H1W4U3

વાસ્તવિક સંખ્યાઓ 1

1.1 પ્રાસ્તાવિક

ધોરણ IX માં તમે વાસ્તવિક સંખ્યાઓની દુનિયામાં ડોકિયું કર્યું અને તમને અસંમેય સંખ્યાઓ મળી. આ પ્રકરણમાં આપણે વાસ્તવિક સંખ્યાઓની ચર્ચા ચાલુ રાખીશું. આપણે વિભાગ 1.2 માં ધન પૂર્ણાંકો માટેના અંકગણિતના મૂળભૂત પ્રમેયથી પ્રારંભ કરીશું.

પૂર્ણાંકોની વિભાજ્યતાના ગુણધર્મોના ઘણા બધા ઉપયોગો છે. આપણે તેમાંના કેટલાકને સમજીશું અને તેનો ઉપયોગ મુખ્યત્વે બે ધન પૂર્ણાંકોના ગુ.સા.અ. **(ગુરુતમ સામાન્ય અવયવ, HCF (Highest Common Factor) અથવા GCD (Greatest Common Divisor)) શોધવા માટે કરીશું.**

અંકગણિતના મૂળભૂત પ્રમેયમાં ધન પૂર્ણાંકોના ગુણાકારની વાત આવે છે. તમે જાણો છો કે, દરેક વિભાજ્ય સંખ્યાને અવિભાજ્ય સંખ્યાના ગુણાકાર તરીકે અનન્ય રીતે દર્શાવી શકાય. આ અગત્યનો ગુણધર્મ એ ***અંકગણિતનું મૂળભૂત પ્રમેય*** છે. આ પરિણામ સરળતાથી દર્શાવી અને સમજાવી શકાય. આપણે અંકગણિતના મૂળભૂત પ્રમેયના બે મુખ્ય વ્યવહારુ ઉપયોગ કરીશું. તેના ગણિતના ક્ષેત્રમાં કેટલાક ખૂબ જ ઊંડા અને નોંધપાત્ર ઉપયોગો છે. તમે ધોરણ IX માં $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ અને $\sqrt{5}$ જેવી ઘણી બધી સંખ્યાઓનો અભ્યાસ કર્યો છે. હવે આપણે આવી સંખ્યાઓને અસંમેય સાબિત કરવા આ પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીશું.

1.2 અંકગણિતનું મૂળભૂત પ્રમેય

L9U8Z3

અગાઉનાં ધોરણોમાં તમે જોયું છે કે કોઈ પણ પ્રાકૃતિક સંખ્યાને તેના અવિભાજ્ય અવયવોના ગુણાકાર રૂપે લખી શકાય. ઉદાહરણ તરીકે, $2 = 2$, $4 = 2 \times 2$, $253 = 11 \times 23$, અને આ પ્રમાણે આગળ વધી શકાય.

હવે, આપણે પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનું બીજું પાસું જોવા પ્રયત્ન કરીએ. કોઈ પણ પ્રાકૃતિક સંખ્યા અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ગુણાકારથી મેળવી શકાય? ચાલો આપણે જોઈએ. અવિભાજ્ય સંખ્યાઓનો કોઈ પણ સમૂહ લો. ઉદાહરણ તરીકે, 2, 3, 7, 11 અને 23. આપણે કેટલીક અથવા બધી જ સંખ્યાઓનો ગુણાકાર કરીએ અને આપણે ઇચ્છીએ તેટલી વખત તેનું પુનરાવર્તન કરવાની છૂટ આપીએ તો આપણે બહોળી સંખ્યામાં ધન પૂર્ણાંકો મેળવી શકીએ (ખરેખર તો, અનંત સંખ્યાઓ). ચાલો આપણે કેટલીક યાદી બનાવીએ.

$7 \times 11 \times 23 = 1771$

$3 \times 7 \times 11 \times 23 = 5313$

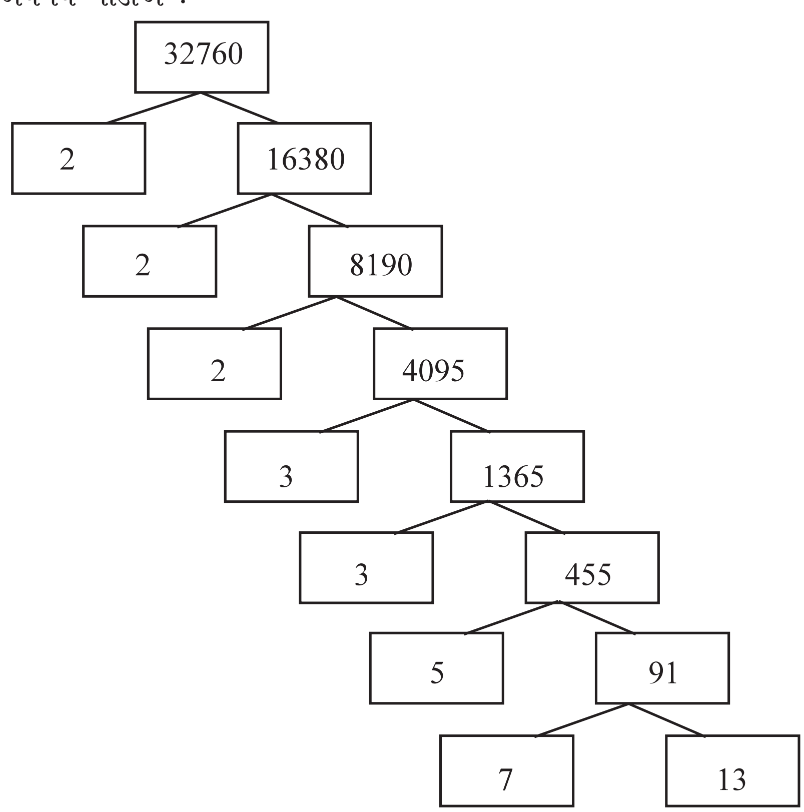
$2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 10626$

$2^3 \times 3 \times 7^3 = 8232$

$2^2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 21252$ અને આ પ્રમાણે...

હવે, ધારો કે તમારા અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના સમૂહમાં બધી જ શક્ય અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ લઈએ તો આ સમૂહનું કદ કેટલું થાય તે માટે તમારું શું અનુમાન છે? શું તેમાં માત્ર નિશ્ચિત સંખ્યામાં જ પૂર્ણાંકો હશે ? અથવા અનંત સંખ્યામાં પૂર્ણાંકો હશે? ખરેખર તો અનંત સંખ્યામાં અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ છે. આથી, જો આપણે બધી જ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓને આ રીતે સાંકળીએ તો, બધી જ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ અને બધી જ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના તમામ શક્ય ગુણાકારો લઈને આપણે અનંત સંખ્યાઓનો સમૂહ મેળવી શકીએ. પ્રશ્ન એ છે કે શું આપણે બધી જ વિભાજ્ય સંખ્યાઓ આ રીતે મેળવી શકીએ? તમે શું વિચારો છો? તમે વિચારો છો કે જે અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ઘાતનો ગુણાકાર ન હોય તેવી કોઈ વિભાજ્ય સંખ્યા કદાચ હશે? આપણે ઉત્તર આપીએ તે પહેલાં, ચાલો આપણે ધન પૂર્ણાંકોનું અવયવીકરણ કરીએ. આપણે અગાઉ જે કર્યું છે તેનાથી ઊલટી પ્રક્રિયા કરીએ.

તમને પરિચિત એવા અવયવ વૃક્ષનો આપણે ઉપયોગ કરીએ. ચાલો, આપણે કોઈ મોટી સંખ્યા લઈએ જેમકે 32,760 અને આગળ દર્શાવ્યા પ્રમાણે અવયવ પાડીએ :



આથી આપણને 32760 એ $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13$ જેવી અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ગુણાકાર રૂપે મળે છે.

આથી $32760 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$ ને અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ઘાતના ગુણાકાર રૂપે દર્શાવી શકાય. ચાલો આપણે બીજી સંખ્યા 123456789 ચકાસીએ. તેને $3^2 \times 3803 \times 3607$ તરીકે લખી શકાય. ખરેખર તો તમારે પરીક્ષણ કરવું જોઈએ કે 3803 અને 3607 અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ છે! (તમારી જાતે બીજી કેટલીક પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ માટે પરીક્ષણ કરો.) આ તથ્ય આપણને એવી ધારણા તરફ દોરી જાય છે કે દરેક વિભાજ્ય સંખ્યાને અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ઘાતના ગુણાકાર સ્વરૂપે લખી શકાય. ખરેખર તો આ વિધાન સત્ય છે. પૂર્ણાંકોના અભ્યાસ માટે તેની પાયાની નિર્ણાયક ભૂમિકા હોવાથી તેને ***અંકગણિતનું મૂળભૂત પ્રમેય*** કહે છે.

ચાલો આપણે હવે આ પ્રમેયને ઔપચારિક રીતે દર્શાવીએ.

પ્રમેય 1.1 (અંકગણિતનું મૂળભૂત પ્રમેય) : ***દરેક વિભાજ્ય સંખ્યાને, તેના અવયવોના ક્રમને અવગણીને અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ગુણાકાર તરીકે અનન્ય રીતે લખી શકાય છે.***

An equivalent version of Theorem 1.1 was probably first recorded as Proposition 14 of Book IX in ***Euclid's Elements***, before it came to be known as the ***Fundamental Theorem of Arithmetic***. However, the first correct proof was given by ***Carl Friedrich Gauss*** in his ***Disquisitiones Arithmeticae***. ***Carl Friedrich Gauss*** is often referred to as the 'Prince of Mathematicians' and is considered one of the three greatest mathematicians of all time, along with ***Archimedes*** and ***Newton***. He has made fundamental contributions to both mathematics and science.

Carl Friedrich Gauss
(C.E.1777 – C.E.1855)

અંકગણિતનું મૂળભૂત પ્રમેય દર્શાવે છે કે, દરેક વિભાજ્ય સંખ્યાનું અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ગુણાકાર સ્વરૂપે અવયવીકરણ કરી શકાય. હકીકતમાં તે કંઈક વધુ દર્શાવે છે. તે દર્શાવે છે કે આપેલ કોઈ પણ વિભાજ્ય સંખ્યાનું તેના અવયવોના ક્રમને અવગણીને અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ગુણાકાર તરીકે અનન્ય રીતે નિરૂપણ કરી શકાય.

આ પરથી આપેલ કોઈ પણ વિભાજ્ય સંખ્યાને અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ગુણાકાર તરીકે અનન્ય રીતે દર્શાવી શકાય અને તેમાં કઈ અવિભાજ્ય સંખ્યા કયા ક્રમે મળશે તે માટે આપણે ચોક્કસ ન હોઈ શકીએ. ઉદાહરણ તરીકે ગુણાકારમાં દર્શાવેલ સંખ્યા $2 \times 3 \times 5 \times 7$ અને $3 \times 5 \times 7 \times 2$ તરીકે અથવા બીજા કોઈ પણ શક્ય ક્રમમાં દર્શાવેલ આ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓને લખીએ તો તે બધા ગુણાકાર સમાન છે. આ હકીકતને નીચેના સ્વરૂપે પણ દર્શાવી શકાય.

1 થી મોટી કોઈ પણ પ્રાકૃતિક સંખ્યાનું અવિભાજ્ય અવયવોમાં અવયવીકરણ તેના ક્રમને અવગણીએ તો અનન્ય હોય છે.

વ્યાપક રીતે, આપેલ વિભાજ્ય સંખ્યા x ને આપણે $x = p_1 p_2 \dots p_n$ તરીકે લખી શકીએ, જ્યાં $p_1, p_2, \dots, p_n$ એ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ છે અને ચડતા ક્રમમાં લખેલી છે, એટલે કે $p_1 \le p_2 \le \dots \le p_n$. જો આપણે સમાન અવિભાજ્ય સંખ્યાઓને ગુણીએ, તો આપણને અવિભાજ્ય સંખ્યાના ઘાત મળે. ઉદાહરણ તરીકે,

$$32760 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$$

એક વખત આપણે નક્કી કરીએ કે, અવિભાજ્ય અવયવો ચડતા ક્રમમાં હશે તો આપણું અવયવીકરણ અનન્ય હશે.

ગણિતમાં અને બીજા ક્ષેત્રમાં અંકગણિતના મૂળભૂત પ્રમેયના અનેક ઉપયોગો છે. ચાલો આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 1 : કોઈક ધન પૂર્ણાંક n માટે 4^n નો છેલ્લો અંક શૂન્ય હશે કે કેમ તે નિર્ણય કરો.

ઉકેલ : જો કોઈ પણ ધન પૂર્ણાંક n માટે સંખ્યા 4^n નો છેલ્લો અંક શૂન્ય હોય, તો તે 5 વડે વિભાજ્ય હોય. આથી 4^n ના અવિભાજ્ય અવયવોમાં 5 હોવો જોઈએ. આ શક્ય નથી, કારણ કે $4^n = (2)^{2n}$; આથી 4^n ના અવયવીકરણમાં એક જ અવિભાજ્ય પૂર્ણાંક 2 મળે. આથી અંકગણિતના મૂળભૂત પ્રમેયની અનન્યતા શરત અનુસાર નક્કી થાય છે કે 4^n ના અવયવીકરણમાં 2 સિવાય બીજી કોઈ અવિભાજ્ય સંખ્યા નથી. માટે કોઈ પ્રાકૃતિક સંખ્યા n એવી ન મળે કે જેના માટે 4^n નો અંતિમ અંક શૂન્ય હોય.

અગાઉનાં ધોરણોમાં તમે અંકગણિતના મૂળભૂત પ્રમેયનો સ્પષ્ટ રીતે ઉલ્લેખ કર્યા વગર બે ધન પૂર્ણાંકોના ***ગુ.સા.અ. અને લ.સા.અ. (લઘુતમ સામાન્ય અવયવી, LCM, Least Common Multiple)*** શોધતાં શીખી ગયાં છો. આ પદ્ધતિ ***અવિભાજ્ય અવયવીકરણ પદ્ધતિ*** તરીકે પણ ઓળખાય છે. ચાલો આપણે આ પદ્ધતિને ઉદાહરણ દ્વારા યાદ કરીએ.

ઉદાહરણ 2 : અવિભાજ્ય અવયવીકરણ પદ્ધતિથી 6 અને 20 નો ગુ.સા.અ. અને લ.સા.અ. શોધો.

ઉકેલ : આપણી પાસે $6 = 2^1 \times 3^1$ અને $20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5^1$ હોવાથી,

અગાઉનાં ધોરણોમાં મેળવ્યું છે તેમ તમે ગુ.સા.અ. (6, 20) = 2 અને લ.સા.અ. $(6, 20) = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$ મેળવી શકો.

જુઓ કે, ગુ.સા.અ. (6, 20) $= 2^1 =$ **આપેલી સંખ્યાઓમાં રહેલા સામાન્ય અવિભાજ્ય અવયવના નાનામાં નાના ઘાતાંકવાળાં પદોનો ગુણાકાર**

લ.સા.અ. (6, 20) $= 2^2 \times 3^1 \times 5^1 =$ **આપેલી સંખ્યામાં રહેલા તમામ અવિભાજ્ય અવયવોના મહત્તમ ઘાતાંકવાળાં પદોનો ગુણાકાર**

ઉપરના ઉદાહરણમાં તમે જોયું હશે કે ગુ.સા.અ. (6, 20) × લ.સા.અ. (6, 20) = 6 × 20.

ખરેખર તો આપણે ચકાસી શકીએ કે કોઈ પણ બે ધન પૂર્ણાંકો, a અને b માટે

ગુ.સા.અ. (a, b) × લ.સા.અ. $(a, b) = a \times b$ થાય.

જો બે ધન પૂર્ણાંકોનો ગુ.સા.અ. આપેલ હોય તો આપણે આ પરિણામનો ઉપયોગ કરી તેમનો લ.સા.અ. શોધી શકીએ.

ઉદાહરણ 3 : 96 અને 404 નો ગુ.સા.અ. અવિભાજ્ય અવયવની રીતે મેળવો અને તે પરથી તેનો લ.સા.અ. શોધો.

ઉકેલ : 96 અને 404 નું અવિભાજ્યોમાં અવયવીકરણ $96 = 2^5 \times 3$, $404 = 2^2 \times 101$ મળશે.

આથી આ બંને પૂર્ણાંકોનો ગુ.સા.અ. $= 2^2 = 4$.

વળી, લ.સા.અ. (96, 404) $= \dfrac{96 \times 404}{\text{ગુ.સા.અ. } (96, 404)} = \dfrac{96 \times 404}{4} = 9696$

ઉદાહરણ 4 : અવિભાજ્ય અવયવોની રીતથી 6, 72 અને 120 નો ગુ.સા.અ. અને લ.સા.અ. શોધો.

ઉકેલ : આપણી પાસે,

$$6 = 2 \times 3,\ 72 = 2^3 \times 3^2,\ 120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

અહીં, સામાન્ય અવયવો અનુક્રમે 2 અને 3 ની નાનામાં નાની ઘાતવાળા પદ 2^1 અને 3^1 છે.

આથી ગુ.સા.અ. (6, 72, 120) = $2^1 \times 3^1 = 2 \times 3 = 6$

આપેલી ત્રણેય સંખ્યાઓમાં 2^3, 3^2 અને 5^1 એ અવિભાજ્ય અવયવો 2, 3 અને 5 ની મોટામાં મોટી ઘાતવાળા પદ છે.

આથી, લ.સા.અ. (6, 72, 120) = $2^3 \times 3^2 \times 5^1 = 360$

નોંધ : જુઓ કે, $6 \times 72 \times 120 \neq$ ગુ.સા.અ. (6, 72, 120) $\times$ લ.સા.અ. (6, 72, 120).

આથી ત્રણ સંખ્યાઓનો ગુણાકાર તેમના ગુ.સા.અ. અને લ.સા.અ.ના ગુણાકારને સમાન ન પણ હોય.

સ્વાધ્યાય 1.1

1. નીચેની દરેક સંખ્યાને તેના અવિભાજ્ય અવયવોના ગુણાકાર સ્વરૂપે દર્શાવો :

(i) 140 (ii) 156 (iii) 3825 (iv) 5005 (v) 7429

2. નીચે આપેલ પૂર્ણાંકોની જોડીના ગુ.સા.અ. અને લ.સા.અ. શોધો અને

ગુ.સા.અ. $\times$ લ.સા.અ. = બંને પૂર્ણાંકોનો ગુણાકાર થાય છે તેમ ચકાસો.

(i) 26 અને 91 (ii) 510 અને 92 (iii) 336 અને 54

3. નીચે આપેલ પૂર્ણાંકોના અવિભાજ્ય અવયવની રીતે ગુ.સા.અ. અને લ.સા.અ. શોધો :

(i) 12, 15 અને 21 (ii) 17, 23 અને 29 (iii) 8, 9 અને 25

4. જો ગુ.સા.અ. (306, 657) = 9 આપેલ હોય, તો લ.સા.અ. (306, 657) શોધો.

5. કોઈક પ્રાકૃતિક સંખ્યા n માટે 6^n નો અંતિમ અંક શૂન્ય થાય કે નહિ તે ચકાસો.

6. સમજાવો કે $7 \times 11 \times 13 + 13$ અને $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$ એ શા માટે વિભાજ્ય સંખ્યાઓ છે ?

7. એક રમતના મેદાનમાં વર્તુળાકાર માર્ગ છે. સોનિયાને તેનું એક પરિભ્રમણ પૂર્ણ કરતાં 18 મિનિટ લાગે છે, જ્યારે રવિને તેનું એક પરિભ્રમણ પૂર્ણ કરતાં 12 મિનિટ લાગે છે. ધારો કે બંને એક જ સમયે, એક જ બિંદુએથી, એક જ દિશામાં પરિભ્રમણ કરવાનું પ્રારંભ કરે છે, તો કેટલી મિનિટ બાદ બંને ફરી પ્રારંભબિંદુ પર ભેગા થાય ?

1.3 અસંમેય સંખ્યાઓનું પુનરાવર્તન

K3X2J6

ધોરણ IX માં અસંમેય સંખ્યાઓ અને તેના ઘણા બધા ગુણધર્મોનો પરિચય તમને કરાવવામાં આવ્યો હતો. તમે તેના અસ્તિત્વનો અને કેવી રીતે સંમેય અને અસંમેય સંખ્યાઓ સાથે મળીને વાસ્તવિક સંખ્યાઓ બનાવે છે તેનો અભ્યાસ કર્યો હતો. તમે અસંમેય સંખ્યાઓને સંખ્યારેખા પર દર્શાવતાં પણ શીખ્યા છો. જો કે આપણે તે સંખ્યાઓ અસંમેય સંખ્યાઓ છે તેમ સાબિત નહોતું કર્યું. આ વિભાગમાં, આપણે $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ અને $\sqrt{5}$ અને વ્યાપક રીતે અવિભાજ્ય સંખ્યા p માટે $\sqrt{p}$ અસંમેય છે તે સાબિત કરીશું. અંકગણિતના મૂળભૂત પ્રમેય અને અન્ય પ્રમેયોનો ઉપયોગ કરી આપણે આ પરિણામ પ્રાપ્ત કરીશું.

યાદ કરો કે જે સંખ્યાને પૂર્ણાંક p તથા શૂન્યેતર પૂર્ણાંક q માટે $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં લખી ન શકાય તે સંખ્યા 's' ને અસંમેય સંખ્યા કહેવાય છે. જેનાથી આપણે પરિચિત છીએ, તેવા $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{15}$, π, $-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, 0.10110111011110... જેવી અસંમેય સંખ્યાઓનાં ઉદાહરણો મળે.

આપણે $\sqrt{2}$ અસંમેય છે તેમ સાબિત કરીએ તે પહેલાં આપણને આ પછીના પૃષ્ઠ પર દર્શાવેલ પ્રમેય 1.2ની જરૂર પડશે. તેની સાબિતી અંકગણિતના મૂળભૂત પ્રમેય પર આધારિત છે.

પ્રમેય 1.2 : ધારો કે p એક અવિભાજ્ય સંખ્યા છે. ધન પૂર્ણાંક a માટે, a^2 એ p વડે વિભાજ્ય હોય, તો a પણ p વડે વિભાજ્ય હોય.

***સાબિતી :** ધારો કે a નું અવિભાજ્ય અવયવોમાં અવયવીકરણ નીચે પ્રમાણે છે :

$a = p_1 p_2 \dots p_n$, જ્યાં $p_1, p_2, \dots, p_n$ એ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ છે. આવશ્યક નથી કે તે $p_1, p_2, \dots, p_n$ ભિન્ન સંખ્યાઓ જ હોય.

માટે, $a^2 = (p_1 p_2 \dots p_n)(p_1 p_2 \dots p_n) = p_1^2 p_2^2 \dots p_n^2$

હવે આપણને આપેલ છે કે a^2 એ p વડે વિભાજ્ય છે. માટે અંકગણિતના મૂળભૂત પ્રમેય પરથી કહી શકાય કે p એ a^2 નો એક અવિભાજ્ય અવયવ હોય. અંકગણિતના મૂળભૂત પ્રમેયના અનન્યતાની શરત પરથી કહી શકાય કે a^2 ના અવિભાજ્ય અવયવો માત્ર $p_1, p_2, \dots, p_n$ છે. આથી p એ $p_1, p_2, \dots, p_n$ પૈકીનો એક હોય. હવે $a = p_1 p_2 \dots p_n$, હોવાથી p એ a નો અવયવ પણ છે.

હવે આપણે $\sqrt{2}$ અસંમેય છે તેની સાબિતી આપવા માટે તૈયાર છીએ.

આ સાબિતી 'અનિષ્ટાપત્તિ'ની પ્રયુક્તિ પર આધારિત છે. (આ પ્રયુક્તિની કેટલીક ચર્ચા પરિશિષ્ટ A1માં વિગતે કરેલ છે.)

પ્રમેય 1.3 : $\sqrt{2}$ એ અસંમેય છે.

સાબિતી : આથી ઊલટું, ધારો કે $\sqrt{2}$ સંમેય છે.

આથી આપણે $\sqrt{2} = \frac{r}{s}$ થાય તેવા પૂર્ણાંકો r અને s $(s \neq 0)$ મેળવી શકીએ.

જો r અને s ને 1 સિવાય સામાન્ય અવયવ હોય, તો તે તમામ સામાન્ય અવયવ વડે r તથા s ને ભાગતાં $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ મળે.

આપણે a અને b સહઅવિભાજ્ય લઈ શકીએ. આથી, $b\sqrt{2} = a$.

આપણે બંને બાજુ વર્ગ કરી પુનઃગોઠવણ કરીએ તો, $2b^2 = a^2$ મળે. માટે a^2 એ 2 વડે વિભાજ્ય છે.

હવે, પ્રમેય 1.2 અનુસાર, a એ 2 વડે વિભાજ્ય છે.

આથી, આપણે કોઈ પૂર્ણાંક c માટે $a = 2c$ લખી શકીએ.

a ની કિંમત મૂકતાં આપણને $2b^2 = 4c^2$ મળે. આથી, $b^2 = 2c^2$ થાય.

આનો અર્થ એ થાય કે b^2 એ 2 વડે વિભાજ્ય છે. આથી, b પણ 2 વડે વિભાજ્ય છે.

(ફરીથી પ્રમેય 1.2, $p = 2$ સાથે ઉપયોગમાં લેતાં)

માટે, a તથા b ને ઓછામાં ઓછો એક સામાન્ય અવયવ 2 છે.

આથી, a અને b ને 1 સિવાય કોઈ જ સામાન્ય અવયવ નથી તે ધારણાનો વિરોધાભાસ મળે.

$\sqrt{2}$ સંમેય છે તે ધારણા અસત્ય હોવાથી આ વિરોધાભાસ ઉદ્ભવ્યો.

આથી, કહી શકાય કે $\sqrt{2}$ અસંમેય છે.

*પરીક્ષાના હેતુથી આપેલ નથી.

ઉદાહરણ 5 : સાબિત કરો કે $\sqrt{3}$ એ અસંમેય છે.

ઉકેલ : આથી ઊલટું, ધારો કે $\sqrt{3}$ એ સંમેય છે.

આથી આપણે શૂન્યેતર પૂર્ણાંક a અને b શોધી શકીએ કે જેથી $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ થાય.

ધારો કે a અને b ને 1 સિવાય કોઈ સામાન્ય અવયવ છે. આથી આપણે તેને સામાન્ય અવયવ વડે ભાગીએ અને વ્યાપકતા ગુમાવ્યા સિવાય માની લઈએ કે, a અને b સહઅવિભાજ્ય છે.

આથી, $b\sqrt{3} = a$.

બંને બાજુ વર્ગ કરી પુનઃગોઠવણ કરતાં આપણને $3b^2 = a^2$ મળે.

માટે a^2 એ 3 વડે વિભાજ્ય છે. આથી પ્રમેય 1.2 અનુસાર a પણ 3 વડે વિભાજ્ય છે.

આથી, આપણે કોઈ પૂર્ણાંક c માટે $a = 3c$ લખી શકીએ.

a ની કિંમત મૂકવાથી $3b^2 = 9c^2$. આથી, આપણને $b^2 = 3c^2$ મળે.

આનો અર્થ એ થયો કે b^2 ને 3 વડે ભાગી શકાય અને તેથી b ને પણ 3 વડે ભાગી શકાય.

($p = 3$ માટે પ્રમેય 1.2નો ઉપયોગ કરતાં)

આથી, a તથા b ને ઓછામાં ઓછો એક સામાન્ય અવયવ 3 છે.

માટે, a અને b સહઅવિભાજ્ય હોવાના વિધાનનો વિરોધાભાસ ઊભો થયો.

આ વિરોધાભાસ ઉદ્ભવ્યો કારણકે આપણે $\sqrt{3}$ સંમેય છે તેવી કરેલ ધારણા અસત્ય છે.

માટે, આપણે કહી શકીએ કે $\sqrt{3}$ એ અસંમેય છે.

ધોરણ IX માં આપણે દર્શાવ્યું હતું કે,

- ***સંમેય અને અસંમેય સંખ્યાઓના સરવાળા કે તફાવત અસંમેય હોય છે, અને***
- ***શૂન્યેતર સંમેય સંખ્યા અને અસંમેય સંખ્યાઓના ગુણાકાર અને ભાગાકાર અસંમેય હોય છે.***

આપણે કેટલાક ખાસ વિકલ્પોમાં આ પરિણામ સાબિત કરીએ.

ઉદાહરણ 6 : દર્શાવો કે $5 - \sqrt{3}$ અસંમેય છે.

ઉકેલ : આથી ઊલટું ધારો કે $5 - \sqrt{3}$ એ સંમેય છે.

આથી આપણે સહઅવિભાજ્ય પૂર્ણાંક a અને પૂર્ણાંક b શોધી શકીએ કે જેથી $5 - \sqrt{3} = \frac{a}{b}$ થાય ($b \neq 0$).

માટે $5 - \frac{a}{b} = \sqrt{3}$.

આ સમીકરણની પુનઃગોઠવણી કરતાં આપણને $\sqrt{3} = 5 - \frac{a}{b} = \frac{5b - a}{b}$ મળે. a અને b પૂર્ણાંકો હોવાથી $5 - \frac{a}{b}$ સંમેય મળે અને આથી $\sqrt{3}$ પણ સંમેય થાય.

આથી, $\sqrt{3}$ અસંમેય છે તે તથ્યનો વિરોધાભાસ ઉત્પન્ન થાય.

આ વિરોધાભાસ ઉદ્ભવ્યો, કારણ કે આપણે $5 - \sqrt{3}$ સંમેય છે તેવી કરેલ ધારણા અસત્ય હતી.

માટે, આપણે કહી શકીએ કે $5 - \sqrt{3}$ અસંમેય છે.

ઉદાહરણ 7 : દર્શાવો કે $3\sqrt{2}$ અસંમેય છે.

ઉકેલ : આથી ઊલટું ધારો કે $3\sqrt{2}$ સંમેય છે.

આથી સહઅવિભાજ્ય પૂર્ણાંક a અને પૂર્ણાંક b શોધી શકીએ કે જેથી $3\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$. પુનઃગોઠવણ કરતાં આપણને $\sqrt{2} = \frac{a}{3b}$ મળે.

3, a અને b પૂર્ણાંકો હોવાથી, $\frac{a}{3b}$ સંમેય છે અને આથી $\sqrt{2}$ પણ સંમેય છે. પરંતુ $\sqrt{2}$ અસંમેય છે. આથી તે તથ્યનો વિરોધાભાસ ઊભો થાય.

આથી આપણે કહી શકીએ કે $3\sqrt{2}$ અસંમેય છે.

સ્વાધ્યાય 1.2

1. સાબિત કરો કે, $\sqrt{5}$ અસંમેય છે.
2. સાબિત કરો કે, $3 + 2\sqrt{5}$ અસંમેય છે.
3. નીચે દર્શાવેલ સંખ્યા અસંમેય છે તેમ સાબિત કરો :

   (i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $7\sqrt{5}$ (iii) $6 + \sqrt{2}$

1.4 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં તમે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. અંકગણિતનું મૂળભૂત પ્રમેય : દરેક વિભાજ્ય સંખ્યાને તેના અવયવોના ક્રમને અવગણીને અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ગુણાકાર તરીકે અનન્ય રીતે દર્શાવી શકાય છે.
2. જો p અવિભાજ્ય હોય અને a^2 એ p વડે વિભાજ્ય હોય, તો a પણ p વડે વિભાજ્ય છે.
3. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ અસંમેય છે તે સાબિત કરવું.

વાચકને નોંધ

તમે જોયું છે કે,

ધન પૂર્ણાંકો p, q, r માટે ગુ.સા.અ. $(p, q, r) \times$ લ.સા.અ. $(p, q, r) \neq p \times q \times r$, (ઉદાહરણ 4)

આમ છતાં, ત્રણ સંખ્યાઓ p, q, r માટે નીચેનાં પરિણામો સત્ય છે :

$$\text{લ.સા.અ.}\ (p, q, r) = \frac{p \cdot q \cdot r \times \text{ગુ.સા.અ.}\ (p,q,r)}{\text{ગુ.સા.અ.}\ (p,q) \times \text{ગુ.સા.અ.}\ (q,r) \times \text{ગુ.સા.અ.}\ (p,r)}$$

$$\text{ગુ.સા.અ.}\ (p, q, r) = \frac{p \cdot q \cdot r \times \text{લ.સા.અ.}\ (p,q,r)}{\text{લ.સા.અ.}\ (p,q) \times \text{લ.સા.અ.}\ (q,r) \times \text{લ.સા.અ.}\ (p,r)}$$