अनुक्रमांक .... मुद्रित पृष्ठों की संख्या : 15

नाम ....

131

324 (YY)

2020

गणित

समय : तीन घण्टे 15 मिनट] *[पूर्णांक : 100*

निर्देश :

(i) *प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्न-पत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं ।*

(ii) *इस प्रश्न-पत्र में कुल नौ प्रश्न हैं ।*

(iii) *सभी प्रश्न अनिवार्य हैं ।*

(iv) *प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं ।*

(v) *प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं ।*

(vi) *प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अंत तक करते जाइए ।*

(vii) *जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए ।*

1. निम्नलिखित के ***सभी*** खण्ड हल कीजिए :

(क) समुच्चय $A = \{a, b\}$ में द्विआधारी संक्रियाओं की संख्या है *1*

(i) 10 (ii) 16

(iii) 20 (iv) 8

(ख) निम्नलिखित में से कौन-सा कथन सही है ? *1*

(i) सारणिक एक वर्ग आव्यूह है ।

(ii) सारणिक एक आव्यूह से संबद्ध एक संख्या है ।

(iii) सारणिक एक वर्ग आव्यूह से संबद्ध एक संख्या है ।

(iv) इनमें से कोई नहीं

(ग) निम्नलिखित में से समाकल $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$ का मान ज्ञात कीजिए : *1*

(i) $x^2 + 2x + \frac{1}{x} + c$

(ii) $\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{x^2} + c$

(iii) $\frac{x^2}{2} - 2x + \log x + c$

(iv) $\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \log x + c$

(घ) अवकल समीकरण $2x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + y = 1$ की कोटि क्या है ? 1

(i) 2 (ii) 1

(iii) 0 (iv) परिभाषित नहीं है

(ङ) यदि $\bar{a}$ एक मात्रक सदिश है तथा $(\bar{x} - \bar{a}) \cdot (\bar{x} + \bar{a}) = 8$ है, तो $|\bar{x}|$ का मान ज्ञात कीजिए । 1

(i) 1 (ii) 2

(iii) 3 (iv) $\frac{1}{2}$

2. निम्नलिखित के *सभी* खण्ड हल कीजिए :

(क) सिद्ध कीजिए कि $f(x) = 2x$ द्वारा परिभाषित फलन $f : R \to R$ एकैकी तथा आच्छादक है । 1

(ख) सिद्ध कीजिए कि : 1

$$\cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \sec^{-1}(x),\ x \geq 1 \text{ या } x \leq -1$$

(ग) दर्शाइए कि फलन $f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{यदि } x \neq 0 \\ 1, & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$

$x = 0$ पर संतत नहीं है । 1

P.T.O.

(घ) सदिशों $\bar{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}$ और $\bar{b} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ के योगफल के अनुदिश मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए । 1

(ङ) मान लीजिए कि A और B स्वतंत्र घटनाएँ हैं तथा $P(A) = 0{\cdot}3$ तथा $P(B) = 0{\cdot}4$, तब $P(A \mid B)$ ज्ञात कीजिए । 1

निम्नलिखित के *सभी* खण्ड हल कीजिए :

(क) यदि $R = \{(4, 5), (1, 4), (4, 6), (7, 6), (3, 7)\}$ है, तो $R^{-1}OR^{-1}$ का मान ज्ञात कीजिए । 2

(ख) सिद्ध कीजिए कि : 2

$$2\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{31}{17}\right)$$

(ग) यदि A तथा B दो n क्रम के वर्ग आव्यूह हैं, जो व्युत्क्रमणीय आव्यूह हैं, तो दर्शाइए कि $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. 2

(घ) किसी दौड़ में A के जीतने की प्रायिकता $\frac{1}{3}$ है तथा B के जीतने की प्रायिकता $\frac{1}{4}$ है । इस दौड़ को A और B में से कोई न जीत पाए, इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए । 2

https://www.evidyarthi.in/

4. निम्नलिखित के ***सभी*** खण्ड हल कीजिए :

(क) यदि फलन $f : Q \to Q$, $f(x) = 3x - 4$, $\forall\, x \in Q$ से परिभाषित है, तो सिद्ध कीजिए कि f एकैकी तथा आच्छादक फलन है, जहाँ Q परिमेय संख्याओं का समुच्चय है । 2

(ख) सदिश $\bar{a} = \hat{i} - 2\hat{j}$ के अनुदिश एक ऐसा सदिश ज्ञात कीजिए जिसका परिमाण 7 इकाई हो । 2

(ग) सदिश $\bar{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ का, सदिश $\bar{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ पर प्रक्षेप ज्ञात कीजिए । 2

(घ) एक कमरे में तीन बल्ब होल्डर हैं । 10 बल्बों में से 6 बल्ब खराब हैं । एक व्यक्ति यादृच्छया 3 बल्ब चुनता है और बल्ब होल्डरों में लगा देता है । उसे प्रकाश मिल जाए, इसकी प्रायिकता क्या है ? 2

5. निम्नलिखित में से किन्हीं ***पाँच*** खण्डों को हल कीजिए :

(क) दर्शाइए कि : 5

$$\sin^{-1}\left(\frac{12}{13}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{63}{16}\right) = \pi$$

(ख) सिद्ध कीजिए कि : 5

$$\begin{vmatrix} 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \\ 15 & 18 & 21 \end{vmatrix} = 0$$

(ग) ऐसी दो धन संख्याओं को ज्ञात कीजिए जिनका योगफल 15 है और जिनके वर्गों का योगफल न्यूनतम है । 5

(घ) अवकल समीकरण

$$(x\,dy - y\,dx)\, y \sin\left(\frac{y}{x}\right) = (y\,dx + x\,dy)\, x \cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

को हल कीजिए । 5

(ङ) तीन सदिश $\bar{a}$, $\bar{b}$ और $\bar{c}$ प्रतिबंध $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = 0$ को संतुष्ट करते हैं । यदि $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 4$ और $|\bar{c}| = 2$ है, तो राशि $\mu = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{b} \cdot \bar{c} + \bar{c} \cdot \bar{a}$ का मान ज्ञात कीजिए । 5

(च) x के सापेक्ष $y = x^x + (\cos x)^{\tan x}$ का अवकलन कीजिए । 5

6. निम्नलिखित में से किन्हीं ***पाँच*** खण्डों को हल कीजिए :

(क) क्या $f(x) = x^2$, $\forall\, x \in R$, से परिभाषित फलन $f : R \to R$, जहाँ R वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है, एकैकी आच्छादक है ? 5

(ख) परवलय $x^2 = 4y$ और वृत्त $4x^2 + 4y^2 = 9$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए । 5

(ग) निम्न व्यवरोधों के अन्तर्गत $z = 4x + y$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए :

$$x + y \le 50,\ 3x + y \le 90,\ x \ge 0,\ y \ge 0$$ 5

(घ) बिन्दु $(2, 5, -3)$ की समतल

$\vec{r} \cdot (6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}) = 4$ से दूरी ज्ञात कीजिए । 5

(ङ) बिन्दु $(-2, 3)$ से गुज़रने वाले ऐसे वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके किसी बिन्दु (x, y) पर स्पर्श-रेखा की प्रवणता $\frac{2x}{y^2}$ है । 5

(च) एक विद्यालय में शिक्षक के दो स्थान रिक्त हैं । साक्षात्कार हेतु एक पुरुष तथा एक स्त्री आते हैं । पुरुष शिक्षक के चयन की प्रायिकता $\frac{1}{10}$ है तथा स्त्री शिक्षक की $\frac{1}{8}$ है, तो ज्ञात कीजिए कि

(i) दोनों चुन लिए जाएँ, तथा

(ii) दोनों ही न चुने जाएँ,

की प्रायिकता क्या है । 5

7. निम्नलिखित में से किसी ***एक*** खण्ड को हल कीजिए :

(क) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ है, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए । 8

(ख) निम्नलिखित समीकरणों को आव्यूह विधि से हल कीजिए : 8

$$2x + 3y + 10z = 4$$
$$4x - 6y + 5z = 1$$
$$6x + 9y - 20z = 2$$

8. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

(क) ऐसे परवलयों के कुल को निरूपित करने वाला अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष मूल-बिन्दु पर है तथा जिसका अक्ष धनात्मक x-अक्ष की दिशा में है ।

(ख) रेखाओं $\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ और $\vec{r} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} + \mu(3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k})$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए ।

9. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

(क) (i) मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\, dx$$

(ii) मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{a} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{a - x}}\, dx$$

(ख) मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{\pi} \frac{x\, dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$$

https://www.evidyarthi.in/

(English Version)

Instructions :

(i) *First 15 minutes time has been allotted for the candidates to read the question paper.*

(ii) *There are in all **nine** questions in this question paper.*

(iii) *All questions are compulsory.*

(iv) *In the beginning of each question, the number of parts to be attempted has been clearly mentioned.*

(v) *Marks allotted to the questions are indicated against them.*

(vi) *Start from the first question and proceed to the last.*

(vii) *Do not waste your time over a question you cannot solve.*

http://www.upboardonline.com

1. Attempt ***all*** the parts of the following :

(a) The number of binary operations on the set $A = \{a, b\}$ is *1*

(i) 10 (ii) 16

(iii) 20 (iv) 8

(b) Which of the following statements is true ? *1*

(i) Determinant is a square matrix.

(ii) Determinant is a number related to a matrix.

(iii) Determinant is a number related to a square matrix.

(iv) None of these

(c) Find the value of integral $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$ from the following : *1*

(i) $x^2 + 2x + \frac{1}{x} + c$

(ii) $\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{x^2} + c$

(iii) $\frac{x^2}{2} - 2x + \log x + c$

(iv) $\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \log x + c$

(d) What is the order of differential equation $2x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + y = 0$? *1*

(i) 2 (ii) 1

(iii) 0 (iv) Not defined

(e) If $\bar{a}$ is a unit vector and $(\bar{x} - \bar{a}) \cdot (\bar{x} + \bar{a}) = 8$, then find the value of $|x|$.

(i) 1 (ii) 2

(iii) 3 (iv) $\frac{1}{2}$

2. Attempt ***all*** the parts of the following :

(a) Prove that the function $f : R \to R$ defined by $f(x) = 2x$ is one-one and onto.

(b) Prove that : 1

$$\cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \sec^{-1}(x),\ x \geq 1 \text{ or } x \leq -1$$

(c) Show that the function

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{if } x \neq 0 \\ 1, & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

is not continuous at $x = 0$. 1

(d) Find the unit vector along the sum of vectors $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}$ and $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$. 1

(e) Suppose that A and B are independent events and $P(A) = 0{\cdot}3$ and $P(B) = 0{\cdot}4$, then find $P(A \mid B)$. 1

Attempt *all* the parts of the following :

(a) If $R = \{(4, 3), (1, 4), (4, 6), (7, 6), (3, 7)\}$, then find the value of $R^{-1}OR^{-1}$. 2

(b) Prove that : 2

$$2\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{31}{17}\right)$$

(c) If A and B are square matrices of order n and also non-singular, then show that $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. 2

(d) The probability of A winning the race is $\frac{1}{3}$ and that of B is $\frac{1}{4}$. In this race, find the probability that neither A nor B can win the race. 2

d

4. Attempt *all* the parts of the following :

(a) Prove that the function $f : Q \to Q$ defined by $f(x) = 3x - 4,\ \forall\ x \in Q$ is one-one and onto, where Q is the set of rational numbers. 2

(b) Find a vector along the vector $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j}$ such that its magnitude is 7 units. 2

(c) Find the projection of vector $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ on vector $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$. 2

(d) There are three bulb holders in a room. A person randomly chooses three bulbs from 10 bulbs having 6 fused bulbs and puts them in holders. What is the probability that he gets light ? 2

5. Attempt any *five* parts of the following :

(a) Show that :

$$\sin^{-1}\left(\frac{12}{13}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{63}{16}\right) = \pi$$

(b) Prove that :

$$\begin{vmatrix} 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \\ 15 & 18 & 21 \end{vmatrix} = 0$$

(c) Find two positive numbers whose sum is 15 and the sum of their squares is minimum. 5

(d) Solve the differential equation

$$(x\,dy - y\,dx)\, y \sin\left(\frac{y}{x}\right) = (y\,dx + x\,dy)\, x \cos\left(\frac{y}{x}\right).$$ 5

(e) Three vectors $\vec{a}$, $\vec{b}$ and $\vec{c}$ satisfy the condition $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$. If $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$ and $|\vec{c}| = 2$, then find the value of $\mu = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{a}$. 5

(f) Differentiate $y = x^x + (\cos x)^{\tan x}$ with respect to x. 5

6. Attempt any ***five*** parts of the following :

(a) Is the mapping $f : R \to R$, defined by $f(x) = x^2$, $\forall\, x \in R$, where R is a set of real numbers, one-one onto? 5

(b) Find the area of the region between the parabola $x^2 = 4y$ and the circle $4x^2 + 4y^2 = 9$. 5

(c) Find the maximum value of $z = 4x + y$ subject to the following constraints :

$$x + y \le 50,\; 3x + y \le 90,\; x \ge 0,\; y \ge 0$$ 5

(d) Find the distance between the point (2, 5, [illegible]3) and the plane [illegible] $3\hat{j} + 2\hat{k}) = 4$. 5

(e) Find the equation of a curve passing through the point ([illegible]2, 3), whose tangent line at any point (x, y) has gradient $\frac{2x}{y^2}$. 5

(f) Two posts of teachers are vacant in a school. One man and one woman are called for interview. The probability of selecting the male teacher is $\frac{1}{10}$ and that of selecting the female teacher is $\frac{1}{8}$. Find the probability that

(i) both are selected, and

(ii) both are not selected. 5

7. Attempt any ***one*** part of the following :

(a) If $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, then find A^{-1}. 8

(b) Solve the following equations using the matrix method : 8

$$2x + 3y + 10z = 4$$
$$4x - 6y + 5z = 1$$
$$6x + 9y - 20z = 2$$

8. Attempt any **one** part of the following :

(a) Find the differential equation of a family of parabolas whose vertex is at the origin and its axis is towards the positive x-axis. 8

(b) Find the shortest distance between the lines $\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ and $\vec{r} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} + \mu(3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k})$. 8

9. Attempt any **one** part of the following :

(a) (i) Evaluate : 4

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\, dx$$

(ii) Evaluate : 4

$$\int_0^{a} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{a-x}}\, dx$$

(b) Evaluate : 8

$$\int_0^{\pi} \frac{x\, dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$$

https://www.evidyarthi.in/