પૂર્ણ સંખ્યાઓ

EAM6A3

પ્રકરણ 2

2.1 પ્રાસ્તાવિક (Introduction)

વિદ્યાર્થીમિત્રો, આપણે જાણીએ છીએ તે અનુસાર, જ્યારે આપણે કોઈ ગણતરી ચાલુ કરીએ છીએ, ત્યારે આપણે 1, 2, 3, 4.... સંખ્યાઓનો જ ઉપયોગ કરીએ છીએ. એટલે કે, પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો જ ઉપયોગ કરીએ છીએ. આ સંખ્યાઓને ગણિતની ભાષામાં પ્રાકૃતિક સંખ્યા કહેવાય છે.

પહેલાંની સંખ્યા (Predecessor) અને પછીની સંખ્યા (Successor) : (પૂર્વવર્તી અને પ્રતિવર્તી)

આપેલી કોઈ પણ પ્રાકૃતિક સંખ્યામાં જો એક ઉમેરવામાં આવે, તો આપણને બીજી પ્રાકૃતિક સંખ્યા મળે છે. એટલે કે, આપણે તે સંખ્યા પછીની તરતની બીજી સંખ્યા મેળવી શકીએ છીએ.

ઉદાહરણ તરીકે, કોઈ એક સંખ્યા 16 લઈએ, તો તેના પછીની સંખ્યા મેળવવા માટે, 16 + 1 = 17, તે જ રીતે, 19 + 1 = 20 છે.

આ જ રીતે આપણે આગળ પણ ઘણી સંખ્યાઓ મેળવી શકીએ છીએ. સંખ્યા 16 એ સંખ્યા 17ના તરત પહેલાં આવે છે. એટલે કહી શકાય કે 17ના પહેલાંની તરતની સંખ્યા 17 – 1 = 16 થશે. 20ના પહેલાંની તરતની સંખ્યા 20 – 1 = 19 થશે, વગેરે સંખ્યા મેળવી શકાય.

પ્રયત્ન કરો.

1. નીચેની સંખ્યાની પહેલાંની અને પછીની સંખ્યા લખો.
   19; 1997; 12000;
   49; 100000.
2. કઈ પ્રાકૃતિક સંખ્યાની પહેલાં પ્રાકૃતિક સંખ્યા નથી ?
3. કઈ પ્રાકૃતિક સંખ્યાની પછી પ્રાકૃતિક સંખ્યા નથી ? શું તે સૌથી છેલ્લી આવતી પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે ?

સંખ્યા 3 પાસે તેની પહેલાં તરત આવતી અને તેની પછી તરત આવતી સંખ્યા એમ બંને સંખ્યા છે. તમે સંખ્યા 2 વિશે જણાવો. જુઓ 2 પછી આવતી સંખ્યા 3 અને પહેલાં આવતી સંખ્યા 1 છે. તો શું સંખ્યા 1 પાસે, પહેલાં આવતી સંખ્યા અને પછી તરત આવતી સંખ્યા એમ બંને સંખ્યા છે?

આપણે આપણી શાળાનાં બાળકોની ગણતરી કરી શકીએ છીએ. આપણે કોઈ ગામમાં રહેતી વ્યક્તિઓની સંખ્યા પણ ગણી શકીએ

છીએ. આપણે ભારતમાં રહેતાં તમામ લોકોની સંખ્યા ગણી શકીએ છીએ, પરંતુ આપણે આકાશમાં આવેલા તારાઓની સંખ્યા ન ગણી શકીએ. તે જ રીતે, આપણે આપણા માથાના વાળ પણ ન ગણી શકીએ. પણ જો તે ગણી શકાય તેમ હોત તો તે ચોક્કસ કોઈ સંખ્યા જ હોત. પછી આપણે તે સંખ્યામાં 1 ઉમેરીને તેનાથી મોટી સંખ્યા મેળવી શક્યા હોત. તો આવી પરિસ્થિતિમાં આપણે બે વ્યક્તિના માથાના વાળ પણ ગણીને સરખામણી કરી શક્યા હોત !

હવે સ્પષ્ટ છે કે સૌથી મોટી પ્રાકૃતિક સંખ્યા કોઈ નથી. ઉપર મેળવેલી માહિતી અનુસાર, જ્યારે આપણે પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ઉપયોગ કરીએ ત્યારે આપણને ઘણા પ્રશ્નો ઉદ્ભવે છે. તમારે તમને ઉદ્ભવતા આવા કેટલાક પ્રશ્નો વિચારવા જ જોઈએ અને તે તમારા મિત્ર સાથે તેની ચર્ચા કરવી જોઈએ. બની શકે કે તમને તેમાંના ઘણા સવાલોના જવાબ સંતોષકારક ન પણ મળે.

2D8NF9

2.2 પૂર્ણ સંખ્યાઓ (Whole Numbers)

આપણે જોઈ ગયાં છીએ કે પ્રાકૃતિક સંખ્યા 1 ના પહેલાં કોઈ પ્રાકૃતિક સંખ્યા આવતી નથી. આથી, 0 (શૂન્ય)ને આપણે પ્રાકૃતિક સંખ્યા 1 ના પહેલાં આવતી સંખ્યા લઈએ છીએ.

(પ્રાકૃતિક સંખ્યામાં શૂન્યને સમાવીને પૂર્ણ સંખ્યાઓનો સમૂહ મળે છે.)

પ્રયત્ન કરો.

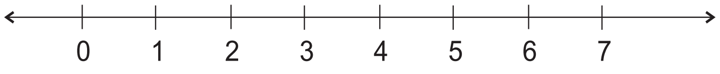
1. શું દરેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા પૂર્ણ સંખ્યા હોય છે?
2. શું દરેક પૂર્ણ સંખ્યા પ્રાકૃતિક સંખ્યા હોય છે?
3. સૌથી નાની પૂર્ણ સંખ્યા કઈ છે?
4. સૌથી મોટી પૂર્ણ સંખ્યા કઈ છે?

આપણે પાછલા વર્ગોમાં સંખ્યાની પાયાની ગણતરીઓ જેવી કે સરવાળા, બાદબાકી, ગુણાકાર અને ભાગાકાર શીખી ગયા છીએ. આપણે જાણીએ છીએ કે, કયા પ્રશ્નમાં કઈ પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરી શકાય. તો ચાલો આપણે આ સંખ્યાઓને એક સંખ્યારેખા પર મૂકીએ. પણ તે પહેલાં આપણે સંખ્યારેખા વિશે જાણી લઈએ.

2.3. સંખ્યારેખા (Number line)

એક સીધી રેખા દોરો. તેના પર કોઈ એક બિંદુ લઈએ. તે બિંદુને આપણે 0 નામ આપીએ. શૂન્ય (0)ની જમણી બાજુ આપણે બીજું એક બિંદુ લઈએ તેને 1 નામ આપીએ. 0 અને 1 વચ્ચેના આ અંતરને એકમ અંતર કહીશું. હવે, આ જ રેખા પર 1 ની જમણી બાજુ એકમ અંતર જેટલા અંતરે બીજું એક બિંદુ લઈ તેને 2 નામ આપીએ. આ જ રીતે 2ની જમણી બાજુ એકમ અંતરે 3, 4, 5,.... બિંદુઓ લઈ નામ આપો. તમે આ જ રીતે જમણી બાજુ કોઈ પણ પૂર્ણ સંખ્યા સુધી જઈ શકો છો.

અહીં નીચે આપેલી રેખા પૂર્ણ સંખ્યાઓ માટે સંખ્યારેખા છે :



અહીં બિંદુ 2 અને 4 વચ્ચે કેટલું અંતર છે? તેનું અંતર ચોક્કસપણે બે એકમ (unit) જ છે. શું તમે બિંદુ 2 અને 6 તથા 2 એ 7 વચ્ચેનું અંતર જણાવી શકો?

તમે જોઈ શકો છો કે સંખ્યારેખા પર સંખ્યા 7 સંખ્યા 4ની જમણી બાજુ આવેલી છે. સંખ્યા 7 એ 4 કરતાં મોટી સંખ્યા છે. એટલે 7 > 4 (7 is greater than 4). હવે સંખ્યા 8

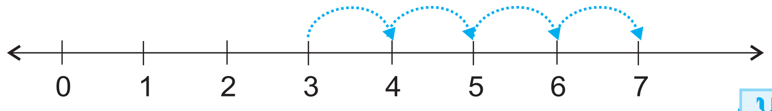
એ સંખ્યારેખા પર 6ની જમણી બાજુએ આવેલી સંખ્યા છે. આથી 8 > 6. આ અવલોકન પરથી આપણે કહી શકીએ છીએ કે, આ બંને પૂર્ણ સંખ્યાઓમાંથી કઈ સંખ્યા મોટી છે અને જો સંખ્યારેખા પર કોઈ એક સંખ્યા કોઈ બીજી સંખ્યાની ડાબી બાજુ આવેલી હોય, તો તે સંખ્યા નાની સંખ્યા છે તેમ કહી શકાય.

ઉદાહરણ તરીકે 4 < 9 (4 is less than 9) છે. 4 એ સંખ્યા 9ની ડાબી બાજુ આવેલી સંખ્યા છે. તે જ પ્રમાણે 12 > 5, 12 એ 5ની જમણી બાજુએ આવેલી સંખ્યા છે. તમે 10 અને 20માંથી કઈ સંખ્યા મોટી છે અને કઈ સંખ્યા નાની છે તે જણાવી શકો છો?

હવે, સંખ્યારેખા પર 30, 12, 18નું સ્થાન તમે બતાવો. આમાંથી કઈ સંખ્યા સૌપ્રથમ ડાબી બાજુ આવેલી છે? શું તમે જણાવી શકો કે 1005 અને 9756 બંનેમાંથી કઈ સંખ્યા જમણી બાજુએ આવેલી છે? સંખ્યારેખા પર 12 પછીની અને 7 પહેલાં આવતી સંખ્યા દર્શાવો.

સંખ્યારેખા પર સરવાળો (Addition on the number line)

સંખ્યારેખા પર પૂર્ણ સંખ્યાઓનો સરવાળો પણ દર્શાવી શકાય છે, તો ચાલો આપણે સંખ્યાઓ 3 અને 4નો સરવાળો જોઈએ :



આપણે સંખ્યા 3 થી ચાલુ કરીએ. આપણે સંખ્યા 3માં સંખ્યા 4નો ઉમેરો કરવો છે. આથી આપણે 3 થી જમણી બાજુ 4 પગલાં, 3 થી 4, 4 થી 5, 5 થી 6 અને 6 થી 7 જઈશું. આ રીતે આપણે સંખ્યા 3 અને સંખ્યા 4નો સરવાળો કરી સંખ્યા 7 મેળવી શકીએ.

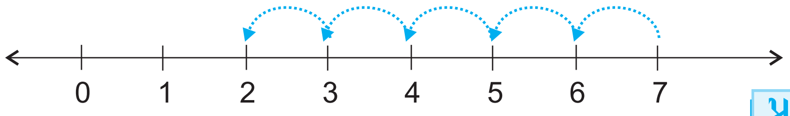
એટલે કે, 3 + 4 = 7

પ્રયત્ન કરો.

સંખ્યારેખાનો ઉપયોગ કરીને
4 + 5; 2 + 6;
3 + 5 અને
1 + 6નો સરવાળો
મેળવો.

સંખ્યારેખા પર બાદબાકી (Subtraction on the number line)

બે પૂર્ણ સંખ્યાઓની બાદબાકી પણ સંખ્યારેખા પર દર્શાવી શકાય છે, તો ચાલો આપણે 7 – 5ની બાદબાકી જોઈએ.



અહીં આપણે સંખ્યા 7થી ચાલુ કરીશું. આપણે અહીં સંખ્યા 7 માંથી સંખ્યા 5 ની બાદબાકી કરવાની છે. આથી આપણે સંખ્યા 7 થી ડાબી બાજુ પાંચ પગલાં જઈશું અને તેથી આપણે સંખ્યા 2 પર પહોંચીશું. આમ, આપણે 7 – 5 = 2 મેળવીશું.

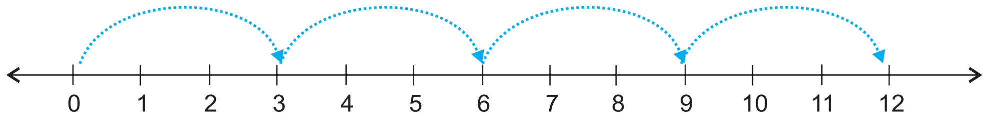
પ્રયત્ન કરો.

સંખ્યારેખાના ઉપયોગથી
8 – 3; 6 – 2;
9 – 6ની બાદબાકી
મેળવો.

સંખ્યારેખા પર ગુણાકાર (Multiplication on the number line)

હવે આપણે સંખ્યારેખા પર સંખ્યાના ગુણાકાર વિશે શીખીશું.

ચાલો આપણે 3 × 4 મેળવીએ.



અહીં શૂન્યથી ચાલુ કરીશું અને 3 સુધી જમણી બાજુ આગળ વધીશું. એવી રીતે 3 બીજીવાર, એવી જ રીતે 3 ત્રીજીવાર અને એવી જ રીતે 3 ચોથીવાર એમ આપણે ચારવાર ત્રણ-ત્રણ બિંદુ જમણી બાજુ આગળ વધીશું. એટલે આપણે 12 પર પહોંચીશું.

આથી, $3 \times 4 = 12$ મળશે.

પ્રયત્ન કરો.

સંખ્યારેખાના ઉપયોગથી 2×6, 3×3, 4×2 મેળવો.

સ્વાધ્યાય 2.1

1. 10,999 ના પછી તરત આવતી ત્રણ પ્રાકૃતિક સંખ્યા લખો.
2. 10001ના પહેલાં તરત આવતી ત્રણ પૂર્ણ સંખ્યાઓ લખો.
3. સૌથી નાની પૂર્ણ સંખ્યા કઈ છે?
4. સંખ્યાઓ 32 અને 53ના વચ્ચે આવતી પૂર્ણ સંખ્યાઓ કેટલી છે તે જણાવો.
5. નીચે આપેલી સંખ્યાઓના પછી તરત આવતી સંખ્યા જણાવો :

   (a) 2440701 (b) 100199 (c) 1099999 (d) 2345670
6. નીચે આપેલી સંખ્યાની તરત પહેલાંની સંખ્યા જણાવો :

   (a) 94 (b) 10000 (c) 208090 (d) 7654321
7. નીચે આપેલી સંખ્યાઓની જોડીમાંથી સંખ્યારેખા પર કઈ સંખ્યા ડાબી બાજુ આવશે અને કઈ સંખ્યા જમણી બાજુ આવશે તે જણાવો તથા તેમની વચ્ચે કયા ચિહ્નનો (< , >) ઉપયોગ થશે તે પણ જણાવો.

   (a) 530, 503 (b) 370, 307 (c) 98765, 56789 (d) 9830415, 10023001
8. નીચે આપેલાં વાક્યોમાંથી કયું વાક્ય ખરું (✓) અને કયું વાક્ય ખોટું (✗) છે, તે જણાવો :

   (a) શૂન્ય એ સૌથી નાની પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.

   (b) 400 એ સંખ્યા 399ના પહેલાં આવતી (predecessor) સંખ્યા છે.

   (c) શૂન્ય સૌથી નાની પૂર્ણ સંખ્યા છે.

   (d) 600 એ સંખ્યા 599ના પછી આવતી (successor) સંખ્યા છે.

   (e) દરેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા પૂર્ણ સંખ્યા છે.

   (f) દરેક પૂર્ણ સંખ્યા પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.

   (g) બે અંકોની પૂર્ણ સંખ્યાની પહેલાં આવતી સંખ્યા એક અંકની ન હોઈ શકે.

   (h) 1 એ સૌથી નાની પૂર્ણ સંખ્યા છે.

   (i) પ્રાકૃતિક સંખ્યા 1ની પહેલાં આવતી કોઈ સંખ્યા નથી.

   (j) પૂર્ણ સંખ્યા 1ની પાસે તેની પહેલાં આવતી કોઈ સંખ્યા નથી.

   (k) પૂર્ણ સંખ્યા 13, એ સંખ્યાઓ 11 અને 12ના વચ્ચે આવે છે.

   (l) પૂર્ણ સંખ્યા 0 પાસે તેના પહેલાં આવતી કોઈ સંખ્યા નથી.

   (m) બે અંકોની સંખ્યા પછી આવતી સંખ્યા હંમેશાં બે અંકની જ હોય છે.

આપણે શું ચર્ચા કરી ?

1. સંખ્યાઓ 1, 2, 3, ... જેમનો ઉપયોગ આપણે ગણવા માટે કરીએ છીએ તે પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ કહેવાય છે.
2. જો તમે કોઈ પ્રાકૃતિક સંખ્યામાં 1નો ઉમેરો કરો તો તમને એનો પ્રતિવર્તી મળે છે. જો તમે પ્રાકૃતિક સંખ્યામાંથી 1નો ઘટાડો કરો તો તમને એનો પૂર્વવર્તી મળે છે.

3. પ્રત્યેક પ્રાકૃતિક સંખ્યાનો એક પ્રતિવર્તી હોય છે. 1ને છોડીને પ્રત્યેક પ્રાકૃતિક સંખ્યાનો એક પૂર્વવર્તી હોય છે.
4. જો પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓના સમૂહમાં 0 ઉમેરીએ, તો આપણને પૂર્ણ સંખ્યાનો સમૂહ પ્રાપ્ત થાય છે. આ રીતે સંખ્યાઓ 0, 1, 2, 3, ... પૂર્ણ સંખ્યાઓનો સમૂહ બનાવે છે.
5. દરેક પૂર્ણ સંખ્યાનો એક પ્રતિવર્તી હોય છે. 0 સિવાયની પ્રત્યેક પૂર્ણ સંખ્યાનો એક પૂર્વવર્તી હોય છે.
6. દરેક પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ, પૂર્ણ સંખ્યાઓ પણ છે, પરંતુ બધી જ પૂર્ણ સંખ્યાઓ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ નથી.
7. આપણે એક રેખા લઈએ. તેના ઉપર એક બિંદુ અંકિત કરીએ. જેને 0 થી નામાંકિત કરીએ છીએ. ત્યાર બાદ આપણે 0ની જમણી અને સમાન જગ્યા ઉપર બિંદુ અંકિત કરતા જઈએ છીએ. જેને ક્રમશઃ 1, 2, 3, ...થી નામાંકિત કરીએ છીએ. આ રીતે આપણને એક સંખ્યારેખા મળે છે. જેના ઉપર પૂર્ણ સંખ્યાઓને દર્શાવવામાં આવે છે. આપણે આ સંખ્યારેખા પર સરળતાથી સંખ્યાઓનાં સરવાળા, બાદબાકી અને ગુણાકાર જેવી પ્રક્રિયાઓ કરી શકીએ છીએ.
8. સંખ્યારેખા પર જમણી બાજુ અનુરૂપ (corresponds) સરવાળો મળે છે. જ્યારે ડાબી બાજુ જતા અનુરૂપ બાદબાકી મળે છે. શૂન્ય (0)થી શરૂઆત કરીને સમાન સ્થળે ગુણાકાર પ્રાપ્ત થાય છે.