

इकाई : 1 परिमेय संख्याएँ



- परिमेय संख्याओं की अवधारणा
- दो क्रमागत पूर्णाकों के मध्य में परिमेय संख्या
- समतुल्य परिमेय संख्याएँ
- परिमेय संख्याओं का क्रम

1.1 भूमिका

आपने आस-पास की वस्तुओं को गिनने से प्रारम्भ कर संख्याओं को सीखा है। गिनने में प्रयोग की गयी संख्याओं को गणन संख्याएँ या प्राकृतिक संख्याएँ (Natural Numbers) नाम दिया गया। आप जानते हैं कि 1,2,3,4,5, ... प्राकृतिक संख्याएँ है। शून्य की खोज होने पर प्राकृतिक संख्याओं में शून्य को सम्मिलित करने पर हमें पूर्ण संख्याएँ 0,1,2,3,4,5,..... प्राप्त हुई। इसके बाद प्राकृतिक संख्याओं के संगत ऋणात्मक पूर्णाक(--3,-2,-1) को भी पूर्ण संख्याओं में सम्मिलित कर लिया गया और इस प्रकार संख्या पद्धति को पूर्णाकों तक विस्तृत कर लिया गया।

पिछली कक्षाओं से आप भिन्नोसे भी परिचित हैं। आप इन भिन्नोपर योग, घटाना, गुणन और विभाजन का अध्ययन कर चुके हैं। इस इकाई में हम परिमेय संख्याओं की अवधारणा प्राप्त करेंगे।

1.2 परिमेय संख्याओं की आवश्यकता

आप पढ़ चुके हैं कि विपरीत स्थितियों को व्यक्त करने के लिए पूर्णाकों का उपयोग किया जा सकता है। इसी प्रकार कई स्थितियों में भिन्नात्मक संख्याओं को भी प्रयोग में लाया जाता है। विपरीत स्थितियों में भिन्नात्मक संख्याओं के भी ऋणात्मक मान लेने की आवश्यकता होती है।

उदाहरण के लिए -

समुद्र तल से किसी स्थान की ऊचाई 600 मी को हम $\frac{3}{5}$ किमी द्वारा व्यक्त कर सकते हैं।

क्या समुद्र तल से 600 मी की गहराई को $\frac{3}{5}$ किमी गहराई में व्यक्त कर सकते हैं?

समुद्र तल से नीचे $\frac{3}{5}$ किमी को $-\frac{3}{5}$ किमी के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। आप समझ सकते हैं कि $-\frac{3}{5}$ पूर्णांक संख्या नहीं है और यह भिन्न भी नहीं है। अतः ऐसी संख्याओं को सम्मिलित करने के लिए संख्या पद्धति को विस्तारित करने की आवश्यकता हुई, आइए अब हम परिमेय संख्याओं को विस्तार से जाने।

ध्यान दीजिए :

यदि a तथा b दो पूर्णांक हैं और $b \neq 0$, तो पर विचार कीजिए और निम्नांकित सारणी-1 देखिए

$a \div b$	$a \div b = c$	भागफल c पूर्णांक है अथवा नहीं
$-15 \div 5$	-3	पूर्णांक है।
$-12 \div 2$	-6	पूर्णांक है।
$0 \div 5$	0	पूर्णांक है।
$12 \div 5$	$\frac{12}{5}$	पूर्णांक नहीं, बल्कि भिन्न है।
$-12 \div 7$?	न तो पूर्णांक है और न भिन्न है।
$13 \div (-3)$?	न तो पूर्णांक है और न भिन्न है।

उपर्युक्त सारणी से स्पष्ट है कि $\frac{12}{5}$ और $\frac{13}{-3}$ न तो पूर्णांक हैं और न भिन्न हैं। ध्यान दें, भिन्न ऋणत्मक नहीं होती हैं। निम्नांकित सारणी - 2 में उल्लिखित कथन को देखिए और तर्क द्वारा सत्यापित कीजिए।

सारणी - 2

संख्या	पूर्णांक है अथवा नहीं
-3	पूर्णांक है।
+6	पूर्णांक है।
0	पूर्णांक है।
$\frac{12}{5}$	पूर्णांक नहीं, परंतु भिन्न है।
$\frac{11}{5}$	पूर्णांक नहीं, परंतु भिन्न है।
$\frac{7}{3}$	न तो पूर्णांक है, और न भिन्न है।
$-\frac{13}{6}$	न तो पूर्णांक है, और न भिन्न है।

उपर्युक्त सारणी में उल्लिखित गणितीय कथनों को समीकरण के रूप में निम्नांकित ढंग से भी दिखा सकते हैं :

समीकरण	X का पूर्णांक
$4 \times X = -12$	$X = -3$
$(-3) \times X = -18$	$X = +6$
$(-5) \times X = 0$	$X = 0$
$5 \times X = 12$	$X = \frac{12}{5}$
$7 \times X = 11$	$X = \frac{11}{7}$
$(-3) \times X = 1$	$X = -\frac{1}{3}$
$6 \times X = -13$	$X = -\frac{13}{6}$

(i) $4x = -12,$

$x = \frac{-12}{4} = -3$, x एक पूर्णांक है।

(ii) $-3x = -18$

$3x = 18$

$x = \frac{18}{3} = 6$

x का मान 6 है

x पूर्णांक है।

(iii) $-5x = 0$

$x = \frac{0}{-5} = 0$, x पूर्णांक है।

(iv) $5x = 12,$

$x = \frac{12}{5}$

x पूर्णांक नहीं, अपितु भिन्न है।

(v) $7x = 11$

$x = \frac{11}{7}$, x पूर्णांक नहीं, अपितु एक भिन्न है।

(vi) $-3x = 1$

$x = ?$, x न तो पूर्णांक है और न भिन्न है।

(vii) $6x = -13$

$x = ?$, x न तो पूर्णांक है और न भिन्न है।

उपर्युक्त परिस्थितियों में हम देखते हैं कि अनेक प्रश्नों में भागफल पूर्णांक नहीं हैं और भिन्न भी नहीं। इसी आवश्यकता की पूर्ति के लिये संख्या पद्धति का विस्तार हुआ।

प्रयास कीजिए :

$4 \times \square = -16$

$(-3) \times \square = 0$

$$7 \times \square = 21$$

$$6 \times \square = -15$$

$$(-3) \times \square = -24$$

$$5 \times \square = 12$$

$$(-3) \times \square = -1$$

परिमेय संख्याएँ क्या हैं ?

परिमेय (Rational) शब्द की उत्पत्ति अनुपात (Ratio) से हुई है। आप जानते हैं कि अनुपात 3:5 को $\frac{3}{5}$ भी लिखा जा सकता है। यहाँ 3 और 5 प्राकृतिकसंख्याएँ हैं तथा $\frac{3}{5}$ भिन्न है। परन्तु $\frac{-3}{5}$ को -3:5 में व्यक्त नहीं किया जा सकता है।

1. निम्नांकित संख्याओं पर विचार कीजिए।

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \dots$$

$\frac{1}{1}$ के संगत $\frac{-1}{1}, \frac{1}{-1}$ और $\frac{-1}{-1}$ नई संख्याएँ हैं।

$\frac{1}{2}$ के संगत $\frac{-1}{2}, \frac{1}{-2}$ और $\frac{-1}{-2}$ नई संख्याएँ हैं।

$\frac{2}{3}$ के संगत $\frac{-2}{3}, \frac{2}{-3}$ और $\frac{-2}{-3}$ नई संख्याएँ हैं।

इसी प्रकार 0 के संगत $\frac{0}{-1}$ और $\frac{0}{1}$ नई संख्याएँ हैं।

प्रयास कीजिए :

$\frac{3}{4}$ के संगत नई संख्याएँ लिखिए।

$\frac{4}{5}$ और $\frac{5}{7}$ के संगत बनने वाली नई संख्याएँ लिखिए।

इस प्रकार कोई भी दो पूर्णाकों p और q (जहाँ $q \neq 0$) के अनुपात p: q को $\frac{p}{q}$ लिखा जा सकता है। परिमेय संख्याएँ इसी रूप में व्यक्त की जाती हैं।

परिभाषा

एक परिमेय संख्या को एक ऐसी संख्या के रूप में परिभाषित किया जाता है जिसे $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त किया जा सके, जहाँ p और q पूर्णाक हैं तथा $q \neq 0$

इस प्रकार $\frac{-2}{5}$ एक परिमेय संख्या है। यहाँ $p = -2$ और $q = 5$

भिन्न और परिमेय संख्याएँ

विभिन्न भिन्नं यथा $\frac{7}{1}, \frac{4}{9}, \frac{5}{13}, \dots$ लिखिए।

प्रत्येक की $\frac{p}{q}$ से तुलना कीजिये।

$\frac{7}{1}$ में $p = 7$ और $q = 1$,

$\frac{4}{9}$ में $p = 4$ और $q = 9$,

भिन्नोके अन्य उदाहरण लेकर उनके रूप की $\frac{p}{q}$ से तुलना करने पर हम पाते हैं कि प्रत्येक

भिन्न का रूप $\frac{p}{q}$ जैसा है, जहाँ p और q पूर्णांक हैं तथा $q \neq 0$

इससे निष्कर्ष निकलता है कि, सभी भिन्नं परिमेय संख्याएँ हैं।

प्रयास कीजिए

पाँच परिमेय संख्याओं को लिखिए –

1. जिनके अंश ऋणात्मक पूर्णांक तथा हर धनात्मक पूर्णांक हों,
2. अंश धनात्मक और हर ऋणात्मक पूर्णांक हो,
3. अंश और हर दोनों ऋणात्मक पूर्णांक हों।

क्या पूर्णांक भी परिमेय संख्याएँ हैं ?

किसी भी पूर्णांक को एक परिमेय संख्या माना जा सकता है। उदाहरणार्थ पूर्णांक -5 एक

परिमेय संख्या है, क्योंकि इसे हम $\frac{-5}{1}$ के रूप में लिख सकते हैं। पूर्णांक 0 को भी $\frac{0}{3}$ या $\frac{0}{7}$

आदि लिखा जा सकता है

अतः 0 भी परिमेय संख्या है।

0 एक परिमेय संख्या है,

संख्या शून्य न तो धनात्मक परिमेय संख्या है, न ही ऋणात्मक परिमेय संख्या।

परिमेय संख्या $\frac{-3}{7}, \frac{3}{7}, \frac{5}{-11}, \frac{5}{11}, \frac{-2}{-9}$ परध्यान दीजिए। इनमें कौन सी संख्याएँ भिन्न हैं ?

यदि इन परिमेय संख्याओं को $\frac{p}{q}$ से तुलना करते हैं, तो

$\frac{-3}{7}$ में $p = -3$ तथा $q = 7$

$\frac{3}{7}$ में $p = 3$ तथा $q = 7$

$\frac{5}{-11}$ में $p = 5$ तथा $q = -11$

$\frac{5}{11}$ में $p = 5$ तथा $q = 11$

$\frac{-2}{-9}$ में $p = -2$ तथा $q = -9$

परिमेय संख्याओं $\frac{-3}{7}, \frac{5}{-11}, \frac{-2}{-9}$ में p तथा q दोनों धनात्मक पूर्णांक नहीं हैं, अतः ये संख्याएँ भिन्न नहीं हैं, जबकि $\frac{3}{7}$ और $\frac{5}{11}$ में p और q दोनों धनात्मक पूर्णांक हैं, ये भिन्न हैं।

प्रयास कीजिए :

क्या $\frac{-5}{-7}$ एक परिमेय संख्या है ?

क्या -8 एक ऋणात्मक परिमेय संख्या है ?

ध्यान दीजिए :

आपने विभिन्न भिन्न $\frac{7}{1}, \frac{4}{9}, \frac{5}{13}$ के उदाहरण लेकर प्रत्येक के रूप की तुलना $\frac{p}{q}$ से करने पर देखा कि प्रत्येक भिन्न का रूप $\frac{p}{q}$ जैसा है, जहाँ p और q धन पूर्णांक हैं तथा $q \neq 0$

निष्कर्ष :

परिमेय संख्याओं में पूर्णांक और भिन्न सम्मिलित होते हैं।

धनात्मक और ऋणात्मक परिमेय संख्याएँ

परिमेय संख्या $\frac{2}{3}$ के अंश और हर दोनों ही धनात्मक पूर्णांक हैं। ऐसी परिमेय संख्या को धनात्मक परिमेय संख्या कहते हैं। $\frac{3}{7}, \frac{5}{8}, \frac{2}{9}$ आदि धनात्मक परिमेय संख्याएँ हैं।

$\frac{-5}{7}$ का अंश एक ऋणात्मक पूर्णांक है, जबकि इसका हर एक धनात्मक पूर्णांक है। ऐसी संख्या को ऋणात्मक परिमेय संख्या कहते हैं। अतः $\frac{-3}{5}, \frac{-3}{8}, \frac{-9}{5}$ ऋणात्मक परिमेय संख्याएँ हैं।

इसी प्रकार $\frac{3}{-7}, \frac{4}{-5}, \frac{7}{-9}$ आदि भी ऋणात्मक परिमेय संख्याएँ हैं।

यहाँ यह स्पष्ट करना आवश्यक है कि जो संख्याएँ $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त नहीं की जा सकती है अपरिमेय संख्या कहलाती है।

सभी परिमेय संख्याएँ भिन्न नहीं होती हैं, परन्तु प्रत्येक भिन्न परिमेय संख्या होती है।

ध्यान दीजिए :

परिमेय संख्या $\frac{-2}{-9}$ भिन्न नहीं है। जबकि $\frac{-2}{-9}$ का दूसरा रूप $\frac{2}{9}$ भिन्न है।

- यदि x तथा y धन पूर्णांक हैं, तो परिमेय संख्याएँ $\frac{x}{y}$ तथा $\frac{-x}{-y}$ दोनों धनात्मक हैं तथा $\frac{-x}{-y} = \frac{x}{y}$

- परिमेय संख्याएँ $\frac{-x}{y}$ और $\frac{x}{-y}$ दोनों ऋणात्मक हैं तथा $\frac{-x}{y} = \frac{x}{-y} = -\frac{x}{y}$

पूर्णांक और परिमेय संख्याएँ

एक पूर्णांक को विभिन्न पूर्णाकों के रूप में लिख सकते हैं :

यथा 11, -5, 0, 13, ...

देखिए : $11 = \frac{11}{1} = \frac{-22}{-2} = \frac{33}{3} = \frac{44}{4} = \dots$

$\frac{11}{1}, \frac{11}{-2}, \frac{-22}{3}, \frac{33}{4}, \dots$

के रूप में हैं, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$

$-5 = \frac{-5}{1} = \frac{-10}{2} = \frac{15}{-3} = \frac{-20}{4} = \dots$

इसी प्रकार

$\frac{-5}{1}, \frac{-5}{2}, \frac{-10}{-3}, \frac{15}{4}, \dots$

भी $\frac{p}{q}$ के रूप में है जहाँ p और q पूर्णांक है ($q \neq 0$)

$0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{-3} = \frac{0}{4} = \dots$

तथा

$\frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \frac{0}{-3}, \frac{0}{4}, \dots$

$\frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \frac{0}{-3}, \frac{0}{4}, \dots$ $\frac{p}{q}$ के रूप में हैं, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$

प्रयास कीजिए :

- पूर्णांक 13 को विभिन्न रूपों में व्यक्त कीजिए।
- उपर्युक्त प्रकार से पूर्णाकों -7, 6 और -9 को 1 हर वाली परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त कीजिए।
- $\frac{-2}{3}$ को विभिन्न रूपों में लिखिए।

पूर्णाकों के उपर्युक्त विभिन्न रूपों को $\frac{p}{q}$ से तुलना करने पर हम पाते हैं कि इन सभी रूपों में वे $\frac{p}{q}$ के समान हैं, जहाँ p और q पूर्णाक हैं तथा $q \neq 0$

उपर्युक्त से निष्कर्ष निकलता है कि :

यदि p एक पूर्णाक है, तो अतः

$$p = \frac{p}{1} = \frac{2p}{2} = \frac{3p}{3} = \frac{-p}{-1} = \frac{-2p}{-2} = \dots$$

अतः सभी पूर्णाक परिमेय संख्याएँ हैं।

परिमेय संख्याओं के दो महत्वपूर्ण प्रगुण

(1) समतुल्यता का प्रगुण

हम जानते हैं कि

$$\frac{1}{2}$$

के अंश तथा हर में क्रमशः 2, 3, 4, 5, ..., से गुणा करने पर प्राप्त भिन्नें,

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \dots, \text{ समतुल्य भिन्नें हैं।}$$

इसी प्रकार $\frac{4}{5}, \frac{2}{3}$ आदि भिन्नोंको समतुल्य भिन्नोंमें व्यक्त कीजिए।

$$\frac{4}{5} = \frac{8}{10} = \frac{12}{15} = \frac{16}{20} = \frac{20}{25} = \frac{24}{30} = \dots \text{ समतुल्य भिन्नें हैं।}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \dots \text{ समतुल्य भिन्नें हैं।}$$

इसी प्रकार किसी परिमेय संख्या के अंश तथा हर में एक ही पूर्णाक से गुणा करके समतुल्य परिमेय संख्याएँ प्राप्त होती हैं। इस प्रकार

$$\frac{3}{-5} = \frac{6}{-10} = \frac{9}{-15} = \frac{12}{-20} = \frac{15}{-25} = \dots \text{ समतुल्य परिमेय संख्याएँ हैं।}$$

प्रयास कीजिए :

$$\frac{3}{5} = \frac{\square}{15} = \frac{12}{\square} = \frac{-15}{\square}$$

$$\frac{-5}{4} = \frac{\square}{16} = \frac{-25}{\square} = \frac{15}{\square}$$

परिमेय संख्या $\frac{2}{3}$ के अंश तथा हर में किसी शून्येतर पूर्णांक से गुणा करने पर उसके समतुल्य एक परिमेय संख्या प्राप्त होती है। हम जानते हैं कि पूर्णाकों की संख्या अनन्त है, अतः $\frac{1}{4}$ के समतुल्य अनन्त परिमेय संख्याएँ लिखी जा सकती हैं।

टिप्पणी : किसी परिमेय संख्या के अंश तथा हर में पूर्णांक शून्य से गुणा करने पर उसके

समतुल्य परिमेय संख्या नहीं प्राप्त होती है। जैसे $\frac{2}{3}$ के अंश तथा हर में 0 से

गुणा करने पर $\frac{2 \times 0}{3 \times 0} = \frac{0}{0}$, प्राप्त होता है, जो परिमेय संख्या नहीं है, क्योंकि इसका हर 0 है।

उपर्युक्त से निष्कर्ष निकलता है कि

यदि $\frac{x}{y}$ एक परिमेय संख्या है और m एक शून्येतर पूर्णांक है, तो $\frac{x \times m}{y \times m}$ प्रयास कीजिए :

- $\frac{5}{6}$ और $\frac{5}{-6}$ के समतुल्य पाँच-पाँच परिमेय संख्याएँ लिखिए।

उदाहरण 1: $\frac{-7}{5}$ को ऐसी परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त कीजिए, जिसका

(क) अंश -14 हो, (ख) हर 20 हो,

(ग) हर -30 हो, (घ) अंश 35 हो।

हल : (क) का अंश -7 है। $\frac{-7}{5}$

-7 में 2 का गुणा करने पर गुणनफल = -14

$\frac{1}{5}$ के अंश तथा हर में 2 से गुणा करने पर प्राप्त परिमेय संख्या $= \frac{-7 \times 2}{5 \times 2} = \frac{-14}{10}$

इस प्रकार $\frac{-7}{5} = \frac{-14}{10}$

(ख) $\frac{-7}{5}$ का हर 5 है।

5 में 4 से गुणा करने पर गुणनफल 20 प्राप्त होता है।

इस प्रकार $\frac{-7}{5}$ के अंश तथा हर में 4 से गुणा करने पर $\frac{-7}{5}$ के समतुल्य परिमेय संख्या = $\frac{-7 \times 4}{5 \times 4} = \frac{-28}{20}$

उपर्युक्त की भाँति (ग) और (घ) खंडों को स्वयं हल कर सकते हैं।

2. सरलतम रूप का प्रगुण

हम $\frac{8}{12}, \frac{35}{40}, \frac{49}{63}$ आदि भिन्नोको इनके अंश तथा हर में इनके महत्तम समापवर्तक से भाग देकर सरल करना सीख चुके हैं। उदाहरणार्थ -

$$\frac{8}{12} = \frac{8 \div 4}{12 \div 4} = \frac{2}{3}$$
$$\frac{35}{40} = \frac{35 \div 5}{40 \div 5} = \frac{7}{8}$$

ठक इसी प्रकार परिमेय संख्याओं के अंश तथा हर में उनके निरपेक्ष मानों के महत्तम समापवर्तक से भाग देकर उस परिमेय संख्या के समतुल्य परिमेय संख्या प्राप्त की जा सकती है। जो सरलतम रूप में होती है।

जैसे, $\frac{8}{-14} = \frac{8 \div 2}{(-14) \div 2} = \frac{4}{-7}$

तथा $\frac{-25}{40} = \frac{-25 \div 5}{40 \div 5} = \frac{-5}{8}$

इस प्रकार हम देखते हैं कि

यदि $\frac{x}{y}$ परिमेय संख्या के अंश x तथा हर y का एक समापवर्तक m है, तो $\frac{x}{y} = \frac{x \div m}{y \div m}$

, जो दी गयी परिमेय संख्या का सरल रूप है। जब $m \neq 0$ होता है, तब $\frac{x \div m}{y \div m}$ को सरल करने पर प्राप्त संख्या परिमेय संख्या $\frac{x}{y}$ का सरलतम रूप है।

परिमेय संख्या के सरलतम रूप में अंश और हर का $m \neq 0$ 1 होता है अर्थात् अंश और हर सह-अभाज्य होते हैं।

दी गयी परिमेय संख्या का सरलतम रूप या मानक रूप

अमित को ज्ञात है कि $\frac{60}{72}$ एक परिमेय संख्या है। इसके अंश 60 और हर 72 का महत्तम समापवर्तक 12 है।

$$\text{अतः } \frac{60}{72} = \frac{60 \div 12}{72 \div 12} = \frac{5}{6}$$

$\frac{5}{6}$ के अंश 5 और हर 6 का समापवर्तक 1 के अतिरिक्त अन्य संख्या नहीं है।

इस प्रकार अमित ने $\frac{20}{10}$ का सरलतम रूप $\frac{5}{6}$ प्राप्त किया।

प्रयास कीजिए :

$\frac{18}{45}$ को सरलतम रूप में लिखिए।

80

-112 परिमेय संख्या के अंश 80 और हर -112 के निरपेक्ष मानों का एक समापवर्तक 8 है।

$$\text{अतः } \frac{80}{-112} = \frac{80 \div 8}{-112 \div 8} = \frac{10}{-14}$$

$\frac{10}{-14}$ जो दी गयी परिमेय संख्या का एक सरल रूप है।

पुनः 10 और 14 का समापवर्तक 2 है,

$$\text{अतः } \frac{10}{-14} = \frac{10 \div 2}{-14 \div 2}$$

$= \frac{5}{-7} = \frac{-5}{7}$ (धनात्मक हर के लिए अंश तथा हर में (---) से गुणा किया गया है)

चूँकि 5 और 7 परस्पर सह-अभाज्य हैं, अतः $\frac{80}{-112}$ का सरलतम रूप $\frac{-5}{7}$ है।

प्रयास कीजिए :

निम्नांकित परिमेय संख्याओं को सरलतम रूप में लिखिए -

$$\left(\text{क) } \frac{18}{45} \quad \text{(ख) } \frac{-18}{27} \quad \text{(ग) } \frac{-45}{36} \quad \text{(घ) } \frac{32}{-72} \right)$$

उपर्युक्त से निष्कर्ष निकलता है कि

- एक परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ सरलतम रूप में तभी होती है जब q धनात्मक पूर्णांक हो, तथा p और q के निरपेक्ष मानों का महत्तम समापवर्तक 1 के अतिरिक्त अन्य कोई संख्या न हो।
- परिमेय संख्या का सरलतम रूप ही उसका मानक रूप है।

अभ्यास 1 (a)

1. निम्नांकित पूर्णाकों को परिमेय संख्याओं के रूप में लिखिए, जिनका हर 1 हो –
-7, 11, 27, -45, 71

2. $\frac{-4}{5}$ को ऐसी परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त कीजिए, जिसका अंश है –

(क) 8 (ख) -16 (ग) 20 (घ) -24

3. $\frac{-5}{-7}$ को ऐसी परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त कीजिए, जिसका हर है –

(क) 7 (ख) -14 (ग) 21 (घ) -35

4. निम्नांकित परिमेय संख्या के हर को धनात्मक बनाइए :

(क) $\frac{-9}{-11}$ (ख) $\frac{11}{-17}$ ((ग) $\frac{-4}{-19}$ (घ) $\frac{7}{-13}$

5. निम्नांकित परिमेय संख्या के अंश को धन पूर्णांक बनाइए :

(क) $\frac{-7}{13}$ (ख) $\frac{-11}{-19}$ (ग) $\frac{-18}{23}$ (घ) $\frac{-19}{-23}$

6. निम्नांकित संख्याओं में कौन सी परिमेय संख्याएँ धनात्मक हैं?

(क) $\frac{-9}{-13}$ (ख) $\frac{11}{-19}$ (ग) $\frac{-7}{-23}$ (घ) $\frac{8}{-13}$

7. निम्नांकित संख्याओं में कौन-कौन सी परिमेय संख्याएँ ऋणात्मक हैं?

(क) $\frac{-7}{11}$ (ख) $\frac{-6}{-13}$ (ग) $\frac{8}{-35}$ (घ) $\frac{-21}{-23}$

8. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को सरलतम रूप में लिखिए :

(क) $\frac{-9}{21}$ (ख) $\frac{-18}{-27}$ (ग) $\frac{21}{-36}$ (घ) $\frac{-36}{64}$

9. अपनी अभ्यास पुस्तिका में लिख कर रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए :

(क) $\frac{-3}{4} = \frac{\dots}{-20} = \frac{\dots}{28}$ (ख) $\frac{-5}{-8} = \frac{\dots}{24} = \frac{25}{\dots}$

(ग) $\frac{7}{-9} = \frac{-14}{\dots} = \frac{35}{\dots}$ (घ) $\frac{-8}{\dots} = \frac{4}{15} = \frac{\dots}{-60}$

10. प्रत्येक के समतुल्य तीन और परिमेय संख्याएँ लिखिए :

(क) $\frac{2}{5}$ (ख) $\frac{7}{-11}$ (ग) $\frac{-8}{-5}$

1.3 दो क्रमागत पूर्णाकों के मध्य परिमेय संख्या ज्ञात करना

निम्नांकित चित्र में संख्या-रेखा पर पूर्णांक ... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... निरूपित हैं।



उपर्युक्त संख्या-रेखा के दो क्रमागत पूर्णाकों के बीच की दूरी को दो समान भागों में विभक्त कीजिए। शून्य को निरूपित करने वाले बिन्दु 0 के दाहिनी ओर स्थित क्रमागत पूर्णाकों के मध्य बिन्दुओं को A, B, C, द्वारा निरूपित कीजिए।

A, B, C, ... द्वारा निरूपित परिमेय संख्याएँ क्रमशः $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ हैं।

0 से बायीं ओर स्थित क्रमागत पूर्णाकों के मध्य बिन्दुओं को A', B', C', \dots द्वारा निरूपित कीजिए।

यहाँ, $OA = OA'$

$OB = OB'$

$OC = OC'$

... ..

... ..

इस प्रकार हम देखते हैं कि बिन्दु A, B, C, ... जितनी दूरी पर 0 से दाहिनी ओर हैं इन्हीं की उतनी ही दूरी पर क्रमशः बिन्दु A', B', C', \dots 0 से बायीं ओर हैं। इस प्रकार बिन्दुओं A, B, C, ... के विपरीत क्रमशः बिन्दु A', B', C', \dots हैं।

A', B', C', \dots द्वारा निरूपित परिमेय संख्याएँ बताइए।

A', B', C', \dots द्वारा निरूपित परिमेय संख्याएँ क्रमशः $\frac{-1}{2}, \frac{-3}{2}, \frac{-5}{2}, \dots$ हैं।

हम जानते हैं कि :

$$1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \dots, \quad 2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \dots \quad \text{तथा} \quad 3 = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \dots$$

इस प्रकार पूर्णाकों 1, 2, 3, ... के समतुल्य परिमेय संख्याएँ क्रमशः $\frac{2}{2}, \frac{4}{2}, \frac{6}{2}, \dots$ हैं। अतः 1,

2, 3, ... के ऋणात्मक परिमेय संख्याएँ पूर्णाकों क्रमशः -1, -2, -3, ... को $\frac{-2}{2}, \frac{-4}{2}, \frac{-6}{2}, \dots$ के रूप में लिखते हैं।

इस प्रकार हम देखते हैं कि उपर्युक्त संख्या-रेखा पर 0 से दाहिनी ओर अंकित बिन्दुओं द्वारा

निरूपित परिमेय संख्याएँ क्रमशः $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \frac{6}{2}, \dots$ हैं।

निष्कर्ष :

0 से बायीं ओर स्थित बिन्दुओं द्वारा निरूपित परिमेय संख्याएँ क्रमशः

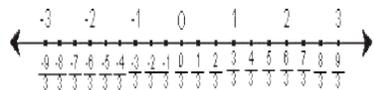
$$\frac{-1}{2}, \frac{-2}{2}, \frac{-3}{2}, \frac{-4}{2}, \frac{-5}{2}, \frac{-6}{2}, \dots \text{ हैं।}$$

स्पष्टतः परिमेय संख्याओं $e^{\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \frac{6}{2}, \dots}$ विपरीत क्रमशः $\frac{-1}{2}, \frac{-2}{2}, \frac{-3}{2}, \frac{-4}{2}, \frac{-5}{2}, \frac{-6}{2}, \dots$ हैं। 0 को $\frac{0}{2}$ के रूप में लिख सकते हैं।

इस प्रकार उपर्युक्त संख्या-रेखा के समस्त अंकित बिन्दुओं द्वारा निरूपित परिमेय संख्याएँ बायें से दायें की ओर क्रमशः हैं :

$$\dots \frac{-6}{2}, \frac{-5}{2}, \frac{-4}{2}, \frac{-3}{2}, \frac{-2}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \frac{6}{2}, \dots$$

इसी प्रकार निम्नांकित संख्या रेखा पर स्थित दो क्रमागत पूर्णाकों के बीच की दूरी को तीन बराबर भागों में विभक्त कीजिए।



0 से दाहिनी ओर अंकित बिन्दुओं द्वारा निरूपित परिमेय संख्याएँ क्रमशः क्या हैं?

अभीष्ट परिमेय संख्याएँ क्रमशः हैं: $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{6}{3}, \dots$

0 से बायीं ओर अंकित बिन्दुओं द्वारा निरूपित कौन-कौन परिमेय संख्याएँ हैं?

अभीष्ट परिमेय संख्याएँ क्रमशः हैं :

$$\frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-3}{3}, \frac{-4}{3}, \frac{-5}{3}, \frac{-6}{3}, \dots$$

प्रयास कीजिए :

उपर्युक्त संख्या-रेखा के समस्त अंकित बिन्दुओं द्वारा निरूपित परिमेय संख्याएँ हैं :

$$\dots \frac{-6}{3}, \frac{-5}{3}, \frac{-4}{3}, \frac{-3}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{0}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{6}{3}, \dots$$

निम्नांकित संख्या-रेखा पर दो क्रमागत पूर्णाकों के बीच की दूरी को चार बराबर भागों में विभक्त कीजिए



संख्या-रेखा क्रमागत पूर्णाकों 0 और 1 के बीच अंकित बिन्दुओं द्वारा निरूपित परिमेय संख्याएँ बताइए।

इस प्रकार पूर्णाकों 0 और 1 सहित इनके बीच अंकित बिन्दुओं द्वारा निरूपित परिमेय संख्याएँ क्रमशः हैं : $\frac{0}{4}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}$

इसी प्रकार -1 और 0 सहित इनके बीच अंकित बिन्दुओं द्वारा निरूपित परिमेय संख्याएँ क्रमशः हैं :

$$\frac{-4}{4}, \frac{-3}{4}, \frac{-2}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{0}{4}$$

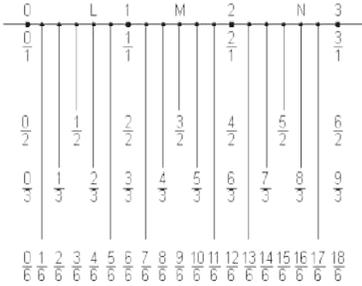
इन्हें कीजिए :

उपर्युक्त संख्या-रेखा पर -3 से लेकर $+3$ तक के बीच के बिन्दुओं द्वारा निरूपित सभी संख्याओं को अपनी अभ्यास-पुस्तिका पर लिखिए।

उपर्युक्त प्रकार से संख्या-रेखा पर दो क्रमागत पूर्णाकों के बीच की दूरी को पाँच, छः, सात, ... समान भागों में विभक्त करने पर हमें नये नये बिन्दु मिलते हैं। इन नये बिन्दुओं द्वारा निरूपित परिमेय संख्याएँ भी नयी अथवा अपने समतुल्य नये रूपों में मिलती हैं।

- किन्हीं दो पूर्ण संख्याओं के मध्य अनन्त बिन्दुओं द्वारा अनन्त परिमेय संख्याओं का प्रदर्शन

निम्नलिखित संख्या-रेखा का चित्र देखिए



उपर्युक्त चित्र में संख्या रेखा पर $0, 1, 2, 3$ क्रमागत पूर्ण संख्याएँ निरूपित हैं। प्रत्येक दो क्रमागत पूर्ण संख्याओं के मध्य की दूरी को छह समान भागों में विभक्त किया गया है। स्पष्ट है कि दो क्रमागत पूर्ण संख्याएँ, जैसे 1 और 2 के मध्य अनन्त बिन्दु हैं, जो अपने संगत अनन्त परिमेय संख्याओं को निरूपित करते हैं। चित्र से यह भी स्पष्ट है कि एक ही बिन्दु अनन्त समतुल्य परिमेय संख्याओं को भी निरूपित करता है। दो परिमेय संख्याएँ चाहे जितनी सन्निकट हों उनके बीच अनन्त परिमेय संख्याएँ होती हैं।

इन्हें कीजिए :

उपर्युक्त चित्र देखकर बताइए कि

- (1) बिन्दु L किन किन समतुल्य परिमेय संख्याओं को निरूपित करता है।

(2) $\frac{8}{3}$ और $\frac{16}{6}$ समतुल्य परिमेय संख्याएँ संख्या-रेखा के किस बिन्दु द्वारा निरूपित होती हैं।

(3) समतुल्य परिमेय संख्याएँ $\frac{3}{1}, \frac{6}{2}, \frac{9}{3}, \frac{18}{6}, \dots$ किस पूर्ण संख्या के समतुल्य हैं।

(4) बिन्दु 0 द्वारा निरूपित अनन्त समतुल्य परिमेय संख्याएँ कौन-कौन हैं।

निष्कर्ष :

- संख्या-रेखा का एक ही बिन्दु अनन्त समतुल्य परिमेय संख्याओं को निरूपित करता है।

- दो क्रमागत पूर्ण संख्याओं के मध्य अनन्त परिमेय संख्याएँ होती हैं।

दी गयी परिमेय संख्या, जो पूर्णांक नहीं है, का दो क्रमागत पूर्णांकों के मध्य संख्या-रेखा पर निरूपण

यदि दी गयी परिमेय संख्या है, तो $\frac{6}{5}$

$$\frac{6}{5} = \frac{5}{5} + \frac{1}{5} = 1 + \frac{1}{5}$$

$$\text{स्पष्टतः } \frac{6}{5} > 1$$

$$\text{पुनः } 2 = \frac{2}{1} = \frac{10}{5}$$

$$\text{अतः } \frac{6}{5} < \frac{10}{5} \text{ अर्थात् } \frac{6}{5} < 2$$

इस प्रकार $1 < \frac{6}{5} < 2$, अतः $\frac{6}{5}$ क्रमागत पूर्णांकों 1 और 2 के बीच में पड़ती है।

$\frac{6}{5}$ को निम्नांकित संख्या-रेखा पर बिन्दु A द्वारा निरूपित किया गया है-



प्रयास कीजिए ::

(i) $\frac{8}{3}$ को संख्या रेखा पर दो क्रमागत पूर्णांकों के मध्य निरूपित कीजिए।

(ii) $\frac{-7}{3}$ को संख्या रेखा पर दो क्रमागत पूर्णांकों के मध्य निरूपित कीजिए।

1.4 समान परिमेय संख्याएँ

हम देख चुके हैं कि एक ही परिमेय संख्या के समतुल्य अनन्त परिमेय संख्याएँ निरूपित की जा सकती हैं।

यदि दो परिमेय संख्याएँ दी गयीं हों, तो उनकी समानता (समतुल्यता) की जाँच कैसे करते हैं?

प्रथम विधि : सविता ने दी गयी परिमेय संख्याओं $\frac{-8}{12}$ और $\frac{30}{-45}$ को इनके सरलतम रूप (मानक रूप में) प्राप्त किया।

सविता जानती है कि $\frac{-8}{12}$ के अंश और हर के निरपेक्ष मानों 8 और 12 का म0स0 4 है,

$$\text{अतः } \frac{-8}{12} = \frac{-8 \div 4}{12 \div 4} = \frac{-2}{3}$$

पुनः $\frac{30}{-45}$ के अंश तथा हर के निरपेक्ष मानों क्रमशः 30 और 45 का म0स0 15 है।

$$\text{अतः } \frac{30}{-45} = \frac{30 \div 15}{-45 \div 15} = \frac{2}{-3} = \frac{-2}{3}$$

इस प्रकार सविता ने देखा कि $\frac{-8}{12}$ और $\frac{30}{-45}$ के सरलतम रूप समान हैं।

$$\text{अतः } \frac{-8}{12} = \frac{30}{-45}$$

उदाहरण 1 : $\frac{-16}{20}$ और $\frac{20}{-25}$ की समानता की जाँच कीजिए।

$\frac{-16}{20}$ के अंश तथा हर के निरपेक्ष मानों का म0स0 4 है।

$$\text{अतः } \frac{-16}{20} = \frac{-16 \div 4}{20 \div 4} = \frac{-4}{5}$$

पुनः $\frac{20}{-25}$ के अंश तथा हर के निरपेक्ष मानों का म0स0 5 है।

$$\text{अतः } \frac{20}{-25} = \frac{20 \div 5}{-25 \div 5} = \frac{4}{-5} = \frac{-4}{5}$$

इस प्रकार $\frac{-16}{20}$ और $\frac{20}{-25}$ दोनों परिमेय संख्याओं के सरलतम रूप $\frac{-4}{5}$ ही है।

$$\text{अतः } \frac{-16}{20} = \frac{20}{-25}$$

उपर्युक्त से स्पष्ट है कि,

दो परिमेय संख्याओं की समानता की जाँच के लिए उन परिमेय संख्याओं के सरलतम रूप (मानक रूप) प्राप्त करते हैं। यदि उन दोनों के सरलतम रूप एक ही हैं, तो वे परिमेय संख्याएँ समान हैं, अन्यथा नहीं।

द्वितीय विधि : (समान हर बनाकर) : देखिए, $\frac{-8}{-14}$ और $\frac{12}{21}$ दो दी गयी परिमेय संख्याएँ हैं। अब इनके हरों को समान बनाते हैं।

$\frac{-8}{-14}$ का हर -14 ऋणात्मक, और $\frac{12}{21}$ का हर 21 धनात्मक हैं।
दोनों के हरों को धनात्मक बनाते हैं।

धनात्मक हर वाली इन परिमेय संख्याओं और $\frac{12}{21}$ के $\frac{8}{14}$ हरों 14 और 21 का ल0स0 ज्ञात कीजिए।

14 और 21 का ल0स0 = 42

$\frac{8}{14}$ के हर को 42 बनाने पर

$$\frac{8}{14} = \frac{8 \times 3}{14 \times 3} = \frac{24}{42}$$

इसी प्रकार $\frac{12}{21} = \frac{12 \times 2}{21 \times 2} = \frac{24}{42}$

अतः $\frac{-8}{-14} = \frac{12}{21}$

इसी प्रकार परिमेय संख्याओं के अन्य जोड़े यथा $\frac{-12}{15}$ और $\frac{36}{-45}$ लीजिए। इनके हरों के निरपेक्ष मानों 15 और 45 के ल0स0 के बराबर दोनों के हर बनाइये। अब उनके अंशों की तुलना कीजिए।

$$\frac{-12}{15} = \frac{(-12) \times 3}{15 \times 3} = \frac{-36}{45}$$

तथा $\frac{36}{-45} = \frac{36 \times (-1)}{(-45) \times (-1)} = \frac{-36}{45}$

अतः $\frac{-12}{15} = \frac{36}{-45}$

प्रयास कीजिए :

(1) $\frac{8}{-18}$ और $\frac{-32}{72}$ की समानता की जांच कीजिए।

(2) क्या $\frac{-16}{20}$ और $\frac{24}{-30}$ समान हैं ?

दो परिमेय संख्याओं $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ के समान होने का प्रतिबन्ध

समान परिमेय संख्याओं $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ के जोड़े लीजिए, यथा (i) $\frac{a}{b} = \frac{3}{-4}$ तथा $\frac{c}{d} = \frac{-9}{12}$

(ii) $\frac{a}{b} = \frac{-5}{9}$ तथा $\frac{c}{d} = \frac{10}{-18}$ (iii) $\frac{a}{b} = \frac{-7}{-1}$ तथा $\frac{c}{d} = \frac{14}{22}$

उपर्युक्त परिमेय संख्याओं के जोड़ों को अग्रांकित सारणी में देखिए। प्रत्येक जोड़े के संगत a d तथा b म c प्राप्त कीजिए। इनके मानों की तुलना कीजिए। रिक्त स्थान भरिए।

समान परिमेय संख्याएँ	$ad = a \times d$	$bc = b \times c$	ad और bc में सम्बन्ध
$\frac{3}{4}, \frac{-9}{12}$	$3 \times 12 = 36$	$(-4) \times (-9) = 36$	समान हैं।
$\frac{-5}{9}, \frac{10}{-18}$	$(-5) \times (-18) = 90$	$9 \times 10 = 90$	समान हैं।
$\frac{-7}{-11}, \frac{14}{22}$	$(-7) \times 22 = -154$	$(-11) \times 14 = -154$	समान हैं।

प्रयास कीजिए :

उपर्युक्त की भाँति सारणी तैयार कीजिए।

$$\frac{1}{2}, \frac{-4}{-8} \dots \dots \dots$$

$$\frac{-5}{9}, \frac{15}{-27} \dots \dots \dots$$

$$\frac{3}{-4}, \frac{-12}{16} \dots \dots \dots$$

उपर्युक्त सारणी से निष्कर्ष निकलता है कि

यदि $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ दो समान परिमेय संख्याएँ हैं, तो $ad = bc$

इस प्रगुण का प्रयोग हम दो परिमेय संख्याओं की समानता की जाँच के लिए कर सकते हैं।

उदाहरण 2: $\frac{-15}{25}$ और $\frac{-12}{20}$ की समानता की जाँच कीजिए।

यदि दी गयी परिमेय संख्याओं में $\frac{-15}{25} = \frac{a}{b}$ और $\frac{-12}{20} = \frac{c}{d}$

तो $a = -15$, $b = 25$, $c = -12$ और $d = 20$

इस प्रकार $ad = -15 \times 20 = -300$

और $bc = 25 \times (-12) = -300$

इस प्रकार $ad = bc$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

अथवा $\frac{-15}{25} = \frac{-12}{20}$

प्रयास कीजिए :

निम्नांकित परिमेय संख्याओं के जोड़ों में कौन-कौन असमान हैं ?

(क) $\frac{-8}{24}$ और $\frac{7}{-21}$ ((ख)) $\frac{0}{-7}$ और $\frac{0}{4}$

(ग) $\frac{-6}{10}$ और $\frac{9}{-15}$ (घ) $\frac{-15}{20}$ और $\frac{25}{-30}$

अभ्यास 1(b)

1. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को उनके सरलतम रूप में लिखिए :

(क) $\frac{-8}{10}$ ((ख)) $\frac{15}{20}$ (ग) $\frac{25}{45}$ (घ) $\frac{-14}{7}$

2. संकेतों = और \neq में से चुन कर रिक्त स्थानों को भरिए :

(क) $\frac{-4}{5} \square \frac{-5}{7}$ (ख) $\frac{-7}{11} \square \frac{-7}{11}$

(ग) $\frac{-8}{5} \square \frac{-7}{-4}$ (घ) $\frac{14}{-16} \square \frac{-21}{16}$

3. निम्नांकित परिमेय संख्याओं के जोड़ों में कौन-कौन समान हैं?

(क) $\frac{-9}{12}$ और $\frac{8}{-12}$ (ख) $\frac{-15}{45}$ और $\frac{16}{-48}$

(ग) $\frac{-7}{21}$ और $\frac{3}{-9}$ (घ) $\frac{-8}{-14}$ और $\frac{13}{21}$

4. निम्नांकित परिमेय संख्या को संख्या-रेखा पर निरूपित कीजिए।

(क) $\frac{3}{4}$ (ख) $\frac{3}{5}$ (ग) $\frac{5}{8}$ (घ) $\frac{3}{16}$

5. निम्नांकित परिमेय संख्याओं के जोड़ों में कौन-कौन असमान हैं?

(क) $\frac{-8}{24}$ और $\frac{7}{-21}$ (ख) $\frac{-15}{20}$ और $\frac{25}{-30}$

(ग) $\frac{0}{-7}$ और $\frac{0}{4}$ (घ) $\frac{-6}{10}$ और $\frac{9}{-15}$

1.5 परिमेय संख्याओं का क्रमायोजन

पूर्णाकों तथा भिन्नोकी तरह परिमेय संख्याओं की भी तुलना की जा सकती है।

उदाहरण 1. परिमेय संख्याओं $\frac{-5}{4}$ और $\frac{7}{-9}$ में कौन बड़ी है?

हल : $\frac{7}{-9}$ को धनात्मक हर में व्यक्त करने पर प्राप्त होता है।

अब हम इनके हरों को समान करते हैं।

$$\frac{-5}{4} = \frac{(-5) \times 9}{4 \times 9} = \frac{-45}{36}$$

$$\text{इसी प्रकार : } \frac{-7}{9} = \frac{(-7) \times 4}{9 \times 4} = \frac{-28}{36}$$

चूँकि $45 > 28$

अर्थात् $-45 < -28$

अतः $\frac{-45}{36} < \frac{-28}{36}$

इस प्रकार $\frac{-28}{36} > \frac{-45}{36}$

∴ $\frac{-7}{9} > \frac{-5}{4}$

उदाहरण 2: परिमेय संख्याओं $\frac{6}{-5}$ और $\frac{-7}{-6}$ में कौन बड़ी है ?

हल : परिमेय संख्याओं के हरों को धनात्मक बनाने पर,

$$\frac{6}{-5} = \frac{6 \times (-1)}{(-5) \times (-1)} = \frac{-6}{5} \quad \text{और} \quad \frac{-7}{-6} = \frac{(-7) \times (-1)}{(-6) \times (-1)} = \frac{7}{6}$$

चूँकि $\frac{-6}{5}$ ऋणात्मक है और $\frac{7}{6}$ धनात्मक है और धनात्मक संख्याएँ, ऋणात्मक संख्याओं से सदैव बड़ी होती हैं।

अतः $\frac{7}{6} > \frac{-6}{5}$

$\frac{-7}{9} > \frac{-5}{4}$

अर्थात् $\frac{-7}{-6} > \frac{6}{-5}$

• परिमेय संख्याओं $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ के ऐसे अनेक जोड़े लीजिए, जिनमें $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

प्रयास कीजिए :

- परिमेय संख्याओं $\frac{3}{2}$ और $\frac{3}{-2}$ में कौन बड़ी है।
- परिमेय संख्याओं $\frac{1}{2}$ और $\frac{-3}{4}$ में कौन बड़ी है।
- परिमेय संख्याओं $\frac{0}{1}$ और $\frac{-1}{2}$ में कौन बड़ी है।

उपर्युक्त परिमेय संख्याओं के तीनों $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ रूप के जोड़ों को निम्नांकित सारणी में देखिए। प्रत्येक के संगत ad और bc के मानों को ज्ञात करके तुलना कीजिए। खाली जगह भरिए :

$\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$	$a \times d = ad$	$b \times c = bc$	ad और bc की तुलना
$\frac{1}{2} > \frac{-3}{4}$	$1 \times 4 = 4$	$2 \times (-3) = -6$	$4 > -6$ ∴ $ad > bc$
$\frac{0}{1} > \frac{-1}{2}$	$0 \times 2 = \dots$	$1 \times (-1) = -1$	$0 > -1$ ∴ $ad > bc$
$\frac{3}{2} > \frac{-3}{2}$	$3 \times 2 = \dots$	$2 \times (-3) = \dots$	$6 > \dots$ ∴ $ad > bc$

उपर्युक्त सारणी से यह निष्कर्ष निकलता है कि

यदि दो परिमेय संख्याएँ $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ ऐसी हैं कि $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ तो $ad > bc$, जहाँ b और d दोनों धनात्मक संख्याएँ हैं।

इस प्रगुण का प्रयोग कर हम दो परिमेय संख्याओं की तुलना कर सकते हैं। इसी प्रकार $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ प्रकार की दो परिमेय संख्याओं के कुछ जोड़े $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ लीजिए। दोनों में हरोँ b और d को धनात्मक बनाते हुए प्रत्येक के संगत ad और bc ज्ञात करके सत्यापन कीजिए कि $ad < bc$ । इस प्रगुण का प्रयोग दो परिमेय संख्याओं की तुलना में कर सकते हैं।

उदाहरण 3: परिमेय संख्याओं $\frac{4}{-7}$ और $\frac{-3}{5}$ में कौन बड़ी है ?

$$\text{हल : } \frac{4}{-7} = \frac{-4}{7} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{-3}{5} = \frac{c}{d}$$

$$\text{यहाँ } ad = -4 \times 5 = -20$$

$$bc = 7 \times (-3) = -21$$

$$\text{चूँकि } -20 > -21$$

$$\text{अतः } \frac{4}{-7} > \frac{-3}{5}$$

निष्कर्ष :

दो परिमेय संख्याओं की परस्पर तुलना करते समय उनके हरोँ को धनात्मक बनाना आवश्यक है।

उदाहरण 4: परिमेय संख्याओं $\frac{-7}{9}$, $\frac{-5}{21}$ और $\frac{2}{-3}$ को आरोही क्रम में लिखिए।

हल : दी गयी परिमेय संख्याओं को धनात्मक हर के रूप में व्यक्त करने पर $\frac{-7}{9}$, $\frac{-5}{21}$ और $\frac{-2}{3}$ प्राप्त होते हैं।

9, 21 और 3 का ल0स0 63 है,

अब दी गयी परिमेय संख्याओं को 63 हर वाली परिमेय संख्याओं के रूप में लिखने पर

$$\frac{-7}{9} = \frac{(-7) \times 7}{9 \times 7} = \frac{-49}{63}$$

$$\frac{-5}{21} = \frac{(-5) \times 3}{21 \times 3} = \frac{-15}{63}$$

$$\frac{-2}{3} = \frac{(-2) \times 21}{3 \times 21} = \frac{-42}{63}$$

प्राप्त परिमेय संख्याओं के अंशों -49 , -15 , -42 को घ:ते क्रम में रखने पर

$$-15 > -42 > -49$$

अतः इनका आरोही क्रम

$$-49 < -42 < -15$$

$$\text{इस प्रकार } \frac{-49}{63} < \frac{-42}{63} < \frac{-15}{63}$$

$$\text{अर्थात् } \frac{-7}{9} < \frac{2}{-3} < \frac{-5}{1}$$

परिमेय संख्याओं का अनुक्रम (order) प्रगुण

(i) कोई भी धन परिमेय संख्या लेकर शून्य से इसकी तुलना कीजिए। जैसे

$\frac{5}{7}$ और 0 में कौन बड़ा है ?

$$0 = \frac{0}{7}$$

चूँकि $5 > 0$

$$\text{अतः } \frac{5}{7} > \frac{0}{7} \text{ या } \frac{5}{7} > 0$$

इससे हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि :

प्रत्येक धन परिमेय संख्या शून्य से बड़ी होती है।

(ii) अब कोई ऋण परिमेय संख्या लेकर इसकी शून्य से तुलना कीजिए। इस प्रक्रिया को कई ऋण परिमेय संख्याएँ लेकर कीजिए, यथा

$\frac{-4}{9}$ और 0 में कौन बड़ा है।

$$0 = \frac{0}{9}$$

चूँकि $0 > -4$

$$\text{तथा } \frac{0}{9} > \frac{-4}{9}$$

$$\text{अतः } 0 > \frac{-4}{9} \text{ अथवा } \frac{-4}{9} < 0$$

इससे हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि

प्रत्येक ऋण परिमेय संख्या शून्य से छोटी होती है।

(ii) प्रत्येक शून्येतर परिमेय संख्या या तो धनात्मक होती है, या ऋणात्मक। अतः हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि

प्रगुण (i) प्रत्येक परिमेय संख्या x के लिए निम्नांकित में से कोई एक सत्य है :

$$\text{(i) } x > 0 \text{ (ii) } x = 0 \text{ (iii) } x < 0$$

II) यदि x और y दो परिमेय संख्याएँ हों, तो निम्नांकित में से कोई एक सम्बन्ध सत्य है :

(i) $x > y$ (ii) $x = y$ (iii) $x < y$

दो परिमेय संख्याओं में बड़ी परिमेय संख्या ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित क्रिया-पद हैं :

(1) परिमेय संख्याओं के हरों को धनात्मक बनाते हैं।

(2) यदि दोनों परिमेय संख्याओं में से एक धनात्मक और दूसरी ऋणात्मक है, तो धनात्मक परिमेय संख्या ही बड़ी परिमेय संख्या है।

(3) यदि दोनों परिमेय संख्याओं में दोनों समान चिह्नों की हों, तो उनके हरों को समान बनाया जाता है। दोनों परिमेय संख्याओं के हरों के निरपेक्ष मानों का ल0स0 को ज्ञात कर समान हर वाली परिमेय संख्याएँ प्राप्त करते हैं।

(4) समान हर वाली इस प्रकार प्राप्त परिमेय संख्याओं के अंशों की तुलना करते हैं। बड़े अंश के संगत परिमेय संख्या ही बड़ी परिमेय संख्या है।

(5) यदि $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ दो परिमेय संख्याएँ धनात्मक हर के रूप में हैं, तो

(i) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, यदि $ad = bc$

(ii) $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, यदि $ad > bc$

(iii) $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, यदि $ad < bc$

अभ्यास 1 (c)

1. निम्नांकित दो परिमेय संख्याओं में कौन बड़ी है ?

(क) $\frac{-4}{9}, \frac{7}{9}$ ((ख)) $\frac{-3}{4}, \frac{-5}{8}$

(ग) $\frac{-7}{12}, \frac{5}{-8}$ (घ) $\frac{-5}{9}, \frac{-3}{-13}$

2. निम्नांकित दो परिमेय संख्याओं में कौन छोटी है ?

(क) $\frac{-4}{9}, \frac{5}{-9}$ ((ख)) $\frac{6}{1}, \frac{-7}{-1}$

(ग) $\frac{16}{-7}, 3$ (घ) $\frac{4}{-3}, \frac{-8}{9}$

3. निम्नांकित प्रश्नों में उत्तर के चार विकल्प दिये गये हैं, जिनमें से एक सही है। सही उत्तर छाँटिए।

(क) परिमेय संख्या $\frac{-4}{18}$ के समतुल्य परिमेय संख्या है :

(i) $\frac{2}{-9}$ (ii) $\frac{6}{27}$ (iii) $\frac{2}{9}$ (iv) $\frac{4}{18}$

(ख) परिमेय संख्या $\frac{3}{5}$ से बड़ी परिमेय संख्या है :

(i) $\frac{4}{10}$ (ii) $\frac{-4}{10}$ (iii) $\frac{6}{10}$ (iv) $\frac{7}{10}$

(ग) परिमेय संख्या $\frac{4}{9}$ से छोटी परिमेय संख्या है :

(i) $\frac{-11}{18}$ (ii) $\frac{13}{18}$ (iii) $\frac{12}{27}$ (iv) $\frac{1}{8}$

(घ) परिमेय संख्या $\frac{0}{-5}$ से बड़ी परिमेय संख्या है :

(i) $\frac{-1}{5}$ (ii) $\frac{-2}{-7}$ (iii) $\frac{-1}{8}$ (iv) $\frac{4}{-9}$

4. अपनी अभ्यास पुस्तिका में उतार कर खाली स्थान \square में $>$, $=$ या $<$ में से जो उपयुक्त हो, भरिए :

(क) $\frac{-4}{7} \square \frac{6}{13}$ ((ख)) $\frac{-4}{5} \square \frac{-5}{7}$

(ग) $\frac{-7}{8} \square \frac{21}{-24}$ (घ) $\frac{-9}{-10} \square \frac{8}{9}$

5. निम्नांकित परिमेय संख्याओं को आरोही क्रम में लिखिए :

$\frac{3}{5}, \frac{-7}{6}, \frac{8}{-12}, \frac{-17}{-30}$

6. निम्नांकित परिमेय संख्याओं को अवरोही क्रम में लिखिए :

$\frac{4}{7}, \frac{-5}{6}, \frac{-3}{-12}, \frac{1}{-24}$

दक्षता अभ्यास - 1

1. इस प्रश्नके प्रत्येक खंड में उत्तर के चार विकल्प दिये गये हैं। इनमें से केवल एक सही है।

सही उत्तर अपनी अभ्यास-पुस्तिका में लिखिए।

(क) किसी परिमेय संख्या के समतुल्य परिमेय संख्याएँ होती हैं :

(i) एक (ii) दो

(iii) 50 (iv) अनन्त

(ख) परिमेय संख्या $\frac{-16}{80}$ का सरलतम रूप है :

(i) $\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{-1}{-5}$

(iii) $\frac{-1}{5}$ (iv) $\frac{-2}{5}$

(ग) परिमेय संख्या $\frac{40}{-25}$ का सरलतम रूप है :

(i) $\frac{8}{27}$ (ii) $\frac{-8}{5}$

(iii) $\frac{16}{-5}$ (iv) $\frac{-8}{25}$

(घ) दो असमान परिमेय संख्याओं के बीच परिमेय संख्याएँ होती हैं :

(i) 10 (ii) 20

(iii) अनन्त (iv) 111

2. निम्नांकित कथनों में सत्य और असत्य बताइए :

(क) समान परिमेय संख्याओं के सरलतम रूप समान होते हैं।

(ख) $\frac{-7}{-1}$ धन परिमेय संख्या है।

(ग) $\frac{+4}{-9}$ धन परिमेय संख्या है।

(घ) $\frac{3}{-1}$ और $\frac{-3}{1}$ समान हैं।

(च) $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \dots$ एक ही परिमेय संख्या के विभिन्न रूप हैं।

(छ) $\frac{-1}{-3}, \frac{-2}{-6}, \frac{-3}{-9}, \dots$ विभिन्न परिमेय संख्याएँ हैं।

(ज) $\frac{-4}{-5}$ और $\frac{4}{5}$ समान परिमेय संख्याएँ हैं।

(झ) सभी पूर्णांक, परिमेय संख्या हैं।

(ट) सभी परिमेय संख्याएँ पूर्णांक होती हैं।

(ठ) $\frac{0}{5}$ और $\frac{0}{-3}$ समान परिमेय संख्याएँ नहीं हैं।

(ड) दो असमान परिमेय संख्याओं के बीच अनन्त परिमेय संख्याएँ होती हैं।

3. निम्नांकित परिमेय संख्याओं को अवरोही क्रम में लि(ख)ए :

(क) $\frac{2}{5}, \frac{4}{7}, \frac{5}{9}, \frac{1}{6}$ (ख) $\frac{-4}{1}, \frac{1}{-3}, \frac{-5}{7}, \frac{-3}{4}$

(ग) $\frac{5}{-9}, \frac{-7}{12}, \frac{7}{-18}, \frac{-2}{3}$ (घ) $\frac{-3}{4}, \frac{5}{-12}, \frac{-7}{16}, \frac{9}{-24}$

इस इकाई में हमने सीखा है

1. $\frac{p}{q}$ के रूप की संख्याएँ अथवा $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त की जा सकने वाली संख्याएँ, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$, परिमेय संख्याएँ कहलाती हैं।

2. सभी भिन्न परिमेय संख्याएँ होती हैं किन्तु सभी परिमेय संख्याएँ भिन्न नहीं होतीं।

3. समान चिह्न के अंश तथा हर वाली परिमेय संख्याएँ धनात्मक होती हैं। ऐसी परिमेय संख्याएँ भिन्न होती हैं।
4. असमान चिह्न के अंश तथा हर वाली परिमेय संख्याएँ ऋणात्मक होती हैं।
5. यदि ज् एक पूर्णांक है, तो $p = \frac{p}{1} = \frac{p}{2} = \frac{p}{3} = \dots = \frac{-p}{-1} = \frac{-p}{-2} = \frac{-p}{-3} = \dots$ अतः सभी पूर्णांक परिमेय संख्याएँ हैं।
6. यदि किसी परिमेय संख्या के अंश और हर में शून्येतर पूर्णांक से गुणा करें अथवा भाग दें, तो हमें एक परिमेय संख्या प्राप्त होती है, जो दी हुई परिमेय संख्या के समतुल्य परिमेय संख्या कही जाती है।
7. परिमेय संख्या $\frac{x}{y}$ का सरलतम रूप $\frac{x \div m}{y \div m}$ होता है, जहाँ m परिमेय संख्या के अंश x और हर y के निरपेक्ष मानों का महत्तम समापवर्तक है। परिमेय संख्याओं का सरलतम रूप ही उसका मानक रूप होता है।
8. संख्या रेखा का एक ही बिन्दु अनन्त समतुल्य परिमेय संख्याओं को निरूपित करता है।
9. दो क्रमागत पूर्ण संख्याओं के मध्य अनन्त परिमेय संख्याएँ होती हैं।
10. यदि $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ दो परिमेय संख्याएँ हैं तो $\frac{a}{b} >, =, < \frac{c}{d}$, जहाँ b और d दोनों धनात्मक हैं।
11. प्रत्येक धन परिमेय संख्या शून्य से बड़ी होती है तथा प्रत्येक ऋण परिमेय संख्या शून्य से छोटी होती है।

उत्तरमाला

अभ्यास 1(a)

1. $\frac{-7}{1}, \frac{1}{1}, \frac{27}{1}, \frac{-45}{1}, \frac{71}{1}$ 2. (क) $\frac{8}{-10}$ (ख) $\frac{-16}{20}$ (ग) $\frac{20}{-25}$ (घ) $\frac{-24}{30}$; 3. (क) $\frac{5}{7}$, ((ख)) $\frac{-10}{-14}$, (ग) $\frac{15}{12}$, (घ) $\frac{-25}{-35}$; 4. (क) $\frac{9}{1}$, ((ख)) $\frac{-11}{17}$, (ग) $\frac{4}{19}$, (घ) $\frac{-7}{13}$; 5. (क) $\frac{7}{-13}$, (ख) $\frac{11}{19}$, (ग) $\frac{18}{-23}$, (घ) $\frac{19}{23}$; 6. (क) धनात्मक, $\frac{9}{13}$, (ग) धनात्मक, $\frac{7}{23}$; 7. (क) ऋणात्मक, $\frac{-7}{11}$, (ग) ऋणात्मक, $\frac{-8}{35}$; 8. (क) $\frac{-3}{7}$, (ख) $\frac{2}{3}$, (ग) $\frac{-7}{1}$, (घ) $\frac{-9}{16}$; 9. (क) 15, -21, (ख) 15, 40, (ग) 18, -45, (घ) -30, -16; 10. (क) $\frac{2}{5} = \frac{-20}{-50} = \frac{-6}{-15} = \frac{8}{20}$ आदि, (ख) $\frac{7}{-11} = \frac{-7}{22} = \frac{-14}{2} = \frac{-21}{3}$ आदि, (ग) $\frac{-8}{-5} = \frac{8}{5} = \frac{-16}{-10} = \frac{24}{15}$ आदि

ध्यान दें कि किसी परिमेय संख्या के समतुल्य अनगिनत परिमेय संख्याएँ होती हैं, उनमें से कोई तीन ली गयी हैं।

अभ्यास 1(b)

1. (क) $\frac{-2}{5}$, (ख) $\frac{3}{4}$, (ग) $\frac{5}{9}$, (घ) $\frac{2}{11}$, 2. (क) \neq (ख) $=$ (ग) \neq , (घ) \neq , 3. (ख) समान, (ग) समान,



5. (ख) असमान

अभ्यास 1(c)

1. (क) $\frac{7}{9}$, (ख) $\frac{-5}{8}$, (ग) $\frac{-7}{12}$, (घ) $\frac{-3}{-13}$, 2. (क) $\frac{5}{-9}$, (ख) $\frac{6}{1}$, (ग) $\frac{16}{-7}$, (घ) $\frac{4}{-3}$, 3. (क) (i) $\frac{2}{-9}$, (ख) (iv) $\frac{7}{10}$, (ग) (i) $\frac{-11}{18}$, (घ) (ii) $\frac{-2}{-7}$, 4. (क) $<$ (ख) $<$ (ग) $=$ (घ) $>$; 5. $\frac{-7}{10}$, $\frac{8}{-15}$, $\frac{-17}{-30}$, $\frac{3}{5}$, 6. $\frac{4}{7}$, $\frac{-3}{-12}$, $\frac{11}{-24}$, $\frac{-5}{6}$;

दक्षता अभ्यास 1

1. (क) (iv) अनन्त, (ख) (iii) $\frac{-1}{5}$ (ग) (ii) $\frac{-8}{5}$ (घ) (iii) अनन्त,, 2. (क) सत्य, (ख) सत्य, (ग) असत्य, (घ) सत्य, (च) सत्य, (छ) असत्य, (ज) सत्य, (झ) सत्य, (ट) असत्य, (ठ)

असत्य, (ड) सत्य, 3. (क) $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{6}$; (ख) $\frac{1}{-3}$, $\frac{-4}{1}$, $\frac{-5}{7}$, $\frac{-3}{4}$; (ग) $\frac{7}{-18}$, $\frac{5}{-9}$, $\frac{-7}{12}$, $\frac{-2}{3}$; (घ)

$\frac{9}{-24}$, $\frac{5}{-12}$, $\frac{-7}{16}$, $\frac{-3}{4}$;