

UP Board Class 10 Maths Important Questions Chapter 12 वृत्तों से संबंधित क्षेत्रफल

अतिलघुत्तरात्मक प्रश्न

प्रश्न 1.

एक वृत्त की परिधि 147 सेमी. है। इसकी त्रिज्या लिखिए।

हल:

$$\text{परिधि} = 2\pi r$$

$$\therefore 2\pi r = 147$$

$$\text{या } r = \frac{147}{2\pi}$$

$$\therefore r = 7 \text{ सेमी.}$$

प्रश्न 2.

वृत्त की परिधि किसे कहते हैं?

उत्तर:

वृत्त के अनुदिश एक पूरे चक्कर में तय की गयी दूरी को वृत्त की परिधि कहते हैं।

प्रश्न 3.

π के मान की गणना किस गणितज्ञ ने की थी?

उत्तर:

भारतीय गणितज्ञ आर्यभट्ट ने π के मान की गणना की थी।

प्रश्न 4.

दो संकेन्द्रीय वृत्तों द्वारा परिबद्ध क्षेत्र के क्षेत्रफल का सूत्र लिखिए।

उत्तर:

$$\pi(r_1^2 - r_2^2)$$

प्रश्न 5:

दो वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 6 सेमी. और 4 सेमी. हैं। उनके क्षेत्रफलों का अनुपात लिखिए।

हल:

$$\text{पहले वृत्त का क्षेत्रफल} = \pi r^2$$

$$= \pi(6)^2 = 36\pi$$

$$\text{दूसरे वृत्त का क्षेत्रफल} = \pi r^2 = \pi \times (4)^2 = 16\pi$$

$$\text{अनुपात लेने पर } 36\pi : 16\pi = 9 : 4$$

प्रश्न 6.

एक घड़ी की मिनट की सुई द्वारा 20 मिनट में केन्द्र पर अन्तरित कोण का मान ज्ञात कीजिए।

हल:

$$\text{अन्तरित कोण} = 360 - 240 = 120^\circ$$

प्रश्न 7.

उस त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके चाप की लम्बाई 10 सेमी. और त्रिज्या 6 सेमी. हो।

हल:

यहाँ त्रिज्या = 6 सेमी., चाप (L) = 10 सेमी.

$$\begin{aligned}\text{त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल} &= \frac{1}{2} \times L \times r \\ &= \frac{1}{2} \times 10 \times 6 = 30 \text{ सेमी.}^2\end{aligned}$$

प्रश्न 8.

21 सेमी. त्रिज्या के वृत्त से काटे गये त्रिज्यखण्ड का कोण 60° है। त्रिज्यखण्ड की चाप की लम्बाई और क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल:

त्रिज्या $r = 21$ सेमी.

त्रिज्यखण्ड का कोण $C = 60^\circ$

केन्द्र पर कोण अन्तरित करने वाले चाप की लम्बाई

$$= \frac{2\pi r \theta}{360} = \frac{2 \times 22 \times 21 \times 60}{360} = 22 \text{ सेमी.}$$

त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल = $\frac{\pi R^2 \theta}{360}$

$$= \frac{22 \times 21 \times 21 \times 60}{360} = 231 \text{ वर्ग सेमी.}$$

प्रश्न 9.

यदि एक अर्द्धवृत्ताकार चाँदे का व्यास 14 cm. है, तो इसकी परिधि ज्ञात कीजिये।

हल:

व्यास = 14 cm., \therefore त्रिज्या (r) = $\frac{14}{2} = 7$ cm

$$\therefore \text{परिधि} = 2\pi r = 2 \times 22 \times 7 = 308 \text{ cm.}$$

$$= 308 \text{ cm.}$$

प्रश्न 10.

दो वृत्तों की परिधियों का अनुपात 2 : 3 है। उनकी त्रिज्याओं का अनुपात ज्ञात कीजिये।

हल:

माना दो वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः r_1 वा r_2 हैं।

$$\therefore 2\pi r_1 = 2\pi r_2 \times \frac{2}{3} \Rightarrow r_1 = \frac{2}{3} r_2$$

$$\Rightarrow r_1 : r_2 = 2 : 3$$

प्रश्न 11.

यदि एक वृत्त का परिमाण और क्षेत्रफल संख्यात्मक रूप से बराबर है तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिये।

हल:

माना वृत्त की त्रिज्या = r है।

\therefore प्रश्नानुसार वृत्त का परिमाण = वृत्त का क्षेत्रफल

$$2\pi r = \pi r^2$$

$$\therefore r = 2 \text{ मात्रक}$$

प्रश्न 12.

त्रिज्या R वाले वृत्त के उस त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल लिखिये जिसका कोण θ° है।

अथवा

त्रिज्या r वाले वृत्त के एक त्रिज्यखण्ड, जिसका कोण अंशों में θ है, का क्षेत्रफल लिखिए।

हल:

त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल = $\theta/360 \times \pi R^2$ वर्ग इकाई या $\theta/360 \times \pi r^2$ वर्ग इकाई

प्रश्न 13.

r त्रिज्या वाले वृत्त के एक त्रिज्यखण्ड, जिसका कोण अंशों में θ है, के संगत चाप की लम्बाई लिखिये।

अथवा

त्रिज्या r वाले वृत्त के एक त्रिज्यखण्ड जिसका कोण अंशों में θ है, तो संगत चाप की लम्बाई का सूत्र लिखिए।

हल:

कोण θ वाले त्रिज्यखण्ड के संगत चाप की लम्बाई = $\theta/360 \times 2\pi r$

प्रश्न 14.

यदि एक वृत्त की त्रिज्या 14 सेमी. हो, तो वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल:

यहाँ वृत्त की त्रिज्या (r) = 14 सेमी.

∴ वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2

= $22/7 \times (14)^2 = 22/7 \times 14 \times 14$

= $22 \times 2 \times 14 = 616$ वर्ग सेमी.

प्रश्न 15.

44 सेमी. परिधि वाले वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल:

प्रश्नानुसार परिधि = 44 सेमी.

या $2\pi r = 44$

∴ $r = 44 \times 7/22 = 14$ सेमी.

∴ वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2

= $22/7 \times 14 \times 14$

= 616 सेमी.

प्रश्न 16.

14 सेमी. व्यास वाले वृत्त की परिधि ज्ञात कीजिए।

हल:

∴ व्यास = 14 सेमी.

∴ त्रिज्या (r) = $14/2 = 7$ सेमी.

वृत्त की परिधि = $2\pi r$

= $2 \times 22/7 \times 7 = 88$ सेमी.

प्रश्न 17.

उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसका क्षेत्रफल 616 वर्ग सेमी. है।

हल:

दिया है वृत्त का क्षेत्रफल = 616 वर्ग सेमी.

$$\text{वृत्त का क्षेत्रफल} = \pi r^2$$

$$616 = 227227 \times r^2$$

$$\therefore r^2 = 616 \times 722616 \times 722 \times 7$$

$$r^2 = 196$$

$$\therefore r = \sqrt{196} = 14 \text{ सेमी.}$$

अतः वृत्त की त्रिज्या = 14 सेमी.

प्रश्न 18.

यदि एक वृत्त के दीर्घत्रिज्यखण्ड का कोण 250° है तो लघुत्रिज्य खण्ड का कोण ज्ञात कीजिए।

हल:

दीर्घत्रिज्यखण्ड का कोण + लघुत्रिज्यखण्ड का कोण = 360° होता है।

इसलिए लघुत्रिज्यखण्ड का कोण = $360^\circ -$ दीर्घत्रिज्यखण्ड का कोण

$$= 360^\circ - 250^\circ$$

$$= 110^\circ$$

लघूत्तरात्मक प्रश्न

प्रश्न 1.

एक वृत्ताकार खेत पर 24 रु. प्रति मीटर की दर से बाड़ लगाने का व्यय 5280 रु. है। इस खेत की 0.50 रु. प्रति वर्ग मीटर की दर से जुताई कराई जानी है। खेत की जुताई कराने का व्यय ज्ञात कीजिए। ($\pi = 227227$ लीजिए।)

हल:

बाड़ की लम्बाई (मीटर में)

$$= \frac{\text{पूरा व्यय}}{\text{दर}}$$

$$= 220 \text{ मीटर}$$

अतः खेत की परिधि = 220 मीटर

इसलिए यदि खेत की त्रिज्या r मीटर है, तो

$$2\pi r = 220$$

$$\text{या } 2 \times 227227 \times r = 220$$

$$\text{या } r = 220 \times 72 \times 22220 \times 72 \times 22 = 35 \text{ मीटर}$$

अर्थात् खेत की त्रिज्या 35 मीटर है।

अतः खेत का क्षेत्रफल = πr^2

$$= 227227 \times 35 \times 35 \text{ मीटर}^2$$

$$= 22 \times 5 \times 35 \text{ मीटर}^2$$

अब 1 मीटर² खेत की जुताई का व्यय = 0.50 रु.

अतः खेत की जुताई कराने का कुल व्यय = $22 \times 5 \times 35 \times 0.50 = 1925$ रु.

प्रश्न 2.

चित्र में अर्द्धवृत्त की त्रिज्या 7 सेमी. है। अर्द्धवृत्त में बने वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल:

दी गई आकृति में

अर्द्धवृत्त की त्रिज्या, अर्द्धवृत्त के अन्दर बने वृत्त के व्यास के बराबर है।

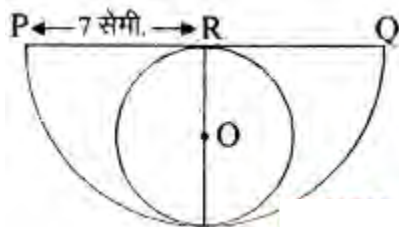
अर्थात् अन्दर बने वृत्त की त्रिज्या (r) = $\frac{PQ}{2}$

$$r = \frac{14}{2} \text{ सेमी.} = 7 \text{ सेमी.}$$

अन्दर बने वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2

$$= 22 \times 7 \times 7 \text{ सेमी.}^2$$

$$= 1078 \text{ सेमी.}^2$$



प्रश्न 3.

एक वृत्त के चतुर्थांश (Quadrant) का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये, जिसकी परिधि 22 cm. है।

हल:

वृत्त की परिधि = 22 cm.

$$2\pi r = 22$$

$$\therefore r = \frac{22}{2\pi} = \frac{22 \times 7}{2 \times 22} = 7 \text{ cm.}$$

$$r = 7 \text{ cm.}$$

केन्द्रीय कोण (चतुर्थांश) (θ) = 90°

$$\text{चतुर्थांश का क्षेत्रफल} = 9.625 \text{ cm}^2$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{चतुर्थांश का क्षेत्रफल} &= \frac{\pi r^2 \theta}{360^\circ} \\ &= \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times 90^\circ \\ &= \frac{77}{8} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

प्रश्न 4.

त्रिज्या 21 सेमी. वाले वृत्त का एक चाप केन्द्र पर 60° का कोण अन्तरित करता है, तो संगत दीर्घ त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

हल:

दिया गया है

वृत्त की त्रिज्या $r = 21$ सेमी.

चाप द्वारा बनाये गये दीर्घ त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल



$$\begin{aligned}
 &= \pi r^2 \times \frac{(360 - 60)^\circ}{360^\circ} \\
 &= \pi r^2 \times \frac{300^\circ}{360^\circ} \\
 \text{मान रखने पर} &= \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \times \frac{300^\circ}{360^\circ} \\
 &= 22 \times 3 \times 21 \times \frac{5}{6} \\
 &= 11 \times 21 \times 5 = 1155 \text{ वर्ग सेमी.}
 \end{aligned}$$

प्रश्न 5.

दी गयी आकृति में छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जहाँ ABCD भुजा 14 cm का एक वर्ग है।

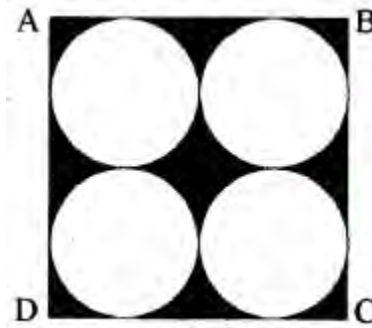
हल:

$$\text{वर्ग ABCD का क्षेत्रफल} = 14 \times 14 \text{ cm}^2 =$$

$$196 \text{ cm}^2$$

$$\text{प्रत्येक वृत्त का व्यास} = 14 \text{ cm} = 7 \text{ cm} .$$

$$\therefore \text{प्रत्येक वृत्त की त्रिज्या} = 7/2 \text{ cm}$$



चित्र

$$\begin{aligned}
 \text{अतः एक वृत्त का क्षेत्रफल} &= \pi r^2 = \frac{22}{7} \times \\
 &\frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \text{ cm}^2 \\
 &= \frac{154}{4} \text{ cm}^2 \\
 &= \frac{77}{2} \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{चारों वृत्तों का क्षेत्रफल} = 4 \times \frac{77}{2} \text{ cm}^2 = 154 \text{ cm}^2$$

अतः छायांकित भाग का क्षेत्रफल = $(196 - 154) \text{cm}^2 = 42 \text{cm}^2$

प्रश्न 6.

दी गयी आकृति में छायांकित डिजाइन का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जहाँ ABCD भुजा 10 cm का एक वर्ग है तथा इस वर्ग की प्रत्येक भुजा को व्यास मान कर अर्द्धवृत्त खींचे गए हैं। ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए।)

हल:

यहाँ पर हमने अछायांकित क्षेत्रों I, II, III और IV से अंकित किया है। जैसा कि चित्र में दिखाया गया है।

I का क्षेत्रफल + III का क्षेत्रफल = ABCD का क्षेत्रफल - दोनों अर्द्धवृत्तों का क्षेत्रफल, जिनमें से प्रत्येक की त्रिज्या 5 cm है।

$$= (10 \times 10 - 2 \times \frac{1}{2} \times \pi \times 5^2) \text{cm}^2$$

$$= (100 - 3.14 \times 25) \text{cm}^2$$

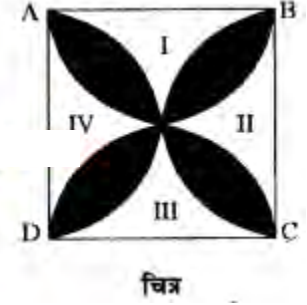
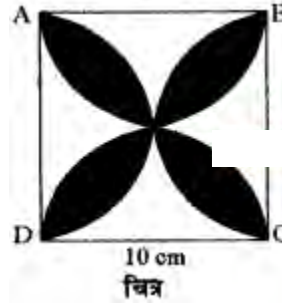
$$= (100 - 78.5) \text{cm}^2 = 21.5 \text{cm}^2$$

इसी प्रकार, II का क्षेत्रफल + IV का क्षेत्रफल = 21.5cm^2

अतः छायांकित डिजाइन का क्षेत्रफल = ABCD का क्षेत्रफल - (I + II + III + IV) का क्षेत्रफल -

$$= (100 - 2 \times 21.5) \text{cm}^2$$

$$= (100 - 43) \text{cm}^2 = 57 \text{cm}^2$$



प्रश्न 7.

7 सेमी. त्रिज्या वाले वृत्त में कोण 120° के संगत दीर्घ त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल:

प्रश्नानुसार वृत्त के त्रिज्यखण्ड की त्रिज्या (R) = 7 cm,

केन्द्रीय कोण = 120°

$$\therefore \text{दीर्घ त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल} = \frac{\pi R^2 (360^\circ - \theta)}{360^\circ}$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{7 \times 7 \times (360^\circ - 120)}{360^\circ}$$

$$= \frac{22 \times 7 \times 240}{360} \times \frac{22 \times 7 \times 8}{12}$$

$$= \frac{22 \times 7 \times 2}{3} = \frac{308}{3} \text{ cm}^2 \text{ उत्तर}$$

प्रश्न 8.

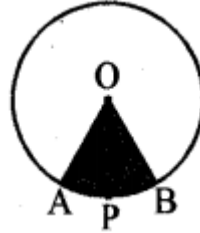
एक वृत्त का चाप केन्द्र पर 45° का कोण अन्तरित करता है। यदि इसके लघु त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल 77 cm^2 है, तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल:

दिया हुआ त्रिज्यखण्ड OAPB है।

त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल = $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

मान रखने पर



$$77 = \frac{45}{360} \times \frac{22}{7} \times r^2$$

$$\therefore r^2 = \frac{77 \times 360 \times 7}{45 \times 22}$$

$$= \frac{7 \times 8 \times 7}{2} = 7 \times 4 \times 7 = 196$$

$$\Rightarrow r^2 = 196$$

$$\therefore r = \sqrt{196} = 14 \text{ cm.}$$

अतः वृत्त की त्रिज्या = 14 cm.