

इकाई : 11 वृत

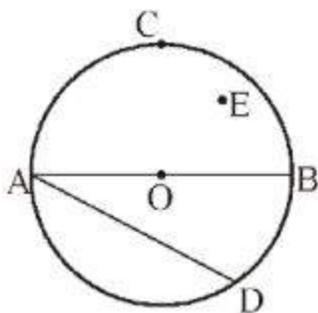


- वृत के निम्नलिखित प्रगुणों का प्रायोगिक सत्यापन :
- अर्धवृत का कोण समकोण होता है
- चाप के सम्मुख केन्द्र पर बना कोण, उसी चाप द्वारा शेषवृत के किसी बिन्दु पर बने कोण का दूना होता है
- एक ही वृतखंड के कोण बराबर होते हैं

भूमिका : पिछली कक्षा में हम वृत की अवधारणा से परिचित हो चुके हैं । इसके साथ ही हमने वृत से संबंधित कई पारिभाषिक शब्दों जैसे केन्द्र, त्रिज्या, व्यास, जीवा, चाप, अर्धवृत, त्रिज्यखंड और वृतखंड के बारे में भी जानकारी प्राप्त कर ली है जिसकी पुनरावृति हम निम्न उदाहरण के द्वारा कर सकते हैं ।

इन्हें कीजिए :

एक 3.0 सेमी का वृत O केन्द्र ले कर खींचिए। वृत की त्रिज्या OA को वृत के किसी बिन्दु B तक बढ़ाइए। वृत के बिन्दु A से AD जीवा खींचिए। अब निम्न बिन्दुओं पर विचार कीजिए।



उपर्युक्त चित्र में आपने देखा है कि

AB वृत्त का व्यास है। आप जानते हैं कि व्यास त्रिज्या का दो गुना होता है। चित्र में वृत्त की त्रिज्या OA, 3.00 सेमी दी गई है। $AB = 2.0A$ अतः व्यास AB का नाप 6.00 सेमी होगा। वृत्त की सबसे बड़ी जीवा वृत्त का व्यास होती है, व्यास वृत्त को दो समान भागों में विभक्त करता है और प्रत्येक भाग अर्धवृत्त कहलाता है। वक्र BCA तथा ADB अर्धवृत्त हैं और वृत्त के किसी भाग को चाप कहते हैं। चित्र में वक्र BC एक चाप है।

अब इस कक्षा में हम वृत्त के चाप या जीवा द्वारा वृत्त के केन्द्र और उसके बिन्दुओं पर बनने वाले कोणों तथा इनके परस्पर सम्बन्धों के बारे में इस इकाई के अन्तर्गत अध्ययन करेंगे।

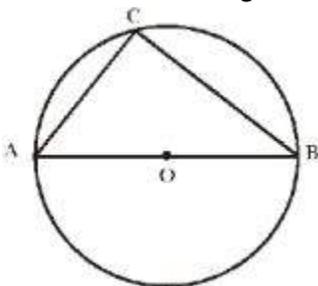
11.1 अर्धवृत्त का कोण :

अपनी अभ्यास पुस्तिका पर चित्रानुसार एक वृत्त खींचिए जिसका केन्द्र O है। इसका एक व्यास AOB खींचिए। वृत्त पर बिन्दु C लीजिए। C को A और B से मिलाइए।

अर्धवृत्त ACB में व्यास AB के द्वारा अर्धवृत्त के बिन्दु C पर बने कोण का नाम $\angle ACB$ है।

।

$\angle ACB$ को अर्धवृत्त का कोण कहते हैं।

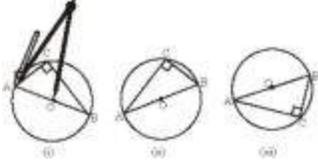


आकृति 11.1

इस प्रकार किसी वृत्त के व्यास द्वारा वृत्त के किसी बिन्दु पर बने कोण को अर्धवृत्त का कोण कहते हैं।

इन्हें कीजिए, तर्क से निष्कर्ष निकालिए :

अपनी अभ्यास पुस्तिका पर आकृति के अनुसार तीन वृत्त बनाइए जिसका केन्द्र O है। इसमें व्यास AOB खींचिए। इस प्रकार बने एक अर्धवृत्त में बिन्दु C लीजिए। रेखाखंड AC और BC खींचिए। इस प्रकार $\angle ACB$ अर्धवृत्त का कोण बन गया है। $\angle ACB$ नापिए तथा अन्तर $90^\circ - \angle ACB$ ज्ञात कीजिए।



आकृति 11.2

तीन अन्य अर्धवृत्तों के कोणों के साथ भी यही प्रक्रिया दोहराइए और प्राप्त परिणामों को निम्नवत् सारणीबद्ध कीजिए:

अर्धवृत्त का क्रमांक	$\angle ACB$	$90^\circ - \angle ACB$
1.		
2.		
3.		

हम पायेंगे कि प्रत्येक बार $90^\circ - \angle ACB$ का मान शून्य या लगभग शून्य है। इस प्रकार हम कह सकते हैं कि $\angle ACB = 90^\circ$

अतः हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि -

वृत्त के व्यास द्वारा अर्धवृत्त पर किसी बिन्दु पर निर्मित कोण समकोण होता है।

प्रयास कीजिए :

अपनी अभ्यास पुस्तिका पर भिन्न-भिन्न त्रिज्याओं के पाँच वृत्त खींचकर उनके व्यासों द्वारा अर्धवृत्तों के बिन्दुओं पर निर्मित कोणों की माप चाँदा की सहायता से ज्ञात करें।

11.2 इस पर चर्चा करके सत्यापित कीजिए :

वृत्त के व्यास द्वारा अर्धवृत्त के किसी बिन्दु पर बना कोण समकोण होता है।

व्यास AB के मध्य बिन्दु O को केन्द्र मानकर तथा OA को त्रिज्या लेकर व्यास AB पर एक अर्धवृत्त बनाइए। अर्धवृत्त पर एक बिन्दु C लीजिए। रेखाखंड AC और BC खींचिए। इस प्रकार $\angle ACB$ अर्धवृत्त का कोण बन गया।



आकृति 11.3

अब एक ट्रेसिंग पेपर लेकर, सेट स्क्वायर की सहायता से एक समकोण त्रिभुज XPY उपर्युक्त चित्र के अनुसार काट कर निकाले। इस प्रकार त्रिभुज का $\angle XPY$ समकोण है। $\angle XPY$ को $\angle ACB$ पर इस प्रकार अध्यारोपित कीजिए कि बिन्दु P, बिन्दु C पर पड़े और भुजा PX, भुजा CA पर पड़े। अब क्या PY भुजा CB पर पड़ती है? हम देखेंगे कि वास्तव में PY, CB पर पड़ती है। इस प्रकार $\angle XPY = \angle ACB$ को पूरा-पूरा ढक लेता है।

अतः $\angle ACB = \angle XPY$

परन्तु $\angle XPY = 90^\circ$

अतः $\angle ACB = 90^\circ = 1$ समकोण

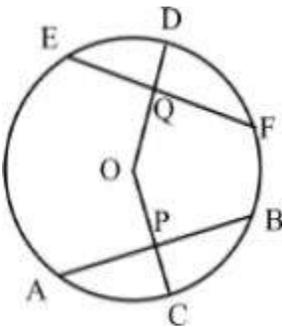
इसी प्रकार अर्धवृत्त पर एक अन्य बिन्दु D लीजिए। AD और BD को मिलाकर अर्धवृत्त का कोण $\angle ADB$ बनाइए और XPY को $\angle ADB$ पर अध्यारोपित कीजिए। क्या $\angle XPY$, $\angle ADB$ को पूरा-पूरा ढक लेता है? हम देखेंगे कि $\angle XPY$, $\angle ADB$ को भी ढक लेता है।

इसलिए $\angle ADB = \angle XPY = 1$ समकोण

अतः वृत्त के व्यास द्वारा अर्धवृत्त के किसी बिंदु पर बना कोण समकोण होता है।

अभ्यास 11 (a)

1. पाश्च चित्र में O वृत्त का केन्द्र है। निम्नलिखित कथनों में सत्य/असत्य कथनों को बताइए :



आकृति 11.4

(i) रेखाखंड AB जीवा है।

(ii) QF त्रिज्या है।

(iii) OD त्रिज्या है।

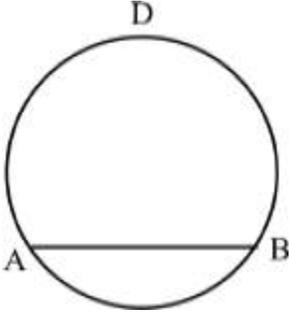
(iv) PC जीवा है।

2. अर्धवृत्त में बने कोण की माप होती है :

(i) 30° (ii) 60°

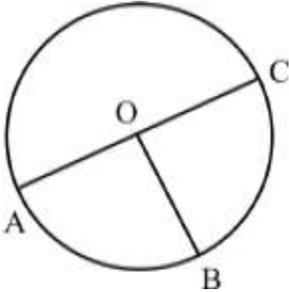
(iii) 180° (iv) 90°

3. आकृति 11.5 के अनुसार अपनी अभ्यास पुस्तिका पर एक आकृति खींच कर उसके दीर्घ वृत्तखंड को छायांकित कीजिए।



आकृति 11.5

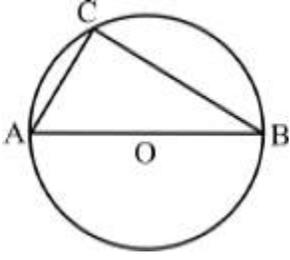
4. आकृति 11.6 में O वृत्त का केन्द्र है। आकृति में निर्मित किन्हीं दो त्रिज्यखंडों के नाम लिखिए।



आकृति 11.6

5. 2.5 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए जिसका केन्द्र O है। इस वृत्त को दो अर्धवृत्तों में विभक्त कीजिए।

6. आकृति 11.7 में O वृत्त का केन्द्र है। $\angle ACB$ कितने अंश का है ? अपने उत्तर के पक्ष में कारण बतायें ।



आकृति 11.7

11.3 चाप का अंशमाप (Degree Measure of an Arc) :

प्रयास कीजिए :

नीचे तीन वृत्त हैं, जिनके केन्द्र क्रमशः P, Q तथा R हैं। प्रत्येक वृत्त में लघु चाप ABके सम्मुख कोण बनाए गये हैं।



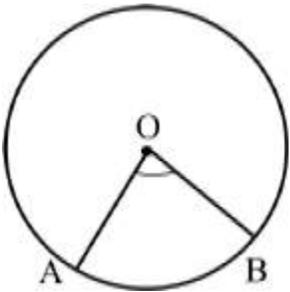
आकृति 11.8

उपर्युक्त वृत्तों में किस वृत्त में लघु चाप ABके सम्मुख केन्द्र पर कोण बना है ?

चित्र (i) में लघु चाप ABके सम्मुख केन्द्र पर $\angle AQB$ बना है। $\angle AQB$ के माप को चाप AB का अंशमाप कहते हैं।

याद रखें :

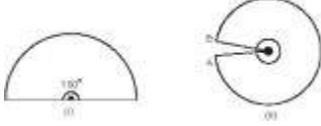
आकृति 11.9 में : O केन्द्र का एक वृत्त है। इसके लघु चाप ABका अंशमाप, चाप ABके सम्मुख केन्द्र पर बने कोण AOB का माप होता है। लघु चाप ABके अंशमाप को $m \widehat{AB}$ से प्रदर्शित करते हैं।



आकृति 11.9

चित्र में दीर्घचाप AB का अंशमाप $360^\circ - m \widehat{AB}$ है। यहाँ $m \widehat{AB}$ संगत लघुचाप का अंशमाप है। किसी चाप AB की लम्बाई, चाप AB के द्वारा वृत्त के केन्द्र पर अन्तरित कोण का समानुपाती होता है।

11.4. अर्धवृत्त और वृत्त के अंशमाप :



आकृति 11.10

उपर्युक्त चित्रों में अर्धवृत्त और वृत्त के अंशमाप दिखाये गये हैं। वृत्त में बिन्दु A तथा बिन्दु B यदि पूर्णतः संपाती हो जाँय, तो वृत्त का अंशमाप 360° हो जायेगा।

अतः अर्धवृत्त का अंशमाप 180° होता है तथा वृत्त का अंशमाप 360° होता है।

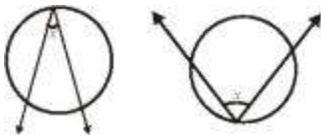
प्रयास कीजिए :

निम्नलिखित कथनों में सत्य/असत्य कथन बतलाइए :

- वृत्त का अंशमाप 180° होता है।
- दीर्घ वृत्तखंड का अन्तर्गत कोण न्यूनकोण होता है।
- लघु वृत्तखण्ड का कोण समकोण होता है।
- किसी वृत्त की सबसे बड़ी जीवा व्यास होती है।

11.5. अन्तर्गत कोण (Inscribed angle)

ध्यान दें



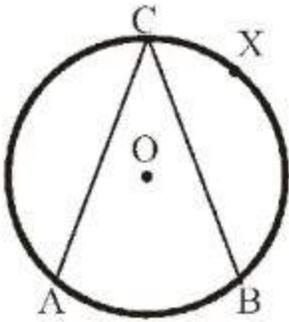
आकृति 11.11

उपर्युक्त चित्रों में ध्यान दें कि $\angle x$ का शीर्ष वृत्त का एक बिन्दु है तथा इस कोण की दोनों भुजाएँ वृत्त को दो अलग-अलग बिन्दुओं पर काटती हैं। इस प्रकार का बना $\angle x$ अन्तर्गत कोण कहलाता है। इस प्रकार हम कह सकते हैं कि

कोई कोण वृत्त का अन्तर्गत कोण होता है यदि उस कोण का शीर्ष वृत्त का एक बिन्दु हो तथा उस कोण की भुजाएँ वृत्त को अलग-अलग बिन्दुओं पर काटती हों।

याद रखें :

पाश्र्वचित्र में O केन्द्र का एक वृत्त है। इसके दीर्घचाप AXB पर एक बिन्दु C है। रेखाखंड CA तथा CB खींचे गये हैं। इस प्रकार $\angle ACB$, दीर्घचाप AXB का अन्तर्गत कोण है। इसे इस प्रकार भी कह सकते हैं कि दीर्घ चाप AXB का अन्तर्गत कोण $\angle ACB$, लघुचाप AB द्वारा वृत्त के शेष भाग के बिन्दु C पर बना कोण है।



आकृति 11.12

11.6 किसी चाप के द्वारा केन्द्र पर बने कोण और उसी चाप के द्वारा वृत्त के शेषभाग में स्थित किसी बिन्दु पर अन्तरित कोण में सम्बन्ध :

इन्हें करिए, सोचिए और निष्कर्ष निकालिए :

तीन वृत्त खींचिए। प्रत्येक का केन्द्र O लीजिए। जैसा कि आकृति 4.13 में दर्शाया गया है।



(i) (ii) (iii)

आकृति 11.13

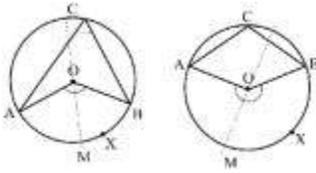
अपनी अभ्यास पुस्तिका पर चित्र (1) के अनुसार एक वृत्त जिसका केन्द्र O' है खींचिए तथा उस पर दो बिन्दु A और B लीजिए। लघु चाप AB पर बिन्दु X तथा दीर्घचाप AB पर बिन्दु C लीजिए। AC, BC, A एवं BO रेखाखण्डों को मिलाइए जिससे अन्तर्गत कोण ACB तथा केन्द्र पर $\angle AOB$ बन गये। $\angle ACB$ तथा $\angle AOB$ को नापिए।

अपनी अभ्यास पुस्तिका पर उपर्युक्त प्रक्रिया चित्र (2) और (3) के अनुसार दोहराइए। अपनी अभ्यास पुस्तिका पर प्राप्त परिणामों को निम्नवत् सारणीबद्ध कीजिए :

क्रम का क्रम	$\angle ACB$	$\angle AOB$	$\angle AOB - 2 \angle ACB$
1.			
2.			
3.			

हम देखते हैं कि प्रत्येक स्थिति में $\angle AOB - 2 \angle ACB$ शून्य या लगभग शून्य है। अतः प्रत्येक अवस्था में, $\angle AOB = 2 \angle ACB$ ले सकते हैं।

इन्हें भी कीजिए और सोचिए : आकृति 4.14 के अनुसार अभ्यास पुस्तिका के पृष्ठ पर एक वृत्त खींचिए और उसका केन्द्र O मानिए। वृत्त पर दो बिन्दु A और B लीजिए। लघु चाप AB में कोई बिन्दु C लीजिए तथा वृत्त के शेष भाग पर बिन्दु M लीजिए। रेखाखण्डों AC, BC, AO एवं BO को खींचिए। इस प्रकार चाप AXB द्वारा अन्तरित $\angle ACB$ अन्तर्गत कोण तथा $\angle AOB$ केन्द्र पर अन्तरित कोण हैं।



आकृति 11.14

एक ट्रेसिंग पेपर पर चित्र (i) को ट्रेस कीजिए। इस प्रकार इस कागज पर भी O केन्द्र वाले वृत्त पर $\angle AOB$ और $\angle ACB$ बन गये। कागज को ऐसा मोड़िए कि बिन्दु A, बिन्दु B पर पड़े जिससे चाप AXB का मध्य बिन्दु M प्राप्त हो जाए। इस प्रकार $\angle AOB$ दो बराबर कोणों $\angle AOM$ तथा $\angle MOB$ में विभक्त हो गया।

इस प्रकार $\angle AOM = \angle MOB$ क्योंकि OM पर आकृति को मोड़ने पर OA भुजा, OB को ढक लेती है। अतः $\angle AOM = \angle MOB = \frac{1}{2} \angle AOB$ । अब कागज पर बने $\angle AOM$ को अभ्यास पुस्तिका पर बने $\angle ACB$ पर रखिए। हम देखेंगे कि ये दोनों कोण एक दूसरे को ढक लेते हैं।

इसलिए $\angle ACB = \angle AOM$

परन्तु $\angle AOM = \frac{1}{2} \angle AOB$

अतः $\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB$

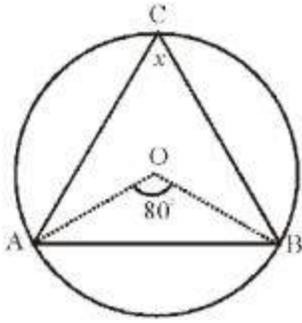
यही प्रक्रिया चित्र (ii) के लिए दोहराइए। हम देखेंगे कि

$$\angle ACB = \frac{1}{2} \text{AOB}$$

अतः हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि

एक चाप द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण, उसी चाप द्वारा वृत्त के शेष भाग में स्थित किसी बिन्दु पर अन्तरित कोण का दो गुना होता है।

उदाहरण 1: यदि किसी आकृति 11.15 में O दिये गये वृत्त का केन्द्र है। x का मान ज्ञात करें।



आकृति 11.15

हल : दिया है $\angle A = 80^\circ$

तथा $\angle ACB = ?$

चूँकि $\angle AOB$ चाप B द्वारा वृत्त के केन्द्र O पर अन्तरित कोण है तथा $\angle ACB$ उसी चाप AB द्वारा वृत्त के शेष भाग के बिन्दु C पर अन्तरित कोण हैं।

$$\angle AOB = 2(\angle ACB)$$

$$\text{या, } 80^\circ = 2x$$

$$\text{या, } 2x = 80^\circ$$

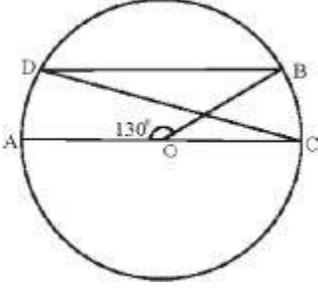
$$\text{या, } x = \frac{1}{2}(80^\circ)$$

$$\text{या, } x = 40^\circ$$

इस प्रकार x का मान 40° है।

उदाहरण 2: आकृति 11.16 में दिये गये वृत्त का केन्द्र O है। OC वृत्त का व्यास है, BD जीवा है, OB और CD को मिलाया गया है। यदि $\angle AOB = 130^\circ$, तो $\angle BDC$ का मान

ज्ञात करें



आकृति 11.16

हल : दिया है, AOC वृत्त का व्यास है, तथा $\angle AOB = 130^\circ$

$\angle BDC = ?$

तथा AOC सरल रेखा है

$$\therefore \angle BOC + \angle AOB = 180^\circ$$

$$\text{या } \angle BOC + 130^\circ = 180^\circ$$

$$\text{या, } \angle BOC = 180^\circ - 130^\circ$$

$$\text{या, } \angle BOC = 50^\circ$$

चूंकि $\angle BOC$ चाप BC द्वारा वृत्त के केन्द्र पर अन्तरित कोण है तथा $\angle BDC$ उसी चाप BC द्वारा वृत्त के शेष भाग D पर बना कोण है। अतः

$$\angle BOC = 2(\angle BDC)$$

$$\text{या, } 50^\circ = 2(\angle BDC)$$

$$\text{या, } 2(\angle BDC) = 50^\circ$$

$$\text{या, } \angle BDC = \frac{50^\circ}{2}$$

$$\text{या, } \angle BDC = 25^\circ$$

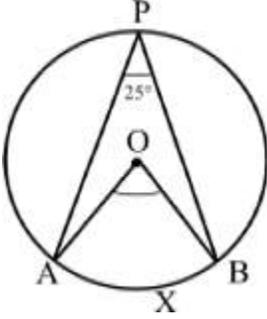
$$\text{या: } \angle BDC = 25^\circ$$

अभ्यास 11 (b)

1. अतः अर्धवृत्त का अंशमाप होता है :

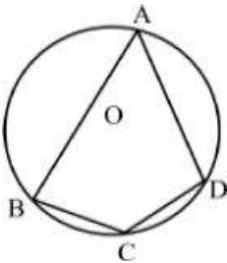
(i) 45° (ii) 90° (iii) 180° (iv) 360°

2. किसी वृत्त में यदि उसके किसी लघुचाप का अंशमाप 70° है, तो उसके दीर्घचाप का अंशमाप कितना होगा ?
3. किसी चाप द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण तथा उसके द्वारा वृत्त के शेष भाग पर स्थित किसी बिन्दु पर अन्तरित कोण में क्या सम्बन्ध होता है ?
4. आकृति 11.17 में O वृत्त का केन्द्र है। चाप AXB का अंशमाप बनाइए।



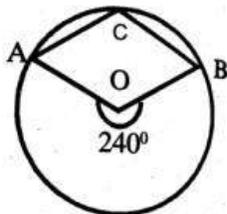
आकृति 11.17

5. आकृति 11.18 में लघु चाप BCD एवं दीर्घ चाप BAD के अन्तर्गत कोणों के नाम बताइए।



आकृति 11.18

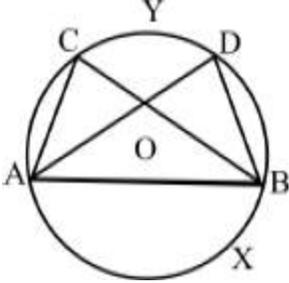
6. आकृति 11.19 में O वृत्त का केन्द्र है, A, C, B वृत्त पर तीन बिन्दु हैं, तथा $\angle AOB$ का प्रतिवर्ती कोण $= 240^\circ$ है तो $\angle ACB$ का मान ज्ञात करें।



आकृति 11.19

इन्हें कीजिए सोचिए और लिखिए :
एक ही वृत्तखंड के कोण

अपनी अभ्यास पुस्तिका पर एक वृत्त खींचिए जिसका केन्द्र O हो। इसमें जीवा AB खींचिए। इस प्रकार वृत्त दो भागों AXB और AYB में बँट गया। चाप AYB पर दो बिन्दु C और D लीजिए। रेखाखण्डों AC, BC, AD एवं BD को खींच दीजिए।



आकृति 11.20

इस प्रकार $\angle ACB$ और $\angle ADB$ एक ही चाप AYB के अन्तर्गत कोण या एक ही वृत्तखंड के कोण हैं। दोनों कोण एक ही चाप AYB को अन्तःखंडित करते हैं।

अतः

यदि दो कोण किसी वृत्त के एक ही चाप को अन्तः खंडित करते हों अर्थात् उनके शीर्ष उसी चाप पर हों, तो उन्हें एक ही चाप के अन्तर्गत कोण या एक ही वृत्तखंड के कोण कहते हैं।

11.7 एक ही वृत्तखंडों के कोणों में संबंध

इन्हें कीजिए, सोचिए और निष्कर्ष निकालिए :



(i) (ii) (iii)

आकृति 11.21

उपर्युक्त आकृति में (i) के अनुसार अपनी अभ्यास पुस्तिका पर बिन्दु O को केन्द्र मानकर एक वृत्त खींचिए। इसमें एक जीवा AB खींचिए। इस प्रकार वृत्त दो भागों AXB और AYB में बँट गया। चाप AYB पर दो बिन्दु C और D लीजिए। रेखाखण्डों AC, AD, BC एवं BD को खींच दीजिए। इस प्रकार $\angle ACB$ और $\angle ADB$ एक ही वृत्तखंड $\angle AYB$ के कोण बन गए।

$\angle ACB$ और $\angle ADB$ को नापिए तथा $\angle ACB - \angle ADB$ ज्ञात कीजिए। इसी प्रकार आकृति (ii) और (iii) के अनुसार दो अन्य वृत्त अपनी अभ्यास पुस्तिका पर खींचकर उपर्युक्त प्रक्रिया को दोहराइए और प्राप्त परिणामों को अपनी-अपनी अभ्यास पुस्तिका पर निम्नवत् सारणीबद्ध कीजिए :

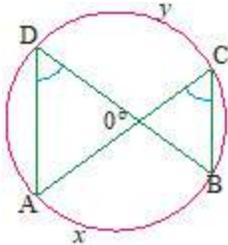
वृत्त का क्रमांक	ACB	ADB	ACB - \angle ADB
(i)			
(ii)			
(iii)			

हम देखेंगे कि प्रत्येक स्थिति में $\angle ACB - \angle ADB$ का मान शून्य या लगभग शून्य है।

अतः प्रत्येक स्थिति में हम कह सकते हैं कि $\angle ACB = \angle ADB$ है।

इन्हें भी कीजिए, चर्चा करें तथा निष्कर्ष निकालिए :

अपनी अभ्यास पुस्तिका पर एक वृत्त खींचिए जिसका केन्द्र O हो। वृत्त पर दो बिन्दु A और B लीजिए। वृत्त दो चापों AXB और AYB में विभक्त हो गया। चाप AYB पर दो बिन्दु C और D लीजिए। रेखाखण्डों AC, BC, AD और BD को खींच दीजिए।



आकृति 11.22

जिसमें $\angle ACB$ और $\angle ADB$ एक ही वृत्तखंड AYB के कोण बन गए।

अब ट्रेसिंग कागज पर $\angle ACB$ के बराबर ट्रेस कर के उसे काट कर अलग कीजिए तथा इसे $\angle ADB$ पर इस प्रकार रखिए कि बिन्दु C, बिन्दु D पर और भुजा CA, भुजा DA पर पड़े। अब देखिए कि क्या $\angle ACB$ की भुजा CB, भुजा DB पर पड़ती है ? हम देखेंगे कि भुजा CB, भुजा DB पर ही पड़ती है।

इस प्रकार $\angle ACB = \angle ADB$

अतः $\angle ACB = \angle ADB$

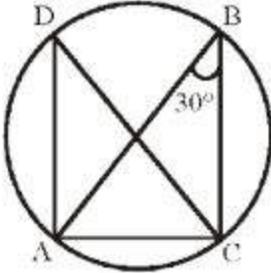
अब $\angle ACB$ की ट्रेस कापी इस प्रकार घुमाइए कि बिन्दु C, चाप AYB के बिन्दु E पर रहे तथा CA सदैव A से जाए तो, हम देखेंगे कि प्रत्येक स्थिति में C बिन्दु से ही होकर

जाएगी। अतः चाप AYB पर यदि कोई बिन्दु E है, तो $\angle AEB = \angle ACB = \angle ACB$

अतः हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि

एक ही वृत्तखंड के कोण या एक ही चाप के अन्तर्गत कोण समान होते हैं।

उदाहरण 3: आकृति 11.23 में दो जीवा AB तथा CD वृत्त के अन्दर किसी बिन्दु पर प्रतिच्छेद करते हैं। $\angle ABC = 30^\circ$



आकृति 11.22

आकृति 11.23

हल: दिया है $\angle ABC = 30^\circ$

तो $\angle CDA = ?$

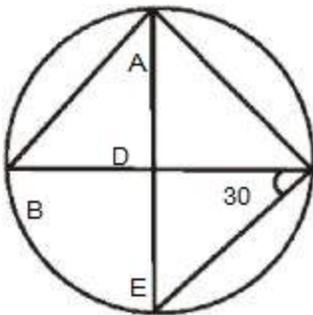
$\angle CDA$ तथा $\angle ABC =$ एक दीर्घ चाप AC के अंतर्गत कोण है।

अतः $\angle CDA = \angle ABC$

या $\angle CDA = 30^\circ$

इस प्रकार $\angle CDA = 30^\circ$

उदाहरण 3: आकृति 11.24 में त्रिभुज ABC एक वृत्त के अंदर अंतरित है। $\angle BAC$ का समद्विभाजक BC को D पर तथा वृत्त के बिन्दु E पर मिलाता है। यदि $\angle ECD = 30^\circ$ तो $\angle ABC$ मान क्या है?



आकृति 11.24

हल: $\angle BAD = \angle BCE$

या, $\angle BAD = 30^\circ$

AE $\angle BAC$ समद्विभाजक है

अतः $\angle BAC = 2 \angle BAD$

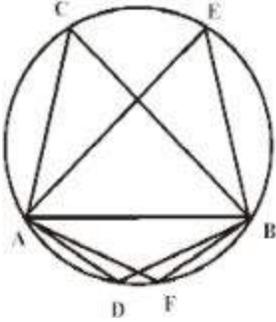
या, $\angle BAC = 2 \times 30^\circ$

या, $\angle BAC = 60^\circ$

इस प्रकार $\angle BAC = 60^\circ$

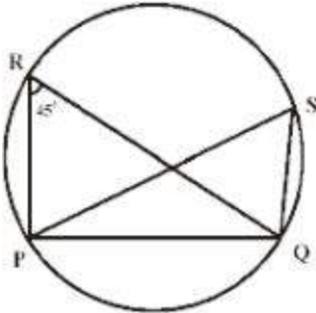
अभ्यास 11 (c)

1 आकृति 11.25 में एक ही वृत्तखंड में बने कोणों के नाम लिखिए।



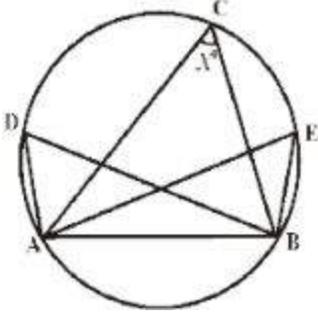
आकृति 11.25

2. आकृति 11.26 में बने कोण $\angle PRQ = 45^\circ$, तो $\angle PSQ$ का मान बताइए।



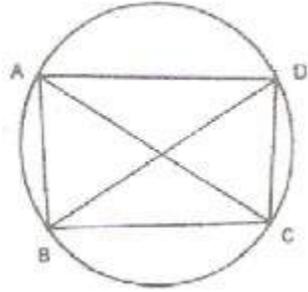
आकृति 11.26

3. आकृति 11.27 में यदि $\angle ACB = x$ तो $\angle ADB$ एवं $\angle AEB$ के मान बताइए।



आकृति 11.27

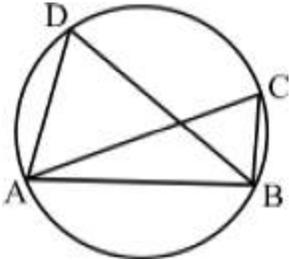
4. आकृति 11.28 में बने कोणों के सम्बन्ध में निम्नलिखित कथनों में सत्य/असत्य कथनों को छाँटिए :



आकृति 11.28

- (i) $\angle BDC = \angle BAC$
- (ii) $\angle BDC = \angle BCA$
- (iii) $\angle ACB = \angle ADB$
- (iv) $\angle BDA = \angle CDB$
- (v) $\angle ACD = \angle DBA$

5. आकृति 11.29 में $\angle ACB$ के बराबर निम्नलिखित में से कौन सा कोण है ?



आकृति 11.29

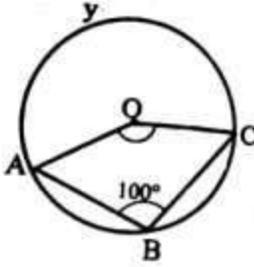
(i) $\angle ABD$ (ii) $\angle ADB$

(iii) $\angle DBC$ (iv) $\angle BAD$

का अंशमाप एवं अभ्यास आकृति 11.29 में $\angle ACB$ के बराबर निम्नलिखित में से कौन सा कोण है ?

समेकित उदाहरण :

उदाहरण 5: तीन बिन्दु A, B तथा C एक वृत्त पर स्थित हैं। बिन्दु O वृत्त का केन्द्र है। यदि $\angle ABC = 100^\circ$, तो $\angle AOC$ ज्ञात कीजिए।



आकृति 11.29

आकृति 11.30

हल : चूँकि चाप AYC द्वारा केन्द्र O पर वृहत्कोण $\angle AOC$ तथा वृत्त के शेष भाग पर स्थित बिन्दु B पर $\angle ABC$ बनता है।

इसलिए वृहत्कोण $\angle AOC = 2 \angle ABC$

परन्तु $\angle ABC = 100^\circ$

अतः वृहत्कोण $\angle AOC = 2 \times 100^\circ$

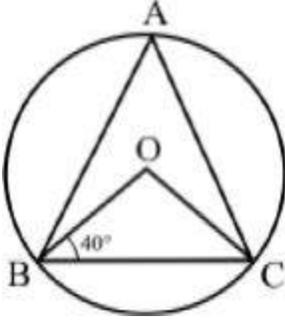
$= 200^\circ$

या अधिक कोण $\angle AOC = 360^\circ - 200^\circ$

$= 160^\circ$

या $\angle AOC = 160^\circ$

उदाहरण 6 : आकृति 11.31 में बिन्दु O वृत्त का केन्द्र है। दीर्घ चाप ABC पर एक बिन्दु है। यदि $\angle OAB = 30^\circ$, तो $\angle ACB$ का मान ज्ञात कीजिए।



आकृति 11.31

हल : ΔOAB में

चूँकि $OA = OB$ (क्योंकि एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ हैं।)

अतः $\angle OBA = \angle OAB = 30^\circ$

या $\angle AOB = 180^\circ - \angle OBA - \angle OAB$

$$= 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ$$

$$= 180^\circ - 60^\circ$$

$$= 120^\circ$$

लघुचाप AB द्वारा केन्द्र पर $\angle AOB$ और वृत्त के शेष भाग के बिन्दु C पर $\angle ACB$ बना है।

अतः $\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB$

$$= \frac{1}{2} \times 120^\circ$$

$$= 60^\circ$$

दक्षता अभ्यास 11

1. आकृति 11.32 में वृत्त का केन्द्र O है। रेखा BOD, $\angle AOC$ की समद्विभाजक है, तथा $\angle COD = 50^\circ$, तो $\angle ABC$ की माप होगी:

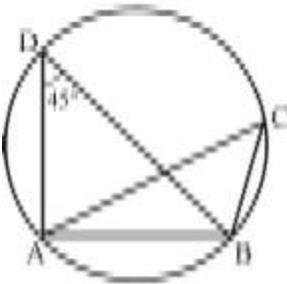


आकृति 11.32

(i) 50° (ii) 25°

(iii) 100° (iv) 120°

2. आकृति 11.33 में AB वृत्त की जीवा है और बिन्दु C तथा D वृत्त पर है। यदि $\angle ADB = 45^\circ$ तो $\angle ACB$ की माप होगी:

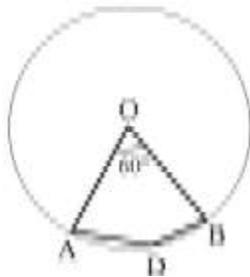


आकृति 11.33

(i) 90° (ii) 135°

(iii) 45° (iv) $\frac{22^\circ}{2}$

3. आकृति 11.34 में बिन्दु O वृत्त का केन्द्र है और $\angle AOB = 60^\circ$, $\angle ADB$ की माप होगी :

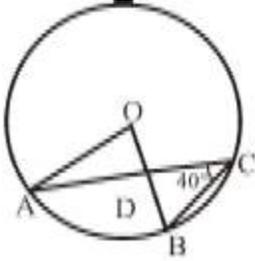


आकृति 11.34

(i) 120° (ii) 150°

(iii) 140° (iv) 30°

4. आकृति 11.35 में बिन्दु O वृत्त का केन्द्र है। इस पर तीन बिन्दु A, B तथा C हैं। यदि $\angle ACB = 40^\circ$, तो $\angle AOB$ की माप होगी :

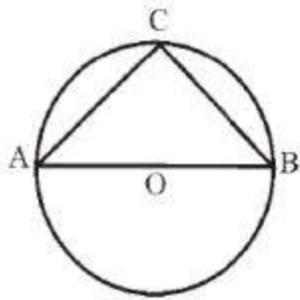


आकृति 11.35

(i) 20° (ii) 40°

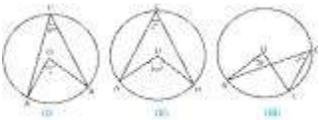
(iii) 60° (iv) 80°

5. आकृति 11.36 में बिन्दु O केन्द्र का एक वृत्त है। वृत्त की दो समान जीवाँ AC और BC खींची गयी हैं। $\angle ABC$ का मान ज्ञात कीजिए।



आकृति 11.36

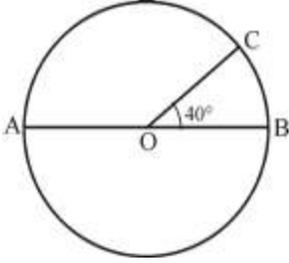
6. निम्नांकित वृत्तों में प्रत्येक का केन्द्र O है। प्रत्येक में x का मान ज्ञात कीजिए।



आकृति 11.37

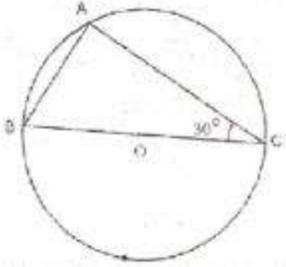
7. वृत्त की एक जीवा की लम्बाई उसकी त्रिज्या के बराबर है। इस जीवा द्वारा लघुवृत्तखंड पर अन्तरित कोण ज्ञात कीजिए।

8. 3.0 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए। इस वृत्त की एक जीवा खींचकर वृत्त को दो वृत्तखंडों में विभक्त कीजिए।
9. अर्धवृत्त किसे कहते हैं ? चित्र बनाकर स्पष्ट कीजिए।
10. आकृति 11.38 में बिन्दु O वृत्त का केन्द्र है। AOB वृत्त का व्यास है और $\angle COB = 40^\circ$ । ज्ञात कीजिए :



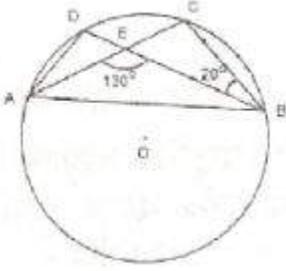
आकृति 11.38

- (i) दीर्घचाप BC का अंशमाप
 - (ii) दीर्घचाप AC का अंशमाप
 - (iii) लघुचाप AC का अंशमाप
 - (iv) अर्धवृत्त ACB का अंशमाप
11. आकृति 11.39 में O वृत्त का केन्द्र है। इसके अन्तर्गत एक $\triangle ABC$ बना है। यदि $\angle ACB = 30^\circ$ तो $\angle A$ और $\angle B$ ज्ञात कीजिए।



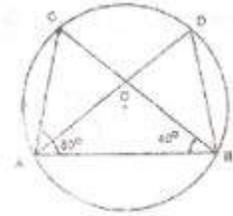
आकृति 11.39

12. वृत्त की एक जीवा की लम्बाई उसकी त्रिज्या के बराबर है। इस जीवा द्वारा दीर्घ वृत्तखंड पर अन्तरित कोण ज्ञात कीजिए।
13. आकृति 11.40 में O वृत्त का केन्द्र है। $\angle AEB = 130^\circ$ और $\angle EBC = 20^\circ$, तो $\angle BDA$ का मान ज्ञात कीजिए।



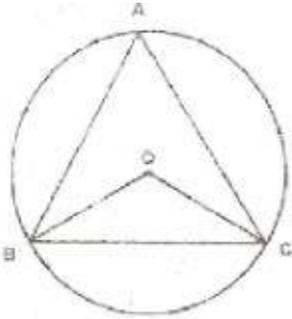
आकृति 11.40

14. आकृति 11.41 में O वृत्त का केन्द्र है। $\angle ABC=40^\circ$ और $\angle CAB=80^\circ$, तो $\angle ADB$ का मान ज्ञात कीजिए।



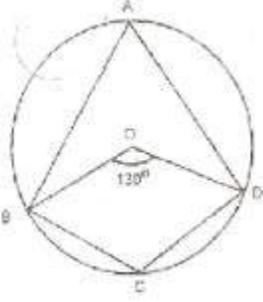
आकृति 11.41

15. आकृति 11.42 में O वृत्त का केन्द्र है तथा $\triangle ABC$ एक समबाहु त्रिभुज है। $\angle BOC$ का मान ज्ञात कीजिए।



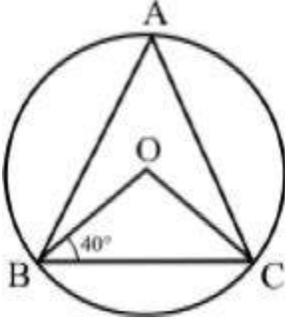
आकृति 11.42

16. आकृति 11.43 में O वृत्त का केन्द्र है और $\angle BOD = 130^\circ$, $\angle BCD$ की माप ज्ञात कीजिए।



आकृति 11.43

17. आकृति 11.44 में O वृत्त का केन्द्र है। $\angle OBC = 40^\circ$, $\angle BAC$ का मान ज्ञात कीजिए।



आकृति 11.44

इकाई में हमने सीखा :

1. किसी वृत्त के व्यास द्वारा वृत्त के किसी बिन्दु पर बने कोण को अर्धवृत्त का कोण कहते हैं।
2. अर्धवृत्त का कोण समकोण होता है।
3. किसी चाप के अन्त्य बिन्दुओं को केन्द्र से मिलाने वाली त्रिज्याओं से उस चाप के सम्मुख केन्द्र पर बना कोण उस चाप का अंशमाप कहलाता है।
4. अर्धवृत्त का अंशमाप 180° होता है तथा वृत्त का अंशमाप 360° होता है।
5. कोई कोण वृत्त का अन्तर्गत कोण होता है, यदि उस कोण का शीर्ष वृत्त का एक बिन्दु हो तथा उस कोण की भुजाएँ वृत्त को अलग-अलग बिन्दुओं पर काटती हैं।
6. एक ही चाप में एक से अधिक अन्तर्गत कोण हो सकते हैं।
7. एक चाप द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण, उसी चाप द्वारा वृत्त के शेष भाग में स्थित किसी बिन्दु पर अन्तरित कोण का दो गुना होता है।

8. यदि दो कोण के शीर्ष किसी वृत्त के एक ही चाप को अन्तःखंडित करते हो अर्थात् उनके शीर्ष उसी चाप पर हों तो उन्हें एक ही चाप के अन्तर्गत कोण या एक ही वृत्तखंड के कोण कहते है। इन दोनों कोण के मान आपस में समान होते हैं।

भ्यास 11 (a)

1. 90^0 , 3. AOB एवं BOC; 5. $\angle ACB = 90^0$

अभ्यास 11 (b)

1. (iii) 180^0 ; 2. 290^0 ; 3. 2 : 1; 4. चाप AXB का अंशमाप $=70^0$; 5. $\angle BCD$ एवं $\angle BAD$; 6. $\angle ACB = 120^0$

अभ्यास 11 (c)

1. $\angle ACB$, $\angle AEB$ एक ही वृत्तखंड (दीर्घ) के कोण हैं। $\angle ADB$, $\angle AFB$ एक ही वृत्तखंड (लघु) के कोण हैं; 2. $\angle PRQ = \angle PSQ = 45^0$; 3. $\angle ADB = x^0$ तथा $\angle AEB = x^0$; 4. (i) सत्य, (ii) असत्य, (iii) सत्य, (iv) असत्य, (v) सत्य, 5. (ii) $\angle ADB$

दक्षता अभ्यास 11

1. (i) 50^0 ; 2. (iii) 45^0 ; 3. (ii) 150^0 ; 4. (iv) 80^0 ; 5. 45^0 ; 6. (i) 80^0 ; (ii) $52\frac{1}{2}^0$, (iii) 35^0 ; 7. 150^0 ; 10. (i) 320^0 , (ii) 220^0 , (iii) 140^0 , (iv) 180^0 ;
11. $\angle A = 90^0$, $\angle B = 60^0$;
12. 30^0 ; 13. 110^0 ; 14. 60^0 ; 15. 120^0 ; 16. 115^0 ; 17. 50^0