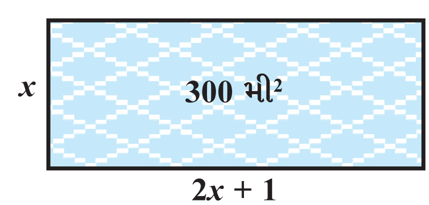
દ્વિઘાત સમીકરણ 4

4.1 પ્રાસ્તાવિક

પ્રકરણ 2 માં તમે વિવિધ પ્રકારની બહુપદીનો અભ્યાસ કર્યો. શૂન્યેતર a માટે $ax^2 + bx + c$ દ્વિઘાત બહુપદી છે. જો આ બહુપદીનું મૂલ્ય શૂન્ય લેવામાં આવે, તો આપણને દ્વિઘાત સમીકરણ મળે. વાસ્તવિક જીવનસંબંધી ઘણા બધા પ્રશ્નોમાં દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉપયોગ થાય છે. ઉદાહરણ તરીકે, એક ધાર્મિક ટ્રસ્ટને 300 ચોરસ મીટર જગ્યામાં જેની લંબાઈ તેની પહોળાઈના બમણા કરતાં 1 મીટર વધારે હોય તેવો એક પ્રાર્થનાખંડ બાંધવો છે. તો તેની લંબાઈ અને પહોળાઈ કેટલી હોવી જોઈએ ? ધારો કે ખંડની પહોળાઈ x મીટર છે. આથી, તેની લંબાઈ $(2x + 1)$ મીટર હોવી જોઈએ. આપણે આ માહિતી આકૃતિ 4.1 પ્રમાણે ચિત્ર સ્વરૂપે દર્શાવી શકીએ.



આકૃતિ 4.1

હવે, ખંડનું ક્ષેત્રફળ $= (2x + 1) \cdot x$ મી^{2} $= (2x^2 + x)$ મી^{2}

આથી, $2x^2 + x = 300$ (આપેલ છે.)

આમ, $2x^2 + x - 300 = 0$

આથી, ખંડની પહોળાઈ દ્વિઘાત સમીકરણ $2x^2 + x - 300 = 0$ નું સમાધાન કરે છે.

ઘણા લોકો માને છે કે સૌપ્રથમ બેબીલોનવાસીઓએ દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉકેલ મેળવ્યો. ઉદાહરણ તરીકે, બે ધન સંખ્યાના સરવાળા અને ગુણાકાર આપેલ હોય, તો તે સંખ્યાઓ કેવી રીતે મેળવવી તે એ લોકો જાણતાં હતાં અને આ પ્રશ્ન $x^2 - px + q = 0$ પ્રકારના દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉકેલ મેળવવાને સમકક્ષ છે. ગ્રીક ગણિતશાસ્ત્રી *યુક્લિડે (Euclid)* લંબાઈ શોધવાની ભૌમિતિક રીત વિકસાવી. તેને આપણે વર્તમાન પરિભાષામાં દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉકેલ કહીએ છીએ. સામાન્ય રીતે, દ્વિઘાત સમીકરણ ઉકેલવાનો શ્રેય મોટે ભાગે પ્રાચીન ભારતીય ગણિતશાસ્ત્રીઓને જાય છે. વાસ્તવમાં, *બ્રહ્મગુપ્તે (Brahmagupta)* (C.E. 598 - C.E.665) $ax^2 + bx = c$ દ્વિઘાત સમીકરણના ઉકેલ માટે સ્પષ્ટ સૂત્ર આપ્યું. પછીથી, *શ્રીધર આચાર્ય (Shridharacharya)* (C.E. 1025)એ દ્વિઘાત સૂત્ર તરીકે ઓળખાતું સૂત્ર પ્રસ્થાપિત કર્યું. (તેનો ઉલ્લેખ ભાસ્કર-II માં કરેલ છે.) તેમાં દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉકેલ મેળવવા માટે પૂર્ણ વર્ગની

રીતનો ઉપયોગ કરાય છે. એક અરબ ગણિતશાસ્ત્રી ***અલ-ખ્વારિઝમી (Al-khwarizmi)*** (C.E. 800 ની આસપાસ)એ પણ વિવિધ પ્રકારના દ્વિઘાત સમીકરણનો અભ્યાસ કર્યો હતો. ***અબ્રાહમ બાર હિયા હા-નાસી (Abraham bar Hiyya Ha-Nasi)***એ યુરોપમાં C.E. 1145 માં તેણે લખેલ પુસ્તક ***Liber Embadorum*** માં ભિન્ન-ભિન્ન દ્વિઘાત સમીકરણના પૂર્ણ ઉકેલ આપ્યા.

આ પ્રકરણમાં તમે દ્વિઘાત સમીકરણો અને તેમના ઉકેલ મેળવવા માટેની જુદી-જુદી રીત શીખશો. દ્વિઘાત સમીકરણના રોજિંદા જીવનમાં ઉપયોગ પણ જોશો.

4.2 દ્વિઘાત સમીકરણ

I6X1G5

a, b, c વાસ્તવિક સંખ્યાઓ હોય તથા $a \neq 0$ હોય, તો ચલ x માં દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ પ્રકારનું હોય છે. ઉદાહરણ તરીકે, $2x^2 + x - 300 = 0$ એ દ્વિઘાત સમીકરણ છે. આ જ રીતે, $2x^2 - 3x + 1 = 0$, $4x - 3x^2 + 2 = 0$ અને $1 - x^2 + 300 = 0$ પણ દ્વિઘાત સમીકરણો છે.

ખરેખર જો $p(x)$ એ 2 ઘાતની બહુપદી હોય, તો $p(x) = 0$ પ્રકારનું કોઈ પણ સમીકરણ, એ દ્વિઘાત સમીકરણ છે. પરંતુ જ્યારે આપણે $p(x)$ ના પ્રત્યેક પદને ઘાતાંકના ઊતરતા ક્રમમાં લખીએ ત્યારે આપણને દ્વિઘાત સમીકરણનું પ્રમાણિત સ્વરૂપ મળે છે. ***આમ, $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ ને દ્વિઘાત સમીકરણનું પ્રમાણિત સ્વરૂપ કહેવાય.***

આપણી આસપાસની દુનિયામાં અનેક જુદી-જુદી સ્થિતિમાં અને ગણિતનાં ભિન્ન ક્ષેત્રોમાં દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉદ્ભવ થતો હોય છે. ચાલો આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 1 : નીચે આપેલ સ્થિતિને ગાણિતિક રીતે વ્યક્ત કરો :

(i) જ્હૉન અને જીવંતી પાસે કુલ 45 લખોટીઓ છે. પ્રત્યેક વ્યક્તિ પાંચ-પાંચ લખોટી ખોઈ કાઢે છે અને હવે તેમની પાસે બાકી રહેલી લખોટીઓની સંખ્યાનો ગુણાકાર 124 છે, આપણે જાણવું છે કે તેમની પાસે શરૂઆતમાં કેટલી લખોટીઓ હતી.

(ii) એક કુટિર ઉદ્યોગ એક દિવસમાં કેટલાંક રમકડાં બનાવે છે. પ્રત્યેક રમકડું બનાવવાનો ખર્ચ (રૂપિયામાં) 55માંથી એક દિવસમાં ઉત્પાદિત થતાં રમકડાંની સંખ્યા બાદ કરીએ તેટલો છે. કોઈ એક ચોક્કસ દિવસે ઉત્પાદન-ખર્ચ ₹ 750 છે. આપણે તે દિવસે ઉત્પાદિત રમકડાંની સંખ્યા જાણવી છે.

ઉકેલ :

(i) ધારો કે જ્હૉન પાસે x લખોટીઓ છે.

આથી, જીવંતી પાસેની લખોટીઓની સંખ્યા $= 45 - x$ **(કેમ ?)**

જ્હૉન પાસે 5 લખોટીઓ ખોઈ કાઢ્યા બાદની લખોટીઓની સંખ્યા $= x - 5$

જીવંતી પાસે 5 લખોટી ખોઈ કાઢ્યા પછી લખોટીની સંખ્યા $= 45 - x - 5 = 40 - x$

આથી, તેમનો ગુણાકાર $= (x - 5)(40 - x)$

$$= 40x - x^2 - 200 + 5x$$

$$= -x^2 + 45x - 200$$

આથી, $-x^2 + 45x - 200 = 124$ **(ગુણાકાર 124 આપેલ છે.)**

$$\therefore -x^2 + 45x - 324 = 0$$

$$\therefore x^2 - 45x + 324 = 0$$

આથી, જ્હૉન પાસેની લખોટીની સંખ્યા, દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 - 45x + 324 = 0$ નું સમાધાન કરે છે. માંગેલ પ્રશ્નની આ ગાણિતિક રજૂઆત છે.

(ii) ધારો કે નિશ્ચિત દિવસે ઉત્પાદિત રમકડાંની સંખ્યા x છે.

આથી, તે નિશ્ચિત દિવસે પ્રત્યેક રમકડું બનાવવાનો ખર્ચ (₹ માં) $= 55 - x$.

આથી, તે દિવસનો રમકડાં બનાવવાનો કુલ ખર્ચ $= x(55 - x)$

આથી, $x(55 - x) = 750$

$\therefore\ 55x - x^2 = 750$

$\therefore\ -x^2 + 55x - 750 = 0$

$\therefore\ x^2 - 55x + 750 = 0$

આથી, નિશ્ચિત દિવસે ઉત્પાદિત રમકડાંની સંખ્યા દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 - 55x + 750 = 0$ નું સમાધાન કરે છે. આ આપેલ પ્રશ્નની ગાણિતિક રજૂઆત છે.

ઉદાહરણ 2 : ચકાસો કે નીચેનાં સમીકરણ દ્વિઘાત સમીકરણ છે કે નહિ :

(i) $(x - 2)^2 + 1 = 2x - 3$ (ii) $x(x + 1) + 8 = (x + 2)(x - 2)$

(iii) $x(2x + 3) = x^2 + 1$ (iv) $(x + 2)^3 = x^3 - 4$

ઉકેલ :

(i) ડા.બા. $= (x - 2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 4 + 1$

$= x^2 - 4x + 5$

આથી, $(x - 2)^2 + 1 = 2x - 3$ ને

$x^2 - 4x + 5 = 2x - 3$ તરીકે લખી શકાય.

$\therefore\ x^2 - 6x + 8 = 0$

$a \neq 0$ માટે $ax^2 + bx + c = 0$ પ્રકારનું સમીકરણ છે.

આથી, આપેલ સમીકરણ દ્વિઘાત સમીકરણ છે.

(ii) $x(x + 1) + 8 = x^2 + x + 8$ અને

$(x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$ છે.

આથી, $x^2 + x + 8 = x^2 - 4$

$\therefore\ x + 12 = 0$

આ સમીકરણ $a \neq 0$ માટે $ax^2 + bx + c = 0$ પ્રકારનું નથી.

આથી, આપેલ સમીકરણ દ્વિઘાત સમીકરણ નથી.

(iii) અહીં, ડા.બા. $= x(2x + 3) = 2x^2 + 3x$

આથી, $x(2x + 3) = x^2 + 1$ ને

$2x^2 + 3x = x^2 + 1$ સ્વરૂપે પુનઃ લખી શકાય.

આથી, $x^2 + 3x - 1 = 0$

આ $a \neq 0$ માટે, $ax^2 + bx + c = 0$ પ્રકારનું સમીકરણ છે.

આથી, આપેલ સમીકરણ દ્વિઘાત સમીકરણ છે.

(iv) અહીં, ડા.બા. $= (x + 2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

આથી, $(x + 2)^3 = x^3 - 4$ ને

$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = x^3 - 4$ સ્વરૂપે પુનઃ લખી શકાય.

$6x^2 + 12x + 12 = 0$ અથવા $x^2 + 2x + 2 = 0$

આ $a \neq 0$ માટે $ax^2 + bx + c = 0$ પ્રકારનું સમીકરણ છે.

આથી, આપેલ સમીકરણ દ્વિઘાત સમીકરણ છે.

નોંધ : ચોકસાઈ રાખો કે, ઉપર (ii)માં આપેલ સમીકરણ દ્વિઘાત સમીકરણ જેવું લાગે છે. પરંતુ તે દ્વિઘાત સમીકરણ નથી.

ઉપર (iv)માં આપેલ સમીકરણ ત્રિઘાત સમીકરણ (3 ઘાતવાળું સમીકરણ) જેવું દેખાય છે, દ્વિઘાત સમીકરણ જેવું નહિ. પરંતુ તે દ્વિઘાત સમીકરણમાં પરિવર્તિત થાય છે. આમ જોઈ શકશો કે ઘણી વખત આપેલ સમીકરણ દ્વિઘાત સમીકરણ છે કે કેમ તે નક્કી કરતાં પહેલાં તેનું સાદું રૂપ આપવું જરૂરી છે.

સ્વાધ્યાય 4.1

1. નીચે આપેલ સમીકરણો દ્વિઘાત સમીકરણો છે કે કેમ તે ચકાસો :

(i) $(x + 1)^2 = 2(x - 3)$

(ii) $x^2 - 2x = (-2)(3 - x)$

(iii) $(x - 2)(x + 1) = (x - 1)(x + 3)$

(iv) $(x - 3)(2x + 1) = x(x + 5)$

(v) $(2x - 1)(x - 3) = (x + 5)(x - 1)$

(vi) $x^2 + 3x + 1 = (x - 2)^2$

(vii) $(x + 2)^3 = 2x(x^2 - 1)$

(viii) $x^3 - 4x^2 - x + 1 = (x - 2)^3$

2. નીચે આપેલ પરિસ્થિતિઓને દ્વિઘાત સમીકરણ સ્વરૂપે દર્શાવો :

(i) જમીનના એક લંબચોરસ ટુકડાનું ક્ષેત્રફળ 528 મી^{2} છે. તેની લંબાઈ (મીટરમાં), પહોળાઈ (મીટરમાં)ના બમણાથી એક મીટર જેટલી વધુ છે. આપણે જમીનના આ ટુકડાની લંબાઈ અને પહોળાઈ શોધવી છે.

(ii) બે ક્રમિક ધન પૂર્ણાંકોનો ગુણાકાર 306 છે. આપણે આ પૂર્ણાંક શોધવા છે.

(iii) રોહનની માતા તેના કરતાં 26 વર્ષ મોટાં છે. આજથી 3 વર્ષ પછી તેમની ઉંમર દર્શાવતી સંખ્યાઓનો ગુણાકાર (વર્ષમાં) 360 હશે. આપણે રોહનની હાલની ઉંમર શોધવી છે.

(iv) એક ટ્રેન 480 કિમીનું અંતર અચળ ઝડપથી કાપે છે. જો ઝડપ 8 કિમી/કલાક ઓછી હોય, તો આટલું જ અંતર કાપવા તે 3 કલાક વધુ લે છે, તો ટ્રેનની ઝડપ શોધો.

4.3 અવયવીકરણ વડે દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉકેલ

P2B4K5

દ્વિઘાત સમીકરણ $2x^2 - 3x + 1 = 0$ નો વિચાર કરો. જો સમીકરણની ડાબી બાજુમાં x ને બદલે 1 લઈએ તો $(2 \times 1^2) - (3 \times 1) + 1 = 0 =$ જ.બા. મળે છે. આપણે કહી શકીએ, કે, દ્વિઘાત સમીકરણ $2x^2 - 3x + 1 = 0$ નું એક બીજ 1 છે. આથી, એમ પણ આપણે કહી શકીએ કે દ્વિઘાત બહુપદી $2x^2 - 3x + 1$ નું એક શૂન્ય 1 છે.

વ્યાપક રીતે, જો $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ હોય તો વાસ્તવિક સંખ્યા α એ દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ નું બીજ કહેવાય. આપણે એમ પણ કહી શકીએ કે,

$x = \alpha$ એ દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉકેલ છે અથવા α દ્વિઘાત સમીકરણનું સમાધાન કરે છે. આપણે નોંધીએ કે, દ્વિઘાત બહુપદી $ax^2 + bx + c$ નાં શૂન્યો તથા દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ સમાન છે.

તમે પ્રકરણ 2 માં જોયું કે દ્વિઘાત બહુપદીને વધુમાં વધુ 2 શૂન્યો હોય. આથી, કોઈ પણ દ્વિઘાત સમીકરણને વધુમાં વધુ 2 બીજ હોય.

તમે ધોરણ IX માં કોઈ પણ દ્વિઘાત બહુપદીના મધ્યમ પદને બે ભાગમાં વહેંચી તેના અવયવ પાડવાની રીત શીખી ગયા. આપણે આ જ્ઞાનનો ઉપયોગ દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજ શોધવા કરીશું. જોઈએ, આ કેવી રીતે શક્ય બને છે.

ઉદાહરણ 3 : સમીકરણ $2x^2 - 5x + 3 = 0$ નાં બીજ અવયવ પાડીને શોધો.

ઉકેલ : આપણે સૌપ્રથમ મધ્યમપદ $-5x$ ના બે ભાગ $-2x$ અને $-3x$ કરીએ.

[કેમ કે $(-2x) \times (-3x) = 6x^2 = (2x^2) \times 3$].

આથી, $2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 - 2x - 3x + 3 = 2x\,(x - 1) - 3(x - 1) = (2x - 3)(x - 1)$

હવે, $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ને $(2x - 3)(x - 1) = 0$ લખી શકાય.

આથી, $2x^2 - 5x + 3 = 0$ તથા $(2x - 3)(x - 1) = 0$ માટેનાં x નાં મૂલ્યો સમાન હશે.

અર્થાત્ $2x - 3 = 0$ અથવા $x - 1 = 0$.

હવે $2x - 3 = 0$ પરથી $x = \frac{3}{2}$ અને $x - 1 = 0$ પરથી $x = 1$ મળશે.

આથી, $x = \frac{3}{2}$ અને $x = 1$ આપેલ સમીકરણના ઉકેલ હશે.

બીજા શબ્દોમાં, 1 અને $\frac{3}{2}$ સમીકરણ $2x^2 - 5x + 3 = 0$ નાં બીજ છે.

ચકાસો કે 1 અને $\frac{3}{2}$ આપેલ સમીકરણનાં બીજ છે.

આપણે નોંધીએ કે $2x^2 - 5x + 3 = 0$ નાં બીજ, $2x^2 - 5x + 3$ ના બે સુરેખ અવયવ પાડી અને દરેક અવયવનું મૂલ્ય શૂન્ય લઈને શોધ્યું છે.

ઉદાહરણ 4 : દ્વિઘાત સમીકરણ $6x^2 - x - 2 = 0$ નાં બીજ શોધો.

ઉકેલ : અહીં,
$$\begin{aligned} 6x^2 - x - 2 &= 6x^2 + 3x - 4x - 2 \\ &= 3x\,(2x + 1) - 2\,(2x + 1) \\ &= (3x - 2)\,(2x + 1) \end{aligned}$$

$6x^2 - x - 2 = 0$ નાં બીજ એ $(3x - 2)\,(2x + 1) = 0$ દ્વારા મળતાં x નાં મૂલ્યો છે.

આથી, $3x - 2 = 0$ અથવા $2x + 1 = 0$

અર્થાત્, $x = \frac{2}{3}$ અથવા $x = -\frac{1}{2}$.

આથી, $6x^2 - x - 2 = 0$ નાં બીજ $\frac{2}{3}$ અને $-\frac{1}{2}$ છે.

આપણે, $\frac{2}{3}$ અને $-\frac{1}{2}$ સમીકરણ $6x^2 - x - 2 = 0$ નું સમાધાન કરે છે તે ચકાસીને બીજની ચકાસણી કરી શકીએ.

ઉદાહરણ 5 : દ્વિઘાત સમીકરણ $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0$ નાં બીજ શોધો.

ઉકેલ : $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 3x^2 - \sqrt{6}x - \sqrt{6}x + 2$

$$= \sqrt{3}x(\sqrt{3}x - \sqrt{2}) - \sqrt{2}(\sqrt{3}x - \sqrt{2})$$

$$= (\sqrt{3}x - \sqrt{2})(\sqrt{3}x - \sqrt{2})$$

આથી, સમીકરણનાં બીજ $(\sqrt{3}x - \sqrt{2})(\sqrt{3}x - \sqrt{2}) = 0$ થાય તેવા x નાં મૂલ્યો છે.

આમ, $\sqrt{3}x - \sqrt{2} = 0$ પરથી $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$

આથી, આ બીજ બે વખત પુનરાવર્તિત અવયવ $\sqrt{3}x - \sqrt{2}$ ને સંગત મળે છે.

આમ, $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0$ નાં બીજ $\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}$ છે.

ઉદાહરણ 6 : વિભાગ 4.1માં ચર્ચા કરેલ પ્રાર્થનાખંડની બાજુઓનાં માપ શોધો.

ઉકેલ : વિભાગ 4.1માં આપણે જોયું કે જો ખંડની પહોળાઈ x મી હોય તો x એ સમીકરણ $2x^2 + x - 300 = 0$ નું સમાધાન કરે. અવયવીકરણની રીતનો ઉપયોગ કરતાં, આપણે સમીકરણને $2x^2 - 24x + 25x - 300 = 0$ એમ લખી શકીએ.

$$\therefore 2x(x - 12) + 25(x - 12) = 0$$

$$\therefore (x - 12)(2x + 25) = 0$$

આથી, આપેલ સમીકરણનાં બીજ $x = 12$ અથવા $x = -12.5$ છે. પરંતુ x એ ખંડની પહોળાઈ હોવાથી તે ઋણ ન હોઈ શકે. આથી, ખંડની પહોળાઈ 12 મી અને તેની લંબાઈ $2x + 1 = 25$ મી.

સ્વાધ્યાય 4.2

1. નીચે આપેલ સમીકરણના ઉકેલ અવયવીકરણની રીતથી મેળવો :
   (i) $x^2 - 3x - 10 = 0$ (ii) $2x^2 + x - 6 = 0$
   (iii) $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$ (iv) $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$
   (v) $100x^2 - 20x + 1 = 0$
2. ઉદાહરણ (1)માં આપેલ પ્રશ્નોના ઉકેલ મેળવો.
3. બે એવી સંખ્યાઓ શોધો કે જેમનો સરવાળો 27 અને ગુણાકાર 182 હોય.
4. જેના વર્ગોનો સરવાળો 365 થાય એવી બે ક્રમિક ધન પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ શોધો.
5. એક કાટકોણ ત્રિકોણનો વેધ તેના પાયા કરતાં 7 સેમી નાનો છે. જો કર્ણની લંબાઈ 13 સેમી હોય, તો બાકીની બે બાજુનાં માપ શોધો.
6. એક કુટિર ઉદ્યોગ એક દિવસમાં કેટલીક માટીની વસ્તુઓ બનાવે છે. એક નિશ્ચિત દિવસે જણાયું કે પ્રત્યેક વસ્તુની ઉત્પાદન કિંમત (રૂપિયામાં), તે દિવસે ઉત્પાદિત વસ્તુના બમણા કરતાં 3 વધુ હતી. જો તે દિવસે ઉત્પાદિત ખર્ચ ₹ 90 હોય તો, ઉત્પાદિત વસ્તુની સંખ્યા અને પ્રત્યેક વસ્તુની ઉત્પાદન કિંમત શોધો.

4.4 બીજનાં સ્વરૂપ

દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ છે.}$$

જો, $b^2 - 4ac > 0$ તો, આપણને બે ભિન્ન બીજ $\frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ અને $\frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ મળે.

જો, $b^2 - 4ac = 0$ તો, $x = \frac{-b}{2a} \pm 0,$

અર્થાત્, $x = \frac{-b}{2a}$ અથવા $x = \frac{-b}{2a}$

આમ, સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બંને બીજ $\frac{-b}{2a}$ થાય.

આથી, આપણે કહી શકીએ કે આ વિકલ્પમાં દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બંને વાસ્તવિક બીજ સમાન છે.

જો $b^2 - 4ac < 0$ તો એવી કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા ના મળે, જેનો વર્ગ $b^2 - 4ac$ થાય. આથી, આ વિકલ્પમાં આપેલ દ્વિઘાત સમીકરણનાં કોઈ વાસ્તવિક બીજ ના મળે.

$b^2 - 4ac$ દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ વાસ્તવિક છે કે નહિ તે નક્કી કરતો હોવાથી, $b^2 - 4ac$ ને દ્વિઘાત સમીકરણનો **વિવેચક** કહેવાય છે.

આથી દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ માટે

(i) જો $b^2 - 4ac > 0$ તો, બે ભિન્ન વાસ્તવિક બીજ મળે.

(ii) જો $b^2 - 4ac = 0$ તો, બે સમાન વાસ્તવિક બીજ મળે.

(iii) જો $b^2 - 4ac < 0$ તો, કોઈ વાસ્તવિક બીજ ના મળે.

ચાલો, આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો સમજીએ.

ઉદાહરણ 7 : દ્વિઘાત સમીકરણ $2x^2 - 4x + 3 = 0$ નો વિવેચક શોધો અને તેના પરથી બીજનું સ્વરૂપ નક્કી કરો.

ઉકેલ : આપેલ દ્વિઘાત સમીકરણ $a = 2$, $b = -4$, $c = 3$ માટે $ax^2 + bx + c = 0$ પ્રકારનું છે, આથી, વિવેચક

$$b^2 - 4ac = (-4)^2 - (4 \times 2 \times 3) = 16 - 24 = -8 < 0$$

આથી, આપેલ દ્વિઘાત સમીકરણને કોઈ વાસ્તવિક બીજ શક્ય નથી.

ઉદાહરણ 8 : 13 મીટર વ્યાસવાળા એક વર્તુળાકાર બગીચાની સીમા પરના એક બિંદુએ એક થાંભલો એવી રીતે લગાવેલ છે કે જેથી આ બગીચાના એક વ્યાસનાં બંને અંત્યબિંદુઓ A અને B આગળ બનેલ ફાટકથી થાંભલાના અંતરનો તફાવત 7 મીટર હોય. શું આ શક્ય છે ? જો હા, તો બંને ફાટકથી કેટલે દૂર થાંભલો લગાવવો જોઈએ ?

ઉકેલ : ચાલો પ્રથમ રેખાકૃતિ બનાવીએ. (જુઓ આકૃતિ 4.2.)

ધારો કે P થાંભલાનું જરૂરી સ્થાન છે. ધારો કે થાંભલાથી ફાટક B નું અંતર x મી, અર્થાત્ BP = x મી. હવે, થાંભલાથી બંને ફાટકના અંતરનો તફાવત = AP – BP (અથવા BP – AP) = 7 મી

આથી, AP = $(x + 7)$ મી

હવે, AB વ્યાસ હોવાથી, AB = 13 મી

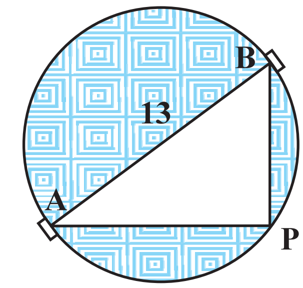
$\angle APB = 90°$ (કેમ?)

હવે, $AP^2 + PB^2 = AB^2$ (પાયથાગોરસના પ્રમેય પરથી)

$\therefore (x + 7)^2 + x^2 = 13^2$

$\therefore x^2 + 14x + 49 + x^2 = 169$

$\therefore 2x^2 + 14x - 120 = 0$



આકૃતિ 4.2

આથી, થાંભલાનું ફાટક B થી અંતર 'x' એ સમીકરણ $x^2 + 7x - 60 = 0$ નું સમાધાન કરે છે.

આથી જો દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજ વાસ્તવિક હોય તો, થાંભલાનું સ્થાન નક્કી કરવું શક્ય બને. આ શક્ય છે કે કેમ, તે જોવા ચાલો વિવેચક નો વિચાર કરીએ.

વિવેચક $b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \times 1 \times (-60) = 289 > 0$

આથી, આપેલ દ્વિઘાત સમીકરણનાં બે બીજ વાસ્તવિક બીજ છે અને આથી બગીચાની સીમા પર થાંભલો લગાવવાનું શક્ય છે.

દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 + 7x - 60 = 0$ ને દ્વિઘાત સૂત્રથી ઉકેલતાં,

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{-7 \pm 17}{2}$$

આમ, $x = 5$ અથવા -12 મળે.

પરંતુ, x થાંભલા અને ફાટક B વચ્ચેનું અંતર હોવાથી, તે ધન જ હોવું જોઈએ. આથી, $x = -12$ ને અવગણવું જોઈએ. આથી, $x = 5$

આથી, સીમા પર થાંભલો એ રીતે લગાવવો જોઈએ કે જેથી તેનું ફાટક B થી અંતર 5 મી અને ફાટક A થી અંતર 12 મી હોય.

ઉદાહરણ 9 : સમીકરણ $3x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$ નો વિવેચક શોધો. તે પરથી સમીકરણનાં બીજનું સ્વરૂપ નક્કી કરો. જો તે વાસ્તવિક હોય તો મેળવો.

ઉકેલ : અહીં, $a = 3$, $b = -2$, $c = \frac{1}{3}$

આથી, વિવેચક $b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 3 \times \frac{1}{3} = 4 - 4 = 0$

આથી, આપેલ દ્વિઘાત સમીકરણનાં બંને બીજ વાસ્તવિક અને સમાન છે.

બીજ $\frac{-b}{2a}, \frac{-b}{2a}$ અર્થાત્ $\frac{2}{6}, \frac{2}{6}$ અર્થાત્ $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ છે.

સ્વાધ્યાય 4.3

1. નીચે આપેલાં દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજનાં સ્વરૂપ શોધો. જો તેમને વાસ્તવિક બીજ હોય તો તે શોધો :

(i) $2x^2 - 3x + 5 = 0$ (ii) $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$

(iii) $2x^2 - 6x + 3 = 0$

2. નીચેનાં દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજ સમાન હોય તો k નું મૂલ્ય શોધો :
   (i) $2x^2 + kx + 3 = 0$ (ii) $kx(x - 2) + 6 = 0$
3. જેની લંબાઈ, પહોળાઈ કરતાં બમણી હોય અને ક્ષેત્રફળ 800 મી^{2} હોય એવી લંબચોરસ આંબાવાડી બનાવવી શક્ય છે ? જો તમારો ઉત્તર 'હા' માં હોય તો, તેની લંબાઈ અને પહોળાઈ મેળવો.
4. બે મિત્રોની ઉંમરનો સરવાળો 20 વર્ષ છે. 4 વર્ષ પહેલાં તેમની ઉંમર દર્શાવતી સંખ્યાઓનો ગુણાકાર (વર્ષમાં) 48 હતો. શું આ પરિસ્થિતિ શક્ય છે ? જો હોય તો, તેમની અત્યારની ઉંમર શોધો.
5. જેની પરિમિતિ 80 મી અને ક્ષેત્રફળ 400 મી^{2} હોય, તેવો લંબચોરસ બગીચો બનાવવાનું શક્ય છે ? જો તે શક્ય હોય, તો તેની લંબાઈ અને પહોળાઈ શોધો.

4.5 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં તમે નીચેના મુદ્દાનો અભ્યાસ કર્યો :

1. a, b, c વાસ્તવિક સંખ્યાઓ અને $a \neq 0$ માટે ચલ x માં દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ પ્રકારનું હોય.
2. જો $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ હોય તો વાસ્તવિક સંખ્યા α દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નું એક બીજ કહેવાય. દ્વિઘાત બહુપદી $ax^2 + bx + c$ નાં શૂન્યો અને દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ સમાન હોય.
3. જો આપણે $ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ ને સુરેખ અવયવના ગુણાકાર સ્વરૂપે દર્શાવી શકીએ, તો દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ દરેક અવયવનું મૂલ્ય શૂન્ય લઈ મેળવી શકીએ.
4. દ્વિઘાત સૂત્ર : દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ તરીકે મળે, જ્યાં $b^2 - 4ac \geq 0$
5. દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ માં
   (i) જો $b^2 - 4ac > 0$ તો, બે ભિન્ન વાસ્તવિક બીજ મળે.
   (ii) જો $b^2 - 4ac = 0$ તો, બે સમાન વાસ્તવિક બીજ મળે.
   (iii) જો $b^2 - 4ac < 0$ તો, વાસ્તવિક બીજ ના મળે.

C3L7H3