

अनुक्रमांक

नाम

131

324(XB)

2020

गणित

समय : तीन घण्टे 15 मिनट] [पूर्णांक : 100

नोट : प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्नपत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं।

Note : First 15 minutes are allotted for the candidates to read the question paper.

- निर्देश :
- इस प्रश्नपत्र में कुल नौ प्रश्न हैं।
 - सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
 - प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं।
 - प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।
 - प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अन्त तक करते जाइए।
 - जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

Instructions :

- There are in all nine questions in this question paper.

324(XB)

2

- All questions are compulsory.
- In the beginning of each question, the number of parts to be attempted are clearly mentioned.
- Marks allotted to the questions are indicated against them.
- Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.
- Do not waste your time over a question you cannot solve.

1. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) मान लीजिए कि $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$ द्वारा परिभाषित है, सही उत्तर का चयन कीजिए :

- f एकैकी आच्छादक है
- f बहु-एक आच्छादक है
- f एकैकी है किन्तु आच्छादक नहीं है
- f न तो एकैकी है और न तो आच्छादक है।

1

ख) $\tan^{-1}(\sqrt{3}) - \cot^{-1}(-\sqrt{3})$ का मान है

- π
- $-\frac{\pi}{2}$
- 0
- $2\sqrt{3}$.

1

ग) किस बिन्दु पर $y = x + 1$ वक्र $y^2 = 4x$ की स्पर्श रेखा है ?

- (1, 2)
- (2, 1)
- (1, -2)
- (-1, 2).

1

- घ) यदि A और B ऐसी दो घटनाएँ हैं कि
 $P(A) + P(B) - P(A \text{ और } B) = P(A)$,
 तब
 i) $P(B/A) = 1$
 ii) $P(A/B) = 1$
 iii) $P(B/A) = 0$
 iv) $P(A/B) = 0$. 1
- ङ) निम्नलिखित में से समाकलन $\int \cos^2 x dx$
 का सही मान है
 i) $\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + c$
 ii) $2 \cos x \sin x + \frac{x}{2} + c$
 iii) $\frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{2} + c$
 iv) $\cos 2x + c$. 1

1. Attempt all the parts :

- a) Suppose that a function $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 defined by $f(x) = x^4$, select correct
 option :
 i) f is one-one onto
 ii) f is many-one onto
 iii) f is one-one but not onto
 iv) f is neither one-one nor onto. 1

- b) Value of $\tan^{-1}(\sqrt{3}) - \cot^{-1}(-\sqrt{3})$ is
 i) π ii) $-\frac{\pi}{2}$
 iii) 0 iv) $2\sqrt{3}$. 1
- c) $y = x + 1$ is a tangent line at which
 point on the curve $y^2 = 4x$?
 i) $(1, 2)$ ii) $(2, 1)$
 iii) $(1, -2)$ iv) $(-1, 2)$. 1
- d) If A and B be two events such that
 $P(A) + P(B) - P(A \text{ and } B) = P(A)$
 then
 i) $P(B/A) = 1$
 ii) $P(A/B) = 1$
 iii) $P(B/A) = 0$
 iv) $P(A/B) = 0$. 1
- e) Correct value of the integration
 $\int \cos^2 x dx$ in the following is
 i) $\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + c$
 ii) $2 \cos x \sin x + \frac{x}{2} + c$
 iii) $\frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{2} + c$
 iv) $\cos 2x + c$.

2. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

- क) $\cot[\tan^{-1}(a) + \cot^{-1}(a)]$ का मान ज्ञात
 कीजिए। 1

ख) जाँच कीजिए कि फलन $f(x) = \frac{x^2}{2}$, $x = 0$ पर सतत है। 1

ग) यदि $\vec{a} = \hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 5\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}$ है, तो $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$ ज्ञात कीजिए। 1

घ) यदि $X + Y = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ तथा $X - Y = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ है, तो X तथा Y का मान ज्ञात कीजिए। 1

ङ) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{1+x^2}{1+y^2}$ को हल कीजिए। 1

2. Attempt all the parts :

a) Find the value of $\cot[\tan^{-1}(a) + \cot^{-1}(a)]$. 1

b) Check that the function $f(x) = \frac{x^2}{2}$ is continuous at $x = 0$. 1

c) If $\vec{a} = \hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$ and $\vec{b} = 5\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}$, then find $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$. 1

d) If $X + Y = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ and

$X - Y = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, then find the values of X and Y . 1

e) Solve the differential equation $\frac{dy}{dx} = \frac{1+x^2}{1+y^2}$. 1

3. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) वक्र $x = a \cos^3 \theta$, $y = a \sin^3 \theta$ के $\theta = \frac{\pi}{4}$ पर अभिलम्ब की प्रवणता ज्ञात कीजिए। 2

ख) यदि $y = \sin^{-1} x$, तो सिद्ध कीजिए कि $(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} = x \frac{dy}{dx}$. 2

ग) आव्यूह $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए। 2

घ) एक द्विआधारी संक्रिया $*$ समुच्चय R पर $a * b = \frac{a+b}{2} \forall a, b \in R$ द्वारा परिभाषित है। दिखाइए कि यह संक्रिया क्रमविनिमेय है किन्तु साहचर्य नहीं है।

3. Attempt *all* the parts :

a) Find the slope of the normal of the curve $x = a \cos^3 \theta$, $y = a \sin^3 \theta$ at $\theta = \frac{\pi}{4}$. 2

b) If $y = \sin^{-1} x$, then prove that

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} = x \frac{dy}{dx}. \quad 2$$

c) Find the value of the matrix $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. 2

d) A binary operation $*$ is defined on a set R as $a * b = \frac{a+b}{2} \forall a, b \in R$. Show that this binary operation is commutative but not associative. 2

4. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) यदि $y = x^{x \cos x}$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए। 2

ख) बिन्दुओं $(2, -5, 1)$ तथा $(1, 4, -6)$ को मिलाने वाली रेखा पर उस बिन्दु का निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो उस रेखा को $2 : 3$ के अनुपात में अन्तः विभाजित करता है। 2

ग) यदि $P(A) = \frac{1}{3}$ तथा $P(B) = \frac{1}{2}$ और $P(A \cap B) = \frac{2}{3}$ हो, तो क्या घटनाएँ A तथा B स्वतंत्र हैं ? 2

घ) यदि $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \pi$ हो, तो सिद्ध कीजिए $x + y + z = xyz$. 2

4. Attempt *all* the parts :

a) If $y = x^{x \cos x}$, then find $\frac{dy}{dx}$. 2

b) Find the coordinate of that point which internally intersects the line joining the points $(2, -5, 1)$ and $(1, 4, -6)$ in the ratio $2 : 3$. 2

c) If $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ and $P(A \cap B) = \frac{2}{3}$, are the events A and B independent ? 2

d) If $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \pi$, then prove that $x + y + z = xyz$. 2

5. निम्नलिखित में से किन्हीं पाँच खण्डों को हल कीजिए :

क) $y = (\cos x)^{\sin x} + x^x$ का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए। 5

ख) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ को एक सममित आव्यूह तथा एक विषम सममित आव्यूह के योगफल के रूप में लिखिए। 5

ग) i) $\tan^{-1}(2x) + \tan^{-1}(3x) = \frac{\pi}{4}$ को सरल कीजिए। 2

ii) यदि $f(x) = x^2 - 4x - 3, \forall x \in [1, 4]$, तो मध्यमान प्रमेय स्थापित कीजिए। 3

घ) दो परवलयों $y^2 = 4ax$ तथा $x^2 = 4ay$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 5

ङ) यदि दो पासे एक साथ फेंके जा रहे हैं, तो कम से कम एक 6 आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 5

च) निम्न अवरोधों के अन्तर्गत $Z = 8x + 7y$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए :

$$\begin{aligned} x &\leq 20, y \leq 40, x + y \leq 45, \\ 3x + y &\leq 66, x \geq 0, y \geq 0. \end{aligned} \quad 5$$

3. Attempt any five parts of the following :

a) Differentiate $y = (\cos x)^{\sin x} + x$ with respect to x .

b) Write the matrix

$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ in the form of sum of a symmetric matrix and a skew-symmetric matrix.

c) i) Solve

$$\tan^{-1}(2x) + \tan^{-1}(3x) = \frac{\pi}{4}. \quad 2$$

ii) If $f(x) = x^2 - 4x - 3, \forall x \in [1, 4]$ then establish mean value theorem. 3

d) Find the area of the region bounded by two parabolas $y^2 = 4ax$ and $x^2 = 4ay$. 5

e) If two dice are thrown together, then find the probability of getting at least one 6. 5

f) Find the maximum value of $Z = 8x + 7y$ under the following constraints :

$$\begin{aligned} x &\leq 20, y \leq 40, x + y \leq 45, \\ 3x + y &\leq 66, x \geq 0, y \geq 0. \end{aligned} \quad 5$$

निम्नलिखित में से किसी पाँच खण्डों को हल कीजिए :

क) दिखाइए कि सारणिक

$$\begin{vmatrix} (y+z)^2 & xy & zx \\ xy & (x+z)^2 & yz \\ xz & yz & (x+y)^2 \end{vmatrix} = 2xyz(x+y+z)^3.$$

5

ख) बिन्दुओं $-2\hat{i}+6\hat{j}-6\hat{k}$, $-3\hat{i}+10\hat{j}-9\hat{k}$ और $-5\hat{i}-6\hat{j}-6\hat{k}$ से होकर जाने वाले समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

5

ग) एक पासे को 6 बार उछाला जाता है। यदि "पासे पर सम संख्या प्राप्त होना" एक सफलता है तो (i) न्यूनतम 5 सफलताएँ तथा (ii) अधिकतम 5 सफलताएँ की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

5

घ) $\int \frac{\sec^2 2x}{(\cot x - \tan x)^2} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

5

इ) यदि $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ है, तो सिद्ध कीजिए $A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$ नहीं

$$A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix} \text{ नहीं}$$

$$n \in \mathbb{N}.$$

5

च) अवकल समीकरण

$$(\tan^{-1} y - x)dy = (1 + y^2)dx \text{ का हल ज्ञात कीजिए।}$$

5

6. Attempt any five parts of the following :

a) Show that the determinant

$$\begin{vmatrix} (y+z)^2 & xy & zx \\ xy & (x+z)^2 & yz \\ xz & yz & (x+y)^2 \end{vmatrix} = 2xyz(x+y+z)^3.$$

b) Find the equation of a plane passing through the point $-2\hat{i}+6\hat{j}-6\hat{k}$, $-3\hat{i}+10\hat{j}-9\hat{k}$ and $-5\hat{i}-6\hat{j}-6\hat{k}$.

c) A die is thrown six times. If is a success of "getting even number on the die", the find the probability of getting (i) at least 5 successes, (ii) at most 5 successes.

d) Find the value of

$$\int \frac{\sec^2 2x}{(\cot x - \tan x)^2} dx. \quad 5$$

e) If $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$, then prove

$$\text{that } A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix},$$

where $n \in \mathbb{N}$. 5

f) Find the solution of the differential equation

$$(\tan^{-1} y - x) dy = (1 + y^2) dx. \quad 5$$

निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

क) निम्नलिखित समीकरण निकाय

$$3x - 2y + 2z = 8, \quad 2x + y - z = 1 \text{ तथा} \\ 4x - 3y + 2z = 4 \text{ को आव्यूह विधि से हल} \\ \text{कीजिए।} \quad 8$$

ख) i) $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 12$

द्वारा प्रदत्त फलन के उच्चतम तथा निम्नतम मान ज्ञात कीजिए। 5

ii) यदि $x^y = e^{x-y}$, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{(1 + \log x)^2}. \quad 3$$

7. Attempt any one part of the following :

a) Solve the following system of equations $3x - 2y + 2z = 8$, $2x + y - z = 1$ and $4x - 3y + 2z = 4$ by matrix method. 8

b) i) Find maximum and minimum values of the function $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 12$. 5

ii) If $x^y = e^{x-y}$, then prove that

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{(1 + \log x)^2}. \quad 3$$

8. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

क) सिद्ध कीजिए $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sqrt{\tan x}} = \frac{\pi}{4}$. 8

ख) सिद्ध कीजिए

$$\int_0^{\pi} \frac{x dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{\pi^2}{2ab}.$$

8. Attempt any one part of the following :

a) Prove that $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sqrt{\tan x}} = \frac{\pi}{4}$.

b) Prove that

$$\int_0^{\pi} \frac{x dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{\pi^2}{2ab}.$$

लिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

5) रेखाओं

$$\vec{r} = (3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}) + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$$

और

$$\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}) + \lambda(2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k})$$

बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। 8

6) i) हल कीजिए

$$\frac{dy}{dx} + y \tan x = y^2 \sec x. \quad 4$$

ii) दिखाइए कि दो सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के

$$\text{लिए सदैव } |\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

होते हैं। 4

Attempt any one part of the following :

a) Find the shortest distance between the lines

$$\vec{r} = (3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}) + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$$

and

$$\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}) + \lambda(2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}).$$

b) i) Solve : $\frac{dy}{dx} + y \tan x = y^2 \sec x.$ 4

ii) Show that for any two vectors

$\vec{a}$ and $\vec{b}$ it is always true

that $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|.$ 4

324(XB)-1,25,000