- b) Find direction cosines of the line joining the points $(-2, 4, -5)$ and $(1, 2, 3)$. 2
- c) Find the minimum value of $Z = 3x + 9y$ under the following restrictions : $x + 3y \leq 60, x + y \geq 10, x \leq y, x \geq 0, y \geq 0$. 2
- d) There are two children in a family, in which at least one child is boy. What is the probability that both children are boy? 2

5. निम्नलिखित में से किन्हीं पाँच खण्डों को हल कीजिए :

- क) यदि $P(x) = X$ के समस्त उपसमुच्चयों का समुच्चय है जहाँ $X \neq \phi$, एक सम्बन्ध $R, P(x)$ पर इस प्रकार परिभाषित है कि ARB यदि और केवल यदि $A \subset B$ है। सिद्ध कीजिए कि R तुल्यता सम्बन्ध नहीं है। 5

ख) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ है तो सिद्ध कीजिए कि

$$A^3 - 6A^2 + 7A + 2I = 0. \quad 5$$

ग) यदि $(\cos x)^y = (\cos y)^x$ है तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए। 5

घ) $f(x) = x + \sin 2x$ का $[0, 2\pi]$ पर उच्चतम तथा निम्नतम मान ज्ञात कीजिए। 5

ङ) $(255)^{1/4}$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए। 5

च) सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} (y+z)^2 & xy & zx \\ xy & (x+z)^2 & yz \\ xz & yz & (x+y)^2 \end{vmatrix} = 2xyz(x+y+z)^3$$

5

5. Attempt any five parts of the following :

a) If $P(X)$ = set of all subsets of X , where $X \neq \phi$, a relation R is defined on $P(X)$ as ARB if and only if $A \subset B$. Prove that R is not an equivalence relation. 5

b) If $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ then prove that

$$A^3 - 6A^2 + 7A + 2I = 0. \quad 5$$

c) If $(\cos x)^y = (\cos y)^x$ then find $\frac{dy}{dx}$. 5

d) Find the maximum and minimum values of $f(x) = x + \sin 2x$ on $[0, 2\pi]$. 5

e) Find approximate value of $(255)^{1/4}$. 5

f) Prove that

$$\begin{vmatrix} (y+z)^2 & xy & zx \\ xy & (x+z)^2 & yz \\ xz & yz & (x+y)^2 \end{vmatrix} = 2xyz(x+y+z)^3$$

5

6. निम्नलिखित में से किन्हीं पाँच खण्डों को हल कीजिए :

क) $\int (\cot \sqrt{x} + \tan \sqrt{x}) dx$ ज्ञात कीजिए। 5

ख) रेखाओं $\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$

और $\vec{r} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$

के बीच न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। 5

ग) अवकल समीकरण

$$x \cos\left(\frac{y}{x}\right) \frac{dy}{dx} = y \cos\left(\frac{y}{x}\right) + x$$

का हल ज्ञात कीजिए।

5

- घ) आलेखीय विधि द्वारा निम्न रेखिक प्रोग्रामन समस्या को निम्नलिखित व्यवरोधों के अन्तर्गत हल कीजिए :

$$x + y \leq 8, \quad x \leq 5, \quad y \leq 5, \quad x + y \geq 4, \\ x \geq 0, \quad y \geq 0$$

$Z = 10(x - 7y + 190)$ का न्यूनतमीकरण कीजिए।

5

- ङ) एक बक्से में दस कार्ड 1 से 10 तक पूर्णांक लिखकर रखे गये हैं। उन्हें अच्छी तरह मिलाया गया तथा बक्से से एक कार्ड यादृच्छया निकाला गया। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि निकाले गये कार्ड पर संख्या 3 से अधिक है, तथा इस संख्या सम हो।

5

- च) यदि तीन सदिश $\vec{a}$, $\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ इस प्रकार हैं कि $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$ तथा $|\vec{c}| = 5$ और इनमें से प्रत्येक, अन्य दो सदिशों के योगफल पर लम्बवत् हैं तो $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$ को ज्ञात कीजिए।

5

6. Attempt any *five* parts of the following :

- a) Evaluate :

$$\int (\cot \sqrt{x} + \tan \sqrt{x}) dx \quad 5$$

- b) Find the shortest distance between the lines

$$\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}) \text{ and}$$

$$\vec{r} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}).$$

5

- c) Find the solution of the differential equation

$$x \cos\left(\frac{y}{x}\right) \frac{dy}{dx} = y \cos\left(\frac{y}{x}\right) + x. \quad 5$$

- d) Solve the following linear programming problem by graphical method, under the following constraints :

$$x + y \leq 8, \quad x \leq 5, \quad y \leq 5, \quad x + y \geq 4,$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0. \text{ Minimize}$$

$$Z = 10(x - 7y + 190).$$

5

- e) Ten cards numbered 1 to 10 are put in a box. The cards are mixed in well manner and one card is drawn at random from the box. Find the probability that the number appeared on the card is greater than 3 and the number is an even number. 5

- f) If there are three vectors $\vec{a}$, $\vec{b}$ and $\vec{c}$ such as $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$ and $|\vec{c}|=5$ and each vector is perpendicular to the sum of other two vectors, find $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$. 5

7. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

- क) $\int_0^\pi \frac{x dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$ का मान ज्ञात कीजिए। 8

- ख) $x = 0$ एवं $x = 2\pi$ के मध्य वक्र $y = \cos x$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 8

7. Attempt any one part of the following :

- a) Evaluate :

$$\int_0^\pi \frac{x dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} \quad 8$$

- b) Find the area of the region bounded by $y = \cos x$, $x = 0$ and $x = 2\pi$. 8

8. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

- क) निम्नलिखित समीकरण निकाय

$$3x - 2y + 3z = 8$$

$$2x + y - z = 1$$

$4x - 3y + 2z = 4$ को आव्यूह विधि से हल कीजिए। 8

- ख) i) यदि $y = e^{a \cos^{-1} x}$, $-1 \leq x \leq 1$ है तो सिद्ध कीजिए कि

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - a^2 y = 0. \quad 4$$

- ii) यदि $x = a(\cos t + t \sin t)$ और

$$y = a(\sin t - t \cos t) \text{ तो } \frac{d^2 y}{dx^2} \text{ ज्ञात कीजिए।} \quad 4$$

8. Attempt any one part of the following :

a) Find the solution by matrix method of the following system of equations :

$$3x - 2y + 3z = 8$$

$$2x + y - z = 1$$

$$4x - 3y + 2z = 4.$$

8

b) i) If $y = e^{a \cos^{-1} x}$, $-1 \leq x \leq 1$

then prove that

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - a^2 y = 0.$$

4

ii) If $x = a(\cos t + t \sin t)$ and $y = a(\sin t - t \cos t)$ then find

$$\frac{d^2 y}{dx^2}$$

4

9. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

क) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ हो तो सत्यापित

कीजिए कि $A \cdot \text{adj}(A) = |A| \cdot I$ तथा A^{-1}

ज्ञात कीजिए।

8

ख) दिखाइए कि

$$y = c_1 e^{ax} \cos bx + c_2 e^{ax} \sin bx \text{ जहाँ}$$

c_1, c_2 अचर हैं, अवकल समीकरण

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2a \frac{dy}{dx} + (a^2 + b^2)y = 0 \text{ का}$$

हल है।

8

9. Attempt any one part of the following :

a) If $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ then prove that

$$A \cdot \text{adj}(A) = |A| \cdot I \text{ and find } A^{-1}.$$

8

b) Show that

$$y = c_1 e^{ax} \cos bx + c_2 e^{ax} \sin bx,$$

where c_1, c_2 are constants, is a

solution of the differential equation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2a \frac{dy}{dx} + (a^2 + b^2)y = 0.$$

8

324(FJ)- 95,000