इकाई 5 त्रिभुज

AZBR5N

- **पाइथागोरस प्रमेय की अवधारणा**
- **पाइथागोरस प्रमेय का सत्यापन**
- **पाइथागोरियन त्रिक**
- **भिन्न-भिन्न शर्तों के आधार पर त्रिभुजों की रचना**
- **त्रिभुज के शीर्षलम्ब, लम्ब केन्द्र**
- **त्रिभुज की मध्यिकाएँ एवं केन्द्रक**
- **त्रिभुज के लम्बार्धक एवं परिकेन्द्र**
- **त्रिभुज के कोणों के समद्विभाजक एवं अन्त:केन्द्र**
- **समरूप त्रिभुज के गुणधर्म**
- **दी गयी भुजाओं के अनुपात के आधार पर समरूप त्रिभुजों की रचना।**

भूमिका :

आप पढ़ चुके हैं कि त्रिभुज,तीन रेखाखण्डों से बनी एक सरल बन्द आकृति है। इसमें तीन शीर्ष, तीन भुजाएँ और तीन कोण होते हैं। त्रिभुजों का वर्गीकरण भुजाओं और कोणों के आधार पर किया गया है। भुजाओं के आधार पर तीन प्रकार के त्रिभुज होते हैं समबाहु, समद्विबाहु और विषमबाहु त्रिभुज। कोणों के आधार पर वर्गीकृत मुख्य तीन त्रिभुज प्रकार के होते हैं, न्यूनकोण, अधिक कोण और समकोण त्रिभुज। इन त्रिभुजों की रचना भी आपने सीखी हैं। समकोण त्रिभुज के प्रगुण भी आप जान चुके हैं। इस इकाई में समकोण त्रिभुज के एक महत्वपूर्ण प्रगुण के बारे में पढ़ेंगे जो पाइथागोरस प्रमेय के नाम से जाना जाता है।

यूनानी ज्यामिति विशेषज्ञ पाइथागोरस (Pythagoras)570-500 ई0पू0 ने समकोण त्रिभुज से सम्बन्धित एक बहुत उपयोगी और महत्वपूर्ण गुण के बारे में पता लगाया, जिसे पाइथागोरस प्रमेय के नाम से जाना जाता है । भारतीय गणितज्ञ बौधायन (800 ई0पू0 लगभग) ने समकोण त्रिभुज के इसी प्रमेय का उल्लेख एक आयत के संदर्भ में पाइथागोरस से लगभग 300 वर्ष पूर्व ही किया था। इससे स्पष्ट होता है कि इस प्रमेय का प्रयोग भारतवर्ष में बहुत पहले से होता रहा है किन्तु आज इस प्रमेय को हम जिस रुप में पढ़ते हैं वह यूनान के ज्यामितीय पाइथागोरस के नाम से जाना जाता है।

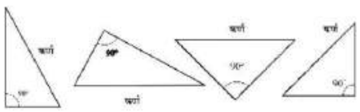
यहाँ हम पाइथागोरस प्रमेय को विस्तार से अध्ययन करेंगे ।

इसे कीजिए :

समकोण त्रिभुज :

निम्नांकित त्रिभुजों को देखिए। कोणों के आधार पर ये किस प्रकार के त्रिभुज हैं ? समकोण की सम्मुख भुजा और शेष दो भुजाओं को नापिए और बताइए कि इनमें सबसे बड़ी भुजा कौन है?

हमने देखा कि समकोण त्रिभुज में समकोण के सामने की भुजा सबसे बड़ी है। इस भुजा को कर्ण कहते हैं।

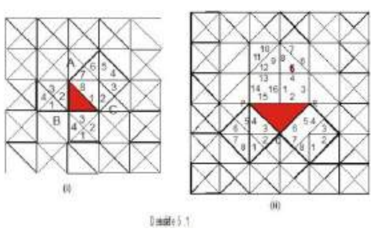


समकोण त्रिभुज में समकोण की सम्मु(ख) भुजा को कर्ण कहते हैं। यह समकोण बनाने वाली दोनों भुजाओं से बड़ी होती है ।

इसे कीजिए :

5.2पाइथागोरस प्रमेय की अवधारणा

आकृति 5.1 (i) और (ii) में बने दोनों छायांकित समकोण त्रिभुजों ABCऔर PQR को देखिए। दोनों त्रिभुजों की सभी भुजाओं पर बाहर की ओर वर्ग बने हैं। ये सभी वर्ग समान प्रकार के छोटे-छोटे सर्वांगसम त्रिभुजों से ढके हैं।

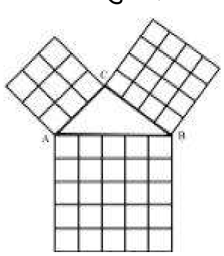


आकृति 5.1(i) और (ii)

Δ ABCके कर्ण ACपर बने वर्ग के छोटे-छोटे त्रिभुजों की संख्या कितनी हैं ? समकोण बनाने वाली भुजाओं ABतथा BCपर बने वर्गों में छोटे-छोटे त्रिभुजों की संख्या का योग कितना है ?

हम देखते हैं कि समकोण ABC के कर्ण AC पर बने वर्ग में छोटे-छोटे त्रिभुजों की संख्या 8 है और समकोण बनाने वाली भुजाओं ABतथा BCपर बने वर्गों में त्रिभुजों की संख्याओं का योग 4+4=8 के बराबर है।

इसी प्रकार ΔPQR में कर्ण PR पर बने वर्ग में 16 त्रिभुज तथा समकोण बनाने वाली भुजाओं QR तथा PQ पर बने वर्गों में 8-8 त्रिभुज हैं। इनका योग कर्ण PR पर बने वर्ग1 6त्रिभुजों के बराबर है इसकी जांच कीजिए।



आकृति 5.2

प्रयोग 1

एक समकोण त्रिभुज ABCबनाइए, जिसमें ∠BCA समकोण हो और BC=4 मात्रक तथा CA =3 मात्रक हों। नापने पर कर्ण AB=5 मात्रक। AB, BCऔर CA पर बाहर की ओर वर्ग खींचिए। इनमें से प्रत्येक वर्ग को एकांक वर्गों में विभाजित कीजिए, जैसा निम्नांकित चित्र में प्रदर्शित है।

हम जानते हैं कि वर्ग का क्षेत्रफल=भुजा^{2}

∴ ABपर बने वर्ग का क्षेत्रफल =5^2 वर्ग मात्रक

=25 वर्ग मात्रक

BCपर बने वर्ग का क्षेत्रफल=4^2 वर्ग मात्रक

=16 वर्ग मात्रक

CA पर बने वर्ग का क्षेत्रफल=3^2 वर्ग मात्रक

=9 वर्ग मात्रक

BCऔर CA पर बने वर्गों के क्षेत्रफलों का योग =(16 + 9) वर्ग मात्रक

=25 वर्ग मात्रक

हम देखते हैं कि कर्ण ABपर बने वर्ग का क्षेत्रफल 25 वर्ग मात्रक तथा शेष दोनों भुजाओं BCऔर CA पर बने वर्गों के क्षेत्रफलों के योगफल 25 वर्ग मात्रक के बराबर है।

उपर्युक्त परिणामों के आधार पर हम कह सकते हैं कि :

किसी समकोण त्रिभुज में कर्ण पर बना वर्ग शेष दो भुजाओं पर बने वर्गों के योग के बराबर होता है।

इस कथन को पाइथागोरस प्रमेय कहते हैं।

उपर्युक्त प्रमेय का कथन निम्नलिखित रूप में भी किया जाता है :

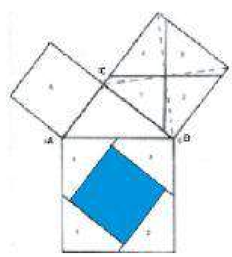
समकोण त्रिभुज में कर्ण पर बने वर्ग का क्षेत्रफल शेष दो भुजाओं पर बने वर्गों के क्षेत्रफलों के योग के बराबर होता है ।

अथवा

$a^2 + b^2 = c^2$, **जहाँ c समकोण त्रिभुज का कर्ण तथा a और b उसकी शेष भुजाओं की मापें हैं ।**

प्रयोग 1- पाइथागोरस प्रमेय का सत्यापन (कट तथा पेस्टविधि से)

एक मोटे कागज पर एक समकोण त्रिभुज ABCकी रचना, जिसका ∠BCA समकोण हो और उसकी तीनों भुजाओं पर बाहर की ओर वर्गों की रचना कीजिए। अब BCपर बने वर्ग का केन्द्रीय बिन्दु वह बिन्दु जहाँ पर उसके विकर्ण एक दूसरे को काटते हैं। ज्ञात कीजिए। इस बिन्दु से त्रिभुज के कर्ण ABके समान्तर तथा उस पर इसी बिन्दु से होकर लम्ब रेखाएँ खींचिए। अब वर्ग को इन रेखाओं की सीध में काट कर उन पर 1, 2, 3 और 4 लिख दीजिए। इन चार टुकड़ों और CA पर बने वर्ग 5 को काटकर ABपर बने वर्ग पर चित्रानुसार इस प्रकार रखिए कि



आकृति 5.3

आकृति 5.3 के समकोण त्रिभुज के कर्ण पर बने वर्ग के शीर्षों पर समायोजित हो जायें। शेष भाग ACके वर्ग 5 से ढक जायेगा।

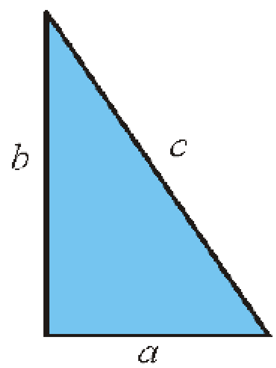
अब चित्र से पूर्णत: स्पष्ट है कि वर्ग BCके चार टुकड़े तथा CA पर बना वर्ग, कर्ण ABपर बने वर्ग को पूरा-पूरा ढक लेते हैं। इससे पाइथागोरस प्रमेय की सत्यता प्रमाणित होती है।

सम्बन्ध $c^2 = a^2 + b^2$ से स्पष्ट है कि $c^2 > a^2$ तथा $c^2 > b^2$, अत: $c > a$ तथा $c > b$. इस प्रकार किसी समकोण त्रिभुज में कर्ण सबसे बड़ी भुजा होती है।

प्रयोग - 2

एक मोटा रंगीन कागज ले कर किसी भी माप का एक समकोण त्रिभुज बनाइए। अब इसी के चार प्रतिरूप बनाइए।

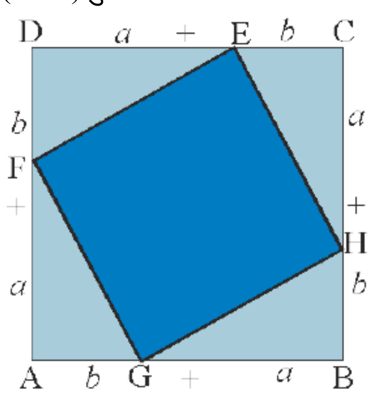
उदाहरण के लिए एक समकोण त्रिभुज लेते हैं। आधार भुजा की लम्बाई a इकाई, दूसरी भुजा की लम्बाई b इकाई और कर्ण की लम्बाई c इकाई है। कर्ण की लम्बाई c इकाई की नाप के बराबर भुजा का एक वर्ग बनाइए। किसी अन्य एक कागज पर (a + b) इकाई लम्बाई के भुजा के वर्ग की किसी अन्य रंग की आकृति बनाइए।



आकृति 5.4

अब अपने बनाए हुए 4 त्रिभुजों को (a + b)भुजा के वर्ग के साथ आकृति5.5 के अनुसार व्यवस्थित कीजिए।

(a + b)भुजा के वर्ग का क्षेत्रफल



=4 ^{2} समकोण का क्षेत्रफल (जिसकी भुजाएँ a और b हैं)+c लम्बाई भुजा का वर्ग

$$\& \ (a + b)^2 = 4 \times \left(\frac{1}{2} a \times b\right) + c^2$$

$(a + b)^2 = 2a\,b + c^2$

$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$

$a^2 + b^2 = c^2$

उपरोक्त दोनों प्रयोगों के आधार पर कहा जा सकता है।

किसी समकोण त्रिभुज के कर्ण पर बने वर्ग का क्षेत्रफल शेष दोनों भुजाओं पर बने वर्गों के क्षेत्रफल के योगफल के बराबर होता है

बौधायन

बौधायन के जन्मस्थान, माता पिता परिवार की जानकारी उपलब्ध नहीं है। इतिहासकार इनका काल ईसा पूर्व लगभग ८०० वर्ष मानते हैं। सर्वप्रथम इन्होंने वौधायन शुल्व सूत्र का उद्धरण दिया जिसे आज पाइथागोरस प्रमेय के नाम से जाना जाता है। यह सूत्र निम्न है -

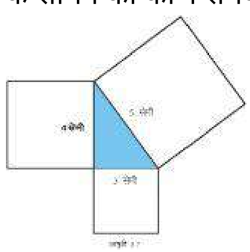
दीर्घ चतुरश्र (आयत) की अन्कया रज्जु (कर्ण) पर बना वर्ग पाश्र्वमानी (आधार) तथा तिर्यङ्गानी (लम्ब) पर बने वर्गों के योग के बराबर होता है।

5• 2• 2 पाइथागोरस प्रमेय का विलोम :

इसे कीजिए :

प्रयोग संख्या -3

3 सेमी, 4 सेमी तथा 5 सेमी लम्बी भुजाओं के तीन वर्ग कागज से काटिए । एक कागज के ऊपर इन तीनों वर्गों के तीन शीर्षों को मिलाते हुए आकृति 2.7 के अनुसार इस प्रकार रखिए कि उनकी भुजाओं से एक त्रिभुज बन जाये । इस प्रकार बने त्रिभुज को कागज पर चिन्हित कीजिए। इस त्रिभुज के कोणों को मापिए । आप देखेंगे कि इनमें केवल 5 सेमी भुजा के सामने का कोण समकोण है।



आकृति 5.7

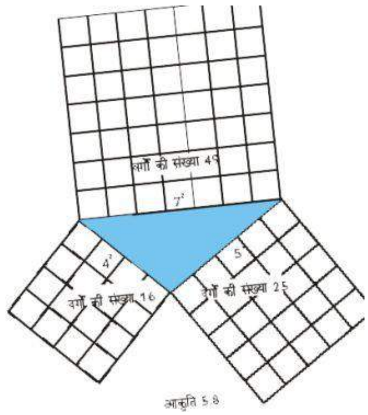
ध्यान दीजिए कि यहाँ

$3^2 + 4^2 = 5^2$, $4^2 + 5^2 \neq 3^2$ तथा

$3^2 + 5^2 \neq 4^2$.

प्रयोग संख्या -4

उपर्युक्त प्रक्रिया को 4सेमी., 5 सेमी तथा 7सेमी भुजाओं वाले तीन वर्ग लेकर फिर दोहराइए । इस बार आप को अधिक कोण त्रिभुज प्राप्त होगा । यहाँ भी ध्यान दीजिए कि



$4^2 + 5^2 \neq 7^2$, $7^2 + 5^2 \neq 4^2$ तथा

$4^2 + 7^2 \neq 5^2$

$16 + 25 \neq 49$, $49 + 25 \neq 16$

$16 + 49 \neq 25$

$41 \neq 49$, $71 \neq 16$

$65 \neq 25$

इस प्रक्रिया से पता चलता है कि पाइथागोरस प्रमेय केवल तभी लागू होता है जब, त्रिभुज एक समकोण त्रिभुज होगा।

अत:

यदि किसी त्रिभुज पर पाइथागोरस प्रमेय प्रयुक्त होता है, तो वह समकोण त्रिभुज होगा।

इसी प्रकार 5 सेमी, 12 सेमी और 13 सेमी भुजाओं वाले तीन वर्ग लेकर पूर्व प्रक्रिया दोहराने से प्राप्त त्रिभुज में पाइथागोरस प्रमेय सिद्ध होता है या नहीं। जाँच कीजिए।

इसे भी कीजिए :

1. एक त्रिभुज ABCखींचिए जिसमें AB=5सेमी, BC=3 सेमी तथा CA =4 सेमी हो।

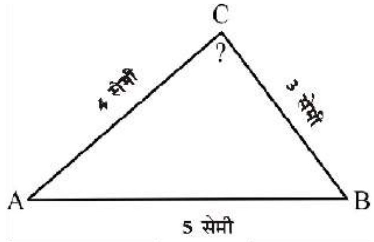
हम देखते हैं कि :

$5^2 = 3^2 + 4^2$

$25 = 9 + 16$

$= 25$

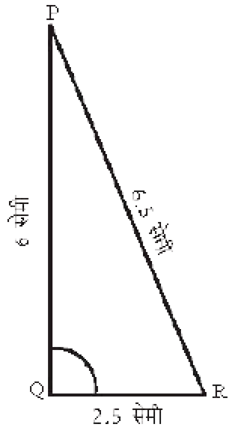
$\angle$ACB मापिए और उसकी माप रिक्त स्थान में लिखिए।



आकृति 5.9

$\angle ACB$ .....

II. Δ PQR की रचना कीजिए, जिसमें PQ= 6 सेमी,QR=2.5 सेमी औरPR=6.5सेमी हो। यहाँ $(2.5)^2 + 6^2 = (6.5)^2$ है।

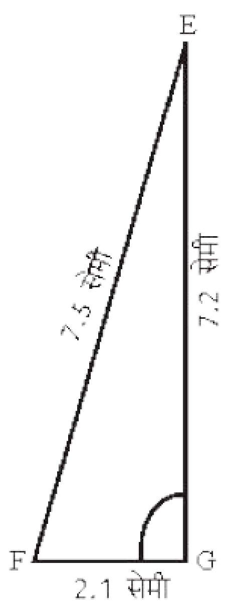


आकृति 5.10

$\angle PQR$ को नापिए और नाप को रिक्त स्थान पर लिखिए :

$\angle PQR$ = ...

III.पुन: यही प्रयोग त्रिभुज EFG के साथ कीजिए, जिसमें FG= 2.1 सेमी, EG=7.2 सेमी और FE=7.5 सेमी हो।



आकृति 5.11

यहाँ $(2.1)^2 + (7.2)^2 = (7.5)^2$

यहाँ EGF को नापिए और नाप को रिक्त स्थान में लिखिए :

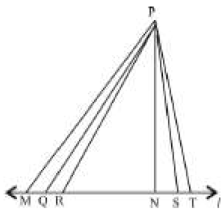
$\angle$ EGF = ...

हमने देखा कि प्रत्येक स्थिति में त्रिभुज का एक कोण 90° है।

निष्कर्ष :

यदि किसी त्रिभुज में एक भुजा पर बना वर्ग, शेष दो भुजाओं पर बने वर्गों के योग के बराबर हो, तो वह त्रिभुज समकोण त्रिभुज होता है। यही प्रमेय पाइथागोरस प्रमेय का विलोम है।

किसी समकोण त्रिभुज में कर्ण, अन्य दो भुजाओं में से प्रत्येक से बड़ा होता है।



इसे भी कीजिए :

- **रेखा l के बाहर कोई बिन्दु P लीजिए।**

P से रेखा l पर लम्ब PN खींचिए।

P से इस लम्ब के अतिरिक्त अन्य रेखाखंड PR,PQ,PM,PS खींचिए। इन सब रेखाखंडों को नाप कर बताइए कि कौन रेखाखंड सबसे छोटा है।

हम देखते हैं कि PN सबसे छोटा रेखाखंड है। इस प्रकार हम कह सकते हैं कि :

किसी रेखा के बाहर दिये हुए किसी बिन्दु से जो भी रेखाखंड इस रेखा तक खींचे जा सकते हैं, उनमें लम्ब सबसे छोटा होता है।

5.3 पाइथागोरियन त्रिक (Pythagorean Triplets)

यदि किसी समकोण त्रिभुज की समकोण बनाने वाली भुजाओं की लम्बाई 2n और n^2-1 हैं और कर्ण की लम्बाई n^2+1 है तो

$(2n)^2 + (n^2-1) = (n^2+1)^2$ जबकि $n > 1$

अत: $2n$, $n^2 - 1$, $n^2 + 1$ को पाइथागोरियन त्रिक कहते हैं।

निम्नलिखित सारणी में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

भुजा n	BC n^2-1	AB 2n	AC n^2+1	$AC^2=BC^2+AB^2$ ----
2	3	4	5	----
3	8	6	10	----
4	15	8	17	----
5	24	10	26	----

उदाहरण : दिखाइए कि 8, 9 और 12 पाइथागोरियन त्रिक नहीं हैं।

हल : $8^2 = 64$

$9^2 = 81$

$8^2 + 9^2 = 64 + 81$

$= 145$ .... (1)

तथा $12^2 = 144$ .... (2), (1) और (2) की तुलना द्वारा, $8^2 + 9^2 \neq 12^2$

अत: 8, 9 और 12 पाइथागोरियन त्रिक नहीं हैं।

पाइथागोरियन त्रिक ज्ञात करने की विधि :

पाइथागोरियन त्रिक 3, 4, 5 लीजिए।

यहाँ $5^2 = 3^2 + 4^2$

या $25 = 9 + 16 = 25$

(3, 4, 5) को 2 से गुणा कीजिए,

3 x 2, 4 x 2, 5 x 2 अर्थात् 6, 8, 10

6, 8, 10 पाइथागोरियन त्रिक हैं।

जाँच कीजिए।

हल : $10^2 = 6^2 + 8^2$

$100 = 36 + 64 = 100$

अत:

यदि (a,b,c) पाइथागोरियन त्रिक हैं तथा k एक धन पूर्णांक है, तो ak, bk औरck भी पाइथागोरियन त्रिक हैं।

समकोण त्रिभुज का कर्ण ज्ञात करना

उदाहरण 1: उस समकोण त्रिभुज का कर्ण ज्ञात कीजिए जिसकी अन्य दो भुजाएँ 8 सेमी और 15 सेमी हैं।

हल : मान लीजिए कि समकोण त्रिभुज का कर्ण a सेमी है।

पाइथागोरस प्रमेय से

$a^2 = 8^2 + 15^2$

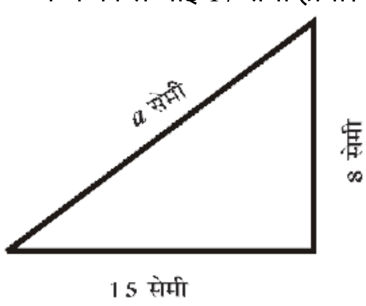
या, $a^2 = 64 + 225$

या, $a^2 = 289$

या, $a^2 = 17^2$

$\therefore a = 17$

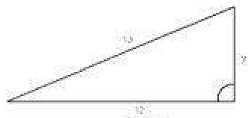
$\therefore$ कर्ण की लम्बाई 17 सेमी होगी।



आकृति 5.13

•समकोण त्रिभुज में कर्ण के अतिरिक्त अन्य दो भुजाओं में से एक भुजा ज्ञात करना :

उदाहरण 2. आकृति 2.14 में अज्ञात भुजा y की लम्बाई ज्ञात कीजिए।



आकृति 5.14

हल : पाइथागोरस प्रमेय से

$y^2 + 12^2 = 13^2$

या, $y^2 + 144 = 169$

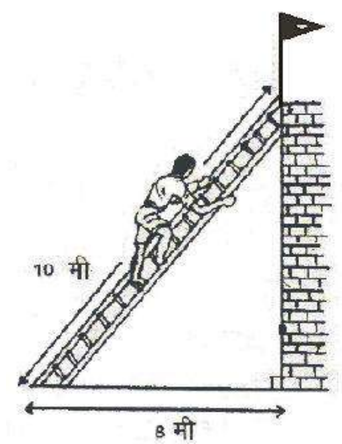
या, $y^2 = 169 - 144$

या, $y^2 = 25$

या, $y = 5$

अत: अज्ञात भुजा की लम्बाई 5 मात्रक होगी।

उदाहरण 3: 10 मीटर लम्बी सीढ़ी एक दीवार से 8 मीटर दूरी पर लगायी गयी है। इस दीवार पर सीढ़ी कितनी ऊँचाई तक पहुँचेगी ?



आकृति 5.15

हल : मान लीजिए कि सीढ़ी दीवार पर h मी ऊँचाई तक पहुँची।
पाइथागोरस प्रमेय से,

$10^2 = 8^2 + h^2$

$\therefore h^2 = 10^2 - 8^2$

$= 100 - 64$

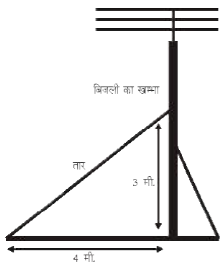
$h^2 = 36$

या, $h^2 = 6^2$

या, $h = 6$

अत: सीढ़ी 6 मीटर ऊँचाई तक दीवार पर पहुँचेगी ।

उदाहरण 4: बिजली के खम्भे को सहारा देने वाले तार की लम्बाई आकृति 5.16 की सहायता से ज्ञात कीजिए।



आकृति 5.16

हल : मान लीजिए कि तार की लम्बाई x मीटर है।

चूँकि चित्र में समकोण त्रिभुज बनेगा। अत: पाइथागोरस प्रमेय से,

$x^2 = 4^2 + 3^2$

$= 16 + 9$

या, $x^2 = 25$

या, $x = 5$

$\therefore x = 5$

अत: तार की लम्बाई 5 मीटर है।

उदाहरण 5:प्रकाश स्तम्भ एक वृक्ष भूमि से 12 मी की ऊँचाई से टूटा, परन्तु दो टुकड़े अलग नहीं हुए। जिस स्थान पर स्तम्भ की चोटी ने भूमि को छुआ, वह वृक्ष के आधार से 5 मी दूर है। टूटने के पहले स्तम्भ कितना ऊँचा था ?

आकृति5.17

हल : मान लीजिए कि स्तम्भ का x मी भाग टूटा। टूटने के बाद उसका 12 मी भाग बचा रहा।

उसका ऊपरी सिरा स्तम्भ के पास से 5 मी दूर भूमि से स्पर्श कर रहा है। इसको हम आकृति ABCसे प्रर्दिशत कर सकते हैं। $\angle C$ समकोण है।

अत: $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$= 12^2 + 5^2$

$= 144 + 25$

$AB^2 = 169$

$AB^2 = 13^2$

$\therefore AB = 13$

$AB = x = 13$

आकृति का B A भाग ही टूट कर गिरा है और समकोण ABCमें $AB = x$ के रूप में कर्ण को व्यक्त कर रहा है। अत: टूटने से पहले प्रकाश स्तम्भ की पूरी ऊँचाई = 12 मी + x मी

= 12 मी + 13 मी = 25 मी

प्रयास कीजिए :

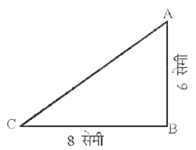
1.निम्नलिखित नाप के त्रिभुजों में कौन त्रिभुज समकोण त्रिभुज है।

(i) 5 सेमी, 4 सेमी, 3 सेमी

(ii) 6 सेमी, 8 सेमी, 7 सेमी

अभ्यास5(a)

1. आकृति5.18 में, ∠B समकोण है, भुजा CA की माप होगी -

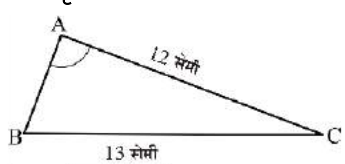


आकृति 5.18

(i) 5 सेमी **(ii)** 10 सेमी

(iii) 8 सेमी **(iv)** 6सेमी

2.आकृति 5.19में ∠A समकोण हो, तो AB की माप होगी -

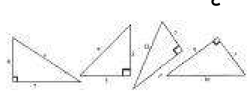


आकृति 5.19

(i) 25 सेमी **(ii)** 13 सेमी

(iii) 5 सेमी **(iv)** 12 सेमी

3. निम्नलिखित आकृतियों में समकोण त्रिभुजों को देखकर अपनी अभ्यास पुस्तिका में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।



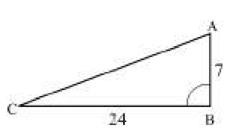
(i) **(ii)** **(iii)** **(iv)**

आकृति 5.19

(i) $4^2 + 7^2 = ...$ **(ii)** $5^2 + ... = d^2$

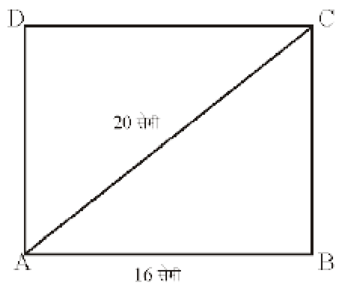
(iii) $13^2 - 7^2 = ...$ **(iv)** $y^2 = 10^2 - ....$

4. ΔABC में ∠ABC समकोण है। यदि AB=7 सेमी और bc=24 सेमी, तो CA की लम्बाई ज्ञात कीजिए।



आकृति 5.20

5. आयत ABCD में विकर्ण CA=20 सेमी और AB=16 सेमी। BC की लम्बाई ज्ञात कीजिए।



आकृति 5.21

6. 65 डेसीमी लम्बी सीढ़ी को दीवार से 25 डेसीमी हटाकर लगाया गया है, दीवार के आधार से सीढ़ी के ऊपरी सिरे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

7.26 मीटर लम्बा एक तार है। उसका एक सिरा 24 मीटर ऊँचे खम्भे के ऊपरी सिरे से बंधा है और दूसरा सिरा जमीन में गड़ा है। जमीन पर खम्भे और तार के निचले सिरे के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

8.निम्नलिखित पाइथागोरियन त्रिक हैं। प्रत्येक से तीन-तीन पाइथागोरियन त्रिक बनाइए :

(i) 3, 4, 5 **(ii)** 5, 12, 13 **(iii)** 8, 15, 17

9. निम्नलिखित में पाइथागोरियन त्रिक छाँट कर लिखिए :

(i) 5, 12, 13 **(ii)** 7, 8, 15 **(iii)** 6, 7, 8

(iv) 8, 15, 17 **(v)** 3, 4, 5

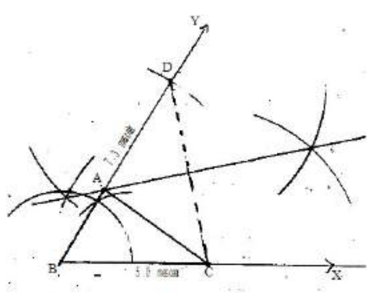
10. सत्यापन कीजिए यदि कोई n विषम संख्या है तो n, $\frac{n^2-1}{2}$, $\frac{n^2+1}{2}$ पाइथागोरियन त्रिक हैं।

5.4 त्रिभुजों की रचना

5.4.1 त्रिभुज की रचना करना जबकि त्रिभुज का आधार, आधार का एक कोण एवं अन्य दो भुजाओं का योगफल ज्ञात हो।

उदाहरण - त्रिभुज ABC की रचना करना जिसकी भुजा BC=5 सेमी, $\angle B=60°$ तथा CA+AB=7.3सेमी है |

रचना के चरण -



किरण BX खींचिए, इसमें से BC=5सेमी का रेखाखण्ड लीजिए।

बिन्दु B पर 60 का कोण बनाती हुई किरर्ण BX खींचिए।

BY से BD = 7.3 सेमी का रेखाखण्ड लीजिए। DC को मिलाइए।

DC का लम्बसमद्विभाजक खींचिए जो BD को बिन्दु A पर प्रतिच्छेद करता है।

AC को मिलाइए।

ΔABC अभीष्ट त्रिभुज है।

5.4.2 त्रिभुज की रचना करना जबकि त्रिभुज का आधार, आधार का एक कोण एवं अन्य दो भुजाओं का अंतर ज्ञात हो।

उदाहरण: त्रिभुज ABC की रचना करना जिसकी भुजा BC = 5.5 सेमी, कोण B=30 तथा AB - CA=3.5सेमी

रचना के चरण

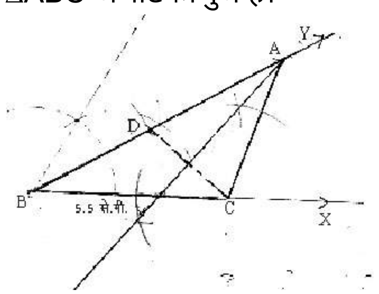
किरण BX खींचिए इसमें सेBC=5.5 सेमी का रेखाखंड लीजिये |

बिंदु B पर 30° कोण बनाते हुए BY किरण खीचिये

BY से AB-CA=3.5 सेमी का रेखाखंड BD लीजिये

CD को मिलाइये तथा CD का लम्बार्धक खींचिए जो BY को बिंदुA पर काटता है CAको मिलाइए

ΔABC अभीष्ट त्रिभुज है।



अभ्यास 5(b)

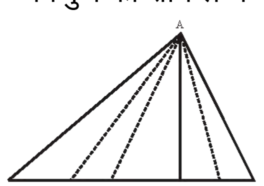
1. त्रिभुज ABC की रचना कीजिये जिसकी भुजा 6 सेमी कोण B=50° तथा CA+AB=8सेमी
2. त्रिभुज ABC की रचना कीजिये जिसकी भुजा BC=7.5 सेमी कोण B=45° तथा AB-CA=2.0 सेमी
3. त्रिभुज ABC की रचना कीजिये जिसकी भुजा BC=5.0 सेमी कोण B=50° तथाAC-AB=2.0 सेमी

5.5.1 त्रिभुज के शीर्ष लम्ब

त्रिभुज ABC में शीर्ष A से BC तक अनेक रेखाखंड खींचे जा सकते हैं। नीचे दी गई आकृति 5.22 में इन रेखाखंडों को देखिए।ध्यान दीजिए, इनमें से कौन सा रेखाखंड त्रिभुज की ऊँचाई को प्रदर्शित करता है ?

रेखाखंड AL त्रिभुज की ऊँचाई है।

वह रेखा खंड जो शीर्ष A से सीधा उध्वाधर नीचे BCतक और उस पर लम्बवत् होता है, त्रिभुज की ऊँचाई होती है । इसे त्रिभुज का शीर्घ लम्ब भी कहते है।



आकृति 5.22

रेखा खंड AL त्रिभुज का एक शीर्ष लम्ब है । शीर्ष लम्ब का एक अन्त्य बिन्दु, त्रिभुज के शीर्ष पर और दूसरा अन्त्य बिन्दु सम्मुख भुजा बनाने वाली रेखा पर स्थित जिस बिन्दु पर लम्ब होता है वही बिन्दु है। प्रत्येक शीर्ष से एक शीर्ष

लम्ब खींचा जा सकता है ।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए :

(i) एक त्रिभुज में कितने शीर्ष हो सकते हैं ?

(ii) क्या आप कोई ऐसा त्रिभुज सोच सकते हैं; जिसके दो शीर्ष लम्ब उसकी दो भुजाएँ ही हों ।

(iii) क्या एक शीर्ष लम्ब पूर्णतया त्रिभुज के अभ्यन्तर में सदैव स्थित होगा?

संकेत : प्रश्न(ii) और (iii) के लिए प्रत्येक प्रकार के त्रिभुज खींचकर ज्ञात कीजिए ।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए :

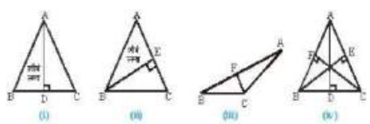
1. ΔPQR में कोण P एक समकोण है। इसकी सबसे लम्बी भुजा कौन-सी है ।

2. किसी समकोण त्रिभुज में सबसे लम्बी भुजा कौन-सी होती है ।

इन्हें देखिए :

निम्नलिखित आकृति 5.23 में (i), (ii) और (iii) को देखिए।

चित्र (i) में ΔABCके शीर्ष A से भुजा BCपर लम्ब AD, चित्र (ii) में ΔABCके शीर्ष B से भुजा ACपर लम्ब BE और चित्र (iii) में ΔABCके शीर्ष Cसे भुजा ABपर लम्ब CF खींचा गया है।



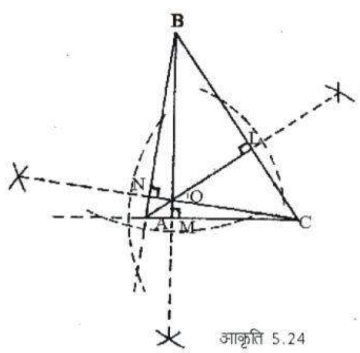
आकृति5.23

रेखा खण्ड AD, BE और CF, ΔABCके शीर्ष लम्ब हैं।

आकृति 2.23 (iv) में त्रिभुज ABCके कितने शीर्षलम्ब हैं ? हमने देखा त्रिभुज में तीन शीर्षलम्ब हैं, जो एक ही बिन्दु से होकर जाते हैं।

किसी त्रिभुज के शीर्ष से सम्मुख भुजा पर डाले गये लम्ब रेखा खण्डको त्रिभुज का शीर्षलम्ब (Altitude) कहते हैं। त्रिभुज में तीन शीर्षलम्ब होते हैं।

प्रयोग 1: एक त्रिभुज ABCबनाइए, जिसकी भुजाएँ, 4 सेमी, 5 सेमी और 6 सेमी हों। इस त्रिभुज के शीर्ष A, B और Cसे शीर्षलम्ब खींचिए।



आकृति 5.24

रचना के चरण निम्नलिखित हैं-

1. दी हुई भुजाओं की माप से Δ ABCबनाइए।
2. शीर्ष A से AL $\perp$ BCखींचिए।

3. शीर्ष B से BM $\perp$ ACखींचिए।

4. शीर्ष Cसे CN $\perp$ ABखींचिए।

क्या तीनों शीर्षलम्ब एक ही बिन्दु 0 से होकर जा रहे हैं ?

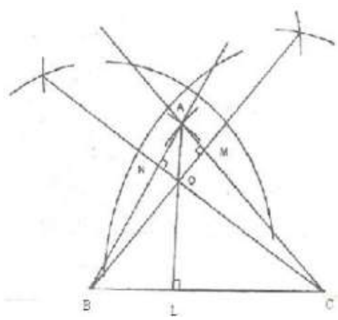
हम देखते हैं कि ΔABCके तीनों शीर्षलम्ब AL, BM और CN एक ही बिन्दु 0 से होकर जा रहे हैं।

प्रयोग 2:एक त्रिभुज ABCखींचिए जिसकी भुजाएँ 7 सेमी, 6 सेमी और 5 सेमी हैं। इस त्रिभुज के शीर्ष B और Cसे शीर्षलम्ब खींचिए। रचना के चरण निम्नलिखित हैं।

1. दी हुई भुजाओं के अनुसार ΔABCखींचिए।
2. B से ACपर लम्ब BM खींचिए।
3. Cसे ABपर लम्ब CN खींचिए।
4. जिस बिन्दु पर दोनों लम्ब BM और CN प्रतिच्छेदित करें उसे बिन्दु 0 से प्रर्दिशत कीजिए।
5. A को 0 से मिलाइए और आगे बढ़ाइए जो BCको बिन्दुL पर काटे।

$\angle$ ALB नापिए। हम देखते हैं कि $\angle$ALB =90°; अत: AL $\perp$ BCहै जो तीसरा शीर्षलम्ब है।

हमने यह भी देखा कि पहले दो शीर्षलम्बों का प्रतिच्छेदन बिन्दु 0 है।



आकृति 5.25

उपर्युक्त से यह निष्कर्ष निकलता है कि

एक त्रिभुज के शीर्षलम्ब संगामी होते हैं। त्रिभुज के शीर्षलम्बों (तीनों) के संगामी बिन्दु को त्रिभुज का लम्बकेन्द्र (Orthocenter) कहते हैं।

प्रयास कीजिए

अब एक त्रिभुज खींचिए। इसके दो शीर्षलम्ब खींचिए। इनके प्रतिच्छेदित बिन्दु 0 को तीसरे शीर्ष से मिलाकर इतना आगे बढ़ाइए कि यह तीसरी भुजा को काटे। इसके द्वारा बने कोण को नापिए। हम देखते हैं कि यह कोण 90° है। अत: तीनों शीर्षलम्ब बिन्दु 0 से जाते हैं। विशेष : त्रिभुज का लम्बकेन्द्र निकालने के लिए दो शीर्षलम्ब खींचना ही पर्याप्त है, क्योंकि तीसरा शीर्षलम्ब भी इसी प्रतिच्छेद बिन्दु (लम्बकेन्द्र) से होकर जाता है।

अभ्यास 5 (c)

1. नीचे दी गई भुजाओं और कोणों से त्रिभुज खींचकर उनके शीर्षलम्ब खींचिए तथा जाँच कीजिए कि प्रत्येक त्रिभुज के शीर्षलम्ब संगामी हैं।

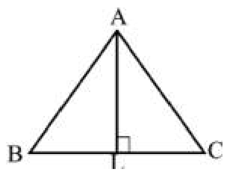
(i) 3.4 सेमी, 5.4 समी, 4.5 सेमी;

(ii) दो भुजाएँ 6 सेमी और 4.5 सेमी तथा इनके बीच का कोण 120°;

(iii) दो भुजाएँ 5 सेमी और 4 सेमी तथा इनके बीच का कोण 90°;

(iv) दो कोण 650 तथा 800 और बीच की भुजा 5 सेमी।

2. एक समद्विबाहु त्रिभुज ABCखींचिए, जिसमें AB=AC, शीर्ष A से शीर्षलम्ब AL खींचिए। मापकर बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य है या नहीं।



आकृति5.26

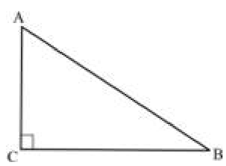
(i) BL = LC

(ii)< ∠B =< ∠C

(iii) ∠<BAL =< ∠CAL

(iv)शीर्षलम्ब AL ने समद्विबाहु ΔABCको दो सर्वांगसम त्रिभुजों में बाँट
दिया है।

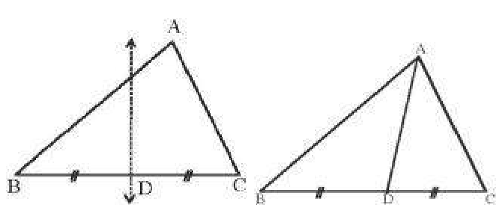
3. ΔABCमें ∠Cसमकोण है। इस त्रिभुज का बिना शीर्षलम्ब खींचे लम्बकेन्द्र बताइए।



आकृति 5.27

5.5.2•त्रिभुज की माध्यिकाएँ :

क्रियाकलाप : कागज के टुकड़े से एक त्रिभुज A BCकाटिए । इसकी कोई एक भुजा जैसे आकृति 5.28 में भुजा BCलीजिए। त्रिभुज के बिन्दु B और Cबिन्दु को मिलाकर कागज मोड़ने की प्रक्रिया द्वारा BCका लम्ब समद्विभाजक ज्ञात कीजिए । कागज पर मोड़ की तह, भुजा BCको D पर काटती है, जो उसका मध्य बिन्दु है । शीर्ष A को D से मिलाइए।



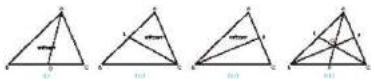
आकृति 5.28

रेखाखंडAD जो BCके मध्य बिन्दु D को सम्मुख शीर्ष A से मिलाता है, त्रिभुज की एक माध्यिका है। भुजा ABतथा CA लेकर, इस त्रभुज की दो और माध्यिकाएं खींचिए ।

माध्यिका, त्रिभुज के एक शीर्ष को, सम्मुख भुजा के मध्य बिन्दु से मिलाती है ।

इसे देखिए :

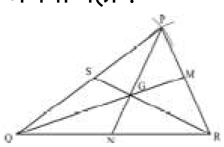
निम्नलिखित आकृति 5.29 को देखिए। चित्र (i) में त्रिभुज के शीर्ष A को उसकी सम्मुख भुजा BCके मध्य बिन्दु D से मिलाया गया है। चित्र (ii) में शीर्ष Cको सम्मुख भुजा ABके मध्य बिन्दु E से मिलाया गया है। चित्र (iii) में शीर्ष B को सम्मुख भुजा ACके मध्य बिन्दु इ से मिलाया गया है। रेखाखंड AD, CE और Bइ त्रिभुज ABCकी माध्यिकाएँ कहलाती है। चित्र (iv) में त्रिभुज ABCकी कितनी माध्यिकाएँ हैं ? हम देखते हैं कि त्रिभुज में तीन माध्यिकाएँ हैं, जो एक बिन्दुगामी होती हैं।



अत:

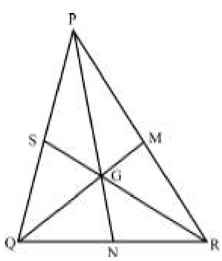
त्रिभुज के किसी शीर्ष को उसकी सम्मुख भुजा के मध्य बिन्दु से जोड़ने वाले रेखाखंड को त्रिभुज की माध्यिका (Median) कहते हैं।

प्रयोग 1:एक ΔPQR खींचिए जिसकी भुजाएँ 5 सेमी, 6 सेमी और 7 सेमी हों। PQ, QR और RP के मध्य बिन्दुओं क्रमश: S, N, M को उनके सम्मुख शीर्षों से मिलाइए। बताइए रेखाखंड PN, RS और QM, ΔPQR की माध्यिकाएँ हैं अथवा नहीं ?



क्या तीनों माध्यिकाएँ एक ही बिन्दु से होकर जा रही हैं ?

प्रयोग 2:एक ΔPQR खींचिए जिसकी भुजाएँ 4 सेमी, 5 सेमी और 6 सेमी हों। PR के मध्य बिन्दु M को शीर्ष Q से मिलाइए।



PQ के मध्य बिन्दु ए को R से मिलाइए। S और Rए त्रिभुज की तीन माध्यिकाओं में से दो माध्यिकाएँ हैं। जिस बिन्दु पर QM और RS मिलती हैं, उस बिन्दु पर G अंकित कीजिए।

P,G मिलाकर बढ़ाइए। मान लीजिए कि यह QR को बिन्दु N पर मिलती है। QN और NR को मापिए। क्या QN=NR है ?

हम देखते हैं कि QN=NR

अत: N भुजा QR का मध्य बिन्दु हुआ और इस प्रकार PN त्रिभुज की तीसरी माध्यिका हुई और तीनों माध्यिकाएँ एक बिन्दु उ से होकर जा रही हैं। अब एक ∠PQR बनाइए। इसकी दो माध्यिकाएँ खींचकर उनके प्रतिच्छेदन बिन्दु को G से

नामांकित कीजिए। तीसरे शीर्ष को इस बिन्दु से मिलाकर आगे बढ़ाइए और देखिए कि यह रेखा माध्यिका है या नहीं। हम देखते हैं कि यह भी माध्यिका है।

अत:

त्रिभुज की माध्यिकाएँ संगामी (Concurrent) होती हैं। वह बिन्दु जिस पर त्रिभुज की तीनों माध्यिकाएँ मिलती हैं, माध्यिकाओं का संगमन बिन्दु या त्रिभुज का केन्द्रक (centroid)कहलाता है।

विशेष : किसी त्रिभुज का केन्द्रक निर्धारित करने के लिए उसकी दो माध्यिकाएँ खींचना ही पर्याप्त है। उनका प्रतिच्छेदन बिन्दु त्रिभुज का केन्द्रक होता है।

अभ्यास 5 (*d*)

1.निम्नलिखित कथनों को अपनी अभ्यास पुस्तिका में लिखकर रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

(i) त्रिभुज की माध्यिका वह रेखाखंड है जो इसके किसी शीर्ष को सम्मुख भुजा के .... से मिलाती है।

(ii) किसी त्रिभुज की माध्यिकाएँ .... होती हैं।

(iii) त्रिभुज की माध्यिकाएँ जिस बिन्दु पर मिलती हैं उसे ...... कहते हैं।

2. एक समद्विबाहु त्रिभुज ABCखींचिए, जिसमें AB=AC। माध्यिका ADखींचिए। नापकर बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या नहीं।

(i) AD, BCपर लम्ब है।

(ii) AD, $\angle A$ को समद्विभाजित करता है।

(iii) AD, BCका लम्ब समद्विभाजक है।

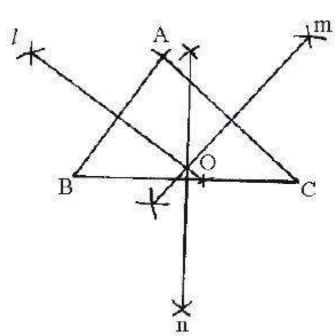
3. AD, BE और Cइ किसी ΔABCकी माध्यिकाएँ हैं और G इसका केन्द्रक है। यदि BE =CF, तो ΔGBCकिस प्रकार का त्रिभुज है ? आकृति बनाकर देखिए।

(i) विषमबाहु (ii) समद्विबाहु (iii) समबाहु

त्रिभुज की भुजाओं के लम्ब समद्विभाजक :

इन्हें कीजिए :

प्रयोग 1: एक त्रिभुज ABCखींचिए जिसकी भुजाएँ क्रमश: 6 सेमी, 7 सेमी और 8 सेमी की हों। भुजाओं के लम्ब समद्विभाजक भी खींचिए।



आकृति 5.32

रचना : **(i)** दिए गये नाप से त्रिभुज ABCबनाइए।

(ii) ABको लम्बार्धक (लम्ब समद्विभाजक) l खींचिए।

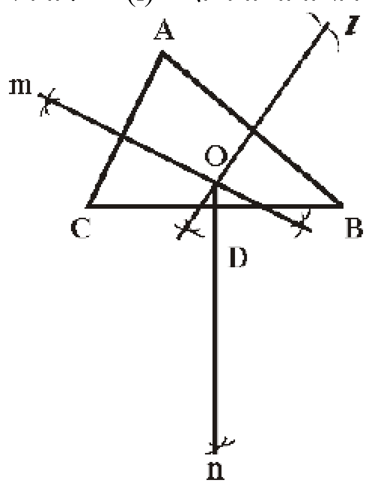
(iii) ACको लम्बार्धक m खींचिए।

(iv) BCका लम्बार्धक n खींचिए।

क्या तीनों लम्बार्धक उपर्युक्त चित्र की भाँति बिन्दु 0 से जा रहे हैं ?

प्रयोग 2:एक ΔABC खींचिए। जिसकी भुजाएँ 5 सेमी, 6 सेमी और 7 सेमी की हों। भुजाओं के लम्ब समद्विभाजक भी खींचिए।

रचना : (i) दी गयी मापों से त्रिभुज ABCबनाइए।



(ii)भुजा ABका लम्बार्धक l खींचिए।

(iii) भुजा ACका लम्बार्धक m खींचिए।

(iv) लम्बार्धक l और m जिस बिन्दु पर काटे उसे 0 से नामांकित कीजिए।

(v) 0 से $n \perp BC$ खींचिए जो BCको D पर काटे।

(vi) BD और CD नाप कर देखिए कि क्या BD =CD है ? हम देखते हैं कि BD =CD है। अत: ह, BCका लम्बार्धक है।

इस प्रकार बिन्दु 0 त्रिभुज ABCकी तीनों भुजाओं के लम्बार्धकों का सार्वबिन्दु है।

अब एक त्रिभुज ABC बनाइए। भुजा ABऔर ACके लम्बार्धक खींचिए। दोनों लम्बार्धक जिस बिन्दु पर काटे उस पर 0 अंकित कीजिए। बिन्दु 0 से BC पर लम्ब खींचिए और जाँच कीजिए कि यह BCका लम्बार्धक है या नहीं ?

हमने देखा यह भी लम्बार्धक है और बिन्दु 0 से जा रहा है, अर्थात तीनों लम्बार्धक संगामी हैं।

अत:

त्रिभुज की भुजाओं के लम्बार्धक संगामी होते हैं। त्रिभुज की भुजाओं के लम्बार्धक जिस बिन्दु पर मिलते हैं उसे त्रिभुज का परिकेन्द्र (Ci*rcum centre*) कहते हैं।

विशेष :किसी त्रिभुज का परिकेन्द्र निकालने के लिए उसकी दो भुजाओं के लम्बार्धक (लम्ब समद्विभाजक) (खींच लेना ही पर्याप्त होता है।

अभ्यास 5 (e)

1.एक रेखाखंड ABलेकर उसकी लम्ब समद्विभाजक रेखा l खींचिए। l पर कोई बिन्दु P लेकर PA और PB को नापिए। क्या PA और PB बराबर हैं ?

2.एक समकोण त्रिभुज ABC खींचिए, जिसमें $\angle C$समकोण हो। ABका मध्य बिन्दु 0 ज्ञात कीजिए। केन्द्र 0 और त्रिज्या 0A वाला एक वृत खींचिए। क्या यह Cसे होकर जाता है ? ΔABCके संदर्भ में, बिन्दु 0 को क्या कहते हैं ?

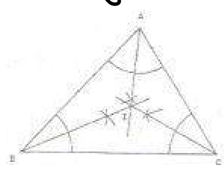
3.नीचे दी गई भुजाओं और कोणों से त्रिभुज बनाइए और उनकी भुजाओं के लम्ब समद्विभाजक खींचिए और जाँच कीजिए कि वे संगामी हैं ।

(i) 7 सेमी, 5 सेमी और 4 सेमी

(ii) 6 सेमी तथा भुजा पर बने कोण 90° और 30°

(iii) 4.5 सेमी, 2.5सेमी, बीच कोण 105°

5.4.4 त्रिभुज के कोणों के समद्विभाजक



आकृति 5.34

प्रयोग 1. एक त्रिभुज ABC खींचिए। जिसकी भुजाएं 6 सेमी, 7 सेमी और 8 सेमी हो। इस त्रिभुज के कोणों A, B और Cके समद्विभाजक खींचिए।

रचना : दिये गये माप से त्रिभुज AB खींचिए। $\angle A$, $\angle B$ और $\angle C$के समद्विभाजक खींचिए। क्या तीनों समद्विभाजक एक बिन्दुगामी हैं ?

प्रयोग 2. एक त्रिभुज ABC खींचिए जिसकी भुजाएँ 4 सेमी, 5 सेमी और 6 सेमी हों। इस त्रिभुज के कोणों B और Cके समद्विभाजक खींचिए।

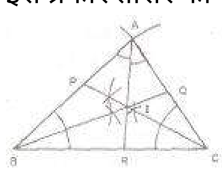
दोनों समद्विभाजक एक दूसरे को जिस बिन्दु पर काटे उसे I से नामांकित कीजिए।

चित्रानुसार A और I को मिलाकर बढ़ाइए। मान लीजिए कि यह BCसे बिन्दु R पर मिलता है।

$\angle BAR$ और $\angle CAR$ को मापिए।

हमने देखा कि $\angle BAR = \angle CAR$ है। अत: AR, $\angle A$ की समद्विभाजक है।

इस प्रकार तीसरे कोण का समद्विभाजक भी बिन्दु I से होकर जाता है।



आकृति 5.35

अब एक त्रिभुज ABCबनाइए। $\angle B$ और $\angle C$के समद्विभाजक खींचिए। समद्विभाजक जिस बिन्दु पर काटे उसे I से नामांकित कीजिए। बिन्दु I को बिन्दु A से मिलाइए और जाँच कीजिए कि AI, $\angle A$ का समद्विभाजक है या नहीं।

हम देखते हैं कि AI कोण A की समद्विभाजक है और तीनों समद्विभाजक एक ही बिन्दु I से जा रहे हैं।

अत:

त्रिभुज के कोण समद्विभाजक संगामी होते हैं। त्रिभुज के कोण समद्विभाजक के संगमन बिन्दु को त्रिभुज का अन्त: केन्द्र (In- Centre) हैं।

विशेष :किसी त्रिभुज का अन्त:केन्द्र निर्धारित करने के लिए उसके दो कोणों के अर्धक खींच लेना ही पर्याप्त होता है। उनका प्रतिच्छेदन बिन्दु ही अन्त:केन्द्र होता है।

अभ्यास 5(f)

1. नीचे दी गई भुजाओं तथा कोणों से त्रिभुज बनाइए और उनके कोणों के समद्विभाजक खींचकर जाँच कीजिए कि क्या वे संगामी हैं।

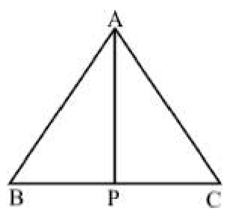
(i) 3.4 सेमी, 4 सेमी तथा 2.5 सेमी

(ii) 4.6 सेमी, 3.5मी तथा बीच का कोण 120°

(iii) 5 सेमी, 4 सेमी तथा5 2. सेमी।

2. एक समबाहु ΔABCखींचिए और उसका अन्त: केन्द्र ज्ञात कीजिए। यह भी ज्ञात कीजिए कि इसके परिकेन्द्र, लम्बकेन्द्र व केन्द्रक इसके अन्त: केन्द्र पर संपाती हैं।

3. पाश्र्व चित्र में ΔABCसमद्विबाहु त्रिभुज हैं, इसमें AB=ACहै, AP, $\angle A$ का अर्धक है। यह रेखाखंड AP, BCका लम्बार्धक है या नहीं। चित्र खींच कर और नापकर बताइए।



आकृति 5.36

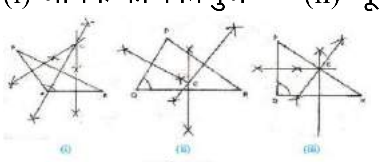
5.6.1-त्रिभुज का परिकेन्द्र :

इन्हें कीजिए :

हमने देखा कि त्रिभुज की भुजाओं के लम्बार्धक संगामी होते हैं और इस संगमन बिन्दु को त्रिभुज का परिकेन्द्र कहते हैं।

निम्नांकित त्रिभुजों के भी परिकेन्द्र ज्ञात कीजिए और देखिए कि किन त्रिभुजों के परिकेन्द्र, त्रिभुज के बाह्य क्षेत्र में स्थित हैं, किनके अन्त: क्षेत्र में और किन त्रिभुजों के त्रिभुज पर ही स्थित है ?

(i) अधिक कोण त्रिभुज (ii) न्यूनकोण त्रिभुज (iii) समकोण त्रिभुज



आकृति 5.37

चित्र (i) में अधिक कोण त्रिभुज है, इसका परिकेन्द्र त्रिभुज के बाह्य क्षेत्र में स्थित है।

चित्र (ii) न्यूनकोण त्रिभुज है, इसका परिकेन्द्र त्रिभुज के अन्त: क्षेत्र में स्थित है।

चित्र (iii) में समकोण त्रिभुज है, इसका परिकेन्द्र कर्ण पर स्थित है। अधिक कोण त्रिभुज, न्यूनकोण त्रिभुज और समकोण त्रिभुज के परिकेन्द्र ज्ञात कर उपर्युक्त तथ्य की जाँच कीजिए।

अभ्यास 5 (g)

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए ....

(i) समकोण त्रिभुज का परिकेन्द्र .... पर स्थित होता है।

(ii) अधिक कोण त्रिभुज का परिकेन्द्र त्रिभुज के ..... में स्थित होता है।

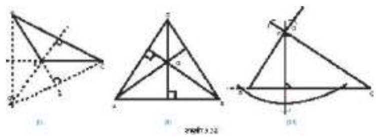
(iii) न्यूनकोण त्रिभुज का परिकेन्द्र त्रिभुज ...... में स्थित होता है।

2.एक त्रिभुज ABCखींचिए जिसमें AB=3 सेमी, BC=4 सेमी और AC=5 सेमी। इस त्रिभुज का परिकेन्द्र ज्ञात कीजिए।

3.एक अधिक कोण त्रिभुज ABCबनाइए जिसका कोण B अधिक कोण हो, इस त्रिभुज का परिकेन्द्र ज्ञात कीजिए।

5.6.2 त्रिभुज का लम्बकेन्द्र

हम जानते हैं कि त्रिभुज के शीर्षलम्ब संगामी होते हैं तथा इनके संगामी बिन्दु को त्रिभुज का लम्ब केन्द्र कहते हैं। निम्नलिखित आकृतियों में शीर्षलम्बों को देखिए कुछ त्रिभुजों के लम्ब केन्द्र त्रिभुज के अन्त: क्षेत्र में और कुछ के बाह्य क्षेत्र में स्थित हैं।



चित्र (i)में लम्बकेन्द्र 0 अधिक कोण त्रिभुज के बाह्य क्षेत्र में स्थित है।

(ii)में लम्बकेन्द्र 0 न्यूनन कोण त्रिभुज के अन्त: क्षेत्र में स्थित है।

(iii)समकोण त्रिभुज BACका लम्ब केन्द्र शीर्ष A पर ही स्थित है।

समकोण त्रिभुज, अधिक कोण त्रिभुज और न्यूनकोण त्रिभुज का लम्बकेन्द्र ज्ञात कर उपर्युक्त तथ्य की जाँच कीजिए।

हमने देखा :

अधिक कोण त्रिभुज का लम्बकेन्द्र त्रिभुज के बाह्य क्षेत्र में न्यूनकोण त्रिभुज का अन्त: क्षेत्र में और समकोण त्रिभुज में शीर्ष पर स्थित है।

अभ्यास 5 (h)

1. एक ΔABCबनाइए, जिसका $\angle B$ अधिक कोण हो। इस त्रिभुज का लम्बकेन्द्र ज्ञात कीजिए।

2. न्यूनकोण त्रिभुज ABCबनाइए तथा इसका लम्बकेन्द्र ज्ञात कीजिए। यह भी बताइए कि इस त्रिभुज का लम्बकेन्द्र त्रिभुज के अन्त: क्षेत्र में स्थित है अथवा बाह्य क्षेत्र में।

त्रिभुज का केन्द्रक

एक त्रिभुज ABCबनाइए। इस त्रिभुज की माध्यिकाएँ AD, CF और BE खींचिए। तीनों माध्यिकाएँ जहाँ काटे उस बिन्दु को G से नामांकित कीजिए। यही बिन्दु त्रिभुज का केन्द्रक है।

AG और DG दूरियाँ नापिये। देखिए कि AG और DG में क्या संबंध है ?

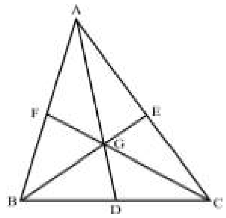
एक दूसरा त्रिभुज ABCबनाइए जिसमें AB=5 सेमी, BC=6 सेमी और CA =7 सेमी हो। इस त्रिभुज की माध्यिका AD, BE और CF खींचिए और संगमन बिन्दु को G से नामांकित कीजिए। AG, GD, BG, GE और CG तथा GF को मापिए तथा निम्नांकित रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

(I) AG = ----------- GD = ------------- AG : GD = ---------------

(II) CG = ----------- GF = -------------- CG : GF = ---------------

(III) BG = ----------- GE = -------------- BG : GE = ---------------

उपर्युक्त परिणामों के आधार पर हम कह सकते हैं कि त्रिभुज का केन्द्रक माध्यिका को 2:1 के अनुपात में विभाजित करता है।



आकृति 5.39

त्रिभुज की माध्यिकाएँ संगामी होती हैं। संगमन बिन्दु त्रिभुज का केन्द्रक कहलाता है। इसे G से नामांकित करते हैं। त्रिभुज का केन्द्रक किसी माध्यिका को 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है।

अभ्यास 5 (i)

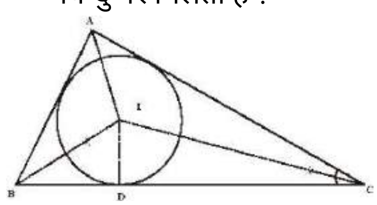
1. समकोण त्रिभुज ABC में $\angle B$ समकोण है। AB= 3 सेमी, BC=4 सेमी। इस त्रिभुज की रचना कर इसका केन्द्रक ज्ञात कीजिए।

2. एक त्रिभुज की माध्यिकाएँ क्रमश: 6 सेमी, 9 सेमी और 12 सेमी लम्बी है। इस त्रिभुज के केन्द्रक द्वारा माध्यिकाओं के विभाजित भाग ज्ञात कीजिए।

5.5.4 त्रिभुज का अन्त: केन्द्र

हम जानते हैं कि त्रिभुज के कोणों के अर्धक संगामी होते हैं। इनके संगमन बिन्दु को त्रिभुज का अन्त: केन्द्र कहते हैं।

कोई त्रिभुज ABCबनाइए। उसका अन्त: केन्द्र ज्ञात कीजिए। इस बिन्दु को I से नामांकित कीजिए। बिन्दु I से BC भुजा पर लम्ब खींचिए। I को केन्द्र मानकर I D त्रिज्या से एक वृत खींचिए। क्या यह वृत भुजाओं ABऔर ACसे भी एक बिन्दु पर मिलता है ?



आकृति 5.40

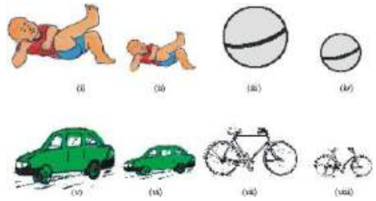
5.7 त्रिभुजों में समरूपता की अवधारणा :

आप जानते हैं कि दो सर्वांगसम आकृतियों में समान आकृति (shape) और समान माप (size) की होती है, प्रकृति में कुछ ऐसी आकृतियों के उदाहरण भी मिलते हैं जो कि आकृति में समान रूप के तो होते हैं, किन्तु 'समान माप' के नहीं होते। ध्यान दीजिए :- किसी फूल के पौधे में सभी फूल समान रूप के होते हुए भी समान आकार के नहीं होते हैं। ऐसी आकृतियों को समरूप (Similar) आकृतियाँ कहते हैं।

आप यह भी दे(ख) सकते हैं कि दो सर्वांगसम आकृतियाँ समरूप होती हैं, परन्तु यह आवश्यक नहीं है कि दो समरूप आकृतियाँ सर्वांगसम हों।

समरूपता की अवधारणा :

इन चित्रों को देखिए :



उपर्युक्त चित्र (i) और (ii) में हम देखते हैं कि दोनों चित्र बच्चे के हैं, परन्तु दोनों के आकार भिन्न हैं। चित्र (iiii) और (iv)को देखने से भी स्पष्ट है कि दोनों चित्र एक ही बॉल के हैं, परन्तु इन चित्रों के आकार भिन्न हैं। चित्र (v) और (vi) को देखिए, इनमें भी एक ही कार के दो चित्र है जिनके आकार भिन्न है इसी प्रकार चित्र (vii) और (viii) में दो साइकिलें दिखाई दे रही है इनमें भी दोनों साइकिलों के आकार भिन्न हैं,परन्तु आकृति समान है।

अत: हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि उपर्युक्त चित्रों के जोड़े,रूप में समान हैं परन्तु आकार में भिन्न हैं।

ऐसी आकृतियों को जो रूप में समान हों, परन्तु उनके आकार भिन्न हों, समरूप आकृतियाँ कहते हैं ।

निम्न को भी देखकर बताइए कि उनमें क्या सम्बन्ध है?

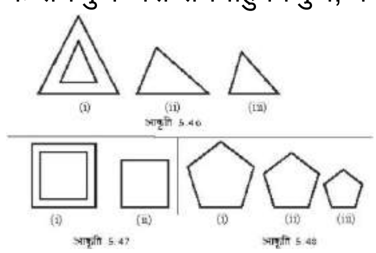
1. अपने घर में छोटे भाई की दो भिन्न आकार की फोटो को।
2. किसी हॉकी के दो भिन्न आकार के चित्रों को।
3. किसी ग्लोब के दो भिन्न आकार के चित्रों को।
4. किसी पेड़ के दो भिन्न आकार के चित्रों को।

हम देखते हैं कि छोटे भाई की फाटो; हॉकी के चित्र; ग्लोब के चित्र तथा पेड़ के चित्र की आकृतियाँ एक सी हैं परन्तु आकार भिन्न हैं।

अब आप एक ही आकृति की पत्तियों और फूलों को एकत्र कीजिए। ऐसी भी पत्तियों और फूलों को एकत्र कीजिए, जिनकी आकृतियाँ समान हैं परन्तु आकार भिन्न हैं ।

इन्हें भी देखिए :

निम्नलिखित आकृतियों को दे खिए इनमें 5.46 में वि भिन्न मापों के चार समबाहु त्रिभुज,5.47 में तीन भिन्न- भिन्न माप के तीन वर्ग और 5.48 में विभिन्न मापों के तीन समपंचभुज है । क्या इनके आकार समान हैं ? क्या ये समरूप है? उपर्युक्त सभी प्रश्नों का उत्तर स्पष्ट रूप से ‘ हाँ है । इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि “सभी समान संख्या की भुजाओं के समभुज जैसे समबाहु त्रिभुज, वर्ग आदि समरूप होते हैं ।



समरूप बहुभुज :

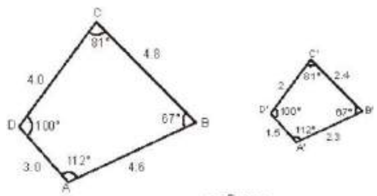
फोटोग्राफर की दुकान में आप ने किसी व्यक्ति के अथवा एक ही वस्तु के या एक ही आकृति के फोटो चित्रों को विभिन्न मापों में एक ही निगेटिव से बने देखा होगा । फोटोग्राफर वह बहुधा छोटे साइज के फिल्म जिसको 35 मि मी माप की फोटो खींचता है। फिर उसको 45 मि मी या 55 मि मी के फिल्म पर आकार / माप बड़ा कर देता है । यदि हम बड़े और छोटे फोटो चित्रों की संगत भुजाओं में अनुपात निकालें तो $\frac{45}{35}$ या $\frac{55}{35}$ होगा । वास्तव में इसका अर्थ है कि छोटे चित्र के प्रत्येक भुजा को फोटोग्राफर समान अनुपात, अर्थात35:45 या3 5:55 में बढ़ा देता है ।

पुन: दो बहुभुज जिनके भुजाओं की संख्या समान है समरूप होते हैं, यदि

(i) उनके संगत कोण बराबर हों, और

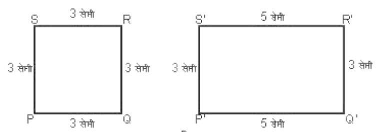
(ii) उनकी संगत भुजाएँ समान अनुपात में हों ।

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि निम्नांकित चतुर्भुजABCD और A’B’C’D’ समरूप हैं।



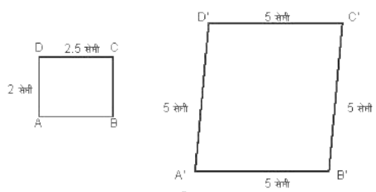
आकृति 5.49

अब निम्नलिखित, दो आकृतियाँ जो कि एक वर्ग और दूसरी आयत है पर ध्यान दीजिए। इनके संगत कोण बराबर हैं। परन्तु उनकी संगत भुजाएँ समान अनुपात में नहीं है। अत: दोनों आकृतियाँ समरूप नहीं है।



आकृति 5.50

इसी प्रकार हम देख सकते हैं कि वर्ग और समचतुर्भुज की संगत भुजाएँ समान अनुपात में हैं परन्तु उनके संगत कोण बराबर नहीं है। अत: दोनों आकृतियाँ समरूप नहीं है।



आकृति 5.51

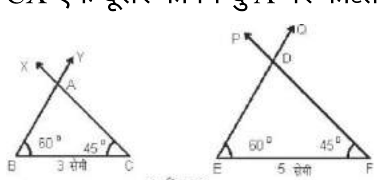
अत: उपर्युक्त आकृति 6.7 (i) और आकृति 6.7 (ii) में से केवल एक प्रतिन्ध किसी बहुभुज के समरूप होने के लिए पर्याप्त नहीं है।

यूनानी गणितज्ञ थेल्स (600 ई.पू) ने समान कोणिक त्रिभुजों के सम्बन्ध में एक महत्वपूर्ण प्रमेय उद्घघाटित किया था।

समान कोणिक त्रिभुजों की किन्हीं दो संगत भुजाओं का अनुपात सदैव समान होता है। चाहे उनके माप कुछ भी हों।

स्मरण कीजिए कि दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए त्रिभुजों के अवयवों के केवल तीन युग्म लिए थे। इसी प्रकार प्रयास करते हैं कि दो त्रिभुजों की समरूपता स्थापित करने के लिए त्रिभुजों के कुछ कम अवयवों की ही आवश्यकता हो। आइए इसके लिए कुछ क्रिया कलाप करें।

क्रिया कलाप -दो रेखाखंड BCऔर EF क्रमश 3 सेमी और 5 सेमी को खींचिए। बिन्दु B और E पर 60^0 के कोण YBC और QEF की रचना कीजिए तथा बिन्दु Cऔर इ पर 45° के कोर्णे CB और PFE की रचना कीजिए। भुजाएँ BY और CX एक दूसरे को बिन्दु A पर काटती हैं। तथा भुजाएँ QE और PF, D पर प्रतिच्छेद करती हैं।



आकृति 5.52

इस प्रकार हमें दो त्रिभुज ABCऔर DEF प्राप्त होते हैं।

स्पष्टत: कोण ∠ A और ∠ D 75 के हैं।ध्यान दीजिए, त्रिभुजों ABC और DEF में ∠ A = ∠ D, ∠ B = ∠ E और ∠ C = ∠ F मिलता है जो कि संगत कोण हैं। अत: संगत कोण बराबर हैं। अब दोनों त्रिभुजों की भुजाओं AB, AC, DE, DF की माप ज्ञात करके, अनुपात $\frac{AB}{DE}$, $\frac{AC}{DF}$ तथा $\frac{BC}{EF}$ ज्ञात कीजिए

उपर्यक्त चित्रों में $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} (= .6)$के हैं।

अर्थात संगत भुजाएँ समान अनुपात में हैं। इसीलिए त्रिभुज ABCतथा DEF समरूप हैं।

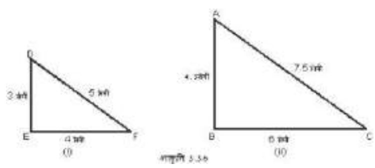
इन्हें कीजिए

इस क्रिया कलाप को अनेक त्रिभुजों जिनके संगत कोण बराबर हों, के युग्म बनाकर कीजिए। प्रत्येक बार निम्न निष्कर्ष प्राप्त होगा।

यदि दो त्रिभुजों के संगत कोण बराबर हों, तो उनकी संगत भुजाएँ अनुपातिक होती हैं और इस प्रकार दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं।

क्रिया कलाप 1 : दो समरूप त्रिभुज बनाने का प्रयास कीजिए इसके लिए आकृति 5.56(i) और (ii) को दे(िख)ए और अपनी अभ्यास पुस्तिका पर माप के अनुसार दोनों त्रिभुजों को खींचिए। इनकी संगत भुजाओं का अनुपात ज्ञात कीजिए। हम देखते हैं कि

$\frac{AB}{DE} = \frac{4.5}{3} = \frac{3}{2}$,



$\frac{BC}{EF} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$तथा

$\frac{CA}{FD} = \frac{7.5}{5} = \frac{3}{2}$

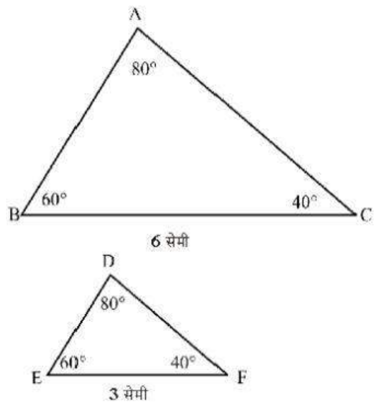
दोनों त्रिभुजों की संगत भुजाओं के अनुपात समान हैं। अब इनके कोणों को मापिए।

∠A = ∠D, ∠B = ∠E तथा ∠C = ∠F

अत: यदि दो त्रिभुजों की संगत भुजाओं का अनुपात समान हो तो उनके संगत कोण भी समान होते हैं।

क्रिया कलाप : 2 इसे भी कीजिए :

अपनी अभ्यास पुस्तिका पर दो त्रिभुज खींचिए जिनकी माप आकृति 5.57 (i) और (ii) के अनुसार हों। अब दोनों त्रिभुजों की संगत भुजाओं AB और DE, BC और EF तथा CA और FD को नापिए और इनका अनुपात ज्ञात कीजिए। हम देखते हैं कि



आकृति 5.57

$\frac{BC}{EF} = \frac{6}{3} = \frac{2}{1}$

$\frac{2}{1} = \frac{BC}{EF}$

$\frac{2}{1} = \frac{BC}{EF}$

अर्थात्

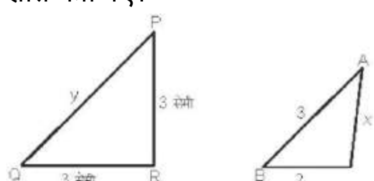
$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = \frac{2}{1}$

अर्थात् दोनों त्रिभुजों की संगत भुजाओं के अनुपात समान हैं, चित्र से स्पष्ट है कि इनके संगत कोण समान हैं।
अत:

यदि दो त्रिभुजों के कोण समान हों तो उनकी संगत भुजाओं के अनुपात समान होते हैं।

अभ्यास 5 (j)

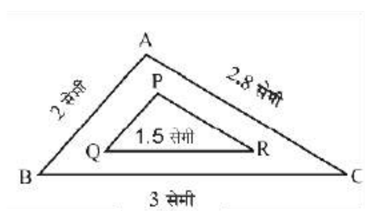
1. आकृति 85.5 में दो त्रिभुज ABC और PQR समरूप हैं। इनकी भुजाओं की लम्बाइयाँ सेमी में अंकित हैं। x और y ज्ञात कीजिए।



आकृति 5.58

2.यदि किसी त्रिभुज ABCऔर त्रिभुज PQR में उनकी भुजाएँ क्रमश: AB=3 सेमी, BC=5 सेमी, CA =4 सेमी तथा PQ =7 सेमी, PR =6 सेमी, QR =8 सेमी हैं, तो त्रिभुज समरूप हैं या नहीं ?

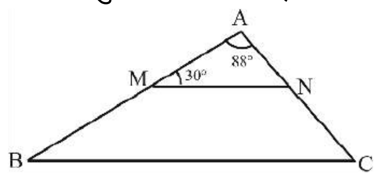
3.आकृति 5.59 में त्रिभुज ABCऔर त्रिभुज PQR समरूप हैं। त्रिभुज PQR की शेष भुजाओं को ज्ञात कीजिए।



आकृति 5.59

4. त्रिभुज ABCमें, MN, BCके समान्तर है। ΔABCके शेष कोणों की माप बताइए। क्या त्रिभुज ABCऔर त्रिभुज AMN समरूप हैं ?

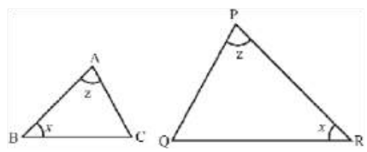
5. उपर्युक्त आकृति 5.60 में, यदि M तथा N क्रमश: AB और AC भुजाओं के मध्य बिन्दु हों, तो भुजा BCऔर MN का अनुपात ज्ञात कीजिए।



आकृति 5.60

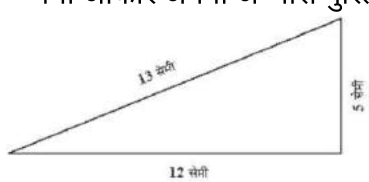
6.दो समान्तर रेखाखंडAB और CD खींचिए। A को D से और B को Cसे मिलाइए। मान लीजिए कि वे एक दूसरे को बिन्दु 0 पर काटती हैं। क्या त्रिभुज 0ABऔर त्रिभुज 0DCसमरूप होंगे ?

7.क्या आकृति 5.61 में त्रिभुज ABCऔर त्रिभुज PRQ समरूप हैं ? यदि हाँ, तो कारण बताइए।



आकृति 5.61

8. 20 मी=1 सेमी मान कर एक खेत का आकार आकृति 5.62 में दर्शाया गया है। 40 मीटर =1 सेमी मान कर खेत का नया आकार अपनी अभ्यास पुस्तिका पर दर्शाइए।



आकृति 5.62

दी गयी भुजाओं के अनुपात के आधार पर समरूप त्रिभुजों की रचना -

दिये गये शर्तों के आधार पर समरूप त्रिभुज की रचना हम एक उदाहरण द्वारा समझेंगे।

उदाहरण - एक त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाओं में 2:3:4 का अनुपात हो, इसके सम रूप दूसरे त्रिभुज की रचना भी कीजिए।

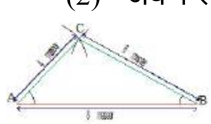
दिया है - एक त्रिभुजABC जिसकी भुजाओं में अनुपात 2:3:4 है।

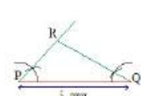
रचना करनी है - त्रिभुज ABC के समरूप (त्रिभुज PQR) की रचना

रचना के चरण -(1) त्रिभुज की भुजाओं में अनुपात 2:3:4 है। इस अनुपात में 2 से गुणा करने पर भुजाएँ क्रमश: 2X2=4सेमी. 3X2=6सेमी., 4X2=8सेमी.होगी।

ध्यान दें : यहाँ 2 के स्थान पर किसी भी संख्या से गुणा कर सकते हैं।

(2) अब 4 सेमी, 6 सेमी. तथा 8 सेमी. की भुजाओं का त्रिभुज बनाया।





(३) उपरोक्त ABC के सभी कोणों को मापा।

(४) अब रेखाखण्ड PQ=5 सेमी खींचा। यह रेखाखण्ड किसी भी माप का खींचा जा सकता है।

(५) कोण A=कोणP को बनाया इसी प्रकारकोण A=कोण P खींचा

कोण बनाने वाली भुजाएँ परस्पर बिन्दु R पर काटती हैं।

यही PQR,ABC के समरूप अभीष्ठ त्रिभुज होगा।

अभ्यास - 5(K)

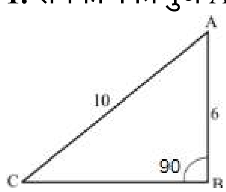
१. यदि किसी त्रिभुज ABC की भुजाओं में 4:4:5 का अनुपात हो, तो उनके समरूप एक त्रिभुज की रचना कीजिए। जिसका आधार 6 सेमी हो।

२. यदि किसी त्रिभुज ABC की भुजाओं में 3:4:5 का अनुपात हो, तो उनके समरूप एक त्रिभुज की रचना कीजिए। जिसका आधार 7 सेमी हो।

३. यदि किसी त्रिभुज ABC की भुजाओं में 2:4:5 का अनुपात हो, तो उनके समरूप एक त्रिभुज की रचना कीजिए। जिसका आधार 8 सेमी हो।

दक्षता अभ्यास -5

1. समकोण त्रिभुज ABC में $\angle B = 90^0$, AB = 6.0 सेमी, AC = 10 सेमी, तो BC की माप होगी :

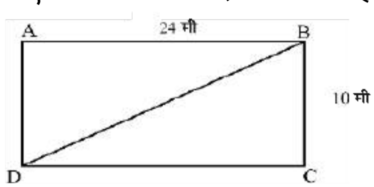


आकृति 5.41

(i) 6 सेमी **(ii)** 10 सेमी

(iii) 8 सेमी **(iv)** इनमें से कोई नहीं

2.एक आयताकार मैदान की लम्बाई 24 मी, चौड़ाई 10 मी है। इस आयताकार मैदान का विकर्ण होगा :

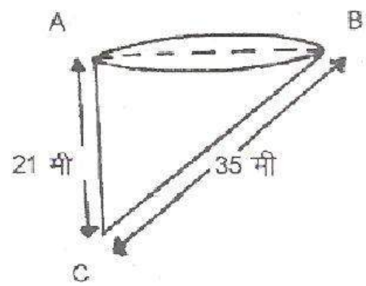


आकृति 5.42

(i) 26 मीटर **(ii)** 29 मीटर

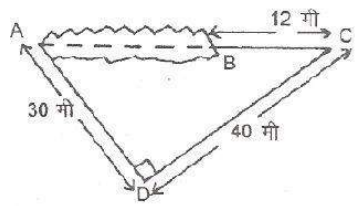
(iii) 20 मीटर **(iv)** 24 मीटर

3.एक सर्वेक्षक (Surveyor) बिन्दु A और B के बीच की दूरी ज्ञात करना चाहता है किन्तु वह A से B तक सीधा नहीं पहुँच सकता, अत: वह चित्रानुसार एक समकोण त्रिभुज बनाता है जिसमें AC = 21 मी, BC = 35 मी, AB कितना लम्बा है ?



आकृति 5.43

4. बिन्दु A और B एक झील के विपरीत किनारे हैं। एक सर्वेक्षक A और B के बीच की दूरी ज्ञात करने के लिए आकृति 2.46 के अनुसार एक समकोण त्रिभुज ADC बनाता है। बिन्दु A से बिन्दु B के बीच की दूरी कितनी है, जबकि BC = 12 मीटर~



आकृति 5.44

(संकेत - समकोण ΔADC में)

$AC^2 = AD^2 + DC^2$

$= 30^2 + 40^2$

$= 900 + 1600$

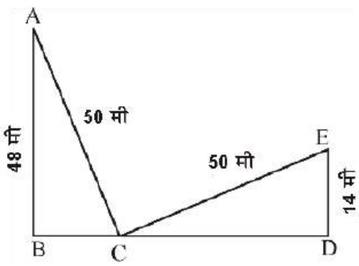
$AC^2 = 2500$

$AC = 50$ मीटर

$\therefore AB = AC - BC = 50 - 12 = 38$ मीटर

5.एक सड़क के दोनों किनारों पर दो मकान आमने-सामने हैं। 50 मी लम्बी सीढ़ी का एक सिरा सड़क के एक ओर स्थित मकान की दीवार पर 48 मी ऊँचाई तक पहुँचता है तथा दूसरे किनारे वाले मकान की दीवार पर यह केवल 14 मीटर ऊँचाई तक पहुँचता है। सड़क की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

(संकेत-चित्रानुसार सड़क की चौड़ाई (BD = BC + CD)



आकृति 5.45

6. उस त्रिभुज का नाम बताइए जिसके परिकेन्द्र और अन्त: बिन्दु एक ही होते हैं।

7.3, 4, 5 पाइथागोरियन त्रिक हैं। दिखाइए कि १५, २०, २५ भी पाइथोगोरियन त्रिक हैं।

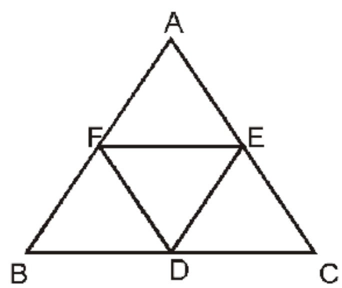
एम.एस.ई. प्रश्न

८. किसी त्रिभुज के तल पर स्थित बिन्दु जो त्रिभुज की भुजाओं से बराबर लम्बवत् दूरी पर है, वह बिन्दु त्रिभुज का (२००६)

(i) अन्त:केन्द्र होता है। (ii) परिकेन्द्र होता है।

(iii) लम्बकेन्द्र होता है। (iv) केन्द्रक होता है।

९.संलग्न चित्र में DEF का क्षेत्रफल होगा(2007)



DEF भुजाओं के मध्य बिन्दु है

(i) $\frac{1}{2}$ Δ *ABC* **(ii)** $\frac{1}{3}$ Δ *ABC*

(iii) $\frac{1}{4}$ Δ *ABC* **(iv)** Δ *ABC*

इस इकाई में हमने सीखा :

1. समकोण त्रिभुज में समकोण के सम्मुख भुजा को कर्ण कहते हैं । यह समकोण बनाने वाली दोनों भुजाओं से बड़ी होती है ।

2. किसी समकोण त्रिभुज में कर्ण पर बना वर्ग शेष दो भुजाओं पर बने वर्गों के योग के बराबर होता है । इसे पाइथागोरस प्रमेय कहते हैं ।

3. किसी रेखा के बाहर दिये हुए किसी बिन्दु से जो भी रेखाखंड इस रेखा तक खींचे जा सकते हैं, उनमें लम्ब सबसे छोटा होता है ।

4. यदि किसी त्रिभुज में एक भुजा पर बना वर्ग, शेष दो भुजाओं पर बने वर्गों के योग के बराबर हो तो वह त्रिभुज समकोण त्रिभुज होता है । यही प्रमेय पाइथागोरस प्रमेय का विलोम है ।

5. यदि a, b, c पाइथागोरियन त्रिक है तथा k एक धन पूर्णांक है तो ak ,bk , और ck भी पाइथागोरियन त्रिक है ।

6. त्रिभुज के शीर्ष से सम्मुख भुजा पर डाले गये लम्ब रेखाखंड को त्रिभुज का शीर्ष लम्ब (Altitude) कहते है । त्रिभुज में तीन शीर्ष होते हैं।

7. एक त्रिभुज के शीर्ष लम्ब संगामी होते हैं। त्रिभुज के शीर्ष लम्बों (तीनों) के संगामी बिन्दु को त्रिभुज का लम्ब केन्द्र (Orthocenter) कहते है ।

8. त्रिभुज के किसी शीर्ष को उसकी सम्मुख भुजा के मध्य बिन्दु से मिलने वालेरेखाखंड को त्रिभुज की माध्यिका (Median) कहते है ।

9. त्रिभुज की माध्यिकाएँ संगामी होती है । वह बिन्दु जिस पर त्रिभुज की तीनों माध्यिकाएं मिलती हैं, माध्यिकाओं का संगमन बिन्दु या त्रिभुज का केन्द्रक (Centroid) कहलाता है।

10. त्रिभुज की भुजाओं के लम्बार्धक संगामी होते है। त्रिभुज की भुजाओं के लम्बार्धक जिस बिन्दु पर मिलते हैं उसे त्रिभुज का परिकेन्द्र (Circum-Centre) कहते हैं ।

11. त्रिभुज के कोण समद्विभाजक संगामी होते हैं। त्रिभुज के कोण समद्विभाजक के संगमन बिन्दु को त्रिभुज का अंत: केन्द्र (In-Centre) कहते हैं।

12. त्रिभुज का केन्द्रक माध्यिका को 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करता हैं।

13. (i)दो बहुभुज जिनके भुजाओं की संख्या समान है, समरूप होते हैं, यदि

(a) उनके संगत कोण बराबर हों, और

(b) उनकी संगत भुजाएं समान अनुपात में हों ।

(ii) यदि त्रिभुजों की संगत भुजाओं का अनुपात समान हो, तो उनके संगत कोण भी समान होते हैं ।

(iii) यदि दो त्रिभुजों के कोण समान हों, तो उनकी संगत भुजाओं के अनुपात समान होते हैं ।

उत्तरमाला

अभ्यास **5 (a)**

1. (ii) 10; सेमी **2.** (iii) 5 सेमी; **3.** (i) x^2, (ii) 5^2, (iii) p^2, (iv) -8^2; **4.** 25 सेमी; **5.** 12 सेमी; **6.** 60 डेसीमी; **7.** 10 मी; **9.** (i) (5, 12, 13), (iv) (8, 15, 17), (v) (3, 4, 5)

अभ्यास 5 (c)

2. (i) सत्य, (ii) सत्य, (iii) सत्य, (iv) सत्य, **3.** AC और BC का प्रतिच्छेद बिन्दु C

अभ्यास 5 (d)

1. (i) मध्य बिन्दु, (ii) संगामी, (iii) केन्द्रक, **2.** (i) सत्य, (ii) सत्य, (iii) सत्य; **3.** (ii) समद्विबाहु।

अभ्यास 5 (e)

1. हाँ; **2.** हाँ, परिकेन्द्र

अभ्यास 5 (f)

1. (i) हाँ, (ii) हाँ, (iii) हाँ; **2.** सत्य; **3.** हाँ

अभ्यास 5 (g)

1. (i) कर्ण (ii) वाह्य क्षेत्र, (iii) अन्त:क्षेत्र; **2.** कर्ण; **3.** वाह्य क्षेत्र में

अभ्यास 5 (h)

1. वाह्य क्षेत्र में; **2.** अन्तक्षेत्र में

अभ्यास 5 (i)

1. (i) मध्यिकाओं संगामी बिन्दु, (ii) 2 : 1

अभ्यास 5 (j)

1. 2, 4.5; **2.** नहीं; **3.** PQ = 1 सेमी, PR = 1.4 सेमी; **4.** $\angle B = 30$, $\angle C = 62^0$, हाँ; **5.** 2 : 1, **6.** हाँ, **7.** हाँ,क्योंकि $\angle C = \angle Q = 180^0 - (x + z)$; **8.** 2.5 सेमी, 6 सेमी, 6.2 सेमी

दक्षता अभ्यास 5

1. (iii) 8 सेमी; **2.** (i) 26 मीटर; **3.** AB = 28 मीटj; **4.** AC = 38 मीटर; **5.** 62 मीटर; **7.** (6, 8, 10), (12, 16, 20), (18, 24, 30); **8.** समबाहु त्रिभुज; **9.** (iii) $\frac{x}{4} = 4 \Delta ABC$