H3B6R8

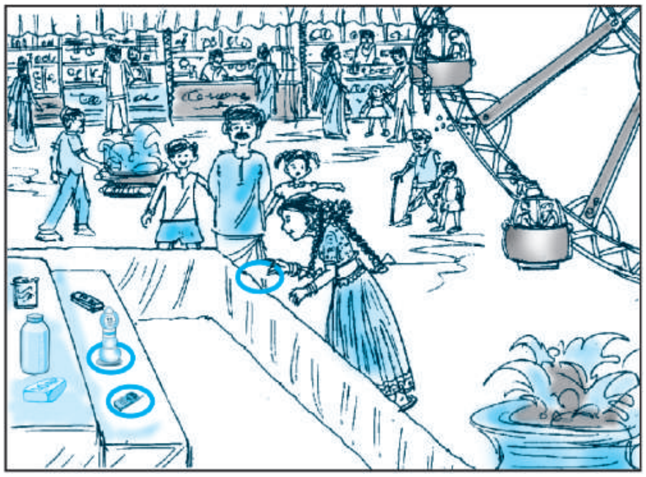
# દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મ 3

## 3.1 પ્રાસ્તાવિક

તમે નીચે આપેલી પરિસ્થિતિ જેવી પરિસ્થિતિમાંથી પસાર થયાં જ હશો.

અખિલા તેના ગામમાં મેળામાં ગઈ હતી. તેને ચકડોળમાં બેસવાનો આનંદ માણવો હતો અને હૂપલા (Hoopla) (જેમાં તમે સ્ટોલમાં રાખેલી વસ્તુઓ પર રિંગ ફેંકો અને જો રિંગ કોઈ પણ વસ્તુને સંપૂર્ણ આવરી લે, તો તે વસ્તુ તમને મળે એવી એક રમત) રમવા માંગતી હતી. તે જેટલી વખત હૂપલા રમી તે સંખ્યા એ ચકડોળ પરની સવારીની સંખ્યાથી અડધી છે. જો પ્રત્યેક વખત ચકડોળમાં બેસવાનો ખર્ચ ₹ 3 અને હૂપલાની પ્રત્યેક રમત રમવાનો ખર્ચ ₹ 4 થતો હોય, તો તમે ચકડોળમાં બેસવાની સંખ્યા કેવી રીતે શોધી શકશો અને તે કેટલી વાર હૂપલાની રમત રમી હશે તે કેવી રીતે નક્કી કરશો? તેણે આ માટે કુલ ₹ 20 ખર્ચ્યા હતા.

કદાચિત્, તમે વિવિધ સ્થિતિની વિચારણા કરીને અજમાવી શકો છો. જો તેણે એક વખત સવારી કરી હોય, તે શક્ય છે ? શું બે વખત સવારી શક્ય છે ? અને આમ આગળ ચાલો અથવા આવી પરિસ્થિતિઓને દર્શાવવા માટે તમે ધોરણ IX ના દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણોના જ્ઞાનનો ઉપયોગ કરી શકો.



ચાલો આ અભિગમ અપનાવીએ.

અખિલાની ચકડોળમાં બેસવાની સંખ્યાને $x$ કહો અને હૂપલા રમવાની સંખ્યાને $y$ કહો. આ પરિસ્થિતિને બે સમીકરણો દ્વારા દર્શાવી શકાય :

$$y = \frac{1}{2}x \quad \text{.... (1)}$$

$$3x + 4y = 20 \quad \text{.... (2)}$$

શું આપણે આ બે સમીકરણોનો ઉકેલ શોધી શકીશું?

ઉકેલ શોધવાની ઘણી રીતો છે. આપણે આ પ્રકરણમાં તેમનો અભ્યાસ કરીશું.

L4Q7P2

## 3.2 દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મના ઉકેલ માટે આલેખની રીત

*જે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મને એક પણ ઉકેલ ન હોય તેવું સમીકરણયુગ્મ સુસંગત નથી તેમ કહેવાય. જે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મને ઉકેલ હોય તેવું સમીકરણયુગ્મ સુસંગત છે તેમ કહેવાય. જે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનાં બંને સમીકરણો સમાન હોય તેને અનંત ભિન્ન ઉકેલ હોય. આવા સમીકરણયુગ્મનાં સમીકરણો અવલંબી સમીકરણો છે તેમ કહેવાય. સ્પષ્ટ છે કે જે સમીકરણયુગ્મનાં સમીકરણો અવલંબી હોય તે સમીકરણો સુસંગત હોય છે જ.*

ટૂંકમાં આપણે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મની રેખાઓનું નિરૂપણ અને ઉકેલના અસ્તિત્વ વિશે નીચે પ્રમાણે કહી શકીએ :

*(i)* *રેખાઓ એક જ બિંદુમાં છેદી શકે છે. આ સ્થિતિમાં સમીકરણોની જોડીને એક (અનન્ય) ઉકેલ છે. (સુસંગત સમીકરણયુગ્મ)*

*(ii)* *રેખાઓ સમાંતર હોઈ શકે છે. આ સ્થિતિમાં સમીકરણોને કોઈ ઉકેલ નથી. (સમીકરણયુગ્મ સુસંગત નથી.)*

*(iii)* *રેખાઓ સંપાતી છે. આ સ્થિતિમાં સમીકરણોને અનંત ઉકેલ છે. (સુસંગત સમીકરણયુગ્મ, અવલંબી સમીકરણો)*

**નીચેના ત્રણ સમીકરણયુગ્મ ધ્યાને લઈએ :**

(i) $x - 2y = 0$ અને $3x + 4y - 20 = 0$ (રેખાઓ છેદે છે.)

(ii) $2x + 3y - 9 = 0$ અને $4x + 6y - 18 = 0$ (રેખાઓ સંપાતી છે.)

(iii) $x + 2y - 4 = 0$ અને $2x + 4y - 12 = 0$ (રેખાઓ સમાંતર છે.)

હવે આપણે ત્રણે ઉદાહરણની $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$ અને $\frac{c_1}{c_2}$ ની કિંમતો લખીએ અને તમામને સરખાવીએ.

અહીંયા $a_1$, $b_1$, $c_1$ અને $a_2$, $b_2$, $c_2$ એ દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણોના પ્રમાણિત સ્વરૂપનાં સહગુણકો છે.

**કોષ્ટક 3.1**

| ક્રમ નં. | રેખાઓની જોડ | $\frac{a_1}{a_2}$ | $\frac{b_1}{b_2}$ | $\frac{c_1}{c_2}$ | ગુણોત્તરોની સરખામણી | આલેખાત્મક સ્વરૂપ | બૈજિક સ્વરૂપ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | $x - 2y = 0$<br>$3x + 4y - 20 = 0$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{-2}{4}$ | $\frac{0}{-20}$ | $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ | છેદતી રેખાઓ | માત્ર એક ઉકેલ (અનન્ય) |
| 2. | $2x + 3y - 9 = 0$<br>$4x + 6y - 18 = 0$ | $\frac{2}{4}$ | $\frac{3}{6}$ | $\frac{-9}{-18}$ | $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ | સંપાતી રેખાઓ | અનંત ઉકેલ |
| 3. | $x + 2y - 4 = 0$<br>$2x + 4y - 12 = 0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{4}$ | $\frac{-4}{-12}$ | $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$<br>એટલે કે $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$<br>અને $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ | સમાંતર રેખાઓ | ઉકેલ નથી. |

ઉપરના કોષ્ટકમાંથી, તમે જોઈ શકો છો કે જો સમીકરણો

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$

અને $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ દ્વારા દર્શાવાતી રેખાઓ

(i) છેદતી રેખાઓ હોય, તો $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

(ii) સંપાતી રેખાઓ હોય, તો $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

(iii) સમાંતર હોય, તો $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$, $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

વાસ્તવમાં કોઈ પણ રેખાઓની જોડ માટે તેનું પ્રતીપ પણ સત્ય છે. તમે તમારી જાતે પણ કેટલાંક ઉદાહરણોનો વિચાર કરી ઉપરની ચકાસણી કરી શકો છો.

આપણે હવે વધુ ઉદાહરણોનો વિચાર કરીએ.

**ઉદાહરણ 1 :** સમીકરણયુગ્મ

$$x + 3y = 6 \quad (1)$$

$$2x - 3y = 12 \quad (2)$$

સુસંગત છે કે નહિ તે આલેખની મદદથી ચકાસો.

**ઉકેલ :** સમીકરણો (1) અને (2) ના આલેખ દોરીએ. આ માટે આપણે દરેક સમીકરણના બે ઉકેલ શોધીશું જે કોષ્ટક 3.2માં દર્શાવેલ છે.

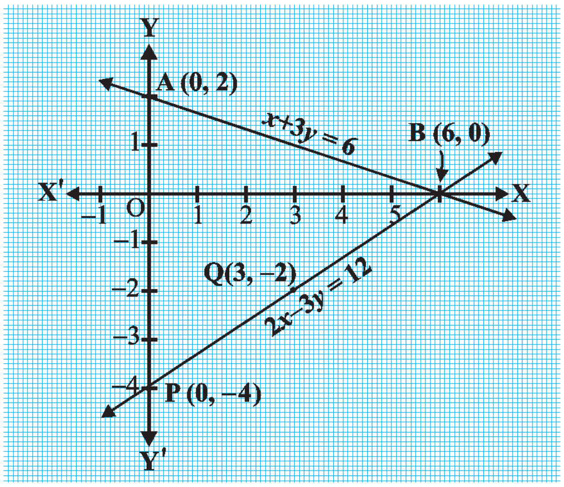
**કોષ્ટક 3.2**

| $x$ | 0 | 6 |
|---|---|---|
| $y = \frac{6-x}{3}$ | 2 | 0 |

| $x$ | 0 | 3 |
|---|---|---|
| $y = \frac{2x-12}{3}$ | –4 | –2 |

આલેખપત્ર ઉપર બિંદુઓ A(0, 2), B(6, 0), P(0, –4) અને Q (3, –2) દર્શાવો. આકૃતિ 3.1માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે તેમને જોડતી રેખાઓ AB અને PQ દોરો.

આપણે નોંધીએ કે, બિંદુ B(6, 0) એ બંને રેખાઓ AB અને PQ ઉપરનું સામાન્ય બિંદુ છે. તેથી, સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ $x = 6$ અને $y = 0$ છે. આથી, આપેલ સમીકરણયુગ્મ સુસંગત છે.




આકૃતિ 3.1

**ઉદાહરણ 2 :** આલેખની રીતથી નીચેના સમીકરણયુગ્મને એક પણ ઉકેલ નથી, અનન્ય ઉકેલ છે અથવા અનંત ઉકેલ છે તે નક્કી કરો.

$$5x - 8y + 1 = 0 \qquad (1)$$

$$3x - \frac{24}{5}y + \frac{3}{5} = 0 \qquad (2)$$

**ઉકેલ :** સમીકરણ (2) ને $\frac{5}{3}$ વડે ગુણતાં, આપણને

$$5x - 8y + 1 = 0 \text{ મળશે.}$$

તે, સમીકરણ (1) ને સમાન છે. સમીકરણો (1) અને (2) દર્શાવતી રેખાઓ સંપાતી છે તેમ તેમનું નિરૂપણ દર્શાવે છે. તેથી સમીકરણો (1) અને (2) ને અનંત ઉકેલ છે.

આલેખ પર કેટલાંક બિંદુઓ દર્શાવો અને જાતે ચકાસો.

**ઉદાહરણ 3 :** ચંપા 'સેલ' માં કેટલાંક પેન્ટ અને સ્કર્ટ ખરીદવા ગઈ હતી. જ્યારે તેને તેના મિત્રોએ પૂછ્યું કે, તેણે દરેકની કેટલી સંખ્યામાં ખરીદી કરી હતી, ત્યારે તેણે જવાબ આપ્યો, "પેન્ટની સંખ્યાના બે ગણામાંથી બે ઓછી સંખ્યામાં સ્કર્ટ ખરીદ્યાં. પણ પેન્ટની સંખ્યાના ચાર ગણામાંથી ચાર ઓછી સંખ્યામાં સ્કર્ટ ખરીદ્યા." ચંપાએ કેટલી સંખ્યામાં પેન્ટ અને કેટલી સંખ્યામાં સ્કર્ટ ખરીદ્યાં તે શોધવા તેના મિત્રોને મદદ કરો.

**ઉકેલ :** ધારો કે, ચંપાએ $x$ પેન્ટ તથા $y$ સ્કર્ટ ખરીદ્યા છે. આથી આપેલ માહિતી પરથી સમીકરણો આ પ્રમાણે મળશે :

$$y = 2x - 2 \qquad (1)$$

અને

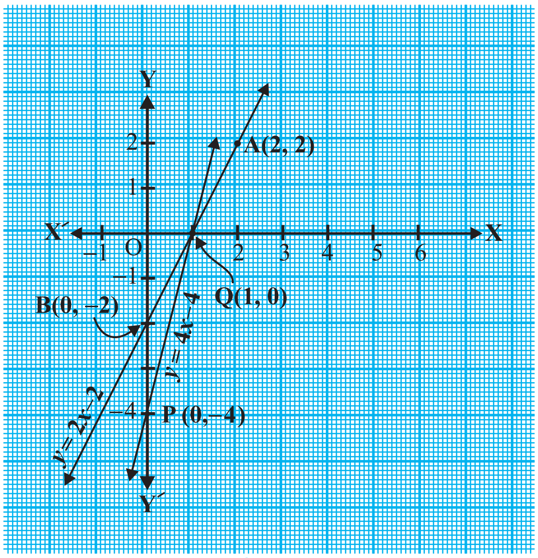
$$y = 4x - 4 \qquad (2)$$

સમીકરણ (1) અને (2) ના બે-બે ઉકેલોની મદદથી આલેખપત્ર પર આલેખ દોરો. કોષ્ટક 3.3 માં તેમના ઉકેલ આપેલા છે.

કોષ્ટક 3.3

| $x$ | 2 | 0 |
|---|---|---|
| $y = 2x - 2$ | 2 | –2 |

| $x$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $y = 4x - 4$ | –4 | 0 |




આકૃતિ 3.2

આકૃતિ 3.2 માં A(2, 2) તથા B(0, –2) માંથી પસાર થતી રેખા AB તથા P(0, –4) અને Q(1, 0) માંથી પસાર થતી રેખા PQ દોરો. સમીકરણોના ઉકેલ સમાવતાં બિંદુઓમાંથી પસાર થતી રેખાઓ દર્શાવો. તે બે રેખાઓ બિંદુ (1, 0) આગળ છેદે છે. તેથી $x = 1$ અને $y = 0$ એ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ થશે. એટલે કે તે 1 પેન્ટ ખરીદે છે અને સ્કર્ટ ખરીદતી નથી.

**ચકાસો :** તમારો જવાબ આપેલા કૂટપ્રશ્નોની શરતોનું સમાધાન કરે છે તે ચકાસો.

## સ્વાધ્યાય 3.1

**1.** નીચેની સમસ્યાઓ પરથી સુરેખ સમીકરણયુગ્મ બનાવો અને તેમનો ઉકેલ આલેખની રીતે શોધો.

(i) ધોરણ X ના દસ વિદ્યાર્થીઓ ગણિતના કોયડાની સ્પર્ધામાં ભાગ લે છે. જો ભાગ લેનાર છોકરીઓની સંખ્યા છોકરાઓની સંખ્યા કરતાં 4 વધારે હોય, તો કેટલાં છોકરાઓએ અને કેટલી છોકરીઓએ કોયડાની સ્પર્ધામાં ભાગ લીધો હશે તે શોધો.

(ii) 5 પેન્સિલ અને 7 પેનની કુલ કિંમત ₹ 50 છે અને તે જ કિંમતવાળી 7 પેન્સિલ તથા 5 પેનની કુલ કિંમત ₹ 46 છે, તો એક પેન્સિલ અને એક પેનની કિંમત શોધો.

**2.** નીચેના સુરેખ સમીકરણયુગ્મથી બનતી રેખાઓ એક બિંદુમાં છેદે છે કે સમાંતર છે અથવા સંપાતી છે, તેમ $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$ અને $\frac{c_1}{c_2}$ ગુણોત્તરોની તુલના કરીને નક્કી કરો :

(i) $5x - 4y + 8 = 0$
$7x + 6y - 9 = 0$

(ii) $9x + 3y + 12 = 0$
$18x + 6y + 24 = 0$

(iii) $6x - 3y + 10 = 0$
$2x - y + 9 = 0$

**3.** નીચેના સુરેખ સમીકરણયુગ્મ સુસંગત છે કે સુસંગત નથી તે ગુણોત્તર $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$ અને $\frac{c_1}{c_2}$ ની કિંમત પરથી નક્કી કરો :

(i) $3x + 2y = 5$ ; $2x - 3y = 7$

(ii) $2x - 3y = 8$ ; $4x - 6y = 9$

(iii) $\frac{3}{2}x + \frac{5}{3}y = 7$ ; $9x - 10y = 14$

(iv) $5x - 3y = 11$ ; $-10x + 6y = -22$

(v) $\frac{4}{3}x + 2y = 8$ ; $2x + 3y = 12$

**4.** નીચેના પૈકી કયું સુરેખ સમીકરણયુગ્મ સુસંગત છે કે સુસંગત નથી તે જણાવો. જો તે સુસંગત હોય, તો આલેખની રીતે ઉકેલ શોધો :

(i) $x + y = 5$, $2x + 2y = 10$

(ii) $x - y = 8$, $3x - 3y = 16$

(iii) $2x + y - 6 = 0$, $4x - 2y - 4 = 0$

(iv) $2x - 2y - 2 = 0$, $4x - 4y - 5 = 0$

**5.** એક લંબચોરસ બગીચાની અર્ધપરિમિતિ 36 મીટર છે તથા તેની લંબાઈ એ તેની પહોળાઈ કરતાં 4 મીટર વધુ છે, તો બગીચાની બાજુઓનાં માપ શોધો.

**6.** સુરેખ સમીકરણ $2x + 3y - 8 = 0$ આપેલ છે. એવું બીજું દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ લખો કે જેથી બનતી જોડીનું ભૌમિતિક નિરૂપણ નીચે પ્રમાણે હોય :

(i) છેદતી રેખાઓ (ii) સમાંતર રેખાઓ (iii) સંપાતી રેખાઓ

**7.** સમીકરણો $x - y + 1 = 0$ અને $3x + 2y - 12 = 0$ દ્વારા દર્શાવાતી રેખાઓના આલેખ દોરો. આ રેખાઓ અને $x$-અક્ષ દ્વારા રચાયેલા ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓના યામ દર્શાવો અને બનતા ત્રિકોણાકાર પ્રદેશને છાયાંકિત કરો.

## 3.3 સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ મેળવાની બૈજિક રીત

આગળના વિભાગમાં આપણે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ મેળવવા માટે આલેખની રીત વિશે ચર્ચા કરી. આલેખ પર $\left(\sqrt{3}, 2\sqrt{7}\right)$, $(-1.75, 3.3)$, $\left(\frac{4}{13}, \frac{1}{19}\right)$ જેવાં પૂર્ણાંક ન હોય તેવા યામ ધરાવતાં બિંદુઓ આવતાં હોય ત્યારે આ રીત અનુકૂળ નથી. આવાં બિંદુઓ (આલેખપત્ર પર) આલેખવામાં ભૂલ થવાની શક્યતાઓ રહે છે. શું આવા યુગ્મનો ઉકેલ શોધવાની મુશ્કેલી દૂર કરવા બીજી કોઈ રીતો છે ? આના માટે ઘણી બૈજિક રીતો છે.

હવે આપણે, કેટલીક બૈજિક રીતો દ્વારા ઉકેલ શોધવાની ચર્ચા કરીશું.

Z8G1E6

### 3.3.1 આદેશની રીત :

કેટલાંક ઉદાહરણોની મદદથી આપણે આદેશની રીતની ચર્ચા કરીશું.

**ઉદાહરણ 4 :** આદેશની રીતનો ઉપયોગ કરી, નીચે આપેલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ મેળવો :

$$7x - 15y = 2 \quad (1)$$

$$x + 2y = 3 \quad (2)$$

**ઉકેલ :**

**સોપાન 1 :** આ રીતમાં કોઈ પણ એક સમીકરણમાંથી એક ચલની કિંમત બીજા ચલના સ્વરૂપમાં મેળવવામાં આવે છે.

ધારો કે સમીકરણ (2) લઈએ.

$$x + 2y = 3 \text{ ને}$$

$$x = 3 - 2y \text{ તરીકે લો.} \quad (3)$$

**સોપાન 2 :** સમીકરણ (1) માં $x$ ની કિંમત મૂકતાં,

$$7(3 - 2y) - 15y = 2$$

$$\therefore 21 - 14y - 15y = 2$$

$$\therefore -29y = -19$$

$$\therefore y = \frac{19}{29}$$

**સોપાન 3 :** સમીકરણ (3) માં $y$ ની કિંમત મૂકતાં,

$$x = 3 - 2\left(\frac{19}{29}\right) = \frac{49}{29}$$

$$\therefore \text{ ઉકેલ } x = \frac{49}{29}, y = \frac{19}{29} \text{ મળે.}$$

**ચકાસણી :** તમે બંને સમીકરણોમાં $x = \frac{49}{29}$ અને $y = \frac{19}{29}$ મૂકશો તો જણાશે કે બંને સમીકરણોનું સમાધાન થાય છે.

આદેશની રીતને વધુ સ્પષ્ટ રીતે સમજવા માટે નીચેનાં સોપાનો દ્વારા તેનો વિચાર કરીએ.

**સોપાન 1 :** અનુકૂળ હોય તે રીતે એક સમીકરણ પરથી એક ચલને બીજા ચલના સ્વરૂપમાં મેળવો. ઉદાહરણ તરીકે, $y$ ને બીજા ચલ $x$ ના સ્વરૂપમાં મેળવો.

**સોપાન 2 :** આ સિવાયના સમીકરણમાં $y$ ની કિંમત મૂકતાં, સમીકરણ એક ચલ $x$ ના સ્વરૂપમાં મળશે અને આપણે તેને ઉકેલી શકીશું.

કેટલીક વખત નીચે આપેલા ઉદાહરણ 6 અને ઉદાહરણ 7 ની જેમ તમે ચલ વિનાનું વિધાન મેળવો તે શક્ય છે. જો આ વિધાન સત્ય હોય તો તમે અનુમાન કરી શકો કે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મને અનંત ઉકેલ છે. જો આ વિધાન અસત્ય હોય તો દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મ સુસંગત નથી.

**સોપાન 3 :** સોપાન 1 ની મદદથી બીજા ચલ $x$ ની કિંમતને સોપાન 2 ના સમીકરણમાં મૂકતાં ચલ $y$ (અથવા $x$) ની કિંમત મળશે.

***નોંધ : આપણે એક ચલની કિંમત બીજા ચલના સ્વરૂપમાં મેળવીને સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ મેળવીએ છીએ. ઉકેલ મેળવવાની આ રીતને આદેશની રીત તરીકે ઓળખાય છે.***

**ઉદાહરણ 5 :** આફતાબ તેની દીકરીને કહે છે, "સાત વર્ષ પહેલાં મારી ઉંમર તે વખતની તારી ઉંમર કરતાં સાત ગણી હતી હવે પછીનાં ત્રણ વર્ષ પછી મારી ઉંમર તારી તે વખતની ઉંમર કરતાં ત્રણ ગણી હશે." આ પરિસ્થિતિને આદેશની રીતે ઉકેલો.

**ઉકેલ :** ધારો કે આફતાબ અને તેની પુત્રીની વર્તમાન ઉંમર (વર્ષમાં) અનુક્રમે $s$ અને $t$ છે. આપેલ માહિતી પરથી દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મને આ પરિસ્થિતિમાં નીચે પ્રમાણે દર્શાવાય છે :

$$s - 7 = 7\,(t - 7), \text{ એટલે કે } s - 7t + 42 = 0 \qquad (1) \qquad \text{અને}$$

$$s + 3 = 3\,(t + 3), \text{ એટલે કે } s - 3t = 6 \qquad (2)$$

સમીકરણ (2)નો ઉપયોગ કરતાં, $s = 3t + 6$ મળે છે. $s$ ની આ કિંમત સમીકરણ (1)માં મૂકતાં,

$$(3t + 6) - 7t + 42 = 0,$$

$$\therefore\ 4t = 48$$

$$\text{તેથી } t = 12.$$

સમીકરણ (2)માં $t$ ની કિંમત મૂકતાં, આપણને

$$s = 3\,(12) + 6 = 42 \text{ મળે.}$$

તેથી, આફતાબ અને તેની પુત્રીની ઉંમર અનુક્રમે 42 વર્ષ અને 12 વર્ષ છે.

આ સમસ્યા માટે આ ઉકેલ સમીકરણોમાં મૂકી સમીકરણોનું સમાધાન થાય છે તેમ ચકાસી શકાય છે.

**ઉદાહરણ 6 :** એક દુકાનમાં 2 પેન્સિલો અને 3 રબરની કિંમત ₹ 9 છે અને 4 પેન્સિલોની અને 6 રબરની કિંમત ₹ 18 છે, તો એક પેન્સિલ અને એક રબરની કિંમત શોધો.

**ઉકેલ :** દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મ આ પ્રમાણે છે :

$$2x + 3y = 9 \qquad (1)$$

$$4x + 6y = 18 \qquad (2)$$

આપણે પ્રથમ ચલ $x$ ની કિંમત $y$ ના સ્વરૂપમાં દર્શાવતાં,

સમીકરણ $2x + 3y = 9$ માંથી $x = \dfrac{9-3y}{2}$ મળે છે. (3)

સમીકરણ (2) માં, $x$ ની કિંમત મૂકતાં,

$$\frac{4(9-3y)}{2} + 6y = 18$$

$$\therefore\ 18 - 6y + 6y = 18$$

$$\therefore\ 18 = 18$$

આ વિધાન $y$ ની તમામ કિંમતો માટે સત્ય છે. આપણને $y$ ની કોઈ નિશ્ચિત કિંમત ઉકેલ સ્વરૂપે મળતી નથી. તેથી આપણને $x$ ની પણ નિશ્ચિત કિંમત મળતી નથી. આ પરિસ્થિતિ ઊભી થાય છે, કારણ કે બંને સમીકરણો સમાન છે. તેથી સમીકરણો (1) અને (2) ને અનંત ઉકેલ છે. આપણે એક પેન્સિલ અને એક રબરની અનન્ય કિંમત શોધી શકતા નથી, કારણ આ પરિસ્થિતિમાં તેને ઘણા સમાન ઉકેલો મળે છે.

**ઉદાહરણ 7 :** રેલવેના બે પાટાના સમીકરણ $x + 2y - 4 = 0$ અને $2x + 4y - 12 = 0$ દ્વારા દર્શાવેલા છે. શું રેલવેના બે પાટા એકબીજાને છેદશે ?

**ઉકેલ :** દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મ આ પ્રમાણે છે :

$$x + 2y - 4 = 0 \qquad (1)$$

$$2x + 4y - 12 = 0 \qquad (2)$$

સમીકરણ (1) ઉપરથી $x$ ને $y$ ના સ્વરૂપમાં સમીકરણમાં મૂકતાં,

$$x = 4 - 2y$$

હવે, સમીકરણ (2) માં $x$ ની કિંમત મૂકતાં,

$$2(4 - 2y) + 4y - 12 = 0$$

$$\therefore\ 8 - 12 = 0$$

$$\therefore\ -4 = 0$$

આ વિધાન અસત્ય છે.

તેથી સમીકરણોને એક પણ સામાન્ય ઉકેલ નથી, તેથી રેલવેના બે પાટા એકબીજાને છેદતા નથી.

## સ્વાધ્યાય 3.2

**1.** નીચેના દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ આદેશની રીતે મેળવો :

(i) $x + y = 14$, $x - y = 4$

(ii) $s - t = 3$, $\frac{s}{3} + \frac{t}{2} = 6$

(iii) $3x - y = 3$, $9x - 3y = 9$

(iv) $0.2x + 0.3y = 1.3$, $0.4x + 0.5y = 2.3$

(v) $\sqrt{2}\,x + \sqrt{3}\,y = 0$, $\sqrt{3}\,x - \sqrt{8}\,y = 0$

(vi) $\frac{3x}{2} - \frac{5y}{3} = -2$, $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{13}{6}$

**2.** $2x + 3y = 11$ અને $2x - 4y = -24$ નો ઉકેલ શોધો અને એવો '$m$' શોધો કે જેથી $y = mx + 3$ થાય.

**3.** નીચેની સમસ્યા ઉપરથી દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મ મેળવો અને તેમનો ઉકેલ આદેશની રીતે મેળવો :

(i) બે સંખ્યાનો તફાવત 26 છે અને એક સંખ્યા બીજી સંખ્યાથી ત્રણ ગણી છે, તો તે બે સંખ્યા શોધો.

(ii) બે પૂરકકોણો પૈકી મોટો ખૂણો નાના ખૂણા કરતાં 18° મોટો હોય, તો તે પૂરકકોણો શોધો.

(iii) ક્રિકેટ ટીમના કોચે 7 બૅટ અને 6 દડાઓ ₹ 3800માં ખરીદ્યા. પછીથી તેણે તે જ કિંમતવાળા 3 બૅટ અને 5 દડાઓ ₹ 1750 માં ખરીદ્યાં. તો એક બૅટની કિંમત અને એક દડાની કિંમત શોધો.

(iv) એક શહેરમાં ટૅક્સીનું ભાડું નિશ્ચિત ભાડા અને કાપેલા અંતરના પ્રમાણમાં સંયુક્ત રીતે લેવાય છે. 10 કિમીના અંતર માટે ₹ 105 અને 15 કિમીની મુસાફરી માટે ₹ 155 ની ચુકવણી કરવી પડે છે. તો નિશ્ચિત ભાડું કેટલું અને પ્રતિ કિમીના દરે કેટલી કિંમત ચૂકવવી પડે ? મુસાફરે 25 કિમીની મુસાફરી માટે કેટલું ભાડું ચૂકવવું પડશે ?

(v) એક અપૂર્ણાંકના અંશ અને છેદ બંનેમાં 2 ઉમેરતાં તે $\frac{9}{11}$ બને છે. અપૂર્ણાંકના અંશ અને છેદ બંનેમાં 3 ઉમેરતાં તે $\frac{5}{6}$ બને, તો તે અપૂર્ણાંક શોધો.

(vi) પાંચ વર્ષ પછી જેકબની ઉંમર (વર્ષમાં) તેના પુત્રની ઉંમર (વર્ષમાં) કરતાં ત્રણ ગણી હશે. પાંચ વર્ષ પહેલાં, જેકબની ઉંમર (વર્ષમાં) તેના પુત્રની ઉંમરથી સાત ગણી હોય, તો તેમની વર્તમાન ઉંમર શોધો.

### 3.3.2 લોપની રીત :

G9Z1C7

હવે, આપણે એક અન્ય રીતમાં એક ચલનો લોપ (દૂર કરીને) કરવાની રીતનો વિચાર કરીશું. આ રીત આદેશની રીત કરતાં કેટલીક વાર વધારે અનુકૂળ પડે છે. આપણે આ રીત કેવી રીતે કામ કરે છે તે જોઈશું.

**ઉદાહરણ 8 :** બે વ્યક્તિની માસિક આવકનો ગુણોત્તર 9:7 છે અને તેમના માસિક ખર્ચનો ગુણોત્તર 4:3 છે. જો દરેક વ્યક્તિ માસિક ₹ 2000 ની બચત કરે, તો તેમની માસિક આવક શોધો.

**ઉકેલ :** ધારો કે બે વ્યક્તિની આવક અનુક્રમે ₹ $9x$ અને ₹ $7x$ છે અને તેમનો ખર્ચ અનુક્રમે ₹ $4y$ અને ₹ $3y$ છે. આ પરિસ્થિતિ દર્શાવતાં સમીકરણો આ પ્રમાણે છે :

$$9x - 4y = 2000 \quad (1)$$

અને $$7x - 3y = 2000 \quad (2)$$

**સોપાન 1 :** સમીકરણ (1) ને 3 વડે ગુણતાં અને સમીકરણ (2) ને 4 વડે ગુણતાં $y$ ના સહગુણકો સમાન બનશે.

આપણને સમીકરણો નીચે પ્રમાણે મળશે :

$$27x - 12y = 6000 \quad (3)$$

$$28x - 12y = 8000 \quad (4)$$

**સોપાન 2 :** સમીકરણ (4) માંથી સમીકરણ (3) બાદ કરતાં, $y$ નો લોપ થશે, કારણ કે $y$ ના સહગુણકો સરખા છે.

$$(28x - 27x) - (12y - 12y) = 8000 - 6000$$

$$\therefore x = 2000$$

**સોપાન 3 :** સમીકરણ (1) માં $x$ ની કિંમત મૂકતાં,

$$9(2000) - 4y = 2000$$

$$\therefore y = 4000$$

તેથી, સમીકરણોના ઉકેલ $x = 2000$, $y = 4000$ છે તેથી બંને વ્યક્તિઓની માસિક આવક અનુક્રમે ₹ 18,000 અને ₹ 14,000 છે.

**ચકાસણી :** 18000 : 14000 = 9 : 7

અને તેમના ખર્ચનો ગુણોત્તર = (18000 – 2000) : (14000 – 2000) = 16000 : 12000 = 4 : 3 મળશે.

**નોંધ :**

1. *ઉપરના ઉદાહરણમાં ઉકેલ મેળવવા માટે વપરાયેલ પદ્ધતિને 'લોપની રીત' કહેવામાં આવે છે, કારણ કે આપણે પ્રથમ એક ચલનો લોપ કરીને એક ચલનું સુરેખ સમીકરણ મેળવીએ છીએ. ઉપરના ઉદાહરણમાં આપણે $y$ નો લોપ કર્યો હતો. આપણે $x$ નો લોપ પણ કરી શકીએ.*

   તે રીતનો પ્રયત્ન જાતે કરો.

2. ***તમે આ સમસ્યાનો ઉકેલ શોધવા આદેશની રીત અથવા આલેખની રીતનો પણ ઉપયોગ કરી શક્યા હોત.***

આમ કરતા જ રહો અને જુઓ કે કઈ રીત વધુ સાનુકૂળ છે.

આપણે લોપની રીતનાં સોપાનોને નીચે પ્રમાણે નોંધીશું :

**સોપાન 1 :** સૌપ્રથમ બંને સમીકરણોને કોઈ યોગ્ય શૂન્યેતર અચળ સંખ્યા વડે ગુણવાથી ($x$ અથવા $y$ પૈકી કોઈ એકના સહગુણક) એક ચલના સહગુણકો સમાન થાય.

**સોપાન 2 :** ત્યાર બાદ એક સમીકરણમાં બીજું સમીકરણ ઉમેરતાં અથવા એક સમીકરણમાંથી બીજું સમીકરણ બાદ કરતાં એક ચલનો લોપ થશે. જો તમને એક ચલનું સમીકરણ મળે તો સોપાન 3 પર જાઓ.

સોપાન 2 માં, આપણને ચલ ન હોય તેવું સત્ય વિધાન મળે તો, સમીકરણયુગ્મને અનંત ઉકેલો મળશે.

સોપાન 2 માં, આપણને ચલ ન હોય તેવું અસત્ય વિધાન મળે તો, સમીકરણયુગ્મને ઉકેલ નથી. એટલે કે તે સુસંગત નથી.

**સોપાન 3 :** એક ચલ સુરેખ સમીકરણ ઉકેલતાં આપણને ($x$ અથવા $y$) કોઈ એક ચલની કિંમત મળે.

**સોપાન 4 :** મૂળ સમીકરણ પૈકીના કોઈ એક સમીકરણમાં $x$ (અથવા $y$)ની કિંમત મૂકતાં આપણને બીજા ચલની કિંમત મળે છે.

હવે, તે સમજવા માટે આપણે કેટલાંક વધુ ઉદાહરણો ઉકેલીશું.

**ઉદાહરણ 9 :** નીચેના સુરેખ સમીકરણયુગ્મના શક્ય ઉકેલ લોપની રીતનો ઉપયોગ કરી શોધો :

$$2x + 3y = 8 \qquad (1)$$
$$4x + 6y = 7 \qquad (2)$$

**ઉકેલ :**

**સોપાન 1 :** સમીકરણ (1) ને 2 વડે અને સમીકરણ (2) ને 1 વડે ગુણતાં $x$ ના સહગુણકો સમાન મળશે. આપણને સમીકરણો આ પ્રમાણે મળશે.

$$4x + 6y = 16 \qquad (3)$$
$$4x + 6y = 7 \qquad (4)$$

**સોપાન 2 :** સમીકરણ (3) માંથી સમીકરણ (4) બાદ કરતાં,

$$\therefore (4x - 4x) + (6y - 6y) = 16 - 7$$

$\therefore 0 = 9$. આ અસત્ય વિધાન છે.

તેથી સુરેખ સમીકરણયુગ્મને ઉકેલ નથી.

**ઉદાહરણ 10 :** બે અંકોની એક સંખ્યા અને તે સંખ્યાના અંકોની અદલાબદલી કરતાં મળતી સંખ્યાનો સરવાળો 66 છે. જો તે સંખ્યાના અંકોનો તફાવત 2 હોય, તો તે સંખ્યા શોધો. આવી કેટલી સંખ્યાઓ છે ?

**ઉકેલ :** ધારો કે બે અંકોની પ્રથમ સંખ્યાના દશકનો અંક અને એકમનો અંક અનુક્રમે $x$ અને $y$ છે.

તેથી પ્રથમ સંખ્યાનું વિસ્તૃત સ્વરૂપ $10x + y$ છે.

(ઉદાહરણ તરીકે $56 = 10\,(5) + 6$)

જ્યારે અંકોની અદલાબદલી કરતાં $x$ એ એકમનો અંક અને $y$ દશકનો અંક બનશે. આ સંખ્યાનું વિસ્તૃત સ્વરૂપ $10y + x$ છે.

(ઉદાહરણ તરીકે 56 ના અંકોની અદલાબદલી પછીનું સ્વરૂપ 65 = 10 (6) + 5)

આપેલ શરત અનુસાર,

$$(10x + y) + (10y + x) = 66$$

$$\therefore\ 11(x + y) = 66$$

$$\therefore\ x + y = 6 \qquad (1)$$

આપણને આપેલ છે કે તે સંખ્યાના બે અંકોનો તફાવત 2 છે.

$$\therefore\quad x - y = 2 \qquad (2)$$

$$\text{અથવા } y - x = 2 \qquad (3)$$

જો $x - y = 2$, તો સમીકરણ (1) અને સમીકરણ (2) ને લોપની રીતે ઉકેલતાં, આપણને $x = 4$ અને $y = 2$ મળે. આ સ્થિતિમાં આપણને માંગેલ સંખ્યા 42 મળે.

જો $y - x = 2$, તો સમીકરણ (1) અને સમીકરણ (3) ને લોપની રીતે ઉકેલતાં, આપણને $x = 2$ અને $y = 4$ મળે.

આ સ્થિતિમાં, આપણને માંગેલ સંખ્યા 24 મળે.

આમ, આપણને બે સંખ્યાઓ 42 અને 24 માંગ્યા પ્રમાણે મળે છે.

**ચકાસણી :** અહીં 42 + 24 = 66 અને 4 – 2 = 2 તથા 24 + 42 = 66 અને 4 – 2 = 2 મળે છે.

## સ્વાધ્યાય 3.3

**1.** નીચેના સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ લોપની રીતે અને આદેશની રીતે શોધો :

(i) $x + y = 5$ અને $2x - 3y = 4$ (ii) $3x + 4y = 10$ અને $2x - 2y = 2$

(iii) $3x - 5y - 4 = 0$ અને $9x = 2y + 7$ (iv) $\frac{x}{2} + \frac{2y}{3} = -1$ અને $x - \frac{y}{3} = 3$

**2.** આપેલી સમસ્યાઓ પરથી સુરેખ સમીકરણયુગ્મ બનાવો અને તેમના ઉકેલ (જો શક્ય હોય તો) લોપની રીતે શોધો :

(i) એક અપૂર્ણાંકના અંશમાં 1 ઉમેરતાં અને છેદમાંથી 1 બાદ કરતાં અપૂર્ણાંક કિંમત અતિસંક્ષિપ્તરૂપમાં 1 બને છે. જો માત્ર છેદમાં 1 ઉમેરતાં અપૂર્ણાંકનું અતિસંક્ષિપ્ત સ્વરૂપ $\frac{1}{2}$ બને, તો તે અપૂર્ણાંક શોધો.

(ii) પાંચ વર્ષ પહેલાં, નૂરીની ઉંમર સોનુની ઉંમરથી ત્રણ ગણી હતી. દસ વર્ષ પછી નૂરીની ઉંમર સોનુની ઉંમરથી બે ગણી થશે, તો નૂરી અને સોનુની વર્તમાન ઉંમર કેટલી થશે ?

(iii) બે અંકોની સંખ્યાના અંકોનો સરવાળો 9 છે. વળી સંખ્યાના નવ ગણા કરતાં મળતી સંખ્યા એ અંકોની અદલાબદલી કરતાં મળતી સંખ્યા કરતાં બે ગણી છે, તો તે સંખ્યા શોધો.

(iv) મીના ₹ 2000 ઉપાડવા બૅન્કમાં ગઈ હતી. તેણે કૅશિયરને કહ્યું હતું કે મને માત્ર ₹ 50 અને ₹ 100 ની નોટો જ જોઈએ છે. મીનાને કુલ 25 નોટો મળી હતી. તો તેણે ₹ 50 અને ₹ 100 ની પ્રત્યેકની કેટલી કેટલી નોટો મેળવી હશે ?

(v) એક પ્રતિષ્ઠિત પુસ્તકાલય પ્રથમ ત્રણ દિવસનું એક પુસ્તકનું નિશ્ચિત ભાડું લે છે અને પછીના પ્રત્યેક દિવસ દીઠ અતિરિક્ત ભાડું લે છે. સરિતા સાત દિવસ પુસ્તક રાખવાના ₹ 27 ચૂકવે છે. સુસી પાંચ દિવસ પુસ્તક રાખવાના ₹ 21 ચૂકવે છે, તો નિશ્ચિત ભાડું અને પ્રત્યેક વધારાના દિવસનું ભાડું શોધો.

## 3.4 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં તમે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

**1.** દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ મેળવવાની બે રીતો છે :

(i) આલેખની રીત (ii) બૈજિક રીત

**2.** આલેખની રીત :

સુરેખ સમીકરણયુગ્મનો આલેખ એક જ આલેખપત્ર પર બે રેખાઓ દર્શાવે છે.

(i) જો ઉપર્યુક્ત બંને રેખાઓ પરસ્પર છેદે તો સમીકરણયુગ્મને અનન્ય ઉકેલ હોય અને બે રેખાઓના અનન્ય છેદબિંદુના યામ એ સમીકરણયુગ્મનો ઉકેલ દર્શાવે. આ પરિસ્થિતિમાં આપેલ સમીકરણયુગ્મ સુસંગત છે તેમ કહેવાય.

(ii) જો બંને રેખાઓ સંપાતી હોય, તો રેખા પરનાં અનંત બિંદુઓના યામ સમીકરણનો ઉકેલ દર્શાવે છે. તેથી સમીકરણયુગ્મને અનંત ઉકેલ છે તેમ કહેવાય. આ પરિસ્થિતિમાં બંને સમીકરણો સુરેખ અવલંબી છે તેમ કહેવાય.

(iii) જો બંને રેખાઓ સમાંતર હોય, તો તેમનું સામાન્ય બિંદુ ન મળે. આ પરિસ્થિતિમાં સમીકરણયુગ્મને કોઈ વાસ્તવિક ઉકેલ નથી. આ પરિસ્થિતિમાં સમીકરણો સુસંગત નથી તેમ કહેવાય.

**3.** સુરેખ સમીકરણયુગ્મના ઉકેલ માટે બૈજિક રીતો :

(i) આદેશની રીત (ii) લોપની રીત

**4.** સુરેખ સમીકરણયુગ્મ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ અને $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ માટે નીચે આપેલા વિકલ્પો ઉદ્ભવે છે.

(i) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$; આ સ્થિતિમાં સુરેખ સમીકરણયુગ્મ સુસંગત છે.

(ii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$, $\frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ તથા $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$; આ સ્થિતિમાં સુરેખ સમીકરણયુગ્મ સુસંગત નથી.

(iii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$; આ સ્થિતિમાં સુરેખ સમીકરણયુગ્મ સુસંગત છે અને અવલંબી છે.

D9D5J9

**વાચકને નોંધ :**
સુરેખ ન હોય તેવાં કેટલાંક સમીકરણોને યોગ્ય આદેશ પસંદ કરી સુરેખ સમીકરણમાં રૂપાંતર કરી શકાય છે.