

इकाई : 7 ज्यामितीय अवधारणाएँ



- बिन्दु
- संरेख बिन्दु (एक रेखीय बिन्दु)
- एक बिन्दुगामी रेखायें
- तल (समतल) के गुण
- बन्द और खुली आकृतियाँ

7.1 भूमिका

सृष्टि के अखण्ड स्वरूप और उसकी विशेषताओं के विविध आयामों को समझने और अन्य को समझाने में विभिन्न आकृतियों का अप्रतिम योगदान है। ज्यामिति का जन्म और उसका क्रमिक विकास मनुष्य के प्रकृति-प्रेम और उसमें उसके धार्मिक भावनाओं के झुकाव के कारण हुआ। मनुष्य को माँ की गोद से ही अपने प्रिय ज्यामितीय आकृतियों की अनुभूति है। जैन ग्रन्थों ने गणित को 'श्रेष्ठ कमल' कहा है। शब्द ज्यामिति" (Geometry) यूनानी शब्द जिओमीट्रोन (Geometron) से बना है। जियो (Geo)का अर्थ है भूमि और मीट्रोन (metron) का अर्थ है मापना। इतिहासकारों के अनुसार प्राचीन समय में ज्यामितीय अवधारणाएँ कला, वास्तु कला, शिल्प कला (Architecture)और भूमि मापन की आवश्यकताओं के कारण विकसित हुई। यज्ञों के लिए विभिन्न आकार की वेदियों को बनाने, भूमि का आवश्यकतानुसार सीमांकन करने, वद्रभव पूर्ण राज भवनों, मन्दिरों, झीलों, बाँधों और नगरों के निर्माणों, कला और वास्तुकला (या शिल्प) ने इन अवधारणाओं को और उजागर किया। वर्तमान आधुनिक युग में कला, मापन वास्तुकला, इंजीनियरिंग (Engineering), कपडों के डिजाइन इत्यदि के सभी रूपों में ज्यामितीय अवधारणाओं का प्रभाव देखा जा सकता है। आप विभिन्न प्रकार की वस्तुओं जैसे

बाक्स(पेटी), मेज, पुस्तक, अपने स्कूल में लंच ले जाने के लिए डिब्बे, गेंद जिससे आप खेलते हैं, आदि देखते हैं और उनका प्रयोग करते हैं। आप इन सभी वस्तुओं के भिन्न-भिन्न आकार (shape) पाते हैं। चित्र को बनाने में जो रूलर (Ruler) और पेंसिल आप प्रयोग करते हैं वे सीधे (Straight) हैं। एक रुपये का सिक्का, एक सीडी (Compact Disk) वृत्ताकार (Circular) होते हैं।

गणितज्ञों के अभिमत में किसी ज्यामितीय रचना की मूल इकाई या स्रोत आकृति बिन्दु (Point) माना गया है। महान गणितज्ञ यूक्लिड ने सर्वप्रथम अपनी पुस्तक एलिमेंट्स (Elements) में सैद्धान्तिक अवधारणाओं से सम्बन्धित ज्यामितीय आकृतियों को संकल्पित तथा संकलित करने का अभूतपूर्व कार्य किया तथा ज्यामिति विषय की आधारशिला रखी, जो निम्न है :

- एक बिन्दु (Point) वह है जिसका कोई भाग नहीं होता।
- एक रेखा चौड़ाई रहित लम्बाई होती है।
- एक रेखा-खण्ड के सिरे बिन्दु होते हैं।
- एक सीधी रेखा ऐसी रेखा है जो स्वयं बिन्दुओं के साथ सपाट रूप से स्थित होती है।
- एक तल वह है जिसकी केवल लम्बाई और चौड़ाई होती है।
- एक समतल (Plane Surface) ऐसा पृष्ठ होता है जो स्वयं पर सपाट रूप से स्थित होता है।

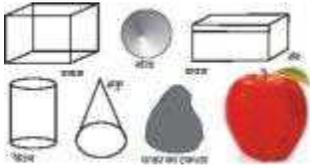
अब यहाँ पर ध्यान देना आवश्यक है कि प्रमुख ज्यामितीय आकृतियाँ यथा बिन्दु, रेखा या तल के ज्यामितीय अंकन और आरेखण में अब तक ज्यामितीय विद्वानों को पर्याप्त 'विषमताओं और विवशताओं का सामना करना पड़ा है। अतएव परिस्थिति जन्य स्थितियों में गणितज्ञों ने इन आकृतियों को निरूपण के स्तर पर अपरिभाषित (Undefined) मान कर ज्यामितीय अध्ययन को आगे बढ़ाने और समृद्ध करने की दृष्टि से बिन्दु को सूक्ष्म से सूक्ष्म बिन्दी (Dot) के रूप में प्रचलित कर स्थापित किया। अब इसी प्रकार रेखा एक पतली से पतली (Very Fine) लम्बाई की आकृति है जबकि, तल अनगिनत रेखाओं के

परस्पर संयोजन का परिणामी है। वास्तव में ज्यामितीय परिभाषानुसार बिन्दु अपने आदर्श रूप में विमामुक्त आकृति है, परन्तु रचना के स्तर पर ऐसा सम्भव नहीं है।

अब यहाँ कुछ ऐसे रोचक तथ्यों के बारे में पढ़ेंगे, जिनसे आपको अपने चारों ओर के परिवेश में उपस्थित विभिन्न आकारों के बारे में अधिक मौलिक व विस्तृत जानकारी मिलेगी।

हम दैनिक जीवन में अपने आस पास अनेक आकार की वस्तुओं को देखते हैं। ये आकार वक्रों या रेखाओं से मिलकर बने होते हैं। आइए हम नीचे दी गई कुछ वस्तुओं की आकृतियों को देखें और सोचें।

- चित्र में घनाभ तथा बाक्स की आकृति को देखने से ज्ञात होता है कि इसमें प्रत्येक के 6 पृष्ठ हैं जिन्हें फलक कहते हैं। प्रत्येक फलक के चार कोने होते हैं जिन्हें शीर्ष कहते हैं।



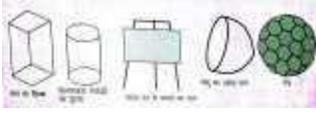
- गोला और सेब की आकृति को देखिए, इसमें कोई स्पष्ट फलक नहीं है। अतः इनके तल वक्र है। इसे वक्रतल या वक्र पृष्ठ कहते हैं।
- बेलन, शंकु में कोई सीधा किनारा नहीं है, बेलन और शंकु का आधार वृत्ताकार है, यह तल सपाट या समतल है। उनके सिरे के तलों को छोड़कर शेष तल वक्र है। पत्थर के टुकड़े का ऊपर वाला तल वक्र है।

प्रयास कीजिए

(a) अपने परिवेश में पाये जाने वाली तीन-तीन वस्तुओं के नाम लिखिए जिनके पृष्ठ

(1) सभी समतल (2) सभी वक्रतल और (3) कुछ समतल और कुछ वक्र तल हों।

(b) निम्नांकित आकृतियों के तलों के नाम और संख्या बताइए।



चर्चा कर निष्कर्ष निकालिए :



प्रत्येक वस्तुओं के पृष्ठ या तल होते हैं। ये तल दो प्रकार के होते हैं :

(1) समतल (2) वक्रतल

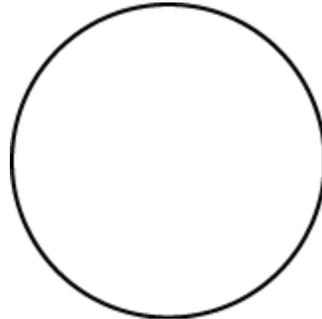
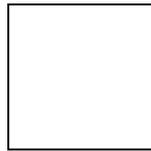
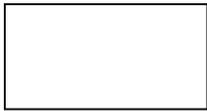
- सपाट पृष्ठ को समतल कहते हैं।
- वक्राकार पृष्ठ को वक्रतल कहते हैं।

क्रिया कलाप:

अपनी उत्तर पुस्तिका पर घनाभ, घन और रुपये का सिक्का रखकर पेंसिल से निशान लगाइए। और इनसे बनने वाली आकृतियों पर विचार कीजिए ?

हम देखते हैं कि क्रमशः आयात, वर्ग एवं वृत्त बनते हैं। ये सभी चित्र कागज के एक तल पर हैं अर्थात् इन आकृतियों के तल कागज के एक बड़े तल पर हैं। कागज के तल को असीमित रूप से सभी दिशाओं में फैला हुआ माना जा सकता है।

अतः समतल असीमित रूप में सभी दिशाओं में फैला होता है।

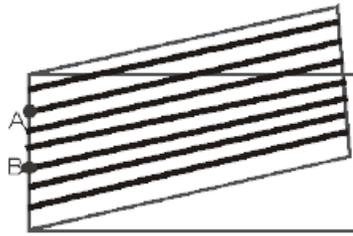
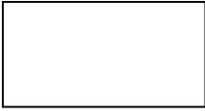


क्रिया कलाप :

एक कागज लेकर उसे बीच से मोड़िए। मोड़ वाले भाग (क्रीज) पर दो बिन्दु A और B लीजिए। मुड़े हुए कागज से कितने तल बन सकते हैं। कागज के क्रीज को स्थिर रखते हुए कागज के दोनों भागों को मोड़ के चारो तरफ घुमाइए। हम देखते हैं कि कागज के तल की भिन्न-भिन्न स्थितियाँ बनती हैं और प्रत्येक स्थिति एक समतल को निरूपित करती है। इस प्रकार जैसे-जैसे कागज को घुमाते जाते हैं वैसे वैसे नये समतल निरूपित होते जाते हैं। फलतः क्रीज के परितः कागज को घुमाकर असंख्य समतल बनाये जा सकते हैं।

निष्कर्ष :

दो बिन्दुओं से होकर असंख्य समतल जाते हैं।

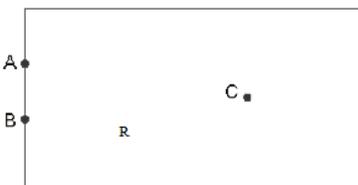


7.2 समतल का निरूपण

एक समतल को व्यक्त करने के लिए कम से कम तीन असंरेख बिन्दुओं की आवश्यकता होती है। उपर्युक्त क्रिया कलाप से हम देखते हैं कि कागज के मोड़ पर लिए गये दो बिन्दु A और B के परितः कागज को घुमाने पर विभिन्न स्थितियों में अलग-अलग समतल बनते हैं। यदि बिन्दु A और B से असंरेख कोई बिन्दु C ले लेते हैं तो कागज की स्थिति स्थिर हो जाती है। इस प्रकार इस स्थिति में कागज एक और केवल एक ही समतल को निरूपित करेगा जैसा कि दिये गये चित्र से स्पष्ट है।

निष्कर्ष :

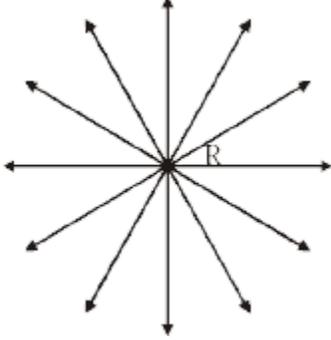
तीन असंरेखीय बिन्दुओं से एक और केवल एक ही समतल खींचा जा सकता है।



समतल के गुण

क्रिया कलाप:

अपनी अभ्यास पुस्तिका के किसी पृष्ठ पर कोई एक बिन्दु R लीजिए। क्या आप बता सकते हैं कि बिन्दु R से कागज के तल पर कितनी रेखाएँ खींची जा सकती हैं। हम देखते हैं कि बिन्दु R से कागज के तल पर असंख्य (अनगिनत) रेखाएँ खींची जा सकती हैं जैसा कि चित्र में देख रहे हैं।



निष्कर्ष:

समतल में स्थित किसी एक बिन्दु से उसी तल पर असंख्य रेखाएं खींची जा सकती हैं।

क्रिया कलाप :

पुनः कागज के तल पर दो बिन्दु P और Q लें पहले हमने देखा कि बिन्दु P से कागज के तल पर असंख्य रेखाएं खींच सकते हैं इसी प्रकार बिन्दु Q से भी स्वतन्त्र रूप से कागज के तल पर असंख्य रेखाएं खींच सकते हैं।

जैसे कि चित्र में देख रहे हैं, बिन्दु P और Q से केवल एक ही रेखा खींच सकते हैं।



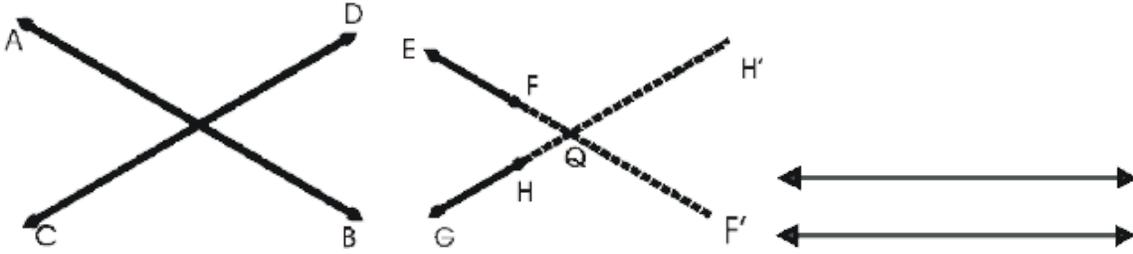
सोचें और निष्कर्ष निकालें

समतल में स्थित दो बिन्दुओं से एक और केवल एक रेखा खींची जा सकती है और यह रेखा दो बिन्दुओं के तल में होती है। समतल में दो बिन्दुओं से जाने वाली रेखा का प्रत्येक बिन्दु तल पर ही स्थित होता है। रेखा का कोई बिन्दु तल से बाहर नहीं होता है।

एक समतल में दो रेखाओं (रेखा युग्म) के गुण

क्रिया कलाप:

कक्षा के शिक्षार्थियों से अपनी-अपनी उत्तर पुस्तिका के किसी पृष्ठ पर रेखाओं के जोड़े खींचने को कहें। उनके द्वारा खींची गयीं रेखाओं की स्थितियाँ निम्नवत् होगी।



देखते हैं :

- (i) रेखा युग्म एक दूसरे को किसी बिन्दु पर प्रतिच्छेदित करते है।
- (ii) रेखा युग्म को ब ढाने पर एक दूसरे को प्रतिच्छेदित करते है।
- (iii) यदि रेखा युग्म किसी दशा में प्रतिच्छेदित नहीं करते हैं तो रेखाओं को समांतर रेखाएं कहते हैं।

निष्कर्ष :

एक ही तल में स्थित रेखाएं परस्पर प्रतिच्छेदित करती हैं अथवा समांतर होती है।

अभ्यास 7(a)

1. निम्नलिखित शब्दों में से उपयुक्त शब्द चुनकर रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए:

(असंख्य, एक, वक्र)

- (a) समतल में स्थित दो बिन्दुओं से होकररेखा खींची जा सकती है।
- (b) समतल में स्थित किसी रेखा में.....बिन्दु होते हैं।
- (c) गोले का तल.....होता है।
- (d) समतल में स्थित एक बिन्दु से होकर.....रेखाएँ खींची जा सकती हैं।

2. निम्नलिखित कथनों में सही कथन के सामने कोष्ठक में सही चिह्न (✓) तथा गलत कथन के सामने क्रॉस का चिह्न (x) लगाइए :

- (a) कागज का तल समतल है। ()
- (b) तीन असंख्य बिन्दुओं से असंख्य समतल खींचे जा सकते है। ()
- (c) समतल में स्थित दो रेखाएँ सदैव समान्तर होती है। ()
- (d) कमरे की दीवार का तल समतल है। ()

3. स्तम्भ A एवं B में सही जोड़े का मिलान कीजिए:

स्तम्भ A

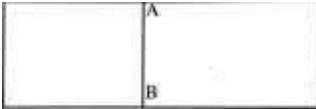
स्तम्भ B

1. लोब
 2. स्टील आलमारी
 3. खीरा
 4. लोहे का पाइप
 5. शंकु
 6. श्यामपट का तल
 7. ठोस बेलन
 8. काँच की गोली
4. ठोस बेलन में कितने समतल एवं वक्रतल होते हैं?
5. समतल के तीन गुण बताइए।
6. समतल वाली वस्तुओं एवं वक्रतल वाली वस्तुओं के चार उदाहरण दीजिए।

7.3 रेखाखंड

एक कागज का पन्ना लें, मोड़ें और भली प्रकार से दबाएँ। क्या आपको कागज पर कोई मोड़ का निशान दिखाई देता है ? जैसा कि चित्र में दिखाया गया है, कागज पर AB ' एक क्रीज (मोड़) दिखाई देता है, जो एक रेखाखंड का

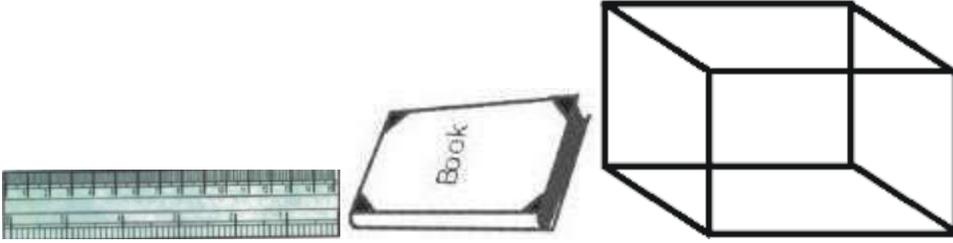
आभास कराता है जिसके A और B दो अंत्य बिन्दु (End Points) हैं। चित्र में रेखाखंड को \overline{AB} या \overline{BA} द्वारा व्यक्त करते हैं।



एक धागा लीजिए और समतल पर अपने दोनों हाथों से उसके दोनों सिरों को पकड़ कर खींचे तकि वह पूर्ण रूप से सीधा हो जाय, धागे की यह स्थिति एक रेखाखंड को निरूपित करती है, तथा हाथों से पकड़े हुए सिरे इस रेखाखंड के अंत्य बिन्दु हैं। रेखाखंड AB को \overline{AB} या \overline{BA} द्वारा व्यक्त करते हैं।

प्रयास कीजिए

उपर्युक्त आकृतियों में रेखाखंड का आभास कराने वाले भागों के नाम बताइए -



रेखा:

कल्पना कीजिए कि निम्नांकित चित्रानुसार रेखाखंड \overline{AB} को A से एक दिशा में और B से आगे दूसरी दिशा में बिना किसी अंत के विस्तृत किया गया है।



ध्यान दें

रेखा \overleftrightarrow{AB} के दोनों सिरों पर तीर की नोक के चिह्न बने हैं जो यह प्रदर्शित करते हैं : कि रेखा का कोई आन्तिम बिन्दु नहीं होता है। यह दोनों दिशाओं में अनन्त तक पैँली हुई है। रेखा को दो विधियों द्वारा प्रदर्शित करते हैं : यदि रेखा पर दो बिन्दु P और Q दिये गये हैं तो रेखा को \overleftrightarrow{PQ} द्वारा और बिन्दु न दिये जाने पर अंग्रेजी वर्णमाला के छोटे अक्षर से निरूपित करते हैं। जैसे- रेखा l, रेखा m, रेखा n----- आदि।



रेखा PQ



रेखा l

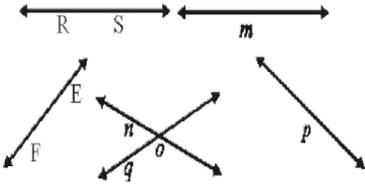
निष्कर्ष :

1. रेखा सीधी होती है जिसका दोनों दिशाओं में विस्तार अपरिमित होता है।
2. रेखा में अन्त्य बिन्दु नहीं होता है।

3. रेखा के किसी एक भाग को रेखाखण्ड कहते हैं, जिसमें दोनों ओर अन्त्य बिन्दु होते हैं।
4. ज्यामिति में रेखा से हमारा आभिप्राय सम्पूर्ण रेखा से होता है न कि उसके एक भाग से।

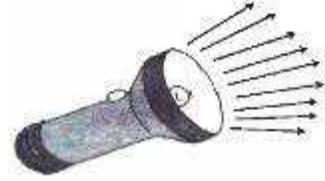
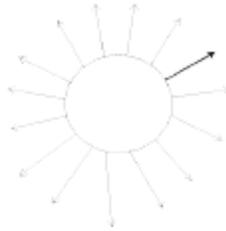
प्रयास कीजिए

नीचे कुछ रेखाएँ खींची गई हैं, उनके नाम लिखिए -



किरण (Ray):

निम्नांकित चित्रों को देखिये और सोचिए।

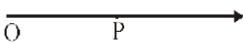


दीपक से निकली प्रकाश की किरणें
प्रकाश की किरणें

सूर्य की किरणें

टार्च से निकली

चित्र से स्पष्ट है कि किरण रेखा का एक भाग है। यह एक बिन्दु से प्रारम्भ होती है (जिसे प्रारंभिक बिन्दु (Initial point) कहते हैं) और एक दिशा में अन्त्यहीन होती है, जैसा कि चित्र में दर्शाया गया है। O प्रारम्भिक या निगमन बिन्दु है और P किरण पर कोई अन्य बिन्दु है। किरण को \overrightarrow{OP} से व्यक्त करते हैं।



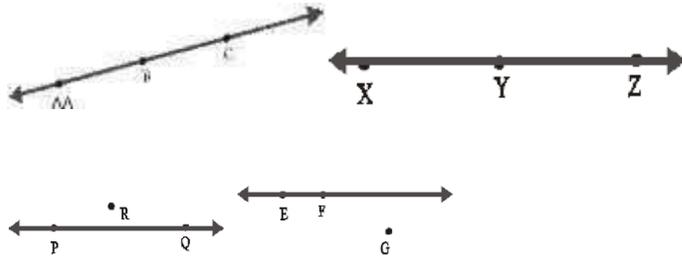
प्रयास कीजिए

तीन किरणें खींचिए जिनका निगमन बिन्दु O हो।

7.4 संरेख बिन्दु (एक रेखीय बिन्दु)

इनपर चर्चा कीजिए और निष्कर्ष निकलिए :

1. कागज के तल पर तीन बिन्दुओं को अलग-अलग समूह, (i) A, B और C (ii) X, Y और Z (iii) P, Q और R तथा (iv) E, F और G निम्नवत् अंकित कीजिए। प्रत्येक समूह के किन्हीं दो बिन्दुओं, जैसे (i) A और B (ii) X तथा Y (iii) P और Q तथा (iv) E और F से जाने वाली रेखाएं खींचिए।



ध्यान दें

1. उक्त रेखाओं को देखने पर दो तरह की स्थितियाँ स्पष्ट होती हैं जिसमें हमें निम्नलिखित निष्कर्ष प्राप्त होते हैं:

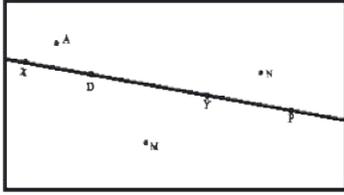
- समूह के तीनों बिन्दु एक ही रेखा पर हैं अर्थात् समूह के तीनों बिन्दुओं से होकर रेखा जाती है। जैसे समूह A, B, C से एक और समूह X, Y, Z से दूसरी दूरी रेखा जाती है।
- समूह के तीनों बिन्दु एक ही रेखा पर नहीं हैं। जैसे- समूह P, Q, R में बिन्दु R रेखा PQ के बाहर है तथा समूह E, F, G में बिन्दु G रेखा EF के बाहर है।

एक तल में स्थित तीन या तीन से अधिक बिन्दु संरेख (एक रेखीय बिन्दु) कहलाते हैं, यदि वे सभी एक ही रेखा पर स्थित हों।

क्रिया कलाप :

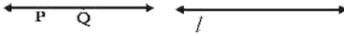
कागज के तल पर कई बिन्दु A, D, M, N, P, X तथा Y चित्रवत् अंकित कीजिए। उसे मोड़कर इस तरह दबायें कि मोड़ पर दो बिन्दु X तथा D अवश्य पड़ें। कागज को खोलकर देखने से अन्य बिन्दुओं की स्थिति स्पष्ट हो जाती है कि ये इस रेखा पर स्थित हैं या नहीं। हम पाते हैं कि बिन्दु X, D, Y तथा P रेखा पर स्थित हैं। अतः हे संरेख

बिन्दु जबकि बिन्दु A, N, तथा M इस रेखा से बाहर हैं। स्पष्टतः A, D, M, N, P, X तथा Y असंरेख बिन्दु हैं।



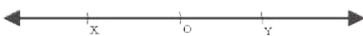
ध्यान दें

दोनों सिरों पर तीर की नोक के चिह्न बने हैं जो यह प्रदर्शित करते हैं कि रेखा का कोई अन्तिम बिन्दु नहीं होता है। यह दोनों दिशाओं में अनन्त तक पैँली हुई है। इस रेखा को PQ अथवा अंरेजी के छोटे अक्षर l से प्रदर्शित कर सकते हैं।



हमने क्या चर्चा की

1. रेखा सीधी होती है जिसका दोनों दिशाओं में विस्तार अपरिमित होता है।
2. रेखा में अन्त्य बिन्दु नहीं होता है। यदि रेखा पर दो बिन्दु A और B लिए जायँ तो रेखा AB को 1782.png से प्रदर्शित करते हैं।
3. रेखा को अंरेजी वर्णमाला के किसी छोटे अक्षर जैसे l, m, n आदि को लिखकर भी प्रदर्शित किया जा सकता है।
4. रेखा के किसी एक भाग को रेखाखंड कहते हैं जिसमें दोनों ओर अन्त्य बिन्दु होता है। यदि रेखाखंड के दोनों अन्त्य बिन्दु A और B हैं तो इसे \overline{AB} से निरूपित करते हैं।
5. ज्यामिति में रेखा से हमारा आभिप्राय सम्पूर्ण रेखा से होता है न कि उसके एक भाग से।



इन्हें कीजिए, चर्चा कीजिये और निष्कर्ष निकलिए :

कागज पर एक रेखा XY खींचकर उसपर एक बिन्दु O अंकित कीजिए।

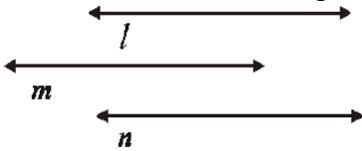
हम देखते हैं कि रेखा के दो भाग हो गये । रेखा का एक भाग जिस पर बिन्दु O तथा रेखा के वे सभी बिन्दु सम्मिलित हैं जो बिन्दु O के बायीं ओर है तथा रेखा का दूसरा भाग जिस पर बिन्दु O तथा रेखा के वे सभी बिन्दु सम्मिलित हैं जो बिन्दु O के दायाँ ओर हैं। ये दोनों भाग अगल-अलग दो किरणों, किरण OX तथा किरण OY प्रदर्शित करते हैं। बिन्दु O को इन किरणों का निगमन बिन्दु कहते हैं। इनकी आकृतियाँ ऊपर दर्शित हैं। न्हे हम क्रमशः

\overrightarrow{OX} और \overrightarrow{OY} से निरूपित करते है।

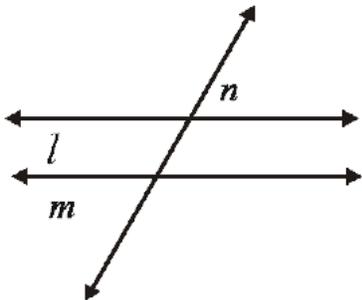
7.5 एक बिन्दुगामी रेखाएँ

समतल पर कोई तीन रेखाएँ लेने पर निम्नांकित चार स्थितियों में से कोई एक ही स्थिति बनेगी।

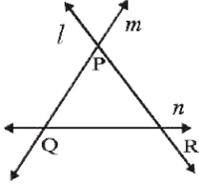
1. तीनों रेखाएँ एक दूसरे के समान्तर हो सकती है।



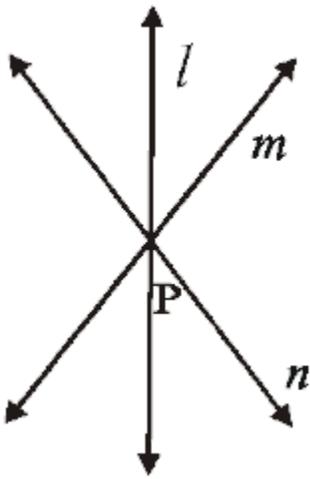
2. तीनों रेखाओं में कोई दो आपस में समान्तर हों तथा तीसरी रेखा उन्हें प्रतिच्छेदित करती हो।



3. तीनों रेखाओं में कोई भी रेखा आपस में समान्तर न हों तथा उनमें से प्रत्येक दो रेखाएँ एक दूसरे को प्रच्छेदित करती हों।

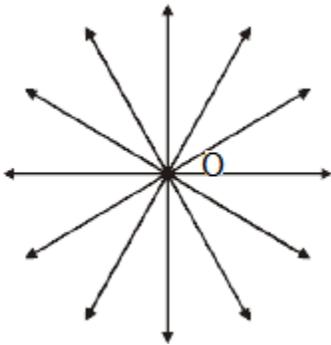


4. तीनों रेखाओं में कोई दो रेखा आपस में समान्तर न हों तथा तीनों रेखाएँ एक दूसरे को एक सर्वनिष्ठ P बिन्दु पर प्रतिच्छेदित करें। इस स्थिति में तीनों रेखाएँ एक बिन्दु P से होकर जाती है। ऐसी रेखाओं को एक बिन्दुगामी रेखाएँ कहते हैं तथा बिन्दु P को उनका संगमन बिन्दु कहते हैं।



(एक बिन्दुगामी रेखाएँ तथा संगमन बिन्दु P)

इस प्रकार एक ही बिन्दु O से जाने वाली अनंत रेखाएँ खींची जा सकती हैं।



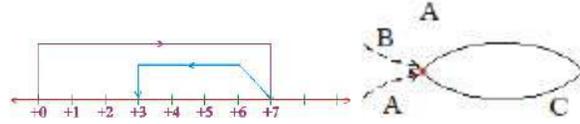
(एक बिन्दुगामी रेखाएँ तथा संगमन बिन्दु O)

एक ही तल में यदि तीन या अधिक रेखाएँ एक ही बिन्दु से होकर जाएँ तो वे एक बिन्दुगामी रेखाएँ कहलाती हैं और यह बिन्दु उनका संगमन बिन्दु कहलाता है।

निम्नांकित कथन सत्य है या असत्य, इस पर समूह में चर्चा कीजिए?

- रेखा सीमित लम्बाई की होती हैं।
- एक तल में दो रेखाएँ सदैव एक दूसरे का प्रतिच्छेदन करती हैं।
- एक बिन्दु से एक ही रेखा खींची जा सकती है।
- दो बिन्दुओं से होकर केवल एक रेखा खींची जा सकती है।
- एक ही किरण में दो दिशाएँ होती हैं।
- दो रेखाएँ एक दूसरे से कभी नहीं मिलती हैं।
- किसी तल में स्थित तीन या तीन से अधिक रेखाएँ एक बिन्दुगामी होंगी यदि वे सभी रेखाएँ उस तल में स्थित एक ही बिन्दु से होकर जाएँ।

7.6 बन्द और खुली आकृतियों का बोध

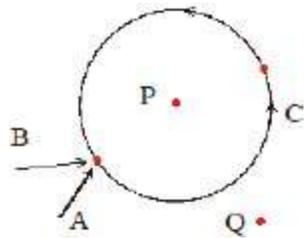


चित्र - (i)

चित्र - (ii)

यहाँ पर चित्र (i) में ACB कोई वक्र है जिसमें प्रारम्भिक बिन्दु A तथा B उसका अन्त्य बिन्दु है। यदि बिन्दु A और B परस्पर संपाती हो जाय (चित्र ii) तो ACB एक बन्द आकृति होगी। इसके विपरीत यदि बिन्दु A और B संपाती न हो तो आकृति ACB एक खुली आकृति है।

बन्द आकृतियों का अभ्यंतर और उसका बाह्य क्षेत्र



चित्र (iii) में ACB एक बन्द आकृति है जिसमें बिन्दु A और B संपाती है। बिन्दु A से C की ओर वक्र के अनुगत बामावर्त (anti clockwise) गति करने पर हमारे बायें हाथ की ओर का क्षेत्र अभ्यंतर अथवा अन्तः (interior) क्षेत्र तथा दायें हाथ की ओर का क्षेत्र बाह्य क्षेत्र (exterior) कहलाता है। चित्र (iii) में बिन्दु P अभ्यंतर में तथा बिन्दु Q बाह्य क्षेत्र में स्थित हैं। बिन्दु A, C और B वक्र पर स्थित है। इसी प्रकार

- (1) चित्र (iv) में छायांकित भाग एक बन्द क्षेत्र है तथा वक्र एवं बंद क्षेत्र को छोड़कर क्षेत्र बाह्य क्षेत्र है।



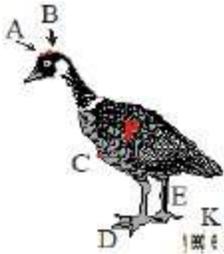
अभ्यंतर

बाह्य क्षेत्र

- (2) चित्र (v) में प्रारम्भिक बिन्दु A है जो अपने अन्त्य बिन्दु B से संपाती नहीं है। अतएव किरण AB एक खुली आकृति का निर्माण करती है।



- (3) चित्र (vi) किसी पक्षी के छाया चित्र को प्रदर्शित करता है। अन्त्य बिन्दु A और E संपाती (एक ही) होने के कारण ACDEB एक बन्द क्षेत्र है। चित्र (vi) में P आन्तरिक तथा K कोई बाह्य बिन्दु है।



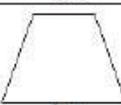
बाह्य क्षेत्र

बाह्य क्षेत्र

- (4) कुछ खुली और बन्द आकृतियाँ चार्ट के माध्यम से पार्श्व तालिका में दिखाई गयी हैं।

खुली आकृति : रेखा, कोण, खुली रस्सी

बंद आकृति: त्रिभुज, चतुर्भुज , गाँठ लगी रस्सी

निम्न बिन्दु	उच्च बिन्दु
	
	
	

अभ्यास 7(b)

1. अपनी अभ्यास पुस्तिका में एक रेखा खींचिए और अंग्रेजी वर्णमाला के एक छोटे अक्षर का प्रयोग करके उसका नाम लिखिए।
2. पर्यावरण में उपलब्ध वस्तुओं की सहायता से कोई तीन ऐसे उदाहरण दीजिए जिनसे रेखाओं (या उनके भाग) का बोध होता हो।
3. रेखा और किरण में अन्तर चित्र खींचकर स्पष्ट करें।
4. दिए गये प्रारम्भिक बिन्दु (निगमन बिन्दु) A और एक अन्य बिन्दु B से होकर जाती हुई एक किरण खींचिए।

दक्षता अभ्यास 7

1. तीन संरेख बिन्दुओं से होकर जाती हुई कितनी रेखाएँ खींची जा सकती हैं ?
2. कागज के तल पर निम्नांकित बिन्दुओं को अंकित कर स्पष्ट कीजिए:
 - (a) एक बिन्दु से कितनी रेखाएँ खींची जा सकती हैं।
 - (b) दो बिन्दुओं से कितनी रेखाएँ खींची जा सकती हैं।
 - (c) तीन बिन्दु, जो संरेख नहीं हैं, में से दो-दो बिन्दुओं से कितनी रेखाएँ खींची जा सकती हैं।
 - (d) चार बिन्दु, जिनमें कोई तीन संरेख नहीं हैं, में से दो-दो बिन्दुओं से कितनी रेखाएँ खींची जा सकती हैं।

(e) पाँच बिन्दु, जिनमें कोई तीन संरेख नहीं हैं, में से दो-दो बिन्दुओं से कितनी रेखाएँ खींची जा सकती हैं।

3. स्तम्भ A एवं B में सही जोड़े का मिलान कीजिए।

स्तम्भ A स्तम्भ B

(a) किरण \overrightarrow{AB}

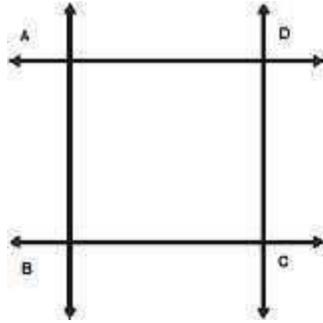
(b) रेखा \overline{AB}

(c) रेखाखंड \overline{AB}

(d) बंद आकृति ABA

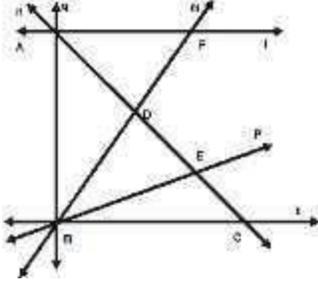
4. किसी तल पर स्थित एक रेखा में कितने बिन्दु हो सकते हैं ?

5.



- (i) दी गई आकृति में रेखाओं के नाम लिखिए।
- (ii) आकृति की उन रेखाओं के नाम लिखिए जो बिन्दु A से होकर जाती है।
- (iii) आकृति में बन्द आकृति का नाम लिखिए
- (iv) आकृति KADJ कैसी आकृति है, खुली या बन्द
- (v) आकृति KAL खुली आकृति है या बन्द

6. निम्नांकित आकृति में एक बिन्दुगामी रेखाएँ और उनके संगमन बिन्दु लिखिए।



- (i) पाश्र्व आकृति में एक बिन्दुगामी रेखायें और उनके संगमन बिन्दु लिखिए
- (ii) पाश्र्व चित्र में AFB में खुली आकृति है या बंद?
- (iii) पाश्र्व चित्र में FDD'P कैसा क्षेत्र है और यह खुली आकृति है या बन्द ?

प्रोजेक्ट (Project): तीन असंरेखीय बिन्दुओं से होकर जाने वाला एक और केवल एक ही तल होता है। इसका प्रयोग दैनिक जीवन में कहाँ-कहाँ है ? अपने पर्यावरण एवं विद्यालय की वस्तुओं, उपकरणों को देखकर बताइए।

इस इकाई में हमने सीखा

1. सभी ठोसों में सतह होती है। सतह को तल कहते हैं।
2. परिवेश में उपलब्ध सभी वस्तुओं में तल होता है।
3. तल दो प्रकार के होते हैं-
 - (i) सपाट (Flat) (ii) वक्र (Curve)
4. समतल सभी दिशाओं में असीमित रूप से फैला होता है।
5. दो बिन्दुओं से होकर अनंत समतल जाते हैं।
6. तीन असंरेखीय बिन्दुओं से एक और केवल एक ही समतल खींचा जा सकता है।
7. समतल में स्थित दो बिन्दुओं से एक और केवल एक ही रेखा खींची जा सकती है। यह रेखा उसी तल में होती है जिसमें दो बिन्दु स्थित होते हैं।
8. समतल में दो बिन्दुओं से जाने वाली रेखा का प्रत्येक बिन्दु तल पर स्थित होता है। रेखा का कोई भी बिन्दु तल के बाहर नहीं होता है।
9. एक ही समतल में स्थित दो रेखाएँ या तो परस्पर प्रतिच्छेदन करती हैं अथवा समान्तर होती हैं।

10. रेखा सीधी होती है जिसका दोनों दिशाओं में विस्तार अपरिमित होता है।
11. रेखा में अन्त्य बिन्दु नहीं होता है। यदि रेखा पर दो बिन्दु A और B लिये जाएं तो रेखा को \overleftrightarrow{AB} से प्रदर्शित करते हैं।
12. रेखा को अंग्रेजी वर्णमाला के किसी छोटे अक्षर जैसे l, m, n आदि को लिख कर भी प्रदर्शित किया जाता है।
13. रेखा के किसी एक भाग को रेखाखण्ड कहते हैं जिसमें दोनों ओर अन्त्य बिन्दु होता है।
14. ज्यामिति में रेखा से हमारा आभिप्राय सम्पूर्ण रेखा से होता है न कि उसके एक भाग से।
15. किरण में केवल एक ही दिशा होती है। इसे तीर (\rightarrow) से निरूपित करते हैं।
16. किरण में केवल एक ही अन्त्य बिन्दु या निगमन बिन्दु होता है।
17. एक तल में स्थित तीन या तीन से अधिक बिन्दु संरेख (एक रेखीय बिन्दु) कहलाते हैं, यदि वे सभी एक ही रेखा पर स्थित हों। यह रेखा संरेखता की रेखा कहलाती है।
18. एवं ही तल में दो रेखाएँ जिस बिन्दु पर प्रतिच्छेदित करती हैं, वह बिन्दु प्रतिच्छेदित बिन्दु कहलाता है।
19. एक ही तल में यदि तीन या अधिक रेखाएँ एक ही बिन्दु से होकर जाएं तो वे एक बिन्दुगामी रेखाएँ कहलाती हैं और यह बिन्दु उनका संगमन बिन्दु कहलाता है।
20. किसी वक्र द्वारा कभी खुली तो कभी बंद आकृति निर्मित की जा सकती है।

उत्तरमाला

अभ्यास 7 (a)

1. (a) एक (b) असंख्य (c) वक्र (d) असंख्य; 2. (a) सही (b) गलत (c) गलत (d) सही 3. 2 और 6 \rightarrow P, 5, 7 \rightarrow Q और 1, 3, 4 और 8 \rightarrow R, 4. 2 समतल और एक वक्र

अभ्यास 7 (b)

3. रेखा \longleftrightarrow , किरण \longrightarrow ; 4. (d) 

दक्षता अभ्यास 7

1. एक; 2. (a) असंख्य (b) एक (c) तीन (d) 6 (e) 10; 3. (a) किरण \overrightarrow{AB} , (b) रेखा \overleftrightarrow{AB} ,
(c) रेखाखण्ड \overline{AB} 4. असंख्य 5. (i) $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$, (ii) $\overline{AD}, \overline{AB}$; 6. संगमन बिन्दु A और
बिन्दुगामी रेखाएँ t, q और संगमन बिन्दु B और बिन्दुगामी रेखाएँ q, m, p और t,