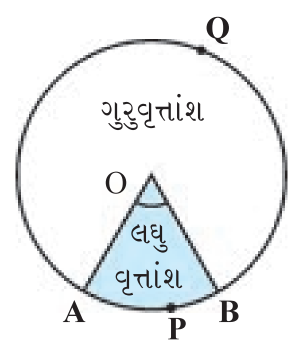
M9R4B4

વર્તુળ સંબંધિત ક્ષેત્રફળ 11

11.1 વર્તુળના વૃત્તાંશ અને વૃત્તખંડનું ક્ષેત્રફળ

A3K7H7

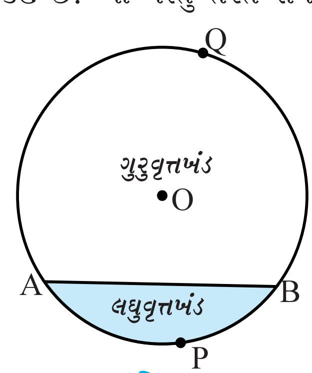
વર્તુળાકાર પ્રદેશની બે ત્રિજ્યાઓ અને તેમને અનુરૂપ ચાપ વચ્ચે ઘેરાયેલા પ્રદેશ (અથવા ભાગ)ને વર્તુળનો *વૃત્તાંશ* કહે છે અને જીવા તથા તેને અનુરૂપ ચાપની વચ્ચે ઘેરાયેલા વર્તુળાકાર પ્રદેશના અંશ (અથવા ભાગ) ને વર્તુળનો *વૃત્તખંડ* કહે છે.



આકૃતિ 11.1

આમ, આકૃતિ 11.1 માં O કેન્દ્રવાળા વર્તુળનો રંગીન પ્રદેશ OAPB એ ***વૃત્તાંશ*** છે. $\angle$AOBને ***વૃત્તાંશનો ખૂણો*** કહે છે. આ આકૃતિમાં નોંધીશું કે, રંગીન ન હોય તેવો પ્રદેશ OAQB એ પણ વર્તુળનું વૃત્તાંશ છે. OAPB ને ***લઘુવૃત્તાંશ (minor sector)*** કહે છે અને OAQB ને ***ગુરુવૃત્તાંશ (major sector)*** કહે છે. આ વસ્તુ તરત સમજી શકાય તેમ છે. તમે એ પણ જોઈ શકશો કે, **ગુરુવૃત્તાંશનો ખૂણો 360° – $\angle$AOB** છે.

હવે, આકૃતિ 11.2 તરફ જુઓ. તેમાં O કેન્દ્રવાળા વર્તુળની જીવા AB છે. આથી રંગીન પ્રદેશ APB વર્તુળનો ***વૃત્તખંડ (segment)*** છે. તમે એ પણ નોંધી શકશો કે, જીવા AB થી વર્તુળનો છાયાંકિત ન હોય તેવો બીજો વૃત્તખંડ AQB બને છે. દેખીતી રીતે APB ને ***લઘુવૃત્તખંડ (minor segment)*** કહે છે અને AQB ને ***ગુરુવૃત્તખંડ (major segment)*** કહે છે.

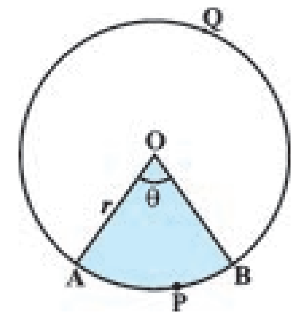


આકૃતિ 11.2

નોંધ : *જો દર્શાવવામાં આવ્યું ન હોય, તો આપણે 'વૃત્તખંડ' અને 'વૃત્તાંશ' લખીએ, ત્યારે આપણે તેનો અર્થ અનુક્રમે 'લઘુવૃત્તખંડ' અને 'લઘુવૃત્તાંશ' કરીશું.*

હવે આ જ્ઞાન સાથે, ચાલો આપણે તેમના ક્ષેત્રફળની ગણતરી માટે કેટલાંક સંબંધ (સૂત્રો) શોધવાનો પ્રયાસ કરીએ.

ધારો કે, OAPB એ O કેન્દ્રવાળા અને r ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનું વૃત્તાંશ છે. (જુઓ આકૃતિ 11.3). ધારો કે, $\angle AOB$નું અંશ માપ θ છે. તમે જાણો છો કે વર્તુળ (વર્તુળાકાર પ્રદેશ અથવા તાસક)નું ક્ષેત્રફળ πr^2 છે.



આકૃતિ 11.3

આપણે આ વર્તુળાકાર પ્રદેશને કેન્દ્ર O આગળ 360° (અર્થાત્ અંશમાપ 360)નો ખૂણો બનાવતા વૃત્તાંશ તરીકે લઈએ. હવે એકમ પદ્ધતિ અપનાવતાં, આપણે નીચે પ્રમાણે વૃત્તાંશ OAPB ના ક્ષેત્રફળ સુધી પહોંચી શકીશું :

જ્યારે કેન્દ્ર આગળ 360 અંશ માપવાળો ખૂણો હોય, ત્યારે વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ $= \pi r^2$

આથી, જ્યારે કેન્દ્ર આગળ 1 અંશ માપવાળો ખૂણો હોય, ત્યારે વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{\pi r^2}{360}$

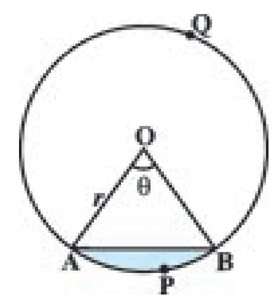
તેથી, જ્યારે કેન્દ્ર આગળ θ અંશ માપવાળો ખૂણો હોય, ત્યારે વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{\pi r^2}{360} \times \theta = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

આમ, આપણને વર્તુળના વૃત્તાંશના ક્ષેત્રફળ માટે નીચેનો સંબંધ (અથવા સૂત્ર) મળે છે :

θ ખૂણાવાળા વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

જ્યાં r એ વર્તુળની ત્રિજ્યા અને θ એ અંશમાં વૃત્તાંશનો ખૂણો છે.

હવે, સ્વાભાવિક એક પ્રશ્ન ઉદ્ભવે : શું આપણે આ વૃત્તાંશને અનુરૂપ ચાપ APB ની લંબાઈ શોધી શકીએ? હા, ફરીથી આપણે એકમની પદ્ધતિ અપનાવતાં અને વર્તુળની પૂરેપૂરી લંબાઈ (360° ના ખૂણાથી) $2\pi r$ લેતાં, આપણે જરૂરી ચાપ APB ની લંબાઈ $\frac{\theta}{360} \times 2\pi r$ મેળવી શકીએ.



આકૃતિ 11.4

આથી, θ ખૂણાવાળા વૃત્તાંશના ચાપની લંબાઈ $= \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$

ચાલો, હવે આપણે O કેન્દ્રવાળા અને r ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના વૃત્તખંડ APB (જુઓ આકૃતિ 11.4) ના ક્ષેત્રફળનો વિકલ્પ લઈએ. તમે જોઈ શકશો કે,

વૃત્તખંડ APB નું ક્ષેત્રફળ = વૃત્તાંશ OAPB નું ક્ષેત્રફળ – ΔOAB નું ક્ષેત્રફળ

$= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$ – ΔOAB નું ક્ષેત્રફળ

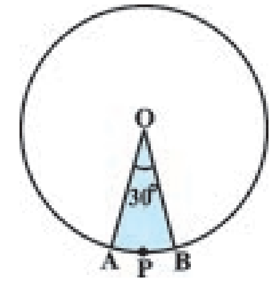
નોંધ : તમે અનુક્રમે આકૃતિ 11.3 અને આકૃતિ 11.4નું નિરીક્ષણ કરી શકશો કે,

ગુરુવૃત્તાંશ OAQB નું ક્ષેત્રફળ = πr^2 – લઘુવૃત્તાંશ OAPB નું ક્ષેત્રફળ

અને ગુરુવૃત્તખંડ AQB નું ક્ષેત્રફળ = πr^2 – લઘુવૃત્તખંડ APB નું ક્ષેત્રફળ

ચાલો, હવે આપણે આ સંકલ્પના સમજવા કેટલાંક ઉદાહરણ જોઈએ :

ઉદાહરણ 1 : 4 સેમી ત્રિજ્યાવાળા અને કેન્દ્ર આગળ 30° નો ખૂણો બનાવતા વર્તુળના વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ શોધો. ગુરુવૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ પણ શોધો. ($\pi = 3.14$ લો).



આકૃતિ 11.5

ઉકેલ : આપેલું વૃત્તાંશ OAPB છે. (જુઓ આકૃતિ 11.5).

વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

$= \frac{30}{360} \times 3.14 \times 4 \times 4$ સેમી^{2}

$= \frac{12.56}{3}$ સેમી^{2} = 4.19 સેમી^{2} (આસન્ન મૂલ્ય)

અનુરૂપ ગુરુવૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ $= \pi r^2 -$ લઘુવૃત્તાંશ OAPB નું ક્ષેત્રફળ

$= (3.14 \times 16 - 4.19)$ સેમી^{2}

= 46.05 સેમી^{2} = 46.1 સેમી^{2} (આસન્ન મૂલ્ય)

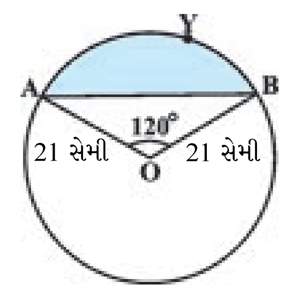
વૈકલ્પિક રીતે, ગુરુવૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{(360 - \theta)}{360} \times \pi r^2$

$= \left(\frac{360 - 30}{360}\right) \times 3.14 \times 16$ સેમી^{2}

$= \frac{330}{360} \times 3.14 \times 16$ સેમી^{2} = 46.05 સેમી^{2}

= 46.1 સેમી^{2} (આસન્ન મૂલ્ય)

ઉદાહરણ 2 : જો વર્તુળની ત્રિજ્યા 21 સેમી અને $\angle AOB = 120°$ હોય, તો આકૃતિ 11.6 માં દર્શાવેલ વૃત્તખંડ AYB નું ક્ષેત્રફળ શોધો. ($\pi = \frac{22}{7}$ લો.)



આકૃતિ 11.6

ઉકેલ : વૃત્તખંડ AYB નું ક્ષેત્રફળ = વૃત્તાંશ OAYB નું ક્ષેત્રફળ − Δ OAB નું ક્ષેત્રફળ (1)

હવે, વૃત્તાંશ OAYB નું ક્ષેત્રફળ

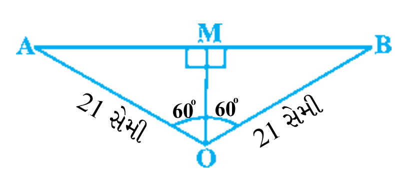
$= \frac{120}{360} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$ સેમી^{2}

= 462 સેમી^{2} (2)

ΔOAB નું ક્ષેત્રફળ શોધવા માટે, આકૃતિ 11.7 માં બતાવ્યા પ્રમાણે $OM \perp AB$ દોરો.

આપણે નોંધીએ કે, OA = OB. આથી, કાકબા એકરૂપતાને આધારે $\Delta AMO \cong \Delta BMO$

આથી, M એ AB નું મધ્યબિંદુ છે અને $\angle AOM = \angle BOM = \frac{1}{2} \times 120° = 60°$



આકૃતિ 11.7

OM = x સેમી લેતાં,

ΔOMA પરથી, $\frac{OM}{OA} = \cos 60°$

અથવા, $\frac{x}{21} = \frac{1}{2}$ $\left(\cos 60° = \frac{1}{2}\right)$

અથવા, $x = \frac{21}{2}$

તેથી, OM $= \frac{21}{2}$ સેમી

વળી, $\frac{AM}{OA} = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

તેથી, $AM = \frac{21\sqrt{3}}{2}$ સેમી

માટે, $AB = 2AM = \frac{2 \times 21\sqrt{3}}{2}$ સેમી $= 21\sqrt{3}$ સેમી

તેથી, Δ OAB નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2} AB \times OM$

$= \frac{1}{2} \times 21\sqrt{3} \times \frac{21}{2}$ સેમી^{2}

$= \frac{441}{4}\sqrt{3}$ સેમી^{2} (3)

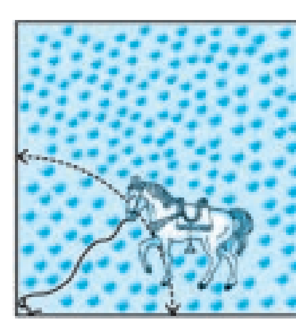
માટે, વૃત્તખંડ AYB નું ક્ષેત્રફળ $= (462 - \frac{441}{4}\sqrt{3})$ સેમી^{2} [(1), (2) અને (3) પરથી]

$= \frac{21}{4}(88 - 21\sqrt{3})$ સેમી^{2}

સ્વાધ્યાય 11.1

ઉલ્લેખ કર્યો ન હોય, તો $\pi = \frac{22}{7}$ લો.

1. જો 6 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના વૃત્તાંશ દ્વારા કેન્દ્ર આગળ બનતો ખૂણો 60° હોય, તો વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
2. 22 સેમી પરિઘવાળા વર્તુળના ચતુર્થાંશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
3. એક ઘડિયાળના મિનિટકાંટાની લંબાઈ 14 સેમી છે. મિનિટકાંટો 5 મિનિટમાં પરિભ્રમણ કરીને જે ક્ષેત્રફળ રચે તે શોધો.
4. 10 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળની જીવા કેન્દ્ર આગળ કાટખૂણો આંતરે છે. તેને અનુરૂપ (i) લઘુવૃત્તખંડ (ii) ગુરુવૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ શોધો. ($\pi = 3.14$ લો).
5. 21 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનું એક ચાપ કેન્દ્ર આગળ 60° નો ખૂણો આંતરે છે. તેને અનુરૂપ (i) ચાપની લંબાઈ (ii) ચાપ વડે બનતા વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ (iii) અનુરૂપ જીવા વડે બનતા વૃત્તખંડનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
6. 15 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળની જીવા કેન્દ્ર આગળ 60° નો ખૂણો આંતરે છે. તેને અનુરૂપ લઘુવૃત્તખંડ અને ગુરુવૃત્તખંડનું ક્ષેત્રફળ શોધો. ($\pi = 3.14$ અને $\sqrt{3} = 1.73$ લો).
7. 12 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળની જીવા કેન્દ્ર આગળ 120° નો ખૂણો આંતરે છે. તેને અનુરૂપ વૃત્તખંડનું ક્ષેત્રફળ શોધો. ($\pi = 3.14$ અને $\sqrt{3} = 1.73$ લો).
8. 15 મી બાજુવાળા ચોરસ આકારના ઘાસના ખેતરના એક ખૂણે ઘોડાને 5 મી લાંબા દોરડાથી ખીલા સાથે બાંધેલો છે. (જુઓ આકૃતિ 11.8).
   (i) ઘોડો ખેતરના જેટલા ભાગમાં ચરી શકે તેનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
   (ii) દોરડું 5 મી ને બદલે 10 મી લાંબું રાખ્યું હોત, તો ચરવાના ક્ષેત્રફળમાં થતો વધારો શોધો. ($\pi = 3.14$ લો).

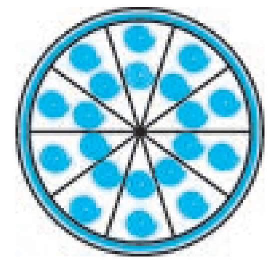


આકૃતિ 11.8

9. ચાંદીના તારથી 35 મિમી વ્યાસવાળું વર્તુળ આકારનું એક બક્કલ જેવું ઘરેણું બનાવ્યું છે. આકૃતિ 11.9 માં બતાવ્યા પ્રમાણે વર્તુળને 10 સમાન વૃત્તાંશમાં વિભાજિત કરે તેવા 5 વ્યાસ બનાવવામાં પણ તારનો ઉપયોગ કર્યો છે.

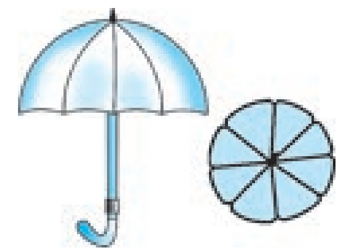
(i) જરૂરી ચાંદીના તારની કુલ લંબાઈ શોધો.

(ii) ઘરેણાના દરેક વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



આકૃતિ 11.9

10. એક છત્રીમાં સમાન અંતરે 8 સળિયા આવેલાં છે. (જુઓ આકૃતિ 11.10). છત્રીને 45 સેમી ત્રિજ્યાવાળું સમતલીય વર્તુળ ધારી, છત્રીના બે ક્રમિક સળિયા વચ્ચેના ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

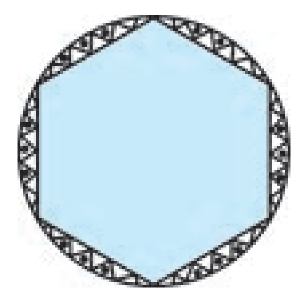


આકૃતિ 11.10

11. એક ગાડીને એકબીજા પર આચ્છાદિત ન થાય તેવાં બે વાઈપર છે. દરેક વાઈપરને 115° ના ખૂણા જેટલી સફાઈ કરતી 25 સેમી લંબાઈની બ્લેડ છે. પ્રત્યેક વખતે વાઈપરથી સાફ થતા વિસ્તારનું કુલ ક્ષેત્રફળ શોધો.

12. પાણીની નીચેના ખડકો વિશે જહાજને ચેતવણી આપવા માટે, એક દીવાદાંડી 16.5 કિમી અંતર સુધી 80° ના ખૂણાના વૃત્તાંશ પર લાલ રંગનો પ્રકાશ પાથરે છે. સમુદ્રના જેટલા ક્ષેત્રફળ પર જહાજને ચેતવણી અપાતી હોય તે શોધો. (π = 3.14 લો).

13. આકૃતિ 11.11 માં બતાવ્યા પ્રમાણે એક મેજ પર છ ભાતવાળું એક વર્તુળાકાર આવરણ પાથરેલું છે. જો આવરણની ત્રિજ્યા 28 સેમી હોય, તો ₹ 0.35 પ્રતિ સેમી^{2} ના દરે ડિઝાઈન બનાવવાનો ખર્ચ શોધો. ($\sqrt{3}$ = 1.7 લો).



આકૃતિ 11.11

14. નીચેનામાં સાચા જવાબ આગળ નિશાની કરો :

R ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનો વૃત્તાંશ ખૂણો $p°$ હોય, તો વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ .... થાય.

(A) $\frac{p}{180} \times 2\pi R$ (B) $\frac{p}{180} \times \pi R^2$ (C) $\frac{p}{360} \times 2\pi R$ (D) $\frac{p}{720} \times 2\pi R^2$

11.2 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં તમે નીચેના મુદ્દાઓ શીખ્યા :

1. r ત્રિજ્યાવાળા અને θ માપનો ખૂણો બનાવતા વર્તુળના વૃત્તાંશના ચાપની લંબાઈ $\frac{\theta}{360} \times 2\pi r$ છે.

2. r ત્રિજ્યાવાળા અને θ માપનો ખૂણો બનાવતા વર્તુળના વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$ છે.

3. વર્તુળના વૃત્તખંડનું ક્ષેત્રફળ = અનુરૂપ વૃત્તાંશનું ક્ષેત્રફળ – અનુરૂપ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ

W1B2E2