

इकाई: 13 मानसिक अभ्यास



- निर्धारित क्रम (pattern) को बढ़ाना
- रिक्त स्थान की संख्या ढूँढ़ना
- संख्या पहेली

13.1 भूमिका

आप अपने आस-पास की वस्तुओं को देखें। घर से विद्यालय आते वक्त कुछ नियमों एवं अनुशासन का पालन करते हैं। यथा बायीं ओर चलना, वाहनों का एक क्रम में चलना, ट्रैफिक नियमों का पालन करना आदि। वनस्पति जगत में देखिए। किसी वृक्ष विशेष की समस्त पत्तियाँ एक ही आकार की होती हैं। पत्तियों एवं फूलों की पंखुड़ियों का एक निश्चित क्रम विन्यास होता है। ये एकल, युग्म, त्रिक, चार-चार, पाँच-पाँच, छह-छह, आठ-आठ आदि के गुच्छ के रूप में पाये जाते हैं। यद्यपि ये सार्वभौमिक सत्य आज से लाखों वर्ष पूर्व सृष्टि के संग ही अवरित हुए किन्तु इनकी सर्वप्रथम पहचान 13 वीं शती में लियोनार्डो फिबोनाकी (Leonardo Fibonacci) द्वारा करने का उल्लेख प्राप्त होता है।

कुछ समतल और ठोस आकृतियों में भी एकरूपता पायी जाती है।

13.2 निर्धारित क्रम (पैटर्न)



वर्ग आयत, समलम्ब और चतुर्भुज को देखिए। उपरोक्त आकृतियों में एक निर्धारित पैटर्न यह है कि यह सभी आकृतियाँ चार भुजाओं से निर्मित बंद आकृतियाँ हैं। यदि इसी क्रम को आगे बढ़ाया जाये तो अगली आकृति भी चार भुजाओं वाली समतलीय आकृति होगी।

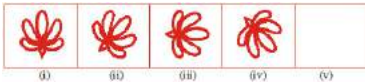
माचिस की तीलियों से बनी इन आकृतियों को देखिए -



(i) से लेकर (iv) तक की आकृतियों में माचिस की तीलियों का एक अनुक्रम बन रहा है। पहले खाने में पाँचों तीलियाँ सीधी हैं फिर अगले खाने में एक तीली उल्टी है तत्पश्चात दो तीलियाँ उल्टी हैं इस प्रकार इसी अनुक्रम के अनुपालन में संख्या (v) वाले खाने में आने वाली आकृति को हम बना सकते हैं। अतः अन्तिम खाने में आने वाली आकृति होगी -



फूलों से बनी (i) से (iv) तक की आकृतियों को देखकर अगले खाने में आने वाली आकृति को हम ज्ञात कर सकते हैं।



निष्कर्ष

कोई भी आकृति या प्रारूप जो खुद को एक अनुमानित दिशा में दोहराता है वह एक पैटर्न है।

उदाहरण १ - दी गयी आकृतियाँ एक अनुक्रम का पालन करती हैं। उस अनुक्रम को ज्ञात कर रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए।

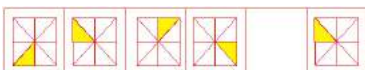
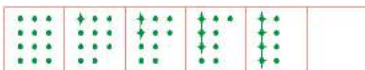
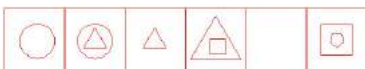


हल - पहले खाने में एक तीली दूसरे खाने में 2, तीसरे खाने में तीन तीली.... अतः पाँचवे खाने में 5 तीलियाँ होंगी। अब तीली का शीर्ष और स्थिति को देखिए। पहले खाने से प्रारम्भ होकर तीली का शीर्ष दक्षिणावर्त दिशा की ओर घूम रहा है। तीली पहले खाने में ऊर्ध्वाधर दिशा में फिर अगले खाने में क्षैतिज दिशा में और फिर ऊर्ध्वाधर दिशा और इसी प्रकार आगे भी अनुक्रम में है। अतः पाँचवें खाने की आकृति होगी।



प्रयास कीजिए

निम्नलिखित आकृतियों को देखिए। यह आकृतियाँ एक अनुक्रम का अनुसरण कर रही हैं। उस अनुक्रम को ज्ञात कर रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए।



13.3 संख्याओं का पैटर्न

निम्नलिखित संख्याओं के पैटर्न को देखिए

(i) 1,4,7,10,13,16,19,22

(संख्याएँ क्रम से 3 के अन्तर से बढ़ रही हैं अर्थात् संख्याओं में 3 का अन्तर है।)

(ii) -1, -3, -5, -7, -9, -11

(संख्याएँ क्रम से 2 के अन्तर से घट रही हैं अर्थात् संख्याओं में 2 का अन्तर है।)

(iii) 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81

(संख्याएँ क्रमशः 1, 2, 3, ... का वर्ग है)

(iv) 1, 8, 27, 64, 125, 216

(संख्याएँ क्रमशः 1, 2, 3, 4, 5, 6 का घन है)

उपर्युक्त संख्याएँ एक निर्धारित पैटर्न का अनुसरण कर रही हैं।

13.3 रिक्त स्थान की संख्या ढूँढना

निम्न अनुक्रमों पर विचार कीजिए

(i) 2, 4, 6, 8, 10,20

(ii) 15, 12, 9, 6, 3, 0, -3, -6,

(iii) 1, 4, 9, 16,

(iv) 2, 3, 5, 7, 11, 13,

(v) 1, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{8}$, $-\frac{1}{128}$,

उपर्युक्त के निरीक्षण से निम्नलिखित तथ्य क्रमशः ज्ञात होते हैं।

- (i) प्रत्येक अगला पद पूर्व पद में '2' का योग करके प्राप्त होता है।
- (ii) प्रत्येक अगला पद पूर्व पद में से 3 घटाने पर प्राप्त होता है।
- (iii) इस अनुक्रम में प्रत्येक संख्या प्राकृतिक संख्याओं का वर्ग है।
- (iv) यह अभाज्य संख्याओं का अनुक्रम है।
- (v) इस अनुक्रम में प्रत्येक अगला पद, पूर्व पद को $(-1/2)$ से गुणा करने पर प्राप्त होता है।

ध्यान दें -

अनुक्रम (i) तथा (v) परिमित अनुक्रम हैं क्योंकि उसमें पदों की संख्या सीमित है, जबकि अन्य अनुक्रम अपरिमित अनुक्रम हैं।

संख्याओं के समूह को जब एक ऐसे निश्चित क्रम में व्यवस्थित किया जाता है कि उसकी प्रथम संख्या, द्वितीय संख्या, तृतीय संख्या को पहचाना जा सके और आगे की संख्या को ज्ञात किया जा सके, तो संख्याओं के समुदाय को अनुक्रम कहते हैं।

प्रयास कीजिए -

निम्नलिखित संख्याओं का समूह एक अनुक्रम बना रहा है। उस अनुक्रम को ज्ञात कर रिक्त स्थान में आने वाली संख्या ज्ञात कीजिए।

- (i) -3, -5, -7,, -11
- (ii) 4, 2, 1,, $1/4$
- (iii) 1, 8, 27, 64,

उदाहरण 2 -रिक्त स्थान की संख्या ज्ञात कीजिए।



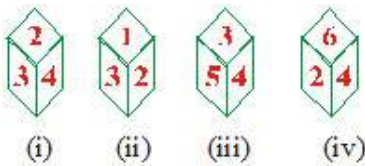
हल - चित्र में दो वृत्त हैं। बाह्य वृत्त को चार भागों में बाँटा गया है। प्रत्येक चौथाई भाग में संख्याओं के अन्तर का घन उसी भाग के आन्तरिक वृत्त की संख्या है।

$$(5-4)^3 = 1, \quad (7-3)^3 = 64, \quad (11-8)^3 = 27,$$

अतः रिक्त स्थान पर संख्या $(8-2)^3 = 216$ आयेगी।

13.4 संख्या पहेली

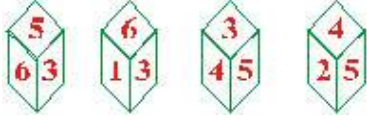
उदाहरण 3 : एक पाँसे को चार बार फेंका गया और चारों स्थितियों को चित्र में दर्शाया गया है। संख्या 2 के विपरीत तल पर कौन सी संख्या अंकित है। ज्ञात कीजिए।



हल - यहाँ संख्या 2 पाँसे की स्थितियों (i), (ii) और (iv) में दिखायी दे रही है। पाँसे पर 1 से 6 तक अंक होते हैं और संख्याएँ 3, 4, 1 और 6 संख्या 2 के आसन्न (adjacent) है। अतः इनमें से कोई भी संख्या 2 के विपरीत तल पर नहीं हो सकती। अतः केवल संख्या 5 ही 2 के विपरीत तल पर होगी।

प्रयास कीजिए -

एक पांसे को 4 बार फेंका गया जिसकी विभिन्न स्थितियाँ संलग्न चित्र में दी गयी है। संख्या 6 के विपरीत तल पर कौन सी संख्या अंकित है ?



उत्तर · 4

क्रियाकलाप १

आइये संख्याओं से एक मनोरंजक खेल खेलते हैं।

259 X 39 X आपकी उम्र = ?

देखिए गुणनफल में आपकी उम्र तीन बार लिखी मिलेगी

यथा $259 \times 39 \times 16 = 161616$

स्पष्टीकरण -

यदि संख्या 259 में 39 का गुणा करेंगे तो गुणनफल 10101 प्राप्त होगा। अब प्राप्त गुणनफल में यदि संख्या 16 से पुनः गुणा करें तो गुणनफल 161616 प्राप्त होगा। इस प्रकार प्राप्त गुणनफल में संख्या 16 की तीन बार पुनरावृत्ति हो रही है।

क्रियाकलाप - २

यह गणना बतायेगी कि आपका अध्ययन हेतु कौन सा विषय सर्वाधिक पसन्द है। 1 से 9 तक के अंकों में से कोई भी एक अंक चुनिए। अब उसमें 3 से गुणा कीजिए। प्राप्त गुणनफल में ३ जोड़िए। अब पुनः 3 से गुणा कीजिए। आपको 2 अंकों की संख्या प्राप्त होगी। प्राप्त संख्या के दोनों अंकों को जोड़िए। प्राप्त संख्या बतायेगी कि आपको कौन सा विषय सर्वाधिक पसन्द है।

1. हिन्दी
2. अंग्रेजी
3. कला
4. शिल्प
5. जीव विज्ञान
6. भौतिक विज्ञान
7. रसायन विज्ञान
8. सामान्य अध्ययन
9. गणित

विशेष -

1 से 9 तक की किसी भी संख्या का चयन करें प्रत्येक दशा में उत्तर 9 ही प्राप्त होगा।

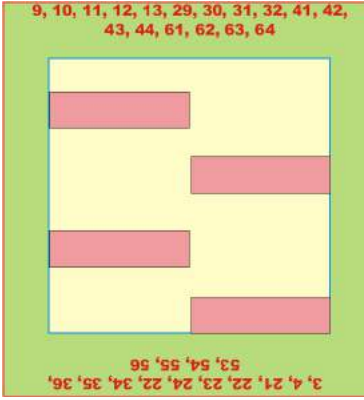
क्रियाकलाप ३

एक सादे चार्ट पेपर पर आकृति 1 के अनुसार 64 वर्गाकार खाने बनाकर क्रमशः 1 से 64 तक संख्याएँ लिख लें। किसी एक छात्र से इनमें से कोई एक संख्या सोचने को कहें। अब संलग्न आकृतियों 2 से 7 के अनुसार 6 पृष्ठ लेकर जिससे ऊपर और नीचे की ओर संख्याएँ लिखी हैं को क्रम से दिखाकर बच्चों से पूछें कि किस पृष्ठ पर उनकी सोची हुई संख्या लिखी है। जिस पृष्ठ पर अंकित संख्याएँ छात्र की सोची हुई संख्या से मिलती हो उसे उसी क्रम में वर्गाकार खाने वाले चार्ट पर संख्याओं की सीध में क्रम से रखते जाएँ और जिस पृष्ठ पर अंकित संख्याएँ छात्र की सोची हुई संख्या से मेल न खाये उसे अलग रख दें। आप देखेंगे कि वर्गाकार खाने वाले चार्ट पेपर पर अन्त में वही संख्या दिखायी पड़ेगी जो कि छात्र ने सोची थी।

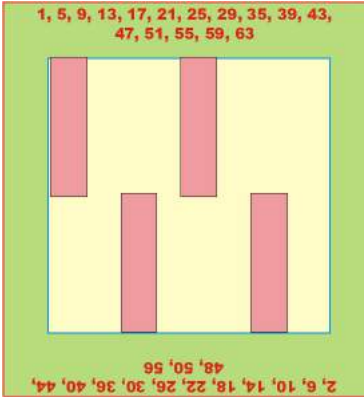
- (1) चार्ट पेपर पर बने वर्गाकार खाने की माप शेष पृष्ठों पर बनी माप के बराबर हो।
- (2) 2 से 6 तक बने पृष्ठों पर कटे (गुलाबी) हुए भाग की माप आकृति 2 से 7 तक बनी आकृति के भाग के समरूप होनी चाहिए।

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

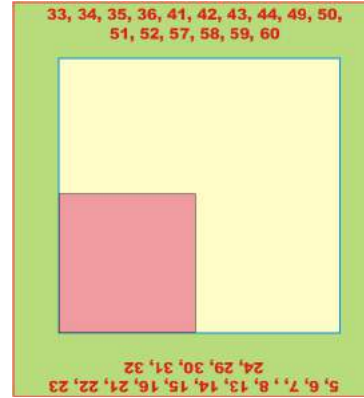
आकृति 1



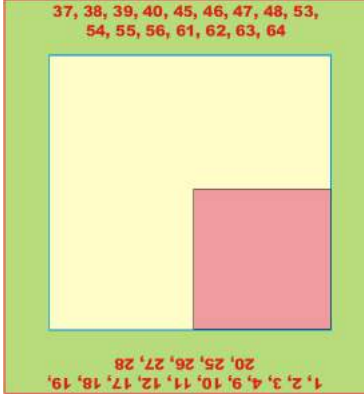
आकृति 2



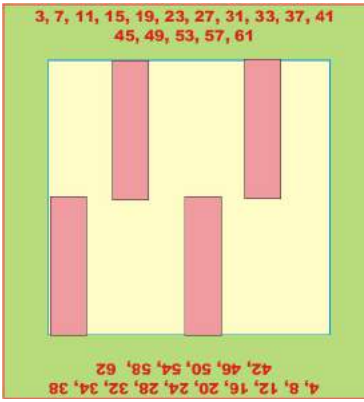
आकृति 3



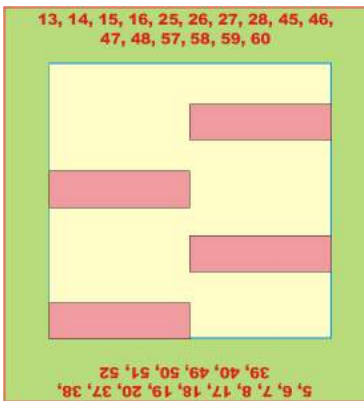
आकृति 4



आकृति 5



आकृति 6



आकृति 7

इस इकाई में हमने सीखा

1. निर्धारित क्रम अथवा पैटर्न के विषय में जानकारी प्राप्त की।
2. अनुक्रम अथवा पैटर्न के माध्यम से सम्बन्धित आकृति और संख्याओं के अमूर्त चिन्तन को मूर्त रूप में परिणित करना।
3. संख्या पहेली के माध्यम से तर्क शक्ति और निदानात्मक प्रवृत्ति का विकास।

सामूहिक चर्चा

महावीराचार्य (850 ई) ने गुणनक्रिया के कुछ ऐसे उदाहरण दिये हैं। जिनमें गुणनफल की संख्या का अंक बाएँ से दाएँ या दाएँ से बाएँ पढ़ने पर एक से रहते हैं।

गणितसार संग्रह में इन मनोहर संख्याओं के उदाहरण हैं -

$$12345679 \times 9 = 111,111,111$$

$$12345679 \times 18 = 222,222,222$$

$$12345679 \times 27 = 333,333,333$$

$$12345679 \times 36 = 444,444,444$$

$$333333666667 \times 33 = 11000011000011$$

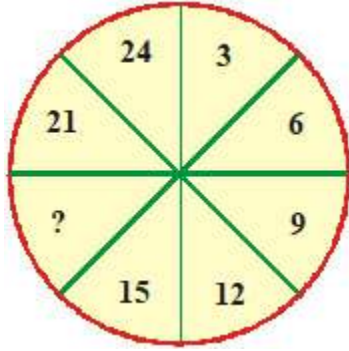
$$14287143 \times 7 = 100010001$$

$$111111111 \times 111111111 = 12345678987654321$$

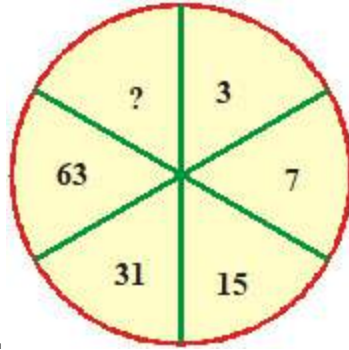
अभ्यास १३

रिक्त स्थान की पूर्ति हेतु दिए गये विकल्पों में से उसे चुनिए जो अनुक्रम को पूरा करें -

1. ABE, BCF, CDG, ? , EFI
(a) CDH (b) EFH (c) DEG (d) DEH
2. 2, 6, 12, 20, 30, 42,
(a) 50 (b) 52 (c) 54 (d) 56
3. 14, 15, 32, 99,
(a) 300 (b) 350 (c) 400 (d) 450
4. 4, 9, 16, 25,
(a) 36 (b) 45 (c) 49 (d) 50

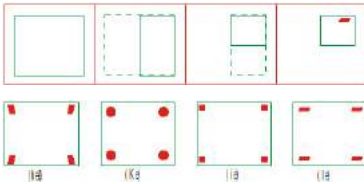


5. (a).

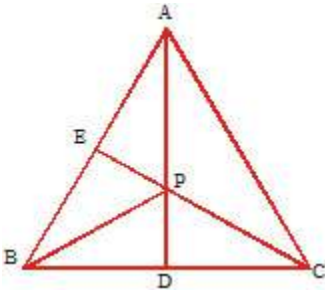


(b).

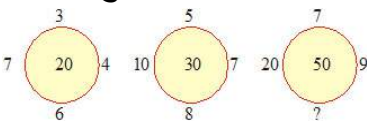
6. प्रश्न आकृतियों में दिखाए अनुसार कागज को मोड़ने, काटने, तथा खोलने के बाद वह किस उत्तर आकृति जैसा दिखाई देगा ?



7. दी गयी आकृति में त्रिभुजों की कुल संख्या ज्ञात कीजिए।



8. लुप्त संख्या ज्ञात कीजिए।



उत्तरमाला

अभ्यास 13

- 1.** (d) DEH ; **2.** (d) 56; **3.** (c) 400; **4.** (a) 36; **5.** (a) 18, (b) 127; **6.** (d) ;
7. 12; **8.** 14