

इकाई : 12 क्षेत्रमिति (मेंसुरेशन)



- आयताकार मार्ग का क्षेत्रफल
- त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल
- समान्तर चतुर्भुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल
- समचतुर्भुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल
- घन एवं घनाभ का सम्पूर्णपृष्ठ

12.1 भूमिका :

आप एक ही तल पर बने विभिन्न प्रकार की आकृतियों जैसे: त्रिभुज, आयत, वर्ग, समान्तर चतुर्भुज, समचतुर्भुज आदि से परिचित हो चुके हैं। साथ ही आप ठोस वस्तुओं में घन व घनाभ के पृष्ठों की आकृतियों से भी भली-भाँति परिचित हैं। इस प्रकार विभिन्न बन्द आकृतियों की परिसीमा (Boundary) की लम्बाई भिन्न-भिन्न हैं तथा प्रत्येक बन्द आकृति अपने तल का कुछ निश्चित भाग घेरती हैं जो क्षेत्रफल कहलाता है। ऐसी बन्द आकृतियों की परिसीमा की लम्बाई तथा इनके द्वारा अपने तल पर घेरे गये निश्चित भागों के माप की आवश्यकता पड़ती है। इस प्रकार हम एक तलीय बन्द आकृति की परिसीमा की माप जिस भौतिक राशि से करते हैं उसे उस आकृति का परिमाण कहते हैं। अतः परिमाण एक बन्द आकृति के चारों ओर की दूरी है जबकि क्षेत्रफल एक बन्द आकृति द्वारा घेरे गये तल के भाग या क्षेत्र को दर्शाता है।

प्रायः हम देखते हैं कि खेतों, पार्कों या बगीचों में उनके चारों ओर कुछ स्थान पथ के रूप में छोड़ दिया जाता है। इसी प्रकार चित्रों या पेंटिंग को प्रेम करके कुछ स्थान छोड़ दिया

जाता है। हमें ऐसे पथों या बार्डरों के बनाने में व्यय ज्ञात के लिए इनके क्षेत्रफलों को ज्ञात करने की आवश्यकता होती है। आप इस इकाई में एक ही तल में स्थित विभिन्न प्रकार की बन्द आकृतियों आयत, वर्ग, समान्तर चतुर्भुज, समचतुर्भुज तथा विभिन्न प्रकार के त्रिभुजों के परिमाण और क्षेत्रफल ज्ञात करने की विधियों के बारे में अध्ययन करेंगे साथ ही ठोस वस्तुओं में घन व घनाभ के पृष्ठों के परिमाण और क्षेत्रफल ज्ञात करने की विधियों के बारे में अध्ययन करेंगे।

12.2 आयत तथा वर्ग का परिमाण और उनसे घिरे क्षेत्रों के क्षेत्रफल :

आयत का परिमाण

हम जानते हैं कि :

आयत का परिमाण= चारों भुजाओं की लम्बाइयों का योगफल।

आकृति 12.1 में आयत की लम्बाई= l



आकृति 12.1

आयत की चौड़ाई = b

आयत का परिमाण= $(l + l + b + b)$

= $(2l + 2b)$

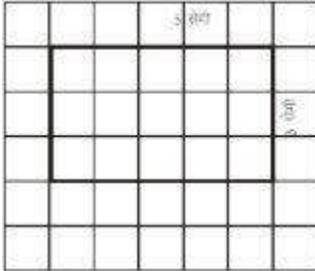
= $2(l + b)$

आयत का क्षेत्रफल :

जिस प्रकार हम किसी रेखा की लम्बाई मापने के लिए मात्रक 1 सेमी का प्रयोग करते हैं, जिसका माप पटरी पर अंकित है, उसी प्रकार क्षेत्रफल की गणना करने के लिए मात्रक वर्ग सेमी या सेमी² का प्रयोग करते हैं जिसका अर्थ ऐसे वर्ग द्वारा घिरे क्षेत्रफल से है जिसकी भुजाएँ 1 सेमी की हों। इसी प्रकार 1 मी² क्षेत्रफल का अर्थ ऐसे क्षेत्र से है जो 1

मी भुजा वाले वर्ग से घिरा हो। एक वर्गीकृत पेपर की सहायता से, क्या हम बता सकते हैं कि एक आयत का क्षेत्रफल कितना होगा, जिसकी लंबाई 5 सेमी तथा चौड़ाई 3 सेमी है?

ग्राफ पेपर पर एक आयत बनाइए जिस पर 1 सेमी×सेमी के वर्ग हों (आकृति 12.2 देखिए)



आकृति 12.2

यह आयत 15 वर्गों को पूर्णतया ढँक लेता है।

आयत का क्षेत्रफल=15 वर्ग सेमी है, जिसे हम

5× 3 वर्ग सेमी (ल0× चौ0) के रूप में भी लिख सकते हैं।

इन्हें कीजिए :

कुछ आयतों की भुजाओं की मापें दी गई हैं। इन्हें ग्राफ पेपर पर रखकर तथा वर्गों की संख्या को गिनकर इनका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

लम्बाई	चौड़ाई	क्षेत्रफल
3 सेमी	2 सेमी
5 सेमी	4 सेमी
6सेमी	5 सेमी

इससे हम क्या निष्कर्ष निकालते हैं?

हमने देखा कि

आयत का क्षेत्रफल=लंबाई× चौड़ाई

बिनाग्राफ पेपर की सहायता से क्या हम एक आयत का क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं, जिसकी लंबाई 6 सेमी तथा चौड़ाई 4 सेमी है ?

हाँ, यह संभव है।

आयत का क्षेत्रफल= लंबाई× चौड़ाई

$$=6 \text{ सेमी} \times 4 \text{सेमी}=24 \text{ वर्ग सेमी}$$

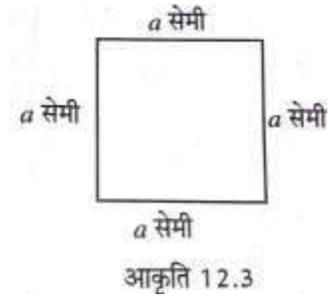
आयत का परिमाण=2 (लम्बाई + चौड़ाई)

आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई× चौड़ाई

प्रयास कीजिए :

1. अपने कक्षा के आयताकार फर्श का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
2. अपने घर के किसी एक आयताकार दरवाजे का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

वर्ग का परिमाण और उससे घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल :



आकृति 12.2

यह आयत 15 वर्गों को पूर्णतया ढँक लेता है।

आयत का क्षेत्रफल आकृति 12.3 में वर्ग की भुजा = a सेमी

वर्ग का परिमाण = चारों भुजाओं का योग

$$= (a + a + a + a)$$

$$= 4a \text{ सेमी}$$

वर्ग का परिमाण = 4 × भुजा

वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा

$$= a \times a = a^2$$

वर्ग का परिमाण = 4 × भुजा, वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा²

क्षेत्रफल के मात्रक :

•• वर्ग का क्षेत्रफल = सेमी²

उपर्युक्त कथन की निम्नलिखित प्रकार से व्याख्या कर सकते हैं :

$$\therefore 1 \text{ सेमी} = 10 \text{ मिमी}$$

$$\text{वर्ग का क्षेत्रफल} = (10 \text{ मिमी})^2$$

$$= 100 \text{ मिमी}^2$$

दोनों प्रकार से हल किये गये वर्ग का क्षेत्रफल की तुलना कीजिए।

हमने देखा, दोनों क्षेत्रफल समान हैं।

$$\text{अतः } 1 \text{ सेमी}^2 = 100 \text{ मिमी}^2$$

इन्हें कीजिए :

निम्नांकित क्षेत्रफलों की जाँच कीजिए।

$$1 \text{ डेसीमी} = 10 \text{ सेमी},$$

$$\text{इसलिए } 1 \text{ डेसीमी}^2 = 100 \text{ सेमी}^2$$

$$1 \text{ मीटर} = 10 \text{ डेसीमी},$$

$$\text{इसलिए } 1 \text{ मीटर}^2 = 100 \text{ डेसीमी}^2$$

$$1 \text{ डेकामी} = 10 \text{ मीटर},$$

$$\text{इसलिए } 1 \text{ डेकामी}^2 = 100 \text{ मीटर}^2$$

हम यह भी जानते हैं कि भूमि की माप एअर और हेक्टेयर में की जाती है।

$$1 \text{ एअर} = 100 \text{ मी}^2$$

$$1 \text{ हेक्टेयर} = 10 \text{ एअर} = 100 \text{ मी}^2$$

$$= 10000 \text{ मी}^2$$

उदाहरण 1: शायना 70 मी भुजा वाले वर्गाकार पार्क के किनारे-किनारे (चारों ओर) 3

चक्कर लगाती है। उसके द्वारा तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए।

हल : वर्गाकार पार्क का परिमाप = $4 \times$ एक भुजा की लम्बाई

$$= 4 \times 70 \text{ मी} = 280 \text{ मी}$$

1 चक्कर में तय की गयी दूरी = 280 मीटर

इसलिए तीन चक्कर में तय की गई दूरी = 3×280 मी = 840 मी

उदाहरण 2: पिकी 75 मी भुजा वाले वर्गाकार मैदान के किनारे-किनारे चक्कर लगाती है।

बॉब एक आयताकार मैदान जिसकी लंबाई तथा चौड़ाई क्रमशः 160 मी और 50 मी है, के किनारे-किनारे चक्कर लगाता है। दोनों में से कौन अधिक और कितनी अधिक दूरी तय करता है।

हल : पिकी द्वारा एक चक्कर में तय की गई दूरी = वर्ग का परिमाप

$$= 4 \times \text{एक भुजा की लम्बाई}$$

$$= 4 \times 75 \text{ मी} = 300 \text{ मी}$$

बॉब द्वारा एक चक्कर में तय की गई दूरी = आयत का परिमाप

$$= 2 \times (\text{लंबाई} + \text{चौड़ाई})$$

$$= 2 \times (160 \text{ मी} + 50 \text{ मी})$$

$$= 2 \times 210 \text{ मी} = 420 \text{ मी}$$

तय की गई दूरियों में अंतर = $420 \text{ मी} - 300 \text{ मी} = 120 \text{ मी}$

बॉब पिकी से 120 मीटर अधिक दूरी तय करता है।

उदाहरण 3 : एक आयत का क्षेत्रफल ज्ञात करें। जिसकी लंबाई तथा चौड़ाई क्रमशः 12 मी तथा 5 मी है।

हल : आयत की लंबाई = 12 मी, आयत की चौड़ाई = 5 मी

आयत का क्षेत्रफल = लंबाई \times चौड़ाई

$$= 12 \text{ मी} \times 5 \text{ मी} = 60 \text{ वर्ग मी}$$

उदाहरण 4 एक वर्गाकार भूखंड का क्षेत्रफल ज्ञात करें, जिसकी एक भुजा 9 मी है।

हल : वर्ग की भुजा = 9 मी

वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा \times भुजा

$$= 9 \text{ मी} \times 9 \text{ मी}$$

$$= 81 \text{ वर्ग मीटर}$$

उदाहरण 5: एक आयताकार गत्ते का क्षेत्रफल 117 वर्ग सेमी है, इसकी लंबाई 13 सेमी है तो गत्ते की चौड़ाई ज्ञात करें।

हल : आयताकार गत्ते का क्षेत्रफल = 117 वर्ग सेमी

लंबाई = 13 सेमी

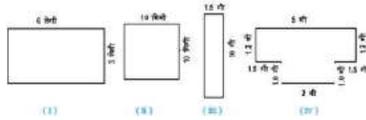
चौड़ाई = ?

आयत का क्षेत्रफल = लंबाई × चौड़ाई

$$\text{चौड़ाई} = \frac{\text{आयत का क्षेत्रफल}}{\text{लंबाई}} = \frac{117}{13} \text{ सेमी} = 9 \text{ सेमी}$$

अभ्यास 12 (a)

1. निम्नांकित आकृतियों के परिमाण ज्ञात कीजिए।



आकृति 12.4

2. प्रश्न संख्या 1 में दी गई आकृतियों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

3. निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए।

क्रमांक	आयत			
	लंबाई	चौड़ाई	परिमाण	क्षेत्रफल
1.	5 मीटर	20 मी ²
2.	8 मीटर	24 मी ²
3.	5 सेमी	18 सेमी
4.	30 सेमी	480 सेमी

4. निशा के विद्यालय में खेल के मैदान की लंबाई 60 मीटर, चौड़ाई 50 मीटर है। खेल के मैदान का क्षेत्रफल एअर में बताइए।

5. अविनाश के कृषि फार्म की लंबाई 240 मीटर और चौड़ाई 110 मीटर है। कृषि फार्म का क्षेत्रफल हेक्टेयर में ज्ञात कीजिए।

6. एक आयताकार मैदान का क्षेत्रफल 0.5 हेक्टेयर है। यदि इस आयताकार मैदान की एक भुजा 125 मीटर है, तो दूसरी भुजा ज्ञात कीजिए।

7. एक वर्गाकार टाइल की एक भुजा 12 सेमी है। टाइल का क्षेत्रफल और परिमाप ज्ञात कीजिए।
8. एक खेत की लम्बाई और चौड़ाई में 3:2 का अनुपात है। खेत के चारों ओर मेड़ बनवाने का खर्च 1.50 प्रतिमीटर की दर से बताइए जब कि खेत का क्षेत्रफल 1.5 हेक्टेयर है।
9. एक कार्यालय के 15 दरवाजों पर खस की टट्टियाँ लगानी हैं। प्रत्येक दरवाजों की लम्बाई 2.5 मी और चौड़ाई 1.2 मी है। यदि खस की टट्टी लगाने का खर्च खस के मूल्य सहित 105.0 प्रतिवर्ग मीटर हो, तो कुल कितना खर्च पड़ेगा?

12.3 क्षेत्रफल का अनुप्रयोग :

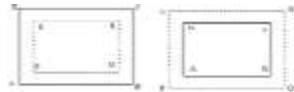
1. आयताकार मार्ग का क्षेत्रफल :

प्रायः खेतों, पार्कों या बगीचों में उनके चारों ओर या बीच में चौपड़ की तरह आयताकार कुछ स्थान पथ के रूप में छोड़ दिया जाता है। ऐसे पथों या बार्डरों के क्षेत्रफलों को ज्ञात करने में आयत के क्षेत्रफल ज्ञात करने की विधि का प्रयोग किया जाता है।

इन्हें देखिए :

आकृति 12.5 की (i) और (ii) को देखिए। दोनों आकृति आयताकार पार्क के हैं। प्रत्येक पार्क की लम्बाई 40 मीटर और चौड़ाई 30 मीटर है। इनमें बने रास्तों की चौड़ाई 2 मीटर है। आकृति (i) में रास्ता बिन्दुदार रेखाओं से प्रदर्शित पार्क के अन्दर चारों ओर है।

आकृति (ii) रास्ता बिन्दु रेखाओं से प्रदर्शित पार्क के बाहर चारों ओर है।



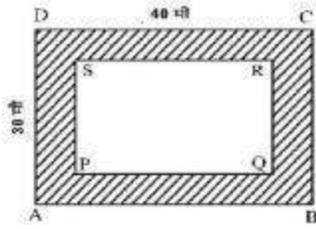
(i) (ii)

आकृति 12.5

आकृति (i) और आकृति (ii) में रास्ते को छोड़कर शेष भाग में घास लगी है। प्रत्येक पार्क में बने रास्ते का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

- चित्र – (i) में रास्ते का क्षेत्रफल :

आकृति 12.6 में पार्क ABCD है। इसके अन्दर के रास्ते को छायांकित किया गया है। रास्ते की चौड़ाई 2 मीटर है।



आकृति 12.6

रास्ते को छोड़कर शेष भाग को PQRS से दिखाया गया है, इसी भाग में घास लगी है। आयत PQRS की लम्बाई और चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

$$\text{इसकी लम्बाई} = 40 \text{ मीटर} - (2 \text{ मी} + 2 \text{ मी})$$

$$= 40 \text{ मी} - 4 \text{ मी}$$

$$= 36 \text{ मी}$$

$$\text{आयत PQRS की चौड़ाई} = 30 \text{ मी} - (2 \text{ मी} + 2 \text{ मी})$$

$$= 30 \text{ मी} - 4 \text{ मी}$$

$$= 26 \text{ मी}$$

$$\text{अतः घास लगे भाग का क्षेत्रफल} = \text{लम्बाई} \times \text{चौड़ाई}$$

$$= 36 \text{ मी} \times 26 \text{ मी}$$

$$= 936 \text{ मी}^2$$

$$\text{आयत ABCD का क्षेत्रफल} = \text{लम्बाई} \times \text{चौड़ाई}$$

$$= 40 \text{ मी} \times 30 \text{ मी}$$

$$= 1200 \text{ मी}^2$$

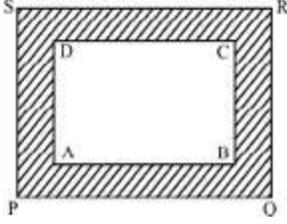
$$\text{अतः रास्ते का क्षेत्रफल} = \text{आयत ABCD का क्षेत्रफल} - \text{घास लगे भाग का क्षेत्रफल}$$

$$= 1200 \text{ मी}^2 - 936 \text{ मी}^2$$

$$= 264 \text{ मी}^2$$

• चित्र – (ii) में रास्ते का क्षेत्रफल :

आकृति 12.7 में आयताकार पार्क ABCD है। इसकी लम्बाई 40 मी और चौड़ाई 30 मी है।



आकृति 12.7

पार्कका क्षेत्रफल = 40 मी × 30 मी

= 1200 मी²

पार्क के बाहर की ओर 2 मी चौड़ा रास्ता है।

इस प्रकार इस रास्ते को मिलाकर नया आयताकार क्षेत्र PQRS बना है।

आयत PQRS की लम्बाई = 40 मी + (2 मी + 2 मी)

= 44 मी

आयत PQRS की चौड़ाई = 30 मी + (2 मी + 2 मी)

= 30 मी + 4 मी

= 34 मी

∴ आयत PQRS का क्षेत्रफल = 44 मी × 34 मी

= 1496 मी²

∴ रास्ते का क्षेत्रफल = आयत PQRS का क्षेत्रफल - पार्क ABCD का क्षेत्रफल

= 1496 मी² - 1200 मी²

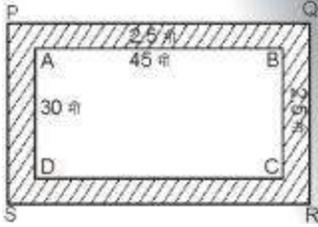
= 296 मी²

हमने देखा :

1. आकृति 12.6 में रास्ता पार्क के अन्दर की ओर है। अतः अन्दर बने भाग की लम्बाई और चौड़ाई ज्ञात करने के लिए रास्ते की चौड़ाई का दुगुना घटाकर अन्दर बने आयत की लम्बाई और चौड़ाई ज्ञात करते हैं।
2. आकृति 12.7 में रास्ता बाहर की ओर है। अतः बाहर बने रास्ते सहित भाग की लम्बाई और चौड़ाई ज्ञात करने के लिए रास्ते की चौड़ाई का दुगुना आयत की लम्बाई और चौड़ाई में जोड़ देते हैं।

उदाहरण 6: एक आयताकार पार्क 45 मी लंबा और 30 मी चौड़ा है। पार्क के बाहर चारों ओर एक 2.5 मी चौड़ा एक पथ बनाया गया है। पथ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : आकृति 12.8 ABCD आयताकार पार्क को और छायांकित



आकृति 12.8

क्षेत्र 2.5 मी चौड़े पथ को दर्शाता है। पथ के क्षेत्रफल को ज्ञात करने के लिए हम (आयत PQRS का क्षेत्रफल - आयत ABCD का क्षेत्रफल) ज्ञात करने की आवश्यकता है।

$$\text{हमें प्राप्त है} = (45 + 2.5 + 2.5)\text{मी} = 50\text{मी}$$

$$PS = (30 + 2.5 + 2.5)\text{मी} = 35\text{मी}$$

$$\text{आयत ABCD का क्षेत्रफल} = l \times b = 45 \times 30 \text{ मी} = 1350\text{मी}^2$$

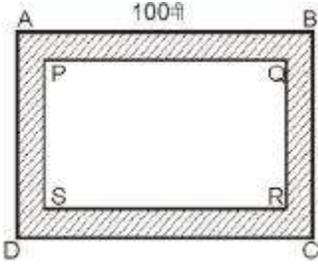
$$\text{आयत PQRS का क्षेत्रफल} = l \times b = 50 \times 35\text{मी} = 1750\text{मी}^2$$

$$\text{पथ का क्षेत्रफल} = \text{आयत PQRS का क्षेत्रफल} - \text{आयत ABCD का क्षेत्रफल}$$

$$= (1750 - 1350)\text{मी} = 400\text{मी}^2$$

उदाहरण 7 : 100 मी भुजा वाले एक वर्गाकार पार्क की परिसीमा के साथ लगा हुआ भीतर की ओर एक 5 मी चौड़ा पथ बना हुआ है। इस पथ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 2500 प्रति 10 मी² की दर से इसे सीमेंट कराने का भी व्यय ज्ञात कीजिए।

हल : आकृति 12.9 ABCD 100 मी भुजा वाले वर्गाकार पार्क को दर्शाता है तथा छायांकित भाग 5 मी चौड़े पथ को दर्शाता है। यहाँ



आकृति 12.9

$$PQ = 100 - (5 + 5) = 90\text{मी}$$

$$\text{वर्ग ABCD का क्षेत्रफल} = (\text{भुजा})^2 = (100)^2 \text{ मी} = 10,000\text{मी}^2$$

$$\text{वर्ग PQRS का क्षेत्रफल} = (\text{भुजा}) (90)^2\text{मी} = 81,00\text{मी}^2$$

$$\text{अतः पथ का क्षेत्रफल} = (10000 - 8100) \text{ मी}^2 = 19,00\text{मी}^2$$

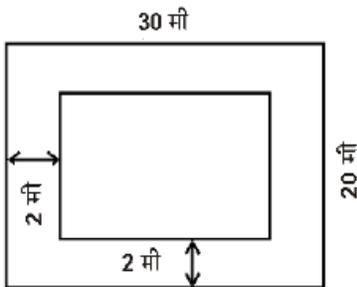
$$10\text{मी}^2\text{पर सीमेंट कराने का व्यय} = 2500$$

$$\text{इसलिए, } 1\text{मी}^2 \text{ पर सीमेंट कराने का व्यय} = \frac{2500}{10}$$

$$\text{अतः } 1900\text{मी}^2 \text{ पर सीमेंट कराने का व्यय } \frac{2500}{10} \times 1900 = 475000$$

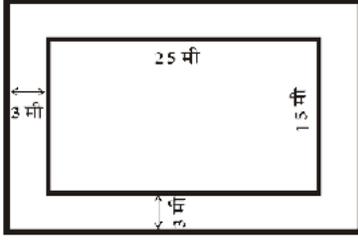
अभ्यास 12 (b)

1. आकृति 12.10 में अंदर वाले आयत की लम्बाई और चौड़ाई ज्ञात कीजिए:



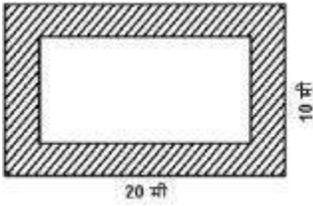
आकृति 12.10

2. आकृति 12.11 में बाहर वाले आयत की लम्बाई और चौड़ाई ज्ञात कीजिए-



आकृति 12.11

3. आकृति 12.12 में बने छायांकित रास्ते की चौड़ाई 3 मीटर है। बड़े आयत, छोटे आयत और रास्ते का क्षेत्रफल ज्ञात करके रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए -



आकृति 12.12

- (i) बड़े आयत का क्षेत्रफल मी²
- (ii) छोटे आयत का क्षेत्रफल मी²
- (iii) छायांकित रास्ते का क्षेत्रफल मी²

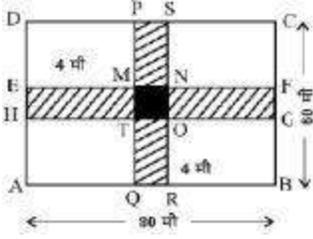
4. एक हाल की लम्बाई 20 मीटर और चौड़ाई 9 मीटर है। इसकी दीवारों के चारों ओर फर्श में 2 मीटर चौड़ाई का संगमरमर लगा हुआ है। अपनी अभ्यास पुस्तिका पर एक रफ चित्र बनाकर संगमरमर लगे फर्श का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

5. एक वर्गाकार बगीचे के चारों ओर 50 सेमी चौड़ाई का मार्ग बना हुआ है। बगीचे की लम्बाई मार्ग सहित 51 मीटर है। बगीचे का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

12.4 आयताकार क्षेत्र के मध्य परस्पर लम्बवत् काटने वाले मार्ग का क्षेत्रफल :

उदाहरण 8 : एक घास के मैदान की लम्बाई 80 मीटर और चौड़ाई 60 मीटर है। मैदान के मध्य में 4 मीटर चौड़े दो मार्ग समकोण पर काटते हुए स्थित हैं। प्रत्येक मार्ग आयत की भुजाओं के समान्तर हैं। सम्पूर्ण मार्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : आकृति 12.13 में मार्ग EFGH का क्षेत्रफल = 80×4 मी²



आकृति 12.13

$$= 320 \text{ मी}^2$$

(इसमें वर्ग MNOT का क्षेत्रफल सम्मिलित है।)

$$\text{मार्ग PQRS का क्षेत्रफल} = 60 \times 4 \text{ मी}^2$$

$$= 240 \text{ मी}^2$$

(इसमें भी वर्ग MNOT का क्षेत्रफल सम्मिलित है।)

उभयनिष्ठ वर्ग MNOT (दोनों मार्गों पर स्थित) का क्षेत्रफल

$$= 4 \times 4 \text{ मी}^2$$

$$= 16 \text{ मी}^2$$

... वर्ग MNOT का क्षेत्रफल 16 वर्ग मीटर दोनों भागों में सम्मिलित है।

$$\therefore \text{सम्पूर्ण मार्ग का क्षेत्रफल} = (320 + 240 - 16) \text{ मी}^2$$

$$= (560 - 16) \text{ मी}^2$$

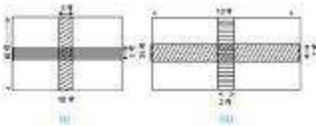
$$= 544 \text{ मी}^2$$

उपर्युक्त चित्र में हमने देखा कि छायांकित भाग दोनों मार्गों पर स्थित है अतः

परस्पर काटने वाले मार्गों का सम्पूर्ण क्षेत्रफल ज्ञात करने हेतु उभयनिष्ठ मार्ग का क्षेत्रफल मार्गों के क्षेत्रफलों के योग में से घटा देते हैं।

अभ्यास 12 (c)

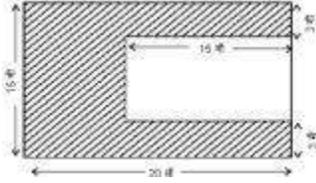
1. आकृति 12.14 में छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



आकृति 12.14

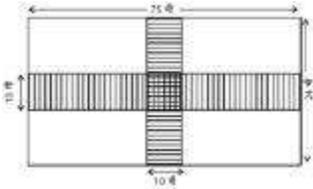
2. एक आयताकार प्रांगण (lawn) की लम्बाई 6 मीटर और चौड़ाई 5 मीटर है। इसके मध्य में 2 मीटर चौड़े दो मार्ग इस प्रकार स्थित हैं कि प्रत्येक एक दूसरे को समकोण पर काटते हैं। एक मार्ग की लम्बाई के समान्तर और दूसरा मार्ग चौड़ाई के समान्तर है। मार्ग पर रु. 2.50 प्रति वर्ग मीटर की दर से वंकड़ कुटवाने का व्यय ज्ञात कीजिए।

3. आकृति 12.15 में छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



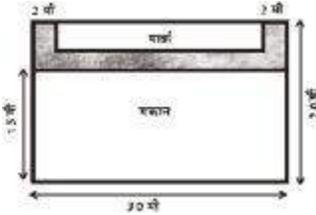
आकृति 12.15

4. आकृति 12.16 में उस भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जो छायांकित नहीं है।



आकृति 12.16

5. आकृति 12.17 में एक राजकीय भवन का मानचित्र दिया गया है। इसमें सड़क को बिन्दुदार भाग से दिखाया गया है। सड़क की चौड़ाई 2 मीटर है।



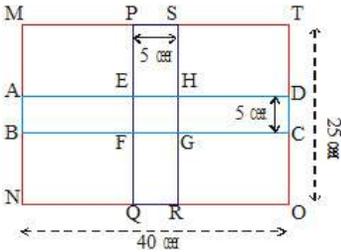
आकृति 12.17

(i) सड़क का क्षेत्रफल बताइए।

(ii) सड़क पर ईंट बिछवाने का खर्च .45 प्रति वर्गमीटर की दर से क्या होगा ?

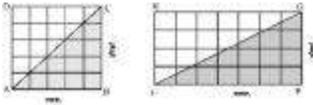
6. अमरूद के एक बाग की लम्बाई 180 मीटर और चौड़ाई 120 मीटर है। बाग के बीच-बीच एक दूसरे को समकोण पर काटते हुए 3 मीटर चौड़े दो रास्ते हैं। रास्ते पर मिट्टी डलवाने का खर्च 12.0 प्रति मी² की दर से ज्ञात कीजिए।

7. किसी स्कूल के छात्रों ने सफाई अभियान के लिए एक रैली निकाली। रैली कुछ समय बाद स्कूल से कुछ दूरी पर बने एक आयताकार पार्क में पहुँचीं जिसकी लम्बाई 40 मीटर, तथा चौड़ाई 25 मीटर है। छात्र तीन समूहों में बँट गये और चित्र के अनुसार पार्क में 5 मीटर चौड़े दो परस्पर लम्बवत। रास्तों के क्रमशः ABEF तथा GCDH भागों को प्रथम समूह ने PEHS तथा FQRG भागों को द्वितीय समूह ने और EFGH भाग को तृतीय समूह ने साफ किया। प्रत्येक समूह द्वारा साफ किये गये क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



12.5 त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल :

हम जानते हैं कि वर्ग अथवा आयत के विकर्ण उसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है। इनमें से प्रत्येक त्रिभुज का क्षेत्रफल वर्ग अथवा आयत के क्षेत्रफल का आधा होता है। आकृति 12.18 के (i) और (ii) में त्रिभुजों को देखिए:



i

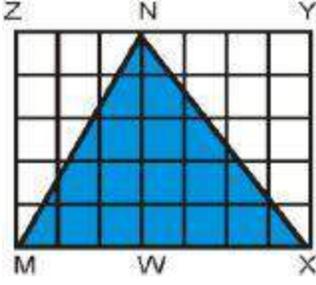
ii

आकृति 12.18

$$\begin{aligned} \text{(i) से त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल} &= \frac{1}{2} \times \text{वर्ग ABCD का क्षेत्रफल} \\ &= \frac{1}{2} \times (\text{AB} \times \text{BC}) \\ &= \frac{1}{2} \times (\text{आधार} \times \text{ऊँचाई}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii) से त्रिभुज EFG का क्षेत्रफल} &= \frac{1}{2} \times \text{वर्ग EFGH का क्षेत्रफल} \\ &= \frac{1}{2} \times (\text{EF} \times \text{FG}) \\ &= \frac{1}{2} \times (\text{आधार} \times \text{ऊँचाई}) \end{aligned}$$

इन्हे भी देखिए :



आकृति 12.19

आकृति 12.19 में $\triangle MNX$ समकोण त्रिभुज नहीं है। इस चित्र में भी $\triangle MNX$ का क्षेत्रफल, आयत $WXYZ$ के क्षेत्रफल का आधा है। चित्र से खाने गिनकर इसकी जाँच कीजिए। (त्रिभुज के घेरे में वर्गों की गणना हेतु वर्ग का जो भाग आधा या अधिक आता है उसे एक पूर्ण वर्ग के रूप में गणना की जाती है तथा आधे से कम भाग वाले घिरे वर्ग की गणना नहीं की जाती है।)

$$\begin{aligned} \text{अतः } \triangle MNX \text{ का क्षेत्रफल} &= \frac{1}{2} \times WX \times MN \\ &= \frac{1}{2} \times (WX \times MN) \\ &= \frac{1}{2} \times \text{आधा} \times \text{ऊँचाई} \end{aligned}$$

अतः

1. त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{संगत ऊँचाई}$
2. त्रिभुज का आधार = $\frac{2 \times \text{त्रिभुज का क्षेत्रफल}}{\text{संगत ऊँचाई}}$
3. त्रिभुज की ऊँचाई = $\frac{2 \times \text{त्रिभुज का क्षेत्रफल}}{\text{संगत आधार}}$

:टिप्पणी : त्रिभुज की ऊँचाई आधार के संगत होती है। आधार त्रिभुज की भुजा होती है और संगत ऊँचाई उस आधार पर सम्मुख शीर्ष से डाले गये लम्ब के बराबर होती है।

उदाहरण 9: एक त्रिभुज का आधार 5 सेमी और संगत ऊँचाई 6 सेमी है। त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : त्रिभुज का आधार=5 सेमी

त्रिभुज की संगत ऊँचाई = 6 सेमी

$$\begin{aligned}\text{अतः त्रिभुज का क्षेत्रफल} &= \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{संगत ऊँचाई} \\ &= \frac{1}{2} \times 5 \times 6 \text{ सेमी}^2 \\ &= 15 \text{ सेमी}^2\end{aligned}$$

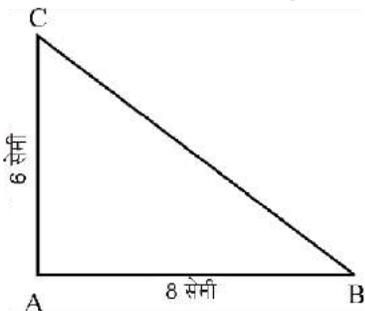
उदाहरण 10: एक त्रिभुज का क्षेत्रफल 45 वर्ग सेमी और आधार 15 सेमी है। इस त्रिभुज की संगत ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल : त्रिभुज का क्षेत्रफल = 45 सेमी²

त्रिभुज का आधार = 15 सेमी

$$\begin{aligned}\text{त्रिभुज की ऊँचाई} &= \frac{2 \times \text{क्षेत्रफल}}{\text{संगत आधार}} \\ &= \frac{2 \times 45 \text{ सेमी}^2}{15 \text{ सेमी}} \\ &= 6 \text{ सेमी}\end{aligned}$$

उदाहरण 11: आकृति 12.20 बने समकोण त्रिभुज ABC में AB = 8 सेमी और AC = 6 सेमी। समकोण त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



आकृति 12.20

हल : $\triangle ABC$ में $\angle A = 90^\circ$

अतः भुजा AC ही त्रिभुज की ऊँचाई है।

आधार = 8 सेमी, ऊँचाई = 6 सेमी

अतः ΔABC का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times$ (आधार \times ऊँचाई)

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 6 \text{ सेमी}^2$$

$$= 24 \text{ सेमी}^2$$

अभ्यास 12 (d)

1. निम्नांकित सारिणी में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

क्रम संख्या	त्रिभुज का आधार	त्रिभुज की ऊँचाई	त्रिभुज का क्षेत्रफल
1.	4.2 सेमी	2.1 सेमी
2.	10 सेमी	8 सेमी
3.	6.4 सेमी	12.8 सेमी ²
4.	12 सेमी	36 सेमी ²
5.	4 सेमी	12 सेमी ²
6.	10.5 सेमी	42 सेमी ²
7.	x सेमी	2x सेमी

2. एक त्रिभुज का क्षेत्रफल 48 सेमी^2 है। यदि उसकी ऊँचाई 8 सेमी हो, तो त्रिभुज का आधार बताइए।

3. एक त्रिभुज का आधार 5 सेमी है। यदि त्रिभुज की ऊँचाई, आधार से दुगुनी है, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

4. निम्नांकित त्रिभुजों के क्षेत्रफल वर्गमीटर में ज्ञात कीजिए, जबकि उनके आधार और संगत ऊँचाई ज्ञात हैं:

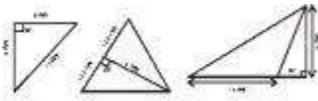
(i) आधार = 15 सेमी, ऊँचाई = 8 सेमी

(ii) आधार = 7.5 सेमी, ऊँचाई = 4 सेमी

(iii) आधार = 1.5 मी, ऊँचाई = 0.8 मी

(iv) आधार = 32 सेमी, ऊँचाई = 105 सेमी

5. निम्नांकित त्रिभुजों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :



आकृति 12.21

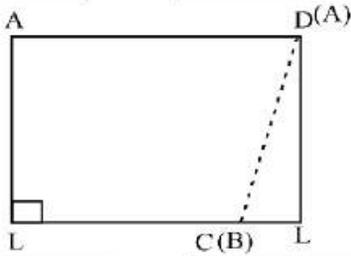
12.6 समान्तर चतुर्भुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल :

इन्हें देखिए :

क्रियाकलाप : दफती के टुकड़े पर एक समान्तर चतुर्भुज ABLD बनाइए। उसके एक शीर्ष A से भुजा BC पर लम्ब AL डालिए। इस प्रकार समकोण त्रिभुज ALB बनेगा। (देखिए आकृति 12.22)। त्रिभुज ALB को काट लीजिए।

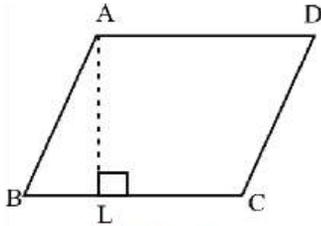
Δ ALB का समान्तर चतुर्भुज के बचे टुकड़े से इस प्रकार जोड़िए कि भुजा AL भुजा DL से मिले। इस प्रकार आयत ALLD बनाइए। (देखिए आकृति 12.23)

क्या आकृति 12.22 में प्रदर्शित समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल आकृति 12.23 में प्रदर्शित आयत के क्षेत्रफल के बराबर है?



चित्र (2)

आकृति 12.22



चित्र (1)

आकृति 12.23

हमने देखा कि दिये गये समान्तर चतुर्भुज ABCD से ही आयत ALLD बना है। इसलिए ये दोनों क्षेत्रफल में समान होंगे।

अतः समान्तर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = आयत ALLD का क्षेत्रफल = लम्बाई C चौड़ाई

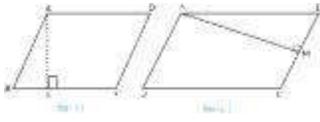
$$= AD \times AL$$

$$= BC \times AL \text{ (AD = BC)}$$

समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = समान्तर चतुर्भुज की एक भुजा उस भुजा पर सम्मुख शीर्ष से डाला गया लम्ब

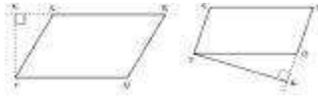
इन्हें भी देखिए :

नीचे दी गयी आकृतियों में समान्तर चतुर्भुज ABCD के शीर्ष A से भुजा BC और भुजा CD पर क्रमशः AL और AM लम्ब खींचे गये हैं।



आकृति 12.24

नीचे दी गयी आकृतियों में समान्तर चतुर्भुज PQRS के बिन्दु P से भुजा SR पर PN और भुजा RQ पर PK लम्ब डाले गये हैं जो क्रमशः RS के बड़े हुए भाग के बिन्दु N पर और RQ के बड़े हुए भाग के बिन्दु K पर मिलते हैं।



चित्र - 5

चित्र - 6

आकृति 5.28

हमने देखा कि शीर्ष लम्ब डालने के लिए कभी-कभी सम्मुख भुजा को बढ़ाना पड़ता है।

समान्तर चतुर्भुज की जिस भुजा पर लम्ब डाला जाता है उसे आधार कहते हैं और आधार पर डाले गये लम्ब को उसकी संगत ऊँचाई कहते हैं।

आकृति 12.24 (i) में BC आधार और AL संगत ऊँचाई है।

आकृति 12.24 (ii) में आधार CD और AM संगत ऊँचाई है।

आकृति 12.25 (i) में आधार PQ और PN संगत ऊँचाई है।

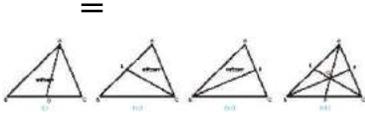
आकृति 12.25 (ii) में आधार QR और PK संगत ऊँचाई है।

समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई

$$\text{समान्तर चतुर्भुज का आधार} = \frac{\text{समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल}}{\text{ऊँचाई}}$$

$$\text{समान्तर चतुर्भुज की ऊँचाई} = \frac{\text{समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल}}{\text{आधार}}$$

उदाहरण 12: आकृति (i) और (ii) में समान्तर चतुर्भुजों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :



(i) आकृति 5.29 (ii)

हल : समान्तर चतुर्भुज (i) का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई
 = 15 सेमी × 8 सेमी
 = 120 सेमी²

समान्तर चतुर्भुज (ii) का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई
 = 15 सेमी × 12 सेमी
 = 180 सेमी²

उदाहरण 13: एक समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल 32 सेमी² है और उसके आधार की माप 8 सेमी है। समान्तर भुजाओं के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = 32 सेमी²

समान्तर चतुर्भुज का आधार = 8 सेमी

प्रश्न में समान्तर भुजाओं के बीच की दूरी (ऊँचाई) ज्ञात करनी है।

$$\text{ऊँचाई} = \frac{\text{समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल}}{\text{आधार}}$$

$$= \frac{32 \text{ सेमी}^2}{8 \text{ सेमी}}$$

$$= 4 \text{ सेमी}$$

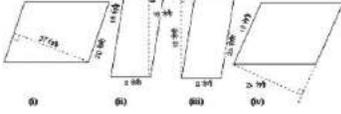
अतः समान्तर चतुर्भुज की ऊँचाई अर्थात् समान्तर भुजाओं के बीच की दूरी = 4 सेमी

अभ्यास 12 (e)

1. निम्नांकित सारिणी में दिये गये मापों से प्रत्येक समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

आधार	8 सेमी	2.8 सेमी	12 सेमी	6.5 सेमी	1 सेमी	4.2 सेमी
ऊँचाई	3 सेमी	5 सेमी	8.7 सेमी	4.8 सेमी	45 सेमी	25 सेमी

2. निम्नांकित समान्तर चतुर्भुज के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :

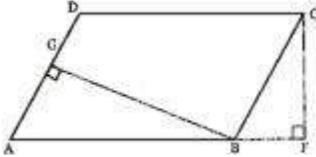


आकृति 12.27

3. उस समान्तर चतुर्भुज की ऊँचाई ज्ञात कीजिए, जिसका क्षेत्रफल 2.25 मी^2 और आधार 25 डेसीमी है।

4. एक खेत समान्तर चतुर्भुज के आकार का है। इसका आधार 15 डेकामी और ऊँचाई 8 डेकामी है। 50 पैसा प्रति वर्गमीटर की दर से सिंचाई कराने का खर्च ज्ञात कीजिए।

5. आकृति 12.28 में ABCD समान्तर चतुर्भुज है।



आकृति 12.28

$CF \perp AB$ और $BG \perp AD$ है।

(i) यदि $AB=16$ सेमी, $AD=12$ सेमी और $CF=10$ सेमी तो BG ज्ञात कीजिए।

(ii) यदि $AD=10$ सेमी, $BG=8$ सेमी और $CF=12$ सेमी तो AB ज्ञात कीजिए।

12.7 समचतुर्भुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल :

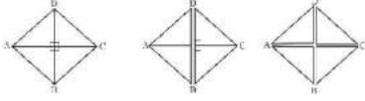
हम जानते हैं कि

(i) समचतुर्भुज की चारों भुजाएँ बराबर होती हैं।

(ii) समचतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

क्या समचतुर्भुज में विकर्णों द्वारा बने चारों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं?

एक कागज पर समचतुर्भुज बनाइए उसके दोनों विकर्णों को खींचिए। समचतुर्भुज को काटकर अलग कीजिए। इसे आकृति 5.32 में दिखाया गया है।



(i)

(ii)

(iii)

आकृति 12.29

अब इसकी विकर्ण BD तथा AC पर मोड़िए। मोड़ के सहारे कैंची से काटकर विकर्णों से बने त्रिभुजों को अलग कीजिए। क्या चारों त्रिभुज एक दूसरे को ढँक लेते हैं?

हमने देखा चारों त्रिभुज एक दूसरे को पूरा-पूरा ढँक लेते हैं। अतः

समचतुर्भुज में विकर्णों द्वारा बने चारों त्रिभुज सर्वांगसम हैं।

अतः

समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = 4 × विकर्णों द्वारा काटने पर बने एक समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल

इन्हें देखिए :

आकृति 12.30 समचतुर्भुज PQRS देखिए। PR और QS समचतुर्भुज PQRS के विकर्ण हैं, जो एक दूसरे को बिन्दु O पर समद्विभाजित करते हैं दोनों विकर्ण सम चतुर्भुज को चार सर्वांगसम त्रिभुजों में बाँट रहे हैं।

$$\begin{aligned}
 \text{समचतुर्भुज PQRS का क्षेत्रफल} &= 4 \times \Delta \text{SOR का क्षेत्रफल} \\
 &= 4 \times \frac{1}{2} \times \text{OR} \times \text{OS} \\
 &= 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \text{PR} \times \frac{1}{2} \times \text{SQ} \\
 &= \frac{1}{2} \times \text{PR} \times \text{SQ} \\
 &= \frac{1}{2} \text{विकर्ण PR} \times \text{विकर्ण SQ}
 \end{aligned}$$

अतः

$$\text{समचतुर्भुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times \text{विकर्णों का गुणनफल}$$

उदाहरण 14: एक समचतुर्भुज के विकर्णों की लम्बाई 10 सेमी और 7सेमी है। समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ एक विकर्ण=10 सेमी

दूसरा विकर्ण = 7सेमी

समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times$ विकर्णों का गुणनफल

$$= \frac{1}{2} \times 10 \text{सेमी} \times 7 \text{सेमी}$$

$$= 35 \text{सेमी}^2$$

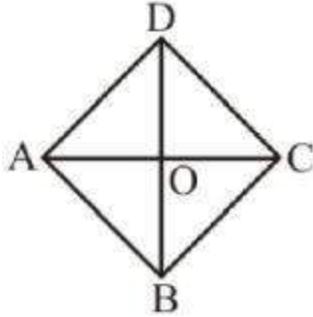
अभ्यास 12 (f)

1. नीचे सारिणी में समचतुर्भुज से सम्बन्धित नापें दी हुई हैं। अपनी अभ्यास पुस्तिका में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

क्रम संख्या	पहला विकर्ण	दूसरा विकर्ण	क्षेत्रफल
1.	8 सेमी	10 सेमी
2.	12 सेमी	240 सेमी ²
3.	3 सेमी	9 सेमी ²
4.	8.4 सेमी	6 सेमी

2. आकृति 12.31 समचतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल 24 वर्ग सेमी और OD=3 सेमी। ज्ञात कीजिए :

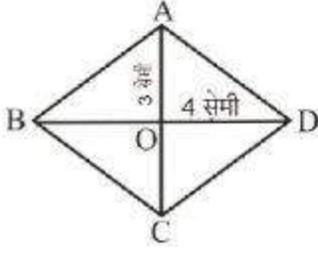
- (i) विकर्ण BD की लम्बाई



आकृति 12.31

- (ii) विकर्ण की लम्बाई

3. नीलिमा के समचतुर्भुजाकार प्लाट का क्षेत्रफल 80 वर्गमीटर है। यदि इसके एक विकर्ण की लम्बाई 16मीटर है, तो इसके दूसरे विकर्ण की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
4. आकृति 12.32 चित्र में दी गई नापों के आधार पर समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

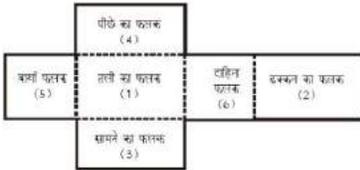


आकृति 12.32

12.8 घन एवं घनाभ का सम्पूर्णपृष्ठ :

इन्हें कीजिए :

एक माचिस की डिबिया लीजिए। इसे ऊपर से खोल दीजिए। आकृति 12.33 में इसके सभी 6 फलक दिखाए गये हैं।



आकृति 12.33

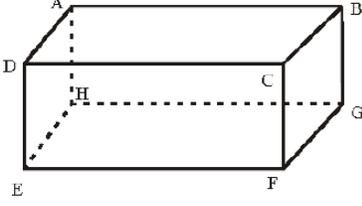
स्पष्ट है कि तली का फलक (1) ढक्कन का फलक (2) के सर्वांगसम हैं। इसी प्रकार सामने का फलक (3), पीछे के फलक (4) के सर्वांगसम हैं और बायाँ फलक (5), दायें फलक (6) के सर्वांगसम हैं।

प्रयास कीजिए :

एक चाक के डिब्बे को खोलिए तथा स्पष्ट कीजिए कि इसमें छः आयताकार फलक हैं। दियासलाई या चाक के डिब्बे में कुल छः फलक होते हैं। इन सभी फलकों के क्षेत्रफलों के योग को इनका सम्पूर्णपृष्ठ कहते हैं।

12.8.1. घनाभ :

आकृति 12.34 चित्र को देखिए। यह एक घनाभ की आकृति है। किसी तल पर ठोस आकृति को बनाना संभव नहीं है परन्तु हम उसकी आकृति का आभासी चित्र बनाकर संबंधित भागों को दर्शा सकते हैं।



आकृति 12.34

इस प्रकार हम देखते हैं कि घनाभ में -

- (i) आठ शीर्ष होते हैं
- (ii) बारह कोरें होती हैं।
- (iii) छः फलकें होती हैं, प्रत्येक फलक आयताकार होती है।
- (iv) ऊपरी फलक और निचला फलक (Bottom Face) सम्मुख फलकों का एक जोड़ा है।
- (v) बायें और दायें वाले फलक सम्मुख फलकों का दूसरा जोड़ा है।
- (vi) सामने और पीछे का फलक सम्मुख फलकों का तीसरा जोड़ा है।

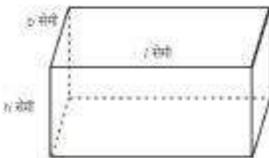
चित्र में ABCD ऊपरी फलक और EFGH निचला फलक है।

ADEH और CBGF क्रमशः बायें और दायें के फलक हैं।

ABGH और DCFE क्रमशः पीछे और सामने के फलक हैं।

12.8.2 घनाभ का सम्पूर्णपृष्ठ :

हमने देखा है कि बाजार में बहुत सी वस्तुएँ टिन के चद्दर, दफ्ती के बाक्सों या मोटे कागजों के बाक्सों में पैक करके बेची जाती है। इनमें बहुत सी पैकिंग घनाभ के आकार की होती है। स्टील के बक्से, आलमारी आदि वस्तुएँ भी घनाभ के आकार की होती है। निर्माता के लिए यह आवश्यक हो जाता है कि वह यह जाने कि इन वस्तुओं के निर्माण के लिए कितनी टिन का चद्दर, दफ्ती, मोटा कागज आदि लगेंगे। इसे जानने के लिए हमें सम्पूर्णपृष्ठ ज्ञात करना आवश्यक होता है।



आकृति 12.35

इन्हें देखिए :

निम्नांकित घनाभ को देखिए। घनाभ की लम्बाई l सेमी, चौड़ाई b सेमी और ऊँचाई h सेमी है। इस घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

हम जानते हैं कि घनाभ का सम्पूर्णपृष्ठ उसके सभी छह फलकों के क्षेत्रफल के योगफल के बराबर होता है

अतः ऊपरी और निचले फलकों के क्षेत्रफलों का योग = $(l \times b + l \times b)$ सेमी²

$$= 2lb \text{ सेमी}^2$$

बायें और दायें फलकों के क्षेत्रफलों का योगफल = $(b \times h + b \times h)$ सेमी²

$$= 2bh \text{ सेमी}^2$$

सामने और पीछे वाले फलकों के क्षेत्रफलों का योग = $(h \times l + h \times l)$ सेमी²

$$= 2hl \text{ सेमी}^2$$

घनाभ का सम्पूर्णपृष्ठ = घनाभ के सभी फलकों का योग

$$= 2(lb + bh + hl) \text{ सेमी}^2$$

अतः

घनाभ का सम्पूर्णपृष्ठ = 2 (लम्बाई \times चौड़ाई + चौड़ाई \times ऊँचाई + लम्बाई \times ऊँचाई) = $2(lb + bh + hl)$

उदाहरण 15 : उस घनाभ का सम्पूर्णपृष्ठ ज्ञात कीजिए, जिसकी लम्बाई 10 सेमी, चौड़ाई 8 सेमी और ऊँचाई 5 सेमी हो।

हल : दिया है कि $l=10$ सेमी, $b=8$ सेमी, $h=5$ सेमी

अतः घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठ = $2(lb + bh + hl)$

$$= 2(10 \times 8 + 8 \times 5 + 10 \times 5) \text{ सेमी}^2$$

$$= 2(80 + 40 + 50) \text{ सेमी}^2$$

$$= 340 \text{ सेमी}^2$$

उदाहरण 16 : एक घनाभ के आकार के टिन के डिब्बे की नाप 50 सेमी \times 40 सेमी \times 30 सेमी है। इस प्रकार के बीस डिब्बे बनवाने के लिए कितने रुपये की टिन की चदर

क्रय करनी होगी, यदि वर्ग मीटर टिन के चदर का मूल्य 100 है।

हल : दिया है कि $l = 50$ सेमी, $b = 40$ सेमी², $h = 30$ सेमी

अतः एक डिब्बे का संपूर्णपृष्ठ = $2(lb + bh + hl)$ सेमी²

$$= 2(50 \times 40 + 40 \times 30 + 30 \times 50) \text{ सेमी}^2$$

$$= 9400 \text{ सेमी}^2$$

$$\therefore 20 \text{ डिब्बों का संपूर्ण पृष्ठ} = 20 \times 940 \text{सेमी}^2$$

$$= 188000 \text{ सेमी}^2$$

$$= 18.8 \text{ मी}^2$$

$$\therefore 18.8 \text{ वर्गमीटर टिन का मूल्य (100 प्रति वर्ग मीटर की दर से)}$$

$$= 18.8 \times 100$$

$$= 1880$$

अभीष्ट मूल्य = 1880

कमरे की चारों दीवारों का क्षेत्रफल :

यदि किसी कमरे की लम्बाई a , चौड़ाई b और ऊँचाई c हो, तो सरलता से देखा जा सकता है कि चारों दीवारों का क्षेत्रफल = $2lh + 2bh = 2h(l+b)$

कमरे के चारों दीवारों का क्षेत्रफल = $2(l + b) h = 2$ (लम्बाई + चौड़ाई) × ऊँचाई

उदाहरण 17 : एक कक्षा-कक्ष की लम्बाई 11 मीटर, चौड़ाई 8 मीटर और ऊँचाई 5 मीटर है।

कक्षा-कक्ष की चारों दीवारों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : कक्षा-कक्ष की लम्बाई $l = 11$ मीटर, चौड़ाई $b = 8$ मीटर, ऊँचाई $h = 5$ मीटर

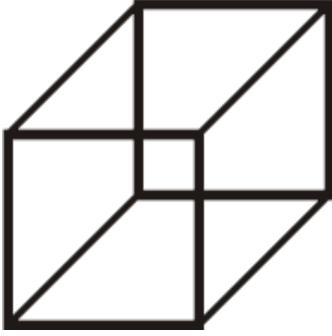
चारों दीवारों का क्षेत्रफल = 2 (लम्बाई + चौड़ाई) × ऊँचाई

$$= 2 \times (11 + 8) \times 5 \text{ मी}^2$$

$$= 10 \times 19 \text{ मी}^2$$

$$= 190 \text{ मी}^2$$

12.8.3. घन का संपूर्णपृष्ठ :



आकृति 12.36

इन्हें देखिए :

यह घन की आकृति है। घनाभ की लम्बाई, चौड़ाई, ऊँचाई समान होने पर वह घन बन जाता है।

इसमें भी छः फलक हैं। सभी फलक वर्गाकार हैं। सभी फलक क्षेत्रफल में समान हैं।

मान लिया घन की एक भुजा 'a' है।

एक फलक का क्षेत्रफल = भुजा² = a²

घन का सम्पूर्णपृष्ठ = 6 × फलक का क्षेत्रफल = 6a²

अतः

घन का सम्पूर्णपृष्ठ = 6 × भुजा² = 6a²

उदाहरण 18: घन के प्रत्येक कोर की लंबाई 4 सेमी है, तो उस घन के सम्पूर्णपृष्ठ का क्षेत्रफल निकालिए।

हल : दिया है भुजा a = 4 सेमी

घन के सम्पूर्णपृष्ठ का क्षेत्रफल = 6a²

= 6 × 4 × 4

= 96 वर्ग सेमी

अभ्यास 12 (g)

1. निम्नांकित सारणी में घनाभ की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई दी गई है। प्रत्येक घनाभ की सम्पूर्णपृष्ठ ज्ञात कीजिए।

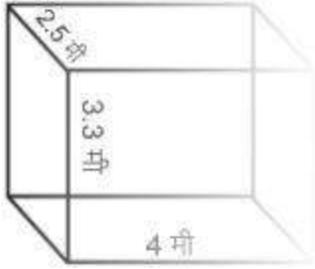
	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)	(vii)
l	5 सेमी	6 सेमी	10सेमी	4सेमी	5 $\frac{1}{2}$ सेमी	16सेमी	
b	4 सेमी	3 सेमी	8 सेमी	1.7सेमी	4 सेमी	8 सेमी	
h	3 सेमी	2सेमी	5 सेमी	2.3 सेमी	10 $\frac{1}{2}$ सेमी	6 सेमी	

2. नीचे दी गई भुजा की नाप वाले घन का सम्पूर्णपृष्ठ ज्ञात कीजिए।

(i) भुजा = 18 सेमी (ii) भुजा = 8.8 सेमी

(iii) भुजा = 1.2 सेमी (iv) भुजा = 110 सेमी

3. दिये गये घनाभ के कुलपृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



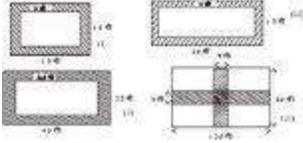
आकृति 12.37

- अभिषेक के कमरे की लम्बाई 4 मीटर, चौड़ाई 3.5 मीटर और ऊँचाई 3 मीटर है। इस कमरे की चारों दीवारों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
- एक घनाकार बक्से की एक भुजा की लम्बाई 1 मीटर 30 सेमी है। बक्से का सम्पूर्ण ज्ञात कीजिए।
- रहीम के कमरे की लम्बाई 3.5 मीटर, चौड़ाई 3 मीटर, ऊँचाई 3 मीटर है। इसकी चारों दीवारों पर रु 15 प्रति वर्ग मीटर की दर से सफेदी कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।
- एक घनाकार डिब्बे की एक भुजा 10 सेमी है तथा एक अन्य घनाभ के आकार के डिब्बे की लम्बाई, चौड़ाई तथा ऊँचाई क्रमशः 12.5 सेमी, 10 सेमी तथा 8 सेमी है। किस डिब्बे का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल अधिक है और कितना अधिक है ?
- प्रदीप स्वीट स्टाल को मिठाइयाँ पैक करने के लिए गत्ते के घनाभ के आकार के 200 डिब्बे बनवाने हैं जिनकी लम्बाई 25 सेमी, चौड़ाई 20 सेमी तथा ऊँचाई 5 सेमी है।

यदि गत्ते का मूल्य ₹ 40 प्रति वर्ग मीटर है, तो डिब्बे बनवाने की कुल कीमत ज्ञात कीजिए।

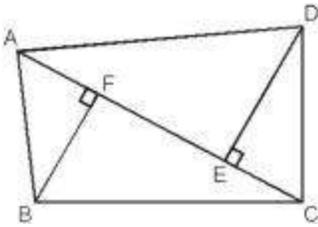
दक्षता अभ्यास - 12

1. निम्नांकित आकृति 5.41 में छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :



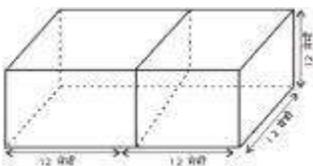
आकृति 12.38

2. एक वर्गाकार पार्क की सीमा से लगा हुआ पार्क के अंदर चारों ओर 1 मीटर चौड़ाई का मार्ग है। पार्क की लम्बाई 30 मीटर है। पार्क के शेष भाग में 6 प्रति वर्ग मीटर की दर से घास लगवाने का व्यय ज्ञात कीजिए।
3. उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिस का आधार 9.6 सेमी और ऊँचाई 5 सेमी है।
4. उस त्रिभुज की ऊँचाई ज्ञात कीजिए जिसका क्षेत्रफल 45 सेमी^2 है तथा आधार 15 सेमी है।
5. आकृति 12.39 चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसमें $AC = 48$ सेमी, $BF = 10$ सेमी और $DE = 20$ सेमी।



आकृति 12.39

6. उस समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसका आधार 7 सेमी और ऊँचाई 4.3 सेमी हो।
7. 12 सेमी भुजा के दो घन सटाकर रखे गये हैं। सटाकर रखने से बने घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठ ज्ञात कीजिए।



आकृति 12.40

इस इकाई में हमने सीखा ?

1. आयत का परिमाप = 2(लम्बाई + चौड़ाई)
2. आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई
3. वर्ग का परिमाप = 4 × एक भुजा
4. वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा²
5. त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ आधार × संगत ऊँचाई
6. समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = समान्तर चतुर्भुज की एक भुजा × उस भुजा पर सम्मुख शीर्ष से डाला गया लंब
7. समचतुर्भुज में विकर्णों द्वारा बने चारों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।
8. समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × विकर्णों का गुणनफल
9. घनाभ के कुछ छः फलक होते हैं। इन सभी फलकों के क्षेत्रफल के योग को इनका सम्पूर्णपृष्ठ कहते हैं।
10. यदि घनाभ की लम्बाई = l, चौड़ाई = b, और ऊँचाई = h हो तो घनाभ का सम्पूर्णपृष्ठ का क्षेत्रफल = $2(lb + bh + hl)$
11. कमरे के चारों दीवारों का क्षेत्रफल = 2(लम्बाई + चौड़ाई) × ऊँचाई
12. घन का सम्पूर्ण पृष्ठ = $6 \times$ भुजा² = $6a^2$

भास्कराचार्य द्वितीय (सन् 1114 - सन् 1185)

**भास्कराचार्य ने बीजगणित में शून्य के गणित की व्यापक विवेचना की।
बीजगणित के
अन्तर्गत करणियों, सारणियों, सरल समीकरणों तथा वर्ग समीकरण पर वृहद्
कार्य**

**किया। इनके अनुसार किसी ऋणात्मक राशि का वर्गमूल सम्भव है। लीलावती
में इन्होंने**

त्रिभुजों, चतुर्भुजों, वृत्तों के क्षेत्रफल तथा गोले के आयतन पर अभ्यास प्रश्न के साथ π के निकटतम मान पर भी विवेचना की। इनके द्वारा न्यूटन से पूर्व ज्योतिष में चलन गणित का प्रयोग किया गया।

अभ्यास 12 (a)

1. (i) 18 सेमी, (ii) 40 मिमी, (iii) 23 मिमी, (iv) 14.4 मी; 2. (i) 18 सेमी², (ii) 100 मिमी², (iii) 15 मी², (iv) 8 मी²; 3. (i) 4 मी, 18 मी (ii) 3मी, 22 मी, (iii) 4 सेमी, 20 सेमी², (iv) 210सेमी, 6300 सेमी², 4. 30 एअर; 5. 2.64हेक्टेयर; 6. 40मी; 7. 144 सेमी², 48सेमी; 8. 750रुपये; 9. 4725.0 रुपये

अभ्यास 12 (b)

1. 26 मी, 16 मी; 2. 31 मी, 21 मी; 3. (i) 200, (ii) 56, (iii) 144; 4. 96 वर्गमी; 5. 2500 वर्गमी

अभ्यास 12 (c)

1. (i) 425 मी², (ii) 206 मी²; 2. 450; 3. 165 मी²; 4. 910 मी²; 5. (i) 72 मी², (ii) ₹ 3240 6. ₹ 10692.0; 7.(i) 175 मीटर², 100 मीटर², 25 मीटर²

अभ्यास 12 (d)

1. (i) 4.41 सेमी², (ii) 40 सेमी², (iii) 4 सेमी, (iv) 6 सेमी, (v) 6सेमी, (vi) 8 सेमी, (vii) x^2 सेमी²; 2. 12सेमी; 3. 25 सेमी²; 4. (i) 0.006 मी², (ii) 0.0015 मी², (iii) 0.6 मी², (iv) 0.168मी², 5. (i) 24 सेमी², (ii) 100 सेमी², (iii) 75 सेमी² 6. 2400सेमी²

अभ्यास12 (e)

1. (i) 24 सेमी², (ii) 14 सेमी², (iii) 10.44 सेमी², (iv) 31.20 सेमी², (v) 0.4725 मी², (vi) 0.105 मी²; 2. (i) 540 सेमी², (ii) 128 सेमी², (iii) 144 सेमी², (iv) 312 सेमी² 3. 90सेमी; 4.12000 मी²,

60,000; 5. (i) $\sqrt[3]{15}$ सेमी; (ii) 15 सेमी

अभ्यास 12 (f)

1. (i) 40 सेमी², (ii) 40सेमी, (iii) 6 सेमी, (iv) 25.2 सेमी²; 2. (i) 6सेमी, (ii) 8सेमी; 3. 10 मी; 4. 24 सेमी² 5. 30मी²

अभ्यास 12 (g)

1. (i) 94 सेमी², (ii) 72 मी², (iii) 340 सेमी², (iv) 39.82 सेमी², (v) 243.5 सेमी², (vi) 544 सेमी², 2. (i) 1944 सेमी², (ii) 464.64 सेमी², (iii) 8.64 सेमी², (iv) 72600 सेमी², 3. 62.90मी² 4. 45 मी²; 5. 101400सेमी²; 6. ₹585 7. घनाभ के आकर के डिब्बे, 10सेमी² 8. ₹1160

दक्षता अभ्यास 12

1. (i) 84 मी², (ii) 124 मी², (iii) 300 मी², (iv) 975 मी²; 2. 4704; 3. 24 सेमी²; 4. 6 सेमी; 5. 720सेमी²; 6. 30.1 सेमी²; 7. 1440 सेमी