UP Board Class 10 Maths Important Questions Chapter 2 बहुपद

अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न

प्रश्न 1.
बहुपद का शून्यक क्या होता है?
उत्तर:
एक वास्तविक संख्या a किसी बहुपद p(x) का शून्यक कहलाएगी यदि p(a) = (0 हो अर्थात् चर का वह मान जिससे बहुपद का मान शून्य हो जाए।

प्रश्न 2.
रैखिक बहुपद का उदाहरण लिखिए।
उत्तर:
ax + b, जहाँ a, b ∈ R तथा a ≠ 0

प्रश्न 3.
यदि द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के शून्यक α और β हों तो α + β तथा αβ
का मान लिखिए।
उत्तर:
α + β = - baba तथा αβ = caca

प्रश्न 4.
विभाजन एल्गोरिथ्म लिखिए।
उत्तर:
यदि दिए गए बहुपद p(x) और शून्येतर बहुपद g(x) के लिए दो ऐसे बहुपदों q(x) तथा r(x) का अस्तित्व होता है कि p(x) = g(x) q(x) + r(x) जहाँ r(x) = 0 है या घात r(x) < घात g(x) है।

प्रश्न 5.
बहुपद किसे कहते हैं?
उत्तर:
एक से अधिक पदों के बीजगणितीय व्यंजक बहुपद कहलाते हैं यदि इसके पदों में किसी भी चर की घात ऋणात्मक नहीं होनी चाहिए।

प्रश्न 6.
एक द्विघात बहुपद का उदाहरण लिखिए।
उत्तर:
$y^2 - 2$

प्रश्न 7.
त्रिघात बहुपद की परिभाषा उदाहरण सहित लिखिए।
उत्तर:
एक ऐसा बहुपद जिसमें घातों की अधिकतम संख्या तीन हो, त्रिघात बहुपद कहलाता है। जैसे $3x^3 - 2x^2 + x - 1$

प्रश्न 8.
बहुपद का मान क्या होता है?
उत्तर:
यदि x में p(x) कोई बहुपद है और यदि k कोई वास्तविक संख्या है, तो p(x) में x को k से प्रतिस्थापित करने पर जो वास्तविक संख्या प्राप्त होती है, वह p(x) का x = k पर मान कहलाती है और इसे p(k) से निरूपित किया जाता है।

प्रश्न 9.
यदि व्यंजक $x^3 - 2x + 1$ का एक भाजक (x - 1) है तो शेषफल लिखिए।
उत्तर:
माना कि व्यंजक $f(x) = x^3 - 2x + 1$ का एक गुणनखण्ड (x - 1) है।
अतः $(1) = (1)^3 - 2(1) + 1 = 1 - 2 + 1$
$= 0$
∴ शेषफल = शून्य

प्रश्न 10.
द्विघात बहुपद $x^2 + 7x + 10$ के शून्यक ज्ञात कीजिए।
उत्तर:
$x^2 + 7x + 10$
$x^2 + 5x + 2x + 10$
$(x + 5) + 2(x + 5) = (x + 2)(x + 5)$
∴ $x^2 + 7x + 10$ का मान शून्य है, जब $x + 2 = 0$ या $x + 5 = 0$ है अर्थात् जब $x = - 2$ या $x = - 5$ हो।
∴ $x^2 + 7x + 10$ के शून्यक - 2 और - 5 हैं।

प्रश्न 11.
यदि 2 बहुपद $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + kx + 10$ का गुणनखण्ड हो तो k का मान लिखिए।
हल:
$f(2) = 2^4 - x^3 - 4 \times 2^2 + k \times 2 + 10$
या $0 = 16 - 8 - 16 + 2k + 10$
$0 = 2k + 2$
∴ $k = −22−22 = - 1$

प्रश्न 12.
यदि (x - 2) व्यंजक $x^2 + 2x - a$ का एक गुणनखण्ड है तो a का मान लिखिए।
उत्तर:

https://www.evidyarthi.in/

$x - 2 = 0$ या $x = 2$
व्यंजक में रखने पर इसका मान शून्य होना चाहिए। अतः
$(2)^2 + 2 \times 2 - a = 0$
$4 + 4 - a = 0$
$a = 8$

प्रश्न 13.
यदि $x + y + 3 - 3xyz = (x + y + z)(x + y + 2 + k)$ हो, तो k का मान लिखिए।
उत्तर:
$k = - xy – yz - zx$

प्रश्न 14.
एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिये जिसके शून्यकों के योग और गुणनफल क्रमशः -4 और 3 हों।
हल:
x^2 - (मूलों का योग) x + मूलों का गुणनफल
$x^2 - (- 4) x + 3$
$x^2 + 4x + 3$

प्रश्न 15.
एक n घात वाले बहुपद के अधिकतम शून्यकों की संख्या लिखिए।
उत्तर:
n शून्यक।

प्रश्न 16.
द्विघात बहुपद $ax + bx + c$ के आलेख की आकृति किस प्रकार की प्राप्त होती है?
उत्तर:
परवलंया आकृति।

प्रश्न 17.
वह बहुपद ज्ञात कीजिये जिसके शून्यक - 5 और 4 हों।
हल:
$[x - (- 5)] (x - 4)$
$\Rightarrow (x + 5) (x - 4)$
$\Rightarrow x^2 - 4x + 5x - 20$
$\Rightarrow x^2 + x - 20$

प्रश्न 18.
यदि बहुपद $f(x) = x^2 - 5x + k$ के शून्यक α तथा β इस प्रकार हों कि $\alpha - \beta =$
1 तो k का मान लिखिये।
हल:
दिया गया है कि α तथा β बहुपद $x^2 - 5x + k$ के शून्यक हैं।
$\alpha + \beta = (−51)(−51) = 5$
$\alpha\beta = k1k1 = k$

$\alpha - \beta = 1$
या $(\alpha - \beta) = 1$
$(\alpha + \beta) - 4\alpha\beta = 1$
या $25 - 4k = 1$
$4k = 24 \therefore k = 244244 = 6$

प्रश्न 19.
$x^2 - 9$ के शून्यक ज्ञात कीजिये।।
हल:
$x^2 - 9 = (x)^2 - (3)^2 = (x + 3)(x - 3)$
बहुपद के शून्यक के लिये
$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$ तथा
$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$
अतः बहुपद $x^2 - 9$ के शून्यक = - 3

प्रश्न 20.
यदि बहुपद $ax^2 - 6x - 6$ के शून्यकों का गुणनफल 6 हो, तो a का मान ज्ञात कीजिये।
हल:
दिये गये बहुपद के शून्यक a तथा B हैं । तब शून्यकों का गुणनफल
$\alpha\beta$ = caca से
$\Rightarrow \alpha\beta = -6a-6a$
$\Rightarrow 6 = -6a-6a$
$\therefore a = -1$

लघुत्तरात्मक प्रश्न

प्रश्न 1.
भाग की क्रिया सम्पन्न किये बिना ही सिद्ध कीजिए कि
(i) $x^2 + (a - 3)x - 3a$ $(x + a)$ से पूर्णतः विभाजित होता है।
(ii) $3x^3 + 11x^2 + x - 15$ व्यंजक $(x-1)$ से पूर्णतः विभाजित होता है।
हल:
(i) यदि $(x + a)$ से पूर्णतः विभाजित है तो $x = -a$ मान रखने पर व्यंजक का मान शून्य हो जायेगा। अतः व्यंजक में $x = -a$ मान रखने पर
$= (-a)^2 + (a - 3)(-a) - 3a$
$= a^2 - a^2 + 3a - 3a = 0$
अतः $(x + a)$ से व्यंजक $x^2 + (a - 3)x - 3a$ पूर्णतः विभाजित है।

(ii) व्यंजक में $x = 1$ मान रखने पर
$3(1)^3 + 11(1)^2 + 1 - 15$
$3 + 11 + 1 - 15 = 0$
अतः व्यंजक $3x + 11x^2 + x - 15$ व्यंजक $(x - 1)$ से पूर्णतः विभाजित है।

https://www.evidyarthi.in/

प्रश्न 2.
a के किस मान के लिए बहुपद $x^3 + 2x^2 - 3ax - 8$ में व्यंजक (x - 4) का पूरा-पूरा भाग जाता है।
हल:
हम जानते हैं (x - 4) का भाग देने पर शेषफल f(a) प्राप्त होगा।
∴ f(a) जहाँ
$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3ax - 8$
$f(4) = (4)^3 + 2(4)^2 - 3a \times 4 - 8$
$= 64 + 32 - 12a - 8 = 0$
या $12a = 88$
a = 8812=2238812=223

प्रश्न 3.
सिद्ध कीजिए कि बहुपद $x^2 + 2x + 3$ के शून्य विद्यमान नहीं हैं।
हल:
माना कि $f(x) = x^2 + 2x + 3$
$f(x) = \{x^2 + 2 \times x + 1\} + 2$
$= (x + 1)^2 + 2$
यहाँ x के वास्तविक मान के लिए $(x + 1)^2$ का मान ऋणात्मक नहीं होगा। अत: $(x + 1)^2$ हमेशा शून्य से अधिक होगा अतः (x) का मान 2 से अधिक होगा।

प्रश्न 4.
p के किस मान के लिए बहुपद $px^3 + 9x^2 + 6x - 1$ व्यंजक (3x + 2) से पूर्णतः विभाजित | होता है।
हल:
दिया गया है कि (3x + 2) दिये गये व्यंजक | का एक गुणनखण्ड है।
∴ $3x + 2 = 0$
या $3x = -2$ ∴ x = −23−23
व्यंजक $f(x)= px^3 + 9x^2 + 6x - 1$ में x = 2323 मान रखने पर

$$\therefore \quad f\left(-\frac{2}{3}\right) = p\left(-\frac{2}{3}\right)^3 + 9\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 6\left(-\frac{2}{3}\right) - 1$$

$$\text{या} \quad p \times \frac{-8}{27} + 4 - 4 - 1 = 0$$

$$\text{या} \quad \frac{-8p}{27} = 1$$

$$\text{या} \quad p = -\frac{27}{8}$$

प्रश्न 5.
एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिये जिसके शून्यकों के योग तथा गुणनफल क्रमशः 4 तथा 1 हैं।
हल:
दिया गया है
$\alpha + \beta = 4$
तथा $\alpha\beta = 1$
माना द्विघात बहुपद के शून्यक α व β हैं।
∴ द्विघात बहुपद = $(x - \alpha)(x - \beta)$
$= x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$
$= x^2 - 4x + 1$
अतः अभीष्ट बहुपद = $x^2 - 4x + 1$
प्रश्न 6.
द्विघात बहुपद $2x^2 - 6x + 4$ के शून्यांकों का योग व गुणनफल ज्ञात कीजिए।
हल:
दिया गया बहुपद $2x^2 - 6x + 4$

अतः शून्यांकों का योग $= \frac{-x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$
$= \frac{-b}{a}$
$= \left(\frac{-6}{2}\right) = \frac{6}{2} = 3$
तथा शून्यांकों का गुणनफल $= \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$
$= \frac{c}{a} = \frac{4}{2} = 2$

प्रश्न 7.
यदि $(x - 1)$ तथा $(x + 2)$ बहुपद $2x^3 + mx^2 + nx - 14$.के गुणनखण्ड है तो m तथा. n के मान ज्ञात कीजिए।
हल:
माना कि $f(x) = 2x^3 + mx^2 + nx - 14$ है
अतः $(x - 1)$. तथा $(x + 2)$ $f(x)$ के गुणनखण्ड होने चाहिए।
अत: $f(1) = 0$ व $f(-2) = 0$
व्यंजक :$2x^3 + mx^2 + nx - 14$ में
$f(1) = m(1)^2 + n(1) - 14 = 0$
$\Rightarrow m + n - 12 = 0$

व्यंजक $2x^3 + mx^2 + nx - 14$ में
$f(-2) = 2(-2)^3 + m(-2)^2 + n(-2) - 14 = 0$
$f(-2) = -16 + 4m - 2n - 14$
$\Rightarrow 4m - 2n - 30 = 0$ .... (ii)

समीकरण (i) व (ii) से
$m + n = 12$ ...... (iii)
$2m - n = 15$ .... (iv)
जोड़ने पर $3m = 27 \Rightarrow$ अतः $m = 9$
समीकरण (iii) से $n = 3$

https://www.evidyarthi.in/

प्रश्न 8.
यदि बहुपद $x^3 + lx + m$ में $(x - 1)$ या $(x + 1)$ का भाग दिया जाये तो शेषफल 7 बचता है, l तथा m के मान ज्ञात कीजिए।
हल:
$f(x) = x^3 + lx + m$ तथा $(x - 1)$ या $(x + 1)$
इसके गुणनखण्ड हैं जब 7 इसमें से घटा दें अतः
$(1) = 1 + l + m - 7 - 0$
$\Rightarrow l + m - 6 = 0$ .... (i)
$f(1) = - 1 - l + m - 7 = 0$
$\Rightarrow - 1 + m - 8 = 0$ .... (ii)
समीकरण (i) व (ii) को हल करने पर $l = - 1$ तथा $m = 7$

प्रश्न 9.
द्विघात बहुपद $x^2 + 7x + 10$ के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के सम्बन्ध की सत्यता की जाँच कीजिए।
हल:
प्रश्नानुसार
$x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5)$
इसलिए $x^2 + 7x + 10$ का मान शून्य है, जब $x + 2 = 0$ है या $x + 5 = 0$ है, अर्थात् जब $x = - 2$ या $x = - 5$ हो। इसलिए, $x^2 + 7x + 10$ के शून्यक - 2 और - 5 हैं।
अब, शून्यकों का योग = - 2 + (-5) = (-7)

$$= \frac{-(7)}{1} = \frac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

शून्यकों का गुणनफल $= (-2) \times (-5) = 10$

$$= \frac{10}{1} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$ **उत्तर**

अतः शून्यकों -- 2 और - 5 द्वारा भी योगफल व गुणनफल वही हैं, जो कि इनमें हैं।
∴ बहुपद के शून्यकों और गुणांकों के बीच सम्बन्ध 'सही है। .

प्रश्न 10.
एक द्विधात बहुपद ज्ञात कीजिये जिसके शून्यकों के योग तथा गुणनफल क्रमशः 0 और $\sqrt{5}$ हैं।
हल:
माना द्विघात बहुपद के शून्यक a तथा हैं।
दिया गया है $\alpha + \beta = 0$
$\alpha\beta = \sqrt{5}$
α तथा β शून्यक हैं।
∴ द्विघात बहुपद $= (x - \alpha)(x - \beta)$
$= x^2 - (\alpha + \beta) x + \alpha\beta$
$= x^2 - 0.x + \sqrt{5} = x^2 + \sqrt{5}$
अतः अभीष्ट बहुपद $= x^2 + 5$

प्रश्न 11.
यदि द्विघात व्यंजक $kx^2 + 5x + 3k$ के शून्यकों का योग उनके गुणनफल के बराबर हो, तो k का मान ज्ञात कीजिये।
हल:
दिए गए व्यंजक $kx^2 + 5x + 3k$ के अनुसार
शून्यकों का योग $(\alpha + \beta) = -5k5k$
तथा शून्यकों का गुणनफल $(\alpha\beta) = 3kk3kk = 3$

अब प्रश्नानुसार -5k=315k=31
या 3k = - 5
∴ k = 5

प्रश्न 12.
$3x^3 + x^2 + 2x + 5$ को $1 + 2x + x^2$ से भाग दीजिए।
हल:
यहाँ $f(x) = 3x^3 + x^2 + 2x + 5$
तथा $g(x) = 1 + 2x + x^2$

अब
$$\begin{array}{r|l} 1 + 2x + x^2 \;) & 3x^3 + x^2 + 2x + 5 \; (\; 3x - 5 \\ & 3x^3 + 6x^2 + 3x \\ & - \quad - \quad - \\ \hline & -5x^2 - x + 5 \\ & -5x^2 - 10x - 5 \\ & + \quad + \quad + \\ \hline & 9x + 10 \end{array}$$

भागफल = 3x - 5 तथा शेषफल = 9x + 10

प्रश्न 13.
द्विघात बहुपद $x^2 + x - 2$ के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के सम्बन्ध की सत्यता की जाँच कीजिए।
हल:
प्रश्नानुसार
$x^2 + x - 2 = x^2 + 2x - x - 2$
$= x(x + 2) - 1(x + 2)$
$= (x + 2)(x - 1)$
$x^2 + x - 2$ का मान शून्य होगा यदि $(x + 2)(x - 1)$ के मान शून्य हों अर्थात् $x + 2 = 0$
या $x - 1 = 0$ अर्थात् $x = -2$ या $x = 1$
अत: $x^2 + x - 2$ के शून्यक -2 और 1 हैं।
अब, शून्यकों का योग = -2 + 1

$$= -1 = \frac{-x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

तथा शून्यकों का गुणन = (–2) (1)

$$= -2 = \frac{\text{स्थिरांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

https://www.evidyarthi.in/