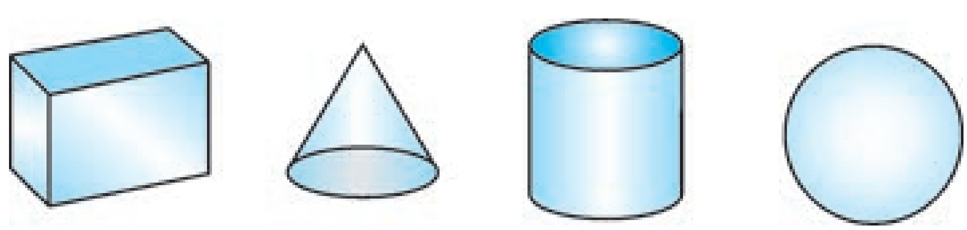
પૃષ્ઠફળ અને ઘનફળ 12

12.1 પ્રાસ્તાવિક

અગાઉ તમે કેટલાક નિયમિત આકારના ઘન પદાર્થો જેવા કે લંબઘન, શંકુ, નળાકાર અને ગોલક વિશે પરિચિત થયાં છો. (જુઓ આકૃતિ 12.1). તમે એ પણ જાણો છો કે, આપણે તેમનાં પૃષ્ઠફળ અને ઘનફળ કેવી રીતે શોધી શકીએ.



(i) (ii) (iii) (iv)

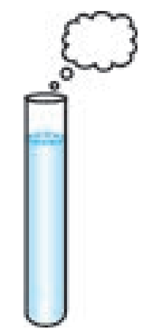
આકૃતિ 12.1

આપણે દૈનિક જીવનમાં ઉપર દર્શાવેલ મૂળભૂત ઘન પદાર્થો પૈકી બે કે તેથી વધુ ઘન પદાર્થોના સંયોજનથી બનેલા પદાર્થો જોઈએ છીએ.

તમે કોઈ ખટારાની પાછળ રાખેલું મોટું પાત્ર (container) અવશ્ય જોયું હશે. (જુઓ આકૃતિ 12.2), તેમાં એક જગ્યાએથી બીજી જગ્યાએ તેલ અથવા પાણી લઈ જવાય છે. શું ઉપરના ચાર મૂળભૂત ઘન આકારમાંથી કોઈ આકાર જોવા મળે છે ? તમે કલ્પી શકો કે, તે નળાકાર અને બે અર્ધગોલકમાંથી બનેલો છે.

આકૃતિ 12.2

પુનઃ તમે આકૃતિ 12.3 માં બતાવ્યું છે તેવું કોઈ પાત્ર જોયું હશે. તમે તેનું નામ આપી શકશો ? તે એક કસનળી છે. સાચું છે ! તમે તેનો તમારી વિજ્ઞાનની પ્રયોગશાળામાં ઉપયોગ કર્યો હશે. આ કસનળી પણ એક નળાકાર અને અર્ધગોળાનું સંયોજન છે. તેવી જ રીતે મુસાફરી કરતી વખતે કેટલાંક મોટાં અને સુંદર બિલ્ડિંગ અથવા સ્મારકો તમને ઉપર જણાવેલા જેવાં ઘન પદાર્થોના સંયોજનથી બનેલાં જોવા મળે છે.



આકૃતિ 12.3

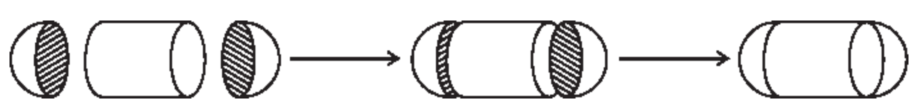
જો તમને આ પદાર્થોનું પૃષ્ઠફળ અથવા ઘનફળ અથવા તેની ક્ષમતા શોધવાની જરૂર પડે, તો તે કેવી રીતે શોધી શકશો ? આપણે આવા ઘનાકાર પદાર્થોનું અગાઉ શીખી ગયાં તેવા ઘનાકારોમાં વર્ગીકરણ કરી શકતા નથી.

આ પ્રકરણમાં તમે કેટલાક પદાર્થોનું પૃષ્ઠફળ અને ઘનફળ કેવી રીતે શોધી શકાય તે શીખશો.

12.2 સંયોજિત ઘન પદાર્થોનું કુલ પૃષ્ઠફળ

V5U7W1

આવો આપણે આકૃતિ 12.2માં જોયેલા પાત્ર ઉપર વિચાર કરીએ. આ પ્રકારના ઘન પદાર્થોનું પૃષ્ઠફળ કેવી રીતે શોધીશું ? જ્યારે આપણી સમક્ષ કોઈ નવી સમસ્યા આવે છે, ત્યારે આપણે સૌપ્રથમ તેને અગાઉ ઉકેલેલી નાની સમસ્યાઓમાં વિભાજિત કરીશું. આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, આ ઘન પદાર્થ નળાકારના બંને છેડા અર્ધગોલકથી બંધ કરીને બનાવવામાં આવ્યો છે. ટુકડાઓ એક સાથે ભેગા કરવાથી આ ઘન પદાર્થ કેવી રીતે બને છે તે આકૃતિ 12.4માં દર્શાવ્યું છે.



આકૃતિ 12.4

જો આપણે નવી બનેલી વસ્તુની સપાટી જોઈશું, તો આપણને માત્ર બે અર્ધગોલકના વક્રપૃષ્ઠ તથા નળાકારનું વક્રપૃષ્ઠ દેખાશે.

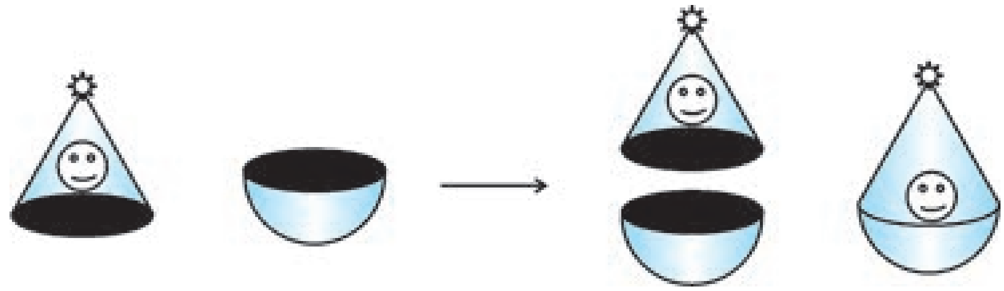
તેથી, નવા પદાર્થનું કુલ પૃષ્ઠફળ એ ત્રણ સ્વતંત્ર વક્રના ક્ષેત્રફળોના સરવાળા બરાબર થશે. તેનાથી આપણને નીચેનું સૂત્ર પ્રાપ્ત થશે :

નવા પદાર્થનું કુલ પૃષ્ઠફળ (TSA) = એક અર્ધગોલકની વક્ર સપાટીનું ક્ષેત્રફળ (CSA) + નળાકારની વક્ર સપાટીનું ક્ષેત્રફળ (CSA) + બીજા અર્ધગોલકની વક્ર સપાટીનું ક્ષેત્રફળ (CSA)

અહીં ***TSA (Total surface area), CSA (Curved surface area)*** નો અર્થ અનુક્રમે 'કુલ પૃષ્ઠફળ' અને 'વક્ર સપાટીનું ક્ષેત્રફળ' છે.

ચાલો, આપણે હવે બીજી પરિસ્થિતિનો વિચાર કરીએ. ધારો કે, આપણે અર્ધગોલક અને શંકુ સાથે મૂકીને એક રમકડું બનાવીએ, તો તે કેવી રીતે થાય તેનાં સોપાન જોઈએ.

પહેલા આપણે શંકુ અને અર્ધગોલક લઈ તેમની સમતલીય સપાટી એક સાથે રાખીએ. અલબત્ત, આપણે રમકડાની સપાટી સરખી રહે તે માટે શંકુના પાયાની ત્રિજ્યા અને અર્ધગોલકની ત્રિજ્યા સમાન લઈએ છીએ. તે બનાવવાનાં પગલાં આકૃતિ 12.5માં બતાવ્યા છે.



આકૃતિ 12.5

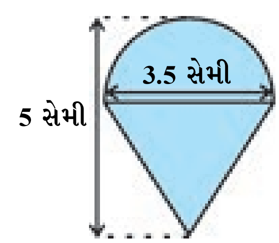
અંતમાં આપણને એક સુંદર અર્ધગોળાકાર આધારવાળું રમકડું મળશે. હવે, જો આપણે આ રમકડાની વક્ર સપાટીને રંગવા માંગતા હોઈએ, તો કેટલા જથ્થામાં રંગની જરૂર પડે તે માટે આપણી પાસે શું માહિતી હોવી જોઈએ ? આપણને રમકડાના કુલ પૃષ્ઠફળની આવશ્યકતા પડશે. તે અર્ધગોલકની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ અને શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ બંનેનો સરવાળો કરવાથી મળશે.

તેથી, આપણે કહીશું :

રમકડાનું કુલ પૃષ્ઠફળ = અર્ધગોલકની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ + શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

હવે, આપણે કેટલાંક ઉદાહરણ જોઈશું.

ઉદાહરણ 1 : રશીદને તેના જન્મદિવસે ભેટ સ્વરૂપે એક ભમરડો મળ્યો તે રંગેલો ન હતો. તે પોતાના ક્રેયોન રંગોથી ભમરડાને રંગ કરવા માગતો હતો. આ ભમરડો એક શંકુ ઉપર અર્ધગોળા જેવા ભાગથી બનેલો છે. (જુઓ આકૃતિ 12.6) ભમરડાની કુલ ઊંચાઈ 5 સેમી છે અને અર્ધગોળાનો વ્યાસ 3.5 સેમી છે તો ભમરડાને રંગ કરવાના સંપૂર્ણ ભાગનું કુલ પૃષ્ઠફળ શોધો. ($\pi = \frac{22}{7}$ લો.)



આકૃતિ 12.6

ઉકેલ : આ ભમરડો, આકૃતિ 12.5માં ચર્ચા કરેલ રમકડા જેવો જ છે. આપણે સરળતા ખાતર ગણતરી નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકીએ.

ભમરડાનું કુલ પૃષ્ઠફળ = અર્ધગોલકની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ + શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

હવે, અર્ધગોલકની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}(4\pi r^2) = 2\pi r^2$

$$= \left(2 \times \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times \frac{3.5}{2}\right) \text{ સેમી}^2$$

વળી, શંકુની ઊંચાઈ = ભમરડાની ઊંચાઈ – અર્ધગોલકની ઊંચાઈ (ત્રિજ્યા)

$$= \left(5 - \frac{3.5}{2}\right) \text{ સેમી} = 3.25 \text{ સેમી}$$

તેથી, શંકુની તિર્યક ઊંચાઈ $(l) = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{\left(\frac{3.5}{2}\right)^2 + (3.25)^2}$ સેમી = 3.7 સેમી (આશરે)

∴ શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ = πrl

$$= \left(\frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times 3.7\right) \text{ સેમી}^2$$

∴ ભમરડાનું પૃષ્ઠફળ = $\left(2 \times \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times \frac{3.5}{2}\right)$ સેમી^{2} + $\left(\frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times 3.7\right)$ સેમી^{2}

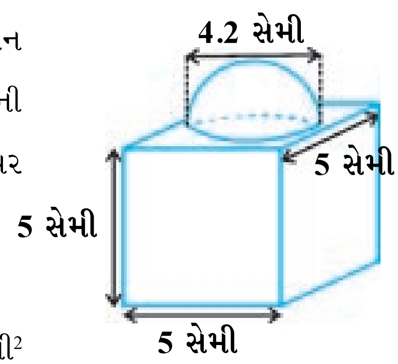
$$= \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} (3.5 + 3.7) \text{ સેમી}^2$$

$$= \frac{11}{2} \times (3.5 + 3.7) \text{ સેમી}^2$$

= 39.6 સેમી^{2} (આશરે)

ચકાસો કે, ‘ભમરડાનું કુલ પૃષ્ઠફળ’ એ શંકુ અને અર્ધગોલકના કુલ પૃષ્ઠફળોના સરવાળા બરાબર નથી.

ઉદાહરણ 2 : બાજુની આકૃતિ 12.7 માં બતાવેલ એક શો-પીસ એ સમઘન અને અર્ધગોલકનો બનેલો છે. આ શો-પીસનો પાયો સમઘન છે, અને તેની પ્રત્યેક ધાર 5 સેમી છે અને 4.2 સેમી વ્યાસવાળો અર્ધગોલક તેની ઉપર બેસાડેલો છે. આ શો-પીસનું કુલ પૃષ્ઠફળ શોધો. ($\pi = \frac{22}{7}$ લો.)



આકૃતિ 12.7

ઉકેલ : સમઘનનું કુલ પૃષ્ઠફળ = 6 × (બાજુનું માપ)^2 = 6 × 5 × 5 સેમી^{2}

= 150 સેમી^{2}

અહીં, અર્ધગોલકના પાયાના ક્ષેત્રફળનો સમઘનના કુલ પૃષ્ઠફળમાં સમાવેશ થઈ જાય છે.

તેથી, શો-પીસનું પૃષ્ઠફળ = સમઘનનું કુલ પૃષ્ઠફળ – અર્ધગોલકના વર્તુળાકાર આધારનું ક્ષેત્રફળ

+ અર્ધગોલકની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

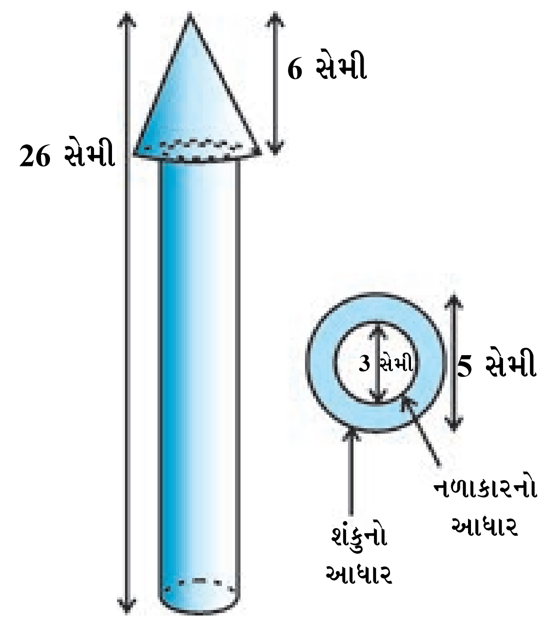
= $150 - \pi r^2 + 2\pi r^2$ સેમી^{2}

= $(150 + \pi r^2)$ સેમી^{2}

= 150 સેમી^{2} + $\left(\frac{22}{7} \times \frac{4.2}{2} \times \frac{4.2}{2}\right)$ સેમી^{2}

= (150 + 13.86) સેમી^{2} = 163.86 સેમી^{2}

ઉદાહરણ 3 : બાજુમાં આકૃતિ 12.8 માં બતાવેલ એક લાકડાનું રૉકેટ એક નળાકાર ઉપર શંકુ મૂકી બનાવેલું છે. રૉકેટની કુલ ઊંચાઈ 26 સેમી છે, જ્યારે શંકુની ઊંચાઈ 6 સેમી છે. શંકુના પાયાનો વ્યાસ 5 સેમી અને નળાકાર ભાગનો વ્યાસ 3 સેમી છે. જો શંકુ આકાર ભાગને નારંગી રંગ કરવો હોય અને નળાકાર ભાગને પીળો રંગ કરવો હોય, તો રંગ પ્રમાણે રોકેટના પ્રત્યેક ભાગનું ક્ષેત્રફળ શોધો. (π = 3.14 લો).



આકૃતિ 12.8

ઉકેલ : શંકુની ત્રિજ્યાને r વડે, શંકુની તિર્યક ઊંચાઈને l વડે, શંકુની ઊંચાઈને h વડે, નળાકારની ત્રિજ્યાને r' વડે, નળાકારની ઊંચાઈને h' વડે દર્શાવ્યાં છે. r = 2.5 સેમી, h = 6 સેમી, r' = 1.5 સેમી, h' = 26 – 6 = 20 સેમી તથા

$$l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{2.5^2 + 6^2} \text{ સેમી} = 6.5 \text{ સેમી}$$

અહીં, શંકુનો પાયાનો ભાગ નળાકારની વર્તુળાકાર સપાટી ઉપર મુકાયેલો છે, પરંતુ શંકુના પાયાનો ભાગ નળાકારના વર્તુળાકાર ભાગ કરતાં વધારે છે. તેથી શંકુના આધારની વધારાની સપાટીને પણ રંગવાની છે.

તેથી નારંગી રંગના ભાગનું ક્ષેત્રફળ = શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ + શંકુના આધારનું ક્ષેત્રફળ – નળાકારના આધારનું ક્ષેત્રફળ

$= \pi rl + \pi r^2 - \pi(r')^2$

$= \pi\,[(2.5 \times 6.5) + (2.5)^2 - (1.5)^2]$ સેમી^{2}

$= \pi\,[20.25]$ સેમી^{2}

$= 3.14 \times 20.25$ સેમી^{2}

$= 63.585$ સેમી^{2}

હવે, પીળા રંગના ભાગનું ક્ષેત્રફળ = નળાકારની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ + નળાકારના પાયાનું ક્ષેત્રફળ

$= 2\pi r'h' + \pi(r')^2$

$= \pi r'\,(2h' + r')$

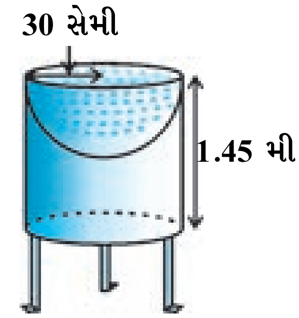
$= (3.14 \times 1.5)\,(2 \times 20 + 1.5)$ સેમી^{2}

$= 4.71 \times 41.5$ સેમી^{2}

$= 195.465$ સેમી^{2}

ઉદાહરણ 4 : મયંકે તેના બગીચામાં પક્ષીઓને પાણી પીવા માટે નળાકારના એક છેડે અર્ધગોળાકાર હોય તેવું પક્ષીકુંડ બનાવ્યું છે (જુઓ આકૃતિ 12.9). જો નળાકારની ઊંચાઈ 1.45 મીટર અને તેની ત્રિજ્યા 30 સેમી હોય, તો પક્ષીઓ માટે પાણી પીવાના આ પાત્રનું કુલ પૃષ્ઠફળ શોધો.

($\pi = \frac{22}{7}$ લો).



આકૃતિ 12.9

ઉકેલ : ધારો કે નળાકારની ઊંચાઈ h છે અને નળાકાર અને અર્ધગોળાની ત્રિજ્યા r સમાન છે.

તેથી, પક્ષીઓને પાણી પીવાના પાત્રનું કુલ પૃષ્ઠફળ = નળાકારની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ + અર્ધગોળાની વક્ર સપાટીનું ક્ષેત્રફળ

$= 2\pi rh + 2\pi r^2$

$= 2\pi r(h + r)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 30\ (145 + 30)$ સેમી^{2}

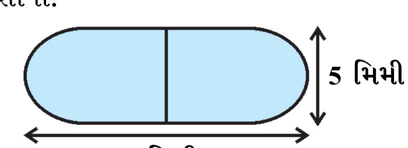
$= 33000$ સેમી^{2}

$= 3.3$ મીટર^2

સ્વાધ્યાય 12.1

(જો π નું મૂલ્ય આપેલ ન હોય, તો $\pi = \frac{22}{7}$ લો).

1. બે ઘન પૈકી પ્રત્યેકનું ઘનફળ 64 સેમી^{3} હોય તેવા બે ઘનને જોડવાથી બનતા લંબઘનનું પૃષ્ઠફળ શોધો.
2. એક પોલા અર્ધગોલક ઉપર એક પોલો નળાકાર બેસાડેલો હોય તેવું એક પાત્ર છે. અર્ધગોલકનો વ્યાસ 14 સેમી છે અને વાસણની કુલ ઊંચાઈ 13 સેમી છે વાસણની અંદરની સપાટીનું પૃષ્ઠફળ શોધો.
3. અર્ધગોલકની ઉપર શંકુ લગાવેલો હોય તેવું એક રમકડું છે. તે બંનેની ત્રિજ્યા 3.5 સેમી છે. રમકડાની કુલ ઊંચાઈ 15.5 સેમી હોય, તો રમકડાનું કુલ પૃષ્ઠફળ શોધો.
4. 7 સેમી બાજુના માપવાળા સમઘનની ઉપર અર્ધગોલક મૂકેલો છે. તો અર્ધગોલકનો મહત્તમ વ્યાસ શું હોઈ શકે ? આ રીતે બનેલા પદાર્થનું કુલ પૃષ્ઠફળ શોધો.
5. એક સમઘન લાકડાના ટુકડાના કોઈ એક પૃષ્ઠ તરફથી એક અર્ધગોલક કાપવામાં આવે છે. અર્ધગોલકનો વ્યાસ l એ સમઘનની બાજુના માપ બરાબર છે, બાકી પદાર્થનું કુલ પૃષ્ઠફળ શોધો.
6. દવાની એક કેપ્સૂલનો આકાર નળાકારની બંને બાજુએ અર્ધગોલક લગાડેલો હોય તે રીતનો છે (જુઓ આકૃતિ 12.10). કેપ્સૂલની લંબાઈ 14 મિમી છે અને તેનો વ્યાસ 5 મિમી છે. તો કેપ્સૂલનું પૃષ્ઠફળ શોધો.



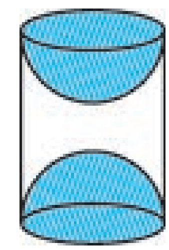
આકૃતિ 12.10

7. એક તંબુનો આકાર નળાકાર ઉપર શંકુ મૂકવામાં આવેલ હોય તેવો છે. જો નળાકાર ભાગની ઊંચાઈ અને વ્યાસ અનુક્રમે 2.1 મીટર અને 4 મીટર હોય તથા ઉપરના ભાગની તિર્યક ઊંચાઈ 2.8 મીટર હોય, તો આ તંબુ

બનાવવા વપરાતા કેનવાસનું ક્ષેત્રફળ શોધો અને જો કેનવાસનો ભાવ ₹ 500 પ્રતિ મીટર^2 હોય, તો તેમાં વપરાતા કેનવાસની કિંમત પણ શોધો. (તંબુના તળિયાને કેનવાસથી ઢાંકવામાં આવતો નથી તે ધ્યાનમાં લેવું).

8. નળાકાર પદાર્થની ઊંચાઈ 2.4 સેમી અને વ્યાસ 1.4 સેમી છે. તેમાંથી તેટલી જ ઊંચાઈ અને વ્યાસવાળો શંકુ કાપી લેવામાં આવે તો વધેલા પદાર્થનું કુલ પૃષ્ઠફળ નજીકના સેમી^{2} માં શોધો.

9. બાજુમાં આકૃતિ 12.11 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે લાકડાના નળાકારમાંથી બંને બાજુએથી અર્ધગોલક કાઢી એક લાકડાનો શો-પીસ બનાવ્યો છે. જો નળાકારની ઊંચાઈ 10 સેમી હોય અને પાયાની ત્રિજ્યા 3.5 સેમી હોય તો શો-પીસનું કુલ પૃષ્ઠફળ શોધો.

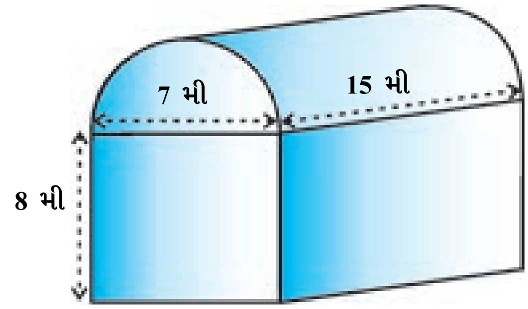


આકૃતિ 12.11

12.3 સંયોજિત ઘન પદાર્થોનું ઘનફળ

પ્રકરણની શરૂઆતમાં આપણે બે જાણીતા ઘન પદાર્થોના સંયોજનથી બનતા ઘન પદાર્થોનું પૃષ્ઠફળ કેવી રીતે મેળવવું તે જોઈ ગયા. અહીં આપણે આવા ઘન પદાર્થોનું ઘનફળ શોધતાં શીખીશું. આપણે જોઈશું કે પૃષ્ઠફળની ગણતરીમાં આપણે બે ઘટક પદાર્થોના પૃષ્ઠફળને ઉમેરી શકતા નથી, કારણ કે તેમનો કેટલોક ભાગ બે ઘન પદાર્થોને જોડવાથી દૂર થાય છે. પરંતુ ઘનફળ શોધવામાં આવું નહિ થાય. બે મૂળભૂત ઘન પદાર્થોને જોડવાથી મળતા ઘન પદાર્થનું ઘનફળ એ આપેલા બંને ઘન પદાર્થોના ઘનફળના સરવાળા બરાબર થશે. હવે આપણે નીચેનાં ઉદાહરણોમાં આ સત્ય જોઈશું.

ઉદાહરણ 5 : શાંતા એક શેડમાં એક ઉદ્યોગ ચલાવે છે. આ શેડનો આકાર લંબઘન ઉપર અર્ધનળાકારથી બંધ છે. (જુઓ આકૃતિ 12.12). તે શેડના પાયાનું માપ 7 મી × 15 મી અને લંબઘનાકારની ઊંચાઈ 8 મીટર હોય, તો આ શેડમાં સમાતી હવાનું ઘનફળ શોધો. ઉપરાંત શેડમાં મશીનરીના ભાગનું કુલ ઘનફળ 300 મી^{3} અને 20 કારીગરો પૈકી પ્રત્યેક કારીગરે રોકેલી જગ્યાનું ઘનફળ 0.08 મીટર^3 છે. તો શેડમાં કેટલી હવા હશે ? ($\pi = \frac{22}{7}$ લો.)



આકૃતિ 12.12

ઉકેલ : શેડની હવાનું ઘનફળ (જ્યારે શેડમાં કારીગરો અને મશીનરી ન હોય) એ લંબઘન અને અર્ધનળાકારની અંદર રહેલી હવાના ઘનફળના સરવાળા જેટલું છે.

હવે, લંબઘનની લંબાઈ, પહોળાઈ અને ઊંચાઈ અનુક્રમે 15 મીટર, 7 મીટર અને 8 મીટર છે.

તથા અર્ધનળાકારનો વ્યાસ 7 મીટર અને તેની ઊંચાઈ 15 મીટર છે.

તેથી માંગેલ ઘનફળ = લંબઘનનું ઘનફળ + $\frac{1}{2}$ નળાકારનું ઘનફળ

$$= \left[15\times7\times8+\frac{1}{2}\times\frac{22}{7}\times\frac{7}{2}\times\frac{7}{2}\times15\right] \text{મીટર}^3$$

$$= 1128.75 \text{ મીટર}^3$$

હવે, મશીનરીએ રોકેલી જગ્યાનું ઘનફળ = 300 મીટર^3

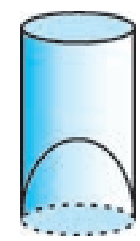
અને કારીગરોએ રોકેલી જગ્યાનું કુલ ઘનફળ = 20 × 0.08 મીટર^3 = 1.6 મીટર^3

તેથી, મશીનરી અને કારીગરોની સાથે શેડમાં રહેલી હવાનું ઘનફળ

= [1128.75 – (300.00 + 1.60)] મીટર^3

= 827.15 મીટર^3

ઉદાહરણ 6 : એક જ્યૂસ વેચવાવાળો તેના ગ્રાહકોને આકૃતિ 12.13 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણેના પ્યાલામાં જ્યૂસ આપતો હતો. નળાકાર પ્યાલાનો અંદરનો વ્યાસ 5 સેમી છે, પરંતુ પ્યાલાના પાયામાં અર્ધગોલક ભાગ ઊપસી આવેલો હતો. જેથી, પ્યાલાની ક્ષમતા ઓછી થતી હતી. જો પ્યાલાની ઊંચાઈ 10 સેમી હોય, તો તેની આભાસી ક્ષમતા તથા તેની વાસ્તવિક ક્ષમતા શોધો. (π = 3.14 લો).



આકૃતિ 12.13

ઉકેલ : પ્યાલાની અંદરનો વ્યાસ = 5 સેમી અને ઊંચાઈ = 10 સેમી છે,

જેથી પ્યાલાની આભાસી ક્ષમતા = $\pi r^2 h$

= 3.14 × 2.5 × 2.5 × 10 સેમી^{3}

= 196.25 સેમી^{3}

પણ પ્યાલાની વાસ્તવિક ક્ષમતા એ પ્યાલાના ઉપસી આવેલા અર્ધગોલકના કદ જેટલી ઓછી થાય છે.

એટલે કે, $\frac{2}{3}\pi r^3$ જેટલી ઓછી છે તેનું મૂલ્ય = $\frac{2}{3}$ × 3.14 × 2.5 × 2.5 × 2.5 સેમી^{3}

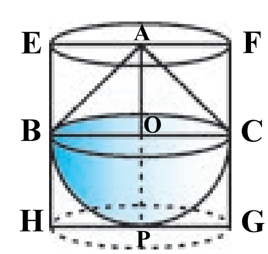
= 32.71 સેમી^{3}

તેથી, પ્યાલાની વાસ્તવિક ક્ષમતા = પ્યાલાની આભાસી ક્ષમતા – પ્યાલામાં સમાવિષ્ટ અર્ધગોલકનું ઘનફળ

= (196.25 – 32.71) સેમી^{3}

= 163.54 સેમી^{3}

ઉદાહરણ 7 : એક નક્કર રમકડું એ અર્ધગોલકની ઉપર શંકુ લગાવ્યો હોય તેવા સ્વરૂપે છે. શંકુની ઊંચાઈ 2 સેમી અને પાયાનો વ્યાસ 4 સેમી છે, તો રમકડાનું ઘનફળ શોધો. જો એક લંબવૃત્તીય નળાકાર રમકડાને પરિગત હોય, તો નળાકારના અને રમકડાના ઘનફળનો તફાવત શોધો. (π = 3.14 લો).



આકૃતિ 12.14

ઉકેલ : ધારો કે, BPC અર્ધગોલક અને ABC એ અર્ધગોલકના પાયા ઉપર રાખેલો શંકુ છે. (જુઓ આકૃતિ 12.14) અર્ધગોલકની ત્રિજ્યા OB (= શંકુની ત્રિજ્યા) છે.

તે $\frac{1}{2}$ × 4 સેમી = 2 સેમી છે.

તેથી, રમકડાનું ઘનફળ = $\frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$= \left[\frac{2}{3}\times 3.14\times (2)^3+\frac{1}{3}\times 3.14\times (2)^2\times 2\right] \text{ સેમી}^3 = 25.12 \text{ સેમી}^3$$

હવે, ધારો કે, લંબવૃત્તીય નળાકાર EFGH એ રમકડાને પરિગત છે.

તે લંબવૃત્તીય નળાકારના પાયાની ત્રિજ્યા = HP = BO = 2 સેમી અને

તેની ઊંચાઈ EH = AO + OP = (2 + 2) સેમી = 4 સેમી

તેથી, માંગેલું ઘનફળ = લંબવૃત્તીય નળાકારનું ઘનફળ – રમકડાનું ઘનફળ

= [3.14 × 2^2 × 4 – 25.12] સેમી^{3}

= 25.12 સેમી^{3}

તેથી, માંગેલા બે ઘનફળોનો તફાવત = 25.12 સેમી^{3}

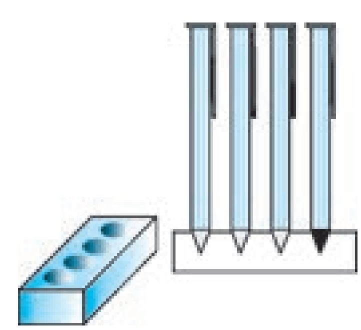
સ્વાધ્યાય 12.2

(જો π નું મૂલ્ય આપેલ ન હોય, તો $\pi = \frac{22}{7}$ લો).

1. એક ઘન પદાર્થ એ 1 સેમી ત્રિજ્યા ધરાવતા અર્ધગોલક ઉપર તેટલી જ ત્રિજ્યાવાળો શંકુ ગોઠવીને બનાવાયો છે. શંકુની ઊંચાઈ એ તેની ત્રિજ્યા જેટલી હોય, તો આ ઘન પદાર્થનું ઘનફળ π ના ગુણિતમાં શોધો.
2. એન્જિનિયરિંગના વિદ્યાર્થી રશેલને નળાકારના બંને છેડે પાતળી ઍલ્યુમિનિયમની શીટમાંથી બનેલો શંકુ બેસાડી એક નમૂનો તૈયાર કરવાનું કહેવામાં આવ્યું. નમૂનાનો વ્યાસ 3 સેમી અને લંબાઈ 12 સેમી છે. જો શંકુની ઊંચાઈ 2 સેમી હોય, તો રશેલે બનાવેલ નમૂનામાં કેટલી હવા સમાશે તે શોધો. (ધારી લો કે નમૂનાના બહારનાં અને અંદરનાં માપો લગભગ સમાન છે).
3. ગુલાબજાંબુમાં તેના કદના 30 % જેટલી ખાંડની ચાસણી છે. દરેક ગુલાબજાંબુનો આકાર નળાકારના બંને છેડે અર્ધગોલક લગાવ્યા હોય તેવો છે. તેની કુલ લંબાઈ 5 સેમી અને વ્યાસ 2.8 સેમી છે. તો આવાં 45 ગુલાબજાંબુમાં આશરે કેટલી ખાંડની ચાસણી હશે તે શોધો. (જુઓ આકૃતિ 12.15).

આકૃતિ 12.15

4. એક લાકડાનું લંબઘન પેન-સ્ટૅન્ડ ચાર શંકુ આકારના છિદ્રવાળું બનાવેલું છે. લંબઘનનાં માપ 15 સેમી × 10 સેમી × 3.5 સેમી છે. છિદ્રવાળા દરેક ભાગની ત્રિજ્યા 0.5 સેમી અને ઊંડાઈ 1.4 સેમી છે, તો લાકડાના આ સ્ટૅન્ડનું ઘનફળ શોધો. (જુઓ આકૃતિ 12.16).
5. એક વાસણનું સ્વરૂપ ઊંધા શંકુ જેવું છે. તેની ઊંચાઈ 8 સેમી અને ઉપરના ખુલ્લા ભાગની ત્રિજ્યા 5 સેમી છે. તે ઉપરની ધાર સુધી પાણીથી ભરેલું છે. જ્યારે વાસણમાં 0.5 સેમી ત્રિજ્યાવાળી ધાતુની ગોળીઓ નાખવામાં આવે છે, ત્યારે એક ચતુર્થાંશ જેટલું પાણી બહાર નીકળે છે તો વાસણમાં નાખેલી ધાતુની ગોળીઓની સંખ્યા શોધો.



આકૃતિ 12.16

6. એક લોખંડના નળાકાર સ્વરૂપના નક્કર થાંભલાની ઊંચાઈ 220 સેમી છે અને પાયાનો વ્યાસ 24 સેમી છે. તેની ઉપર 60 સેમી ઊંચાઈ અને 8 સેમી ત્રિજ્યાવાળા બીજા નળાકારને મૂકવામાં આવે છે, તો થાંભલાનું દળ શોધો. 1 સેમી^{3} લોખંડનું દળ આશરે 8 ગ્રામ છે. (π = 3.14 લો).

7. 60 સેમી ત્રિજ્યાવાળા અર્ધગોલક પર સ્થિત લંબવૃત્તીય શંકુની ઊંચાઈ 120 સેમી અને ત્રિજ્યા 60 સેમી છે. તેને પાણીથી સંપૂર્ણ ભરેલા એક લંબવૃત્તીય નળાકારમાં તેના તળિયાને સ્પર્શે તે રીતે ઊભો મૂક્યો છે. જો નળાકારની ત્રિજ્યા 60 સેમી અને ઊંચાઈ 180 સેમી હોય, તો નળાકારમાં બાકી રહેલા પાણીનું ઘનફળ શોધો.

8. એક ગોળાકાર કાચના વાસણની ઉપરનો ભાગ નળાકાર છે. તે નળાકારની ઊંચાઈ 8 સેમી છે અને વ્યાસ 2 સેમી છે. ગોળાકાર ભાગનો વ્યાસ 8.5 સેમી છે. એક બાળક માહિતી પ્રાપ્ત કરે છે કે તેમાં ભરેલા પાણીનું ઘનફળ 345 સેમી^{3} છે. બાળકનો જવાબ સાચો છે કે નહિ તે ચકાસો. ઉપરનાં માપો તેના અંદરના ભાગના છે. (π = 3.14 લો).

12.4 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં તમે નીચે આપેલા મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. બે જાણીતા પદાર્થો જેવા કે લંબઘન, શંકુ, નળાકાર, ગોલક અને અર્ધગોલકના સંયોજનથી બનતા પદાર્થનું પૃષ્ઠફળ શોધવું.
2. કોઈપણ બે પદાર્થો જેવા કે લંબઘન, શંકુ, નળાકાર, ગોલક અને અર્ધગોલકના સંયોજનથી બનતા પદાર્થનું ઘનફળ શોધવું.

J3A5S1