

## UP Board Class 10 Maths Important Questions Chapter 10 वृत्त

### अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न

प्रश्न 1.

दी गई आकृति में  $\triangle ABC$  का बहिर्वृत्त, भुजाओं को Q, P एवं R पर स्पर्श करता है। यदि  $AQ = 8$  सेमी. हो तो  $\triangle ABC$  का परिमाप ज्ञात कीजिए।

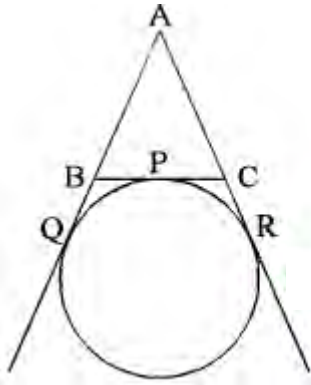
हल:

हम जानते हैं कि

$$AQ = \frac{1}{2} \text{ परिमाप } (\triangle ABC)$$

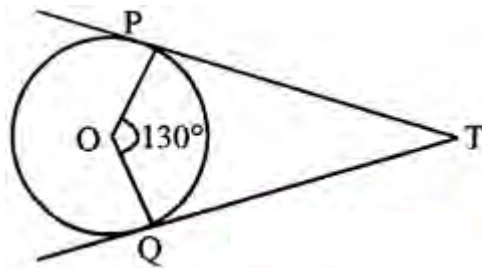
$$\text{परिमाप } \triangle ABC = 2 \times AQ$$

$$= 2 \times 8 = 16 \text{ सेमी.}$$



प्रश्न 2.

चित्र में यदि TP और TQ केन्द्र O वाले वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ इस प्रकार हैं कि  $\angle POQ = 150^\circ$  तो  $\angle PTQ$  का मान ज्ञात कीजिये।



हल:

PT व QT स्पर्श रेखाएँ हैं।

$$\therefore \angle POQ + \angle PTO = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 130^\circ + \angle PTQ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle PTQ = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$$

प्रश्न 3.

दिये गये चित्र में, बाह्य बिन्दु A से वृत्त की दो स्पर्श रेखाएँ AB व AC खींची गई हैं। यदि  $\angle BAC = 48^\circ$  हो, तो  $\angle ABC$  का मान लिखिए।

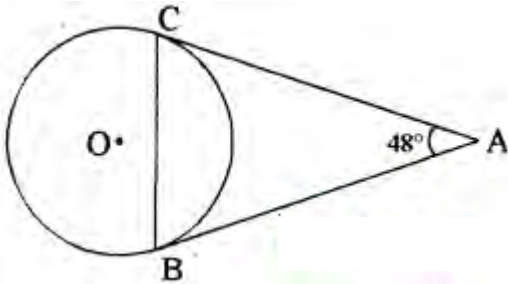
हल:

$$\angle B + \angle C = 180^\circ - 48^\circ$$

$$= 132^\circ$$

लेकिन  $\angle B = \angle C$

स्पर्श रेखाएँ लम्बाई में बराबर होती हैं।



$$\therefore \angle ABC = \frac{132^\circ}{2}$$

$$= 66^\circ$$

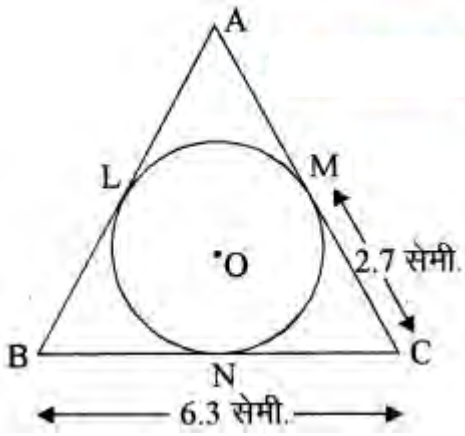
प्रश्न 4.

चित्र में AB, BC तथा CA वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं। यदि  $BC = 6.3$  सेमी. तथा  $MC = 2.7$  1 सेमी. हो, तो BL की नाप लिखिए।

उत्तर:

हम जानते हैं

$MC = NC$  स्पर्श रेखाओं की लम्बाई बराबर होती है।



$$BN = (6.3 - 2.7)$$

$$BN = 3.6 \text{ सेमी.}$$

और  $BN = BL$  है।

$$BL = 3.6 \text{ सेमी.}$$

प्रश्न 5.

दो वृत्त बाह्यतः स्पर्श करते हैं। यदि दोनों वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 5 सेमी. तथा 3 सेमी. हों, तो उनके केन्द्रों के बीच की दूरी लिखिए।

उत्तर:

$$5 + 3 = 8 \text{ सेमी.।}$$

प्रश्न 6.

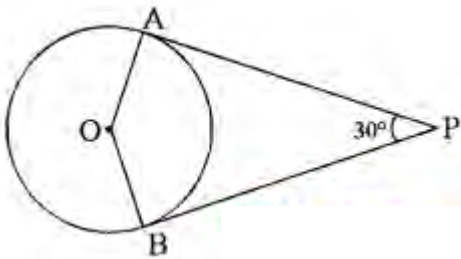
दो वृत्त एक-दूसरे को अन्तः स्पर्श करते हैं, तो उनकी उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या लिखिए।

उत्तर:

एक।

प्रश्न 7.

दिए गए चित्र में PA व PB वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं।  $\angle APB = 30^\circ$  है तो  $\angle AOB$  का मान लिखिए।

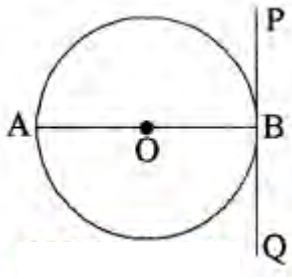


उत्तर:

$$\angle AOB = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$

प्रश्न 8.

दिए गए चित्र में PBQ, बिन्दु B पर वृत्त की स्पर्श रेखा है।  $\angle ABP$  का मान लिखिए।



उत्तर:

$$\angle ABP = 90^\circ$$

प्रश्न 9.

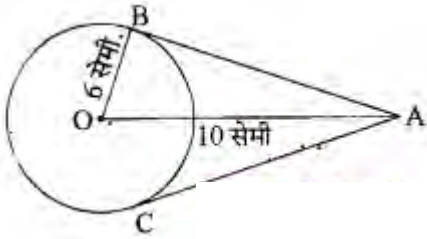
किसी बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखा की लम्बाई 12 सेमी. है, यदि वृत्त की त्रिज्या 5 सेमी है तो केन्द्र से बाह्य बिन्दु की दूरी बताइए।

उत्तर:

$$\text{दूरी} = \sqrt{(12)^2 + (5)^2} = \sqrt{169} = 13 \text{ सेमी.}$$

प्रश्न 10.

दिए गए चित्र में O वृत्त का केन्द्र है। AB व AC वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं। यदि OA = 10 सेमी. तथा OB = 6 सेमी. हैं तो AC की लम्बाई लिखिए।



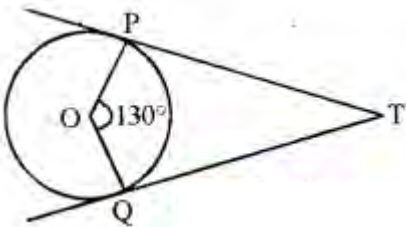
हल:

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{10^2 - 6^2} \\ &= \sqrt{100 - 36} \\ &= \sqrt{64} = 8 \text{ सेमी.} \end{aligned}$$

तथा AB = AC अतः, AC = 8 सेमी.

प्रश्न 11.

चित्र में TP और TQ, O केन्द्र वाले वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं। यदि  $\angle TOQ = 50^\circ$  हो, तो  $\angle OTP$  ज्ञात कीजिये।



हल:

$\therefore$  QT एक स्पर्श रेखा है।

$$\therefore \angle OQT = 90^\circ$$

$$\text{AOQT से } \angle OTQ = 180^\circ - (\angle OQT + \angle QOT)$$

$$= 180^\circ - (50^\circ + 90)$$

$$= 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$$

$$\therefore \Delta QOT \cong \Delta POT (\because PT = QT)$$

$$\angle P = \angle Q = 90^\circ$$

$$OT = OT$$

$$\therefore \angle OTP = \angle OTQ$$

$$\text{अतः } \angle OTP = 40^\circ$$

प्रश्न 12.

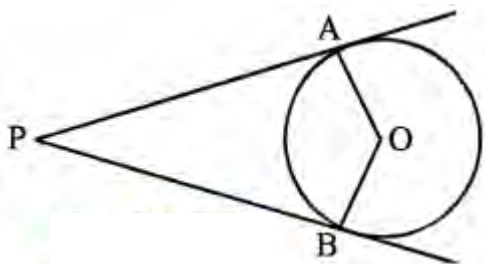
वृत्त की सतह पर स्थित बिन्दु पर कितनी | स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती हैं?

उत्तर:

वृत्त पर स्थित किसी बिन्दु से वृत्त पर एक और केवल एक ही स्पर्श रेखा खींची जा सकती है।

प्रश्न 13.

दिये गये चित्र में, यदि PA व PB, केन्द्र O वाले किसी वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ इस प्रकार हैं कि कोण APB = 80°, तो कोण AOB का मान ज्ञात कीजिये।



हल:

चित्र में PA और PB, केन्द्र O वाले किसी वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ हैं।

$$\therefore \angle PAO = \angle PBO = 90^\circ$$

और  $\angle APB = 80^\circ$  दिया गया है।

$$\therefore \angle AOB = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 80^\circ)$$

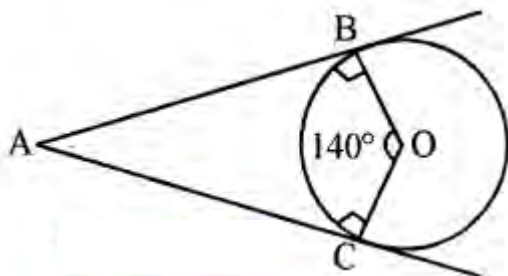
$$= 360^\circ - 260^\circ = 100^\circ$$

प्रश्न 14.

यदि एक बिन्दु A से, O केन्द्र वाले किसी वृत्त पर AB व AC दो स्पर्श रेखाएँ इस प्रकार हैं कि  $\angle BOC = 140^\circ$  तो  $\angle BAC$  का मान लिखिये।

हल:

चित्र में AB और AC, केन्द्र O वाले किसी वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ हैं।



$$\therefore \angle ABO = \angle ACO = 90^\circ \text{ और } \angle BOC = 140^\circ \text{ दिया गया है।}$$

$$\therefore \angle BAC + \angle BOC = 180^\circ \text{ होगा}$$

$$\text{अतः } \angle BAC = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 140^\circ)$$

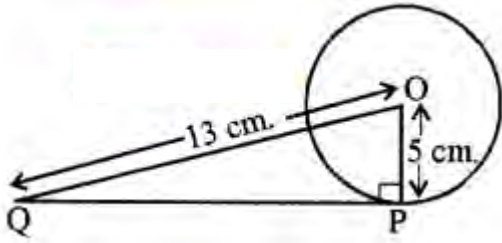
$$= 360^\circ - 320^\circ = 40^\circ$$

प्रश्न 15.

5 सेमी. त्रिज्या वाले एक वृत्त के बिन्दु P, पर स्पर्श रेखा PQ केन्द्र O से जाने वाली एक रेखा के बिन्दु Q पर इस प्रकार मिलती है कि OQ = 13 सेमी. तो PQ की लम्बाई ज्ञात कीजिये।

हल:

प्रश्नानुसार आकृति बनाने पर



$$OP = 5 \text{ cm. और } OQ = 13 \text{ cm.}$$

$\therefore$  PQ एक स्पर्श रेखा है और OP त्रिज्या है।

$$\angle OPQ = 90^\circ$$

अब समकोण AOPQ में, पाइथागोरस प्रमेय से

$$(OQ)^2 = (OP)^2 + (PQ)^2$$

$$\text{मान रखने पर } (13)^2 = (5)^2 + (PQ)^2$$

$$169 = 25 + (PQ)^2$$

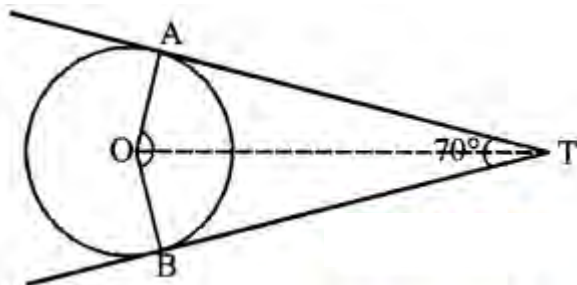
$$\text{या } (PQ)^2 = 169 - 25 = 144$$

$$PQ = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$$

प्रश्न 16.

यदि एक बिन्दु T से O केन्द्र वाले किसी वृत्त पर TA व TB स्पर्श रेखाएँ परस्पर  $70^\circ$  के कोण पर झुकी हों, तो  $\angle AOB$  को ज्ञात कीजिए।

हल:



चित्रानुसार TA और TB, केन्द्र O वाले किसी बिन्दु . | पर दो स्पर्श रेखाएँ हैं।

$$\angle TAO = \angle TBO = 90^\circ$$

$$\text{तथा } \angle ATB = 70^\circ$$

$$\angle AOB = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 70^\circ)$$

$$= 360^\circ - 250^\circ$$

$$= 110^\circ$$

प्रश्न 17.

यदि बिन्दु R से O केन्द्र वाले किसी वृत्त पर RA व RB स्पर्श रेखाएँ परस्पर एक के कोण पर झुकी हों तथा  $\angle AOB = 40^\circ$  हो तो कोण e का मान ज्ञात करें।

हल:

RA व RB स्पर्श रेखाएँ हैं।

$$\therefore \angle AOB + \angle ARB = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 40^\circ + \angle ARB = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle ARB = 180^\circ - 40^\circ$$

$$= 140^\circ$$

प्रश्न 18.

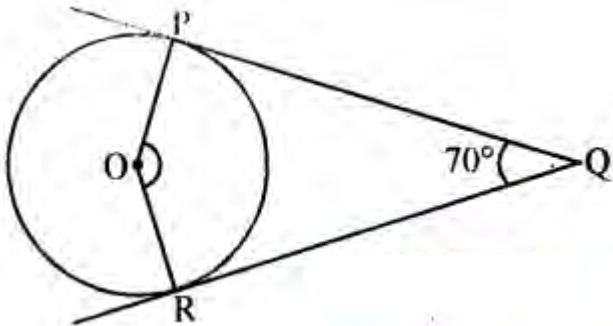
4 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त पर स्थित किसी बिन्दु पर कितनी स्पर्श रेखाओं की रचना की जा सकती है?

उत्तर:

हम जानते हैं कि किसी भी वृत्त पर स्थित | बिन्दु पर एक और केवल एक ही स्पर्श रेखा खींची जा सकती है।

प्रश्न 19.

दी गयी आकृति में O एक वृत्त का केन्द्र है जिसके बाह्य बिन्दु से वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ QP और QR खींची गई हैं। कोण POR का मान ज्ञात कीजिए।



हल:

PQ व RQ स्पर्श रेखाएँ हैं।

$$\therefore \angle POR + \angle PQR = 180^\circ$$

$$\angle POR + 70^\circ = 180^\circ$$

$$\angle POR = 180^\circ - 70^\circ$$

$$= 110^\circ$$

प्रश्न 20.

5 सेमी. त्रिज्या वाले वृत्त के केन्द्र से 9 सेमी. दूर बाह्य बिन्दु से वृत्त पर कितनी स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती है?

उत्तर:

हम जानते हैं कि वृत्त के बाहर स्थित किसी बिन्दु से जाने वाली वृत्त पर दो और केवल दो स्पर्श रेखाएँ होती हैं।

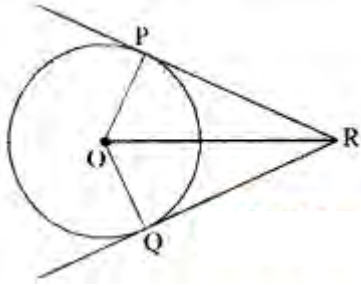
लघूत्तरात्मक प्रश्न

प्रश्न 1.

सिद्ध कीजिए कि किसी बाह्य बिन्दु किसी वृत्त पर खींची गई दो स्पर्श रेखाओं की लम्बाइयाँ बराबर होती हैं।

अथवा

सिद्ध कीजिए कि एक बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लम्बाइयाँ बराबर होती हैं।



हल:

दिया है : वृत्त का केन्द्र O है और बाह्य बिन्दु R से दो स्पर्श रेखाएँ RP और RQ हैं।

सिद्ध करना है :  $RP = RQ$

रचना : OP, OQ और OR को मिलाया।

उपपत्ति : हम जानते हैं कि स्पर्श रेखा, वृत्त की त्रिज्या पर लम्बवत् होती है।

अतः  $\angle OPR = \angle OQR = 90^\circ \dots (i)$

अब  $\triangle OPR$  और  $\triangle OQR$  में,

$\angle OPR = \angle OQR = 90^\circ$

समीकरण (i) से

$OR = OR$  (उभयनिष्ठ भुजा)

$OP = OQ$  (वृत्त की त्रिज्याएँ)

$\therefore$  समकोण - कर्ण -- भुजा सर्वांगसमता गुणधर्म से.

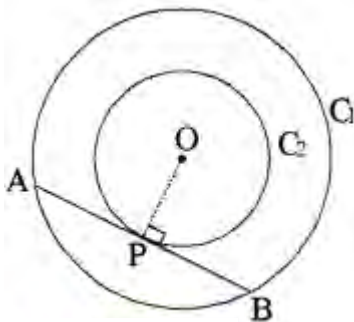
$\triangle OPR \cong \triangle OQR$

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समान होंगी।

$\Rightarrow RP = RQ$  (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 2.

सिद्ध कीजिए कि दो संकेन्द्रीय वृत्तों में बड़े वृत्त की जीवा जो छोटे वृत्त को स्पर्श करती है, स्पर्श बिन्दु पर समद्विभाजित होती है।



हल:

दिया है : हमें केन्द्र O वाले दो संकेन्द्रीय वृत्त  $C_1$  और  $C_2$ , तथा बड़े वृत्त  $C_1$  की जीवा AB, जो छोटे वृत्त  $C_2$  को बिन्दु P पर स्पर्श करती है (देखिए आकृति)।



सिद्ध करना है :  $AP = BP$  रचना : आइए  $OP$  को मिलाएँ।  
उपपत्ति :  $AB, C$ , के बिन्दु  $P$  पर स्पर्श रेखा है और  $OP$  त्रिज्या है।

अतः प्रमेय से,  $OP \perp AB$

अब  $AB$  वृत्त  $C$ , की एक जीवा है और  $OP \perp AB$  है।

अतः,  $OP$  जीवा  $AB$  को समद्विभाजित करेगी क्योंकि केन्द्र से जीवा पर खींचा गया लम्ब उसे समद्विभाजित करता है, अर्थात्  $AP = BP$  (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 3.

यदि किसी वृत्त के किसी बाह्य बिन्दु से वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ खींची जायें तो सिद्ध कीजिये कि

(i) वे रेखाएँ वृत्त के केन्द्र पर समान कोण बनाती हैं तथा

(ii) वृत्त के केन्द्र से मिलाने वाले रेखाखण्ड के साथ, दोनों स्पर्श रेखाएँ बराबर कोण बनाती हैं।

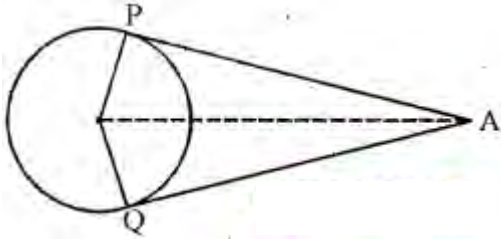
हल:

दिया है : एक वृत्त  $C(O, r)$  है जिसके बाह्य बिन्दु  $A$  से वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ  $AP$  और  $AQ$  खींची गई हैं।

सिद्ध करना है- (i)  $\angle AOP = \angle AOQ$

(ii)  $\angle OAP = \angle OAQ$

रचना:  $OA, OP$  तथा  $OQ$  को मिलाया।



उपपत्ति- $\triangle OPA$  और  $\triangle OQA$  में

$AP = AQ$  (एक ही वृत्त की स्पर्श रेखाएँ)

$OA = OA$  (उभयनिष्ठ भुजा)

$OP = OQ$  (त्रिज्याएँ)

S-S-S सर्वांगसमता से

$\triangle OPA \cong \triangle OQA$

$\Rightarrow \angle AOP = \angle AOQ$  (CPCT)

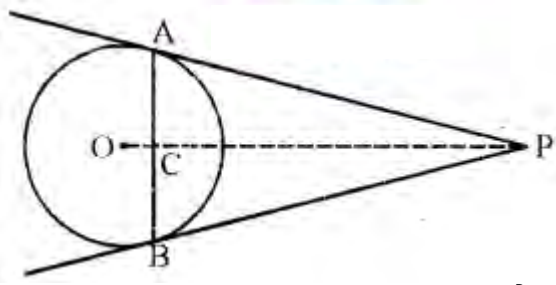
तथा  $\angle OAP = \angle OAQ$  (इतिसिद्धम्)

प्रश्न 4.

सिद्ध करो कि वृत्त की किसी जीवा के सिरे पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ, जीवा से समान कोण बनाती हैं।

हल:

माना वृत्त  $C(O, r)$  की जीवा  $AB$  के सिरे  $A$  और  $B$  पर स्पर्श रेखाएँ  $PA$  और  $PB$  खींची गई हैं जो कि बिन्दु  $P$  पर काटती हैं।



माना OP, जीवा AB को बिन्दु C पर काटती है।

सिद्ध करना है-  $\angle PAC = \angle PBC$

उपपत्ति-  $\triangle PCA$  और  $\triangle PCB$  में

$PA = PB$  (बाह्य बिन्दु P से वृत्त पर स्पर्श रेखाएँ हैं)

$PC = PC$  (उभयनिष्ठ भुजा)

$\angle APC = \angle BPC$  [ $\because$  स्पर्श रेखाएँ PA व PB, OP के साथ समान कोण बनाती हैं।]

S-A-S सर्वांगसमता से

$\triangle PCA \cong \triangle PCB$

$\Rightarrow \angle PAC = \angle PBC$  . इतिसिद्धम्

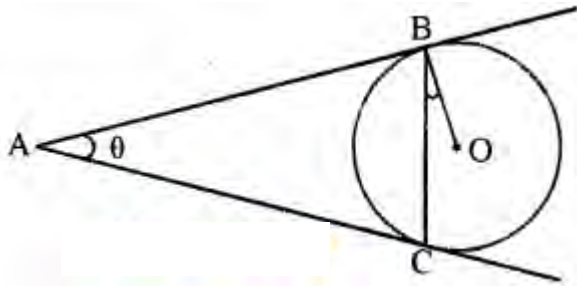
प्रश्न 5.

केन्द्र O वाले वृत्त पर बाह्य बिन्दु A से दो स्पर्श रेखाएँ AB तथा AC खींची गई हैं। सिद्ध कीजिये कि  $\angle BAC = 2\angle OBC$  अथवा

केन्द्र O वाले वृत्त पर बाह्य बिन्दु T से दो स्पर्श रेखाएँ TP तथा TQ खींची गई हैं। सिद्ध कीजिए कि  $\angle PTQ = 2\angle OPQ$  है।

हल:

हमें केन्द्र O वाला एक वृत्त, एक बाह्य बिन्दु A तथा वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ AB और AC, जहाँ B, C स्पर्श बिन्दु हैं, दिये हैं जैसा आकृति में दिखाया गया है।



सिद्ध करना है-  $\angle BAC = 2\angle OBC$  माना

$\angle BAC = \theta$

प्रमेय से हम जानते हैं कि  $AB = AC$  अतः ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

$\therefore \angle ABC = \angle ACB = \frac{1}{2} (180^\circ - \theta)$

$\angle ABC = 90^\circ - \frac{1}{2} \theta$

$\angle OBA = 90^\circ$

अतः  $\angle OBC = \angle OBA - \angle ABC$

$= 90^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2} \theta)$

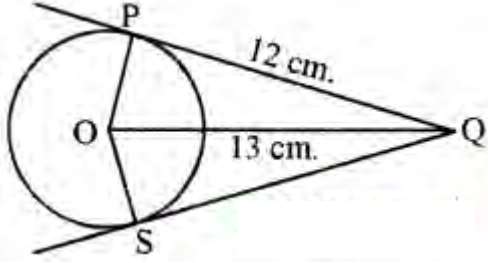
$= 90^\circ - 90^\circ + \frac{1}{2} \theta$

$$\angle OBC = \frac{1}{2} \angle BAC$$

$$\angle BAC = 2\angle OBC \text{ इतिसिद्धम्}$$

प्रश्न 6.

दिये गये चित्र में QS का मान ज्ञात कीजिये | जबकि दिया गया है OS = 13 cm. तथा PQ = 12 cm.



हल:

चित्रानुसार PQ एक स्पर्श रेखा है।

$$\therefore \angle OPQ = 90^\circ$$

अतः अब  $\triangle OPQ$  में

$$(OP)^2 + (PQ)^2 = (OQ)^2$$

$$(OP)^2 + (12)^2 = (13)^2$$

$$(OP)^2 = 169 - 144 = 25$$

$$\therefore OP = \sqrt{25} = 5 \text{ cm.}$$

अर्थात् वृत्त की त्रिज्या (r) = OP = OS = 5 cm.

अब समकोण  $\triangle OSQ$  से

$$(OS)^2 + (QS)^2 = (OQ)^2$$

$$(QS) = (OQ)^2 - (OS)^2$$

$$= (13)^2 - (5)^2$$

$$= 169 - 25 = 144$$

$$QS = \sqrt{144} = 12 \text{ cm.}$$

अर्थात् QS का मान 12 cm. है।