अध्याय – 4

गणितीय आगमन का सिद्धान्त

Priniipal of Mathematical Induction

भूमिका :- (Introduction) :-

गणितीय चिन्तन का एक आधारभूत सिद्धान्त निगमानिक तर्क है। तर्कशास्त्र के अध्ययन से लिया गया एक अनौपचारिक एवं निगमानिक तर्क का उदाहरण निम्नलिखित तीन कथनों में व्यक्त तर्क है।

(a) श्याम एक आदमी है।
(b) सभी आदमी नश्वर होते है। इसलिए
(c) श्याम नश्वर है।

यदि कथन (a) & (b) सत्य है तो (c) की सत्यता स्थापित हो जाती है।

एक और उदाहरण –

(a) चार दो से भाज्य संख्या है।
(b) दो से भाज्य सभी संख्याएँ सम होती है। इसलिए
(c) चार एक सम संख्या है।

इस प्रकार संक्षेप में कहा जा सकता है कि निगमन एक प्रक्रिया है जिसमें एक कथन सिद्ध करने को दिया जाता है।

जैसे गणित में प्राय: एक अनुमानित कथन या प्रमेय कहते हैं। तर्कसंगत निगमन के चरण प्राप्त किये जाते है।

प्रेरणा :- (Motivation) :-

गणित मे हम सम्पूर्ण आगमन के एक रूप गणितीय आगमन का प्रयोग करते है। गणितीय आगमन के सिद्धान्त को समझने के लिए कल्पना कीजिए कि पतली आयताकार टाइल्स का एक समूह एक सिरे पर रखा है।

जब प्रथम टाइल्स को निर्दिष्ट दिशा में धक्का दिया जायेगा तो सभी टाइल्स गिर जायेगी। यह सुनिश्चित करने के लिए सभी टाइल्स गिर जाएँगी, इतना ~~जानना~~ जानना पर्याप्त है कि

(a) प्रथम टाइल गिरती है और

(b) इस घटना में यदि कोई टाइल गिरती तो उसकी उत्तरवर्ती टाइल अवश्य गिरती है।

यही गणितीय आगमन के सिद्धान्त का आधार है।

आगमनिक समुच्चय (Inductive Set) :-

हम जानते है कि प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय N, वास्तविक संख्याओ के समुच्चय R का एक क्रमित उपसमुच्चय है।

समुच्चय S आगमनिक समुच्चय कहलाता है यदि

$1 \in S$ तथा $x+1 \in S$

जबकि $x \in S$

प्राकृतिक संख्याओ के समुच्चय N में उक्त दोनों गुण है।

N एक आगमानिक समुच्चय है।

पुन: N, R का सबसे छोटा उपसमुच्चय है इसलिए R के किसी भी आगमानिक उपसमुच्चय में N अनिवार्य रूप से समाहित होगा।

गणितीय आगमन का सिद्धान्त :-

प्राकृतिक संख्या n के लिए दिया गया कोई कथन P(n), प्रत्येक प्राकृतिक सं० n के लिए सत्य होगा यदि

I P(1) सत्य है।

अर्थात् P(n), n = 1 के लिए सत्य है।

II P(k) सत्य है।

अर्थात् यदि P(n), n = k के लिए सत्य है तो यह n = k+1 के लिए भी सत्य है।

उदाहरण :-

1 - सभी $n \geq 1$ के लिए, सिद्ध कीजिए।

$$1^2+2^2+3^2+ \cdots +n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

हल :- मान लीजिए कि दिया गया कथन P(n) है। अर्थात्

$$P(n) : 1^2+2^2+3^2+4^2+ \cdots +n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$n=1$ के लिए,

$$P(1): 1 = \frac{1(1+1)(2\times1+1)}{6} = \frac{1\times2\times3}{6} = 1$$

जो कि सत्य है।

माना दिया हुआ कथन $n=k$ के लिए सत्य है —

$$1^2+2^2+3^2+ \cdots +k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \quad \text{---} \quad (i)$$

अब हम सिद्ध करेंगे कि $P(k+1)$ भी सत्य है।

$$(1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2)+(k+1)^2$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

समी (1) से

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k+1+1)\{2(k+1)+1\}}{6}$$

इस प्रकार $P(k+1)$ सत्य है जब कभी $P(k)$ सत्य है।

अतः गणितीय आगमन सिद्धान्त से सभी प्राकृत सं० n के लिए कथन $P(n)$ सत्य है।