

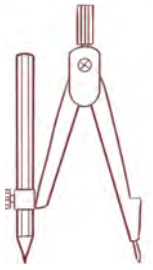
2 રેખાઓ અને ખૂણાઓ

L5K8I1

આ પ્રકરણમાં આપણે ભૂમિતિના કેટલાક મૂળભૂત ખ્યાલો જેવા કે; બિંદુ (point), રેખા (line), કિરણ (ray), રેખાખંડ (line segment) અને ખૂણા (angle) વિશે સમજ મેળવીશું. આ ખ્યાલો 'સમતલ ભૂમિતિ'ના પાયાના નિર્માણ માટેના ઘટકો છે અને તે આપણને ભૂમિતિના વધુ અદ્યતન મુદ્દાઓ જેવા કે, વિવિધ આકારોની રચના અને વિશ્લેષણ સમજવામાં મદદ કરશે.

2.1 બિંદુ (Point)

પેન્સિલની અણીદાર ટોચ વડે કાગળ પર એક ટપકું કરો. અણી જેટલી તીક્ષ્ણ હશે, ટપકું તેટલું સૂક્ષ્મ થશે. આ નાનકડું ટપકું તમને બિંદુ (point) નો ખ્યાલ આપશે. બિંદુ એક ચોક્કસ સ્થાન (location) દર્શાવે છે, પરંતુ તેને લંબાઈ (length), પહોળાઈ (breadth) કે ઊંચાઈ (height) હોતી નથી. બિંદુનાં કેટલાંક ઉદાહરણ નીચે આપેલાં છે:



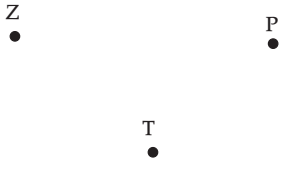
પરિકરની અણી



પેન્સિલની અણીદાર ટોચ

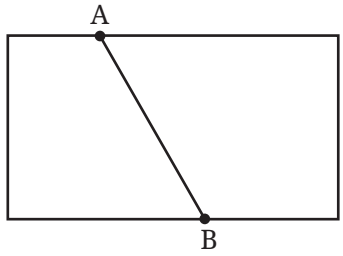
સોયની અણીદાર ટોચ

જો તમે કાગળના એક ટુકડા પર ત્રણ બિંદુઓ દર્શાવો છો તો તમને આ ત્રણ બિંદુઓને અલગ ઓળખવાની જરૂર પડી શકે છે. આ માટે, દરેક બિંદુને Z, P અને T જેવા અંગ્રેજીના એક મોટા (capital - કેપીટલ) મૂળાક્ષર વડે દર્શાવી શકાય છે.



આ બિંદુઓને 'બિંદુ Z', 'બિંદુ P' અને 'બિંદુ T' તરીકે વંચાય છે. અલબત્ત, આ બિંદુઓ ચોક્કસ સ્થાન દર્શાવે છે અને તેને અદૃશ્યરૂપે અતિસૂક્ષ્મ કલ્પવા જોઈએ.

2.2 રેખાખંડ (Line Segment)



કાગળના એક ટુકડાને વાળો અને ખોલો. શું તમને ગડી (crease - ક્રીઝ) દેખાય છે? આ રેખાખંડનો ખ્યાલ આપે છે. તેને A અને B એમ બે અંત્યબિંદુઓ (end points) હોય છે.

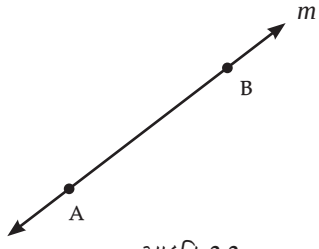
કાગળના એક પાના પર કોઈ પણ બે બિંદુઓ A અને B દર્શાવો. Aને B સાથે વિવિધ માર્ગો દ્વારા જોડવાનો પ્રયાસ કરો (આકૃતિ 2.1).



આકૃતિ 2.1

Aથી B સુધીનો સૌથી ટૂંકો માર્ગ કયો છે? બિંદુ Aથી બિંદુ B સુધીનો સૌથી ટૂંકો પથ (path), જેમાં બિંદુ A અને B નો પણ સમાવેશ થાય છે, તેને Aથી B સુધીનો **રેખાખંડ (line segment)** કહેવામાં આવે છે, જેને $\overline{AB}$ અથવા $\overline{BA}$ દ્વારા દર્શાવવામાં આવે છે. બિંદુઓ A અને Bને રેખાખંડ $\overline{AB}$ના **અંત્યબિંદુઓ (endpoints)** કહેવામાં આવે છે.

2.3 રેખા (Line)



આકૃતિ 2.2

કલ્પના કરો કે, રેખાખંડ $\overline{AB}$ને Aથી B તરફ અને Bથી A તરફ અનંત સુધી લંબાવવામાં આવ્યો છે. (જુઓ આકૃતિ 2.2) આ **રેખા (line)** માટેનું એક ઉદાહરણ છે. શું તમને લાગે છે કે તમે રેખાનું સંપૂર્ણ ચિત્ર દોરી શકો છો? ના, શા માટે?

બે બિંદુઓ A અને Bમાંથી પસાર થતી રેખા (line)ને $\overleftrightarrow{AB}$ (= $\overleftrightarrow{BA}$) તરીકે લખવામાં આવે છે. તે બંને દિશામાં અનંત સુધી વિસ્તરે છે. કેટલીક વખત રેખાને l અથવા m જેવા અક્ષર વડે પણ દર્શાવવામાં આવે છે.

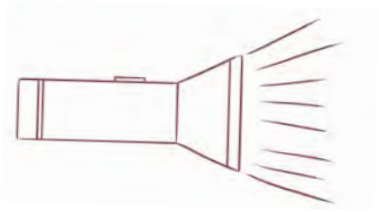
નિરીક્ષણ કરો કે, બે ભિન્ન બિંદુમાંથી **અનન્ય** (એક અને માત્ર એક – unique) **રેખા** પસાર થાય છે.

2.4 કિરણ (Ray)

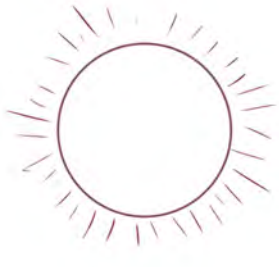
કિરણ (ray) એ રેખાનો એક ભાગ છે, જે એક બિંદુથી શરૂ થાય છે. (જેને કિરણનું શરૂઆત (પ્રારંભિક – starting)નું બિંદુ અથવા ઉદ્‌ભવ (પ્રારંભિક – initial) બિંદુ કહેવાય છે.) અને તે એક જ દિશામાં અનંત સુધી જાય છે. કિરણનાં કેટલાંક ઉદાહરણ નીચે મુજબ છે :



દીવાદાંડીમાંથી નીકળતા પ્રકાશનું કિરણપુંજ

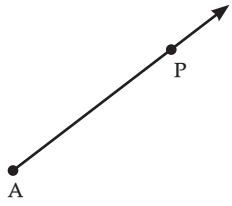


હાથબત્તીમાંથી નીકળતું પ્રકાશનું કિરણ



સૂર્યકિરણો

કિરણની આકૃતિ (આકૃતિ 2.3) જુઓ. તેના પર બે બિંદુઓ દર્શાવવામાં આવ્યાં છે. એક ઉદ્‌ભવબિંદુ A છે અને બીજું એ કિરણના માર્ગ પરનું બિંદુ P છે. આપણે આ કિરણને $\overrightarrow{AP}$ ($\neq \overrightarrow{PA}$) તરીકે દર્શાવીએ છીએ.



આકૃતિ 2.3

વિચારો અને શોધો

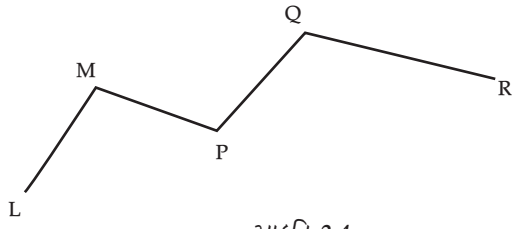
1 .

રિહાને કાગળના એક ટુકડા પર એક બિંદુ દર્શાવ્યું. આ બિંદુમાંથી પસાર થતી કેટલી રેખાઓ તે દોરી શકે છે?

શીતલે કાગળના એક ટુકડા પર બે બિંદુઓ દર્શાવ્યાં. તે આ બંને બિંદુઓમાંથી પસાર થતી કેટલી જુદી જુદી રેખાઓ દોરી શકે છે?

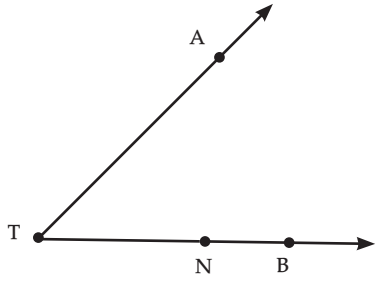
શું તમે રિહાન અને શીતલને તેમના જવાબો શોધવામાં મદદ કરી શકો છો?

2. આકૃતિ 2.4 માં રેખાખંડોનાં નામ આપો. દર્શાવેલાં પાંચ બિંદુઓમાંથી કયાં બિંદુઓ ફક્ત એક જ રેખાખંડ પર છે? કયાં બિંદુઓ બે રેખાખંડો પર છે?



આકૃતિ 2.4

3. આકૃતિ 2.5 માં દર્શાવેલાં કિરણોનાં નામ આપો. શું T આ દરેક કિરણનું ઉદ્ભવ બિંદુ છે?



આકૃતિ 2.5

4 . નીચેના દરેકને દર્શાવવા માટે એક કાચી આકૃતિ દોરો અને યોગ્ય નામાંકન કરો :

a. $\overleftrightarrow{OP}$ અને $\overleftrightarrow{OQ}$ બિંદુ O પર મળે છે.

b. $\overrightarrow{XY}$ અને $\overleftrightarrow{PQ}$ બિંદુ Mમાં છેદે છે.

c. રેખા l પર બિંદુઓ (points) E અને F આવેલાં છે, પરતુ બિંદુ D તેના પર આવેલું નથી.

d. બિંદુ P, $\overline{AB}$ પર આવેલું છે.

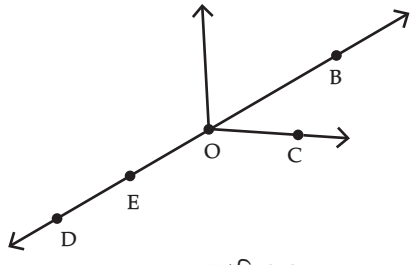
5 . આકૃતિ 2.6 પરથી નામ આપો :

a. પાંચ બિંદુ (point)

b. એક રેખા (line)

c. ચાર કિરણ (ray)

d. પાંચ રેખાખંડ (line segment)

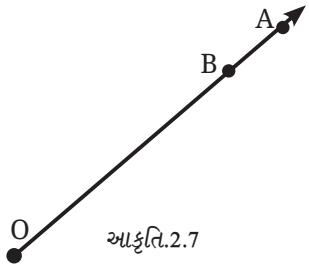


આકૃતિ 2.6

6 . અહીં એક $\overrightarrow{OA}$ (આકૃતિ 2.7) છે. તે Oથી શરૂ થાય છે અને બિંદુ Aમાંથી પસાર થાય છે. તે બિંદુ Bમાંથી પણ પસાર થાય છે.

a. શું તમે તેને $\overrightarrow{OB}$ તરીકે પણ નામ આપી શકો છો? શા માટે?

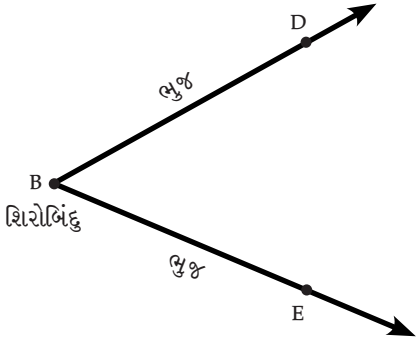
b. શું આપણે $\overrightarrow{OA}$ ને $\overrightarrow{AO}$ તરીકે લખી શકીએ? શા માટે?



આકૃતિ.2.7

2.5 ખૂણો (Angle)

બે કિરણોના સામાન્ય ઉદ્ભવ બિંદુથી **ખૂણો (angle)** બને છે. અહીં, કિરણો $\overrightarrow{BD}$ અને $\overrightarrow{BE}$ દ્વારા એક ખૂણો રચાયો છે, જેમાં B એ સામાન્ય પ્રારંભિક બિંદુ છે. (આકૃતિ 2.8)



આકૃતિ 2.8

બિંદુ Bને ખૂણાનું **શિરોબિંદુ (vertex)** કહેવાય છે અને કિરણો $\overrightarrow{BD}$ અને $\overrightarrow{BE}$ ને ખૂણાની **ભુજાઓ (arms)** કહેવામાં આવે છે.

આ ખૂણાને આપણે કેવી રીતે નામ આપી શકીએ? આપણે ફક્ત શિરોબિંદુનો ઉપયોગ કરીને તેને **ખૂણો B** કહી શકીએ. વધુ સ્પષ્ટતા માટે, આપણે ખૂણાને નામ આપવા માટે દરેક ભુજ (arm) પરના એક એક બિંદુનો અને શિરોબિંદુનો ઉપયોગ કરીએ છીએ. આ કિસ્સામાં, આપણે ખૂણાને ખૂણો DBE અથવા ખૂણો EBD તરીકે નામ આપીએ છીએ. 'ખૂણો' શબ્દને '$\angle$' પ્રતીક દ્વારા દર્શાવી શકાય છે, એટલે કે $\angle$DBE અથવા $\angle$EBD. નોંધો કે, ખૂણાનું નામ દર્શાવતી વખતે શિરોબિંદુ હંમેશાં મધ્ય અક્ષર તરીકે લખાય છે.

ખૂણાને દર્શાવવા માટે, આપણે શિરોબિંદુ પર એક નાનો વક્ર (curve) કરીએ છીએ (જુઓ આકૃતિ 2.9).

વિદ્યાએ હમણાં જ તેનું પુસ્તક ખોલ્યું છે. ચાલો, આપણે જુદા જુદા સંજોગોમાં તેના દ્વારા પુસ્તકને ખોલવાનું નિરીક્ષણ કરીએ.



સ્થિતિ 1 સ્થિતિ 2 સ્થિતિ 3 સ્થિતિ 4 સ્થિતિ 5 સ્થિતિ 6

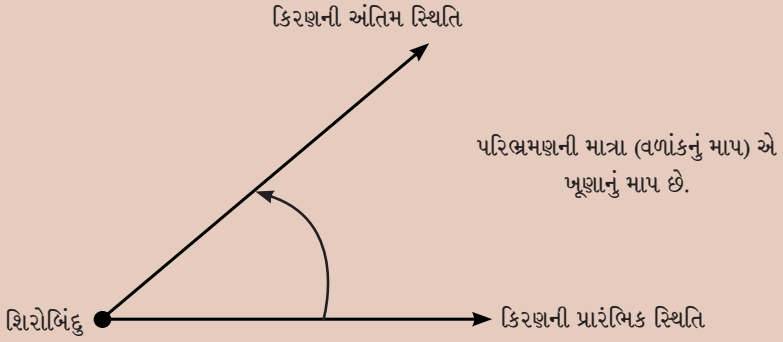
શું તમે આ દરેક સ્થિતિમાં ખૂણા બનતા જુઓ છો? શું તમે તેમની ભુજાઓ અને શિરોબિંદુને ચિહ્નિત કરી શકો છો?

કયો ખૂણો મોટો છે – સ્થિતિ 1માંનો ખૂણો કે સ્થિતિ 2માંનો ખૂણો?

જેમ આપણે રેખાખંડની લંબાઈના આધારે તેના માપ વિશે વાત કરીએ છીએ, તેમ આપણે ખૂણાની એક બાજુને શિરોબિંદુએ કરાવેલા પરિભ્રમણ (rotation)ના આધારે તેના માપ વિશે પણ વાત કરીએ છીએ.

તેથી, સ્થિતિ 2માંનો ખૂણો મોટો છે. કારણ કે, આ સ્થિતિમાં તેને વધુ પરિભ્રમણ કરાવવાની જરૂર છે. તેવી જ રીતે, સ્થિતિ 3માંનો ખૂણો સ્થિતિ 2 કરતાં પણ મોટો છે, કારણ કે અહીં, પરિભ્રમણ વધુ છે અને સ્થિતિ 4, 5 અને 6માં વધુ ને વધુ પરિભ્રમણ સાથે ક્રમશઃ મોટા ખૂણા બને છે.

એક ખૂણાનું કદ (size) એ શિરોબિંદુની આસપાસ થતા પરિભ્રમણ અથવા વળાંક(turn)નું માપ છે, જે પહેલા કિરણને બીજા કિરણ પર ખસેડવા માટે જરૂરી છે.



આકૃતિ 2.9

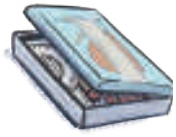
ચાલો, આપણે કેટલાંક અન્ય ઉદાહરણો જોઈએ, જ્યાં વાસ્તવિક જીવનમાં ભ્રમણ અથવા વળાંક દ્વારા ખૂણા ઉદ્‌ભવે છે:



- પરિકર (compass, rounder) અથવા દ્વિભાજક(divider)માં, આપણે ખૂણો બનાવવા માટે તેની બાજુ (ભુજા)ને ફેરવીએ છીએ. શિરોબિંદુ તે બિંદુ છે જ્યાં બે બાજુ જોડાયેલી છે. ખૂણાની ભુજા અને શિરોબિંદુને ઓળખો.
- કાતરમાં બે પાંખિયાં (blades) હોય છે. જ્યારે આપણે કંઈક કાપવા માટે તેને ખોલીએ છીએ (અથવા 'ફેરવીએ છીએ'), ત્યારે તેનાં પાંખિયાં એક ખૂણો બનાવે છે. ખૂણાની ભુજા અને શિરોબિંદુને ઓળખો.

- ચશ્માં, પાકીટ અને અન્ય સામાન્ય વસ્તુઓનાં ચિત્રો જુઓ. તેમની ભુજા અને શિરોબિંદુને ચિહ્નિત કરીને તેમાંના ખૂણાને ઓળખો.




શું તમે જોઈ શકો છો કે, એક ભુજાને બીજી ભુજાની સાપેક્ષ ફેરવવાથી ખૂણા કેવી રીતે બને છે?

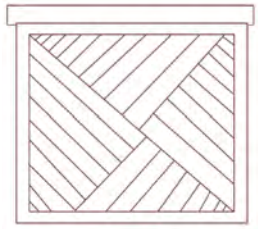
શિક્ષક માટે

શિક્ષક તરીકે તમારે, ખૂણાના કદને પરિભ્રમણના માપ તરીકે ઓળખવા માટે વિદ્યાર્થીઓ સાથે વિવિધ પ્રવૃત્તિઓનું આયોજન કરવાની જરૂર છે.

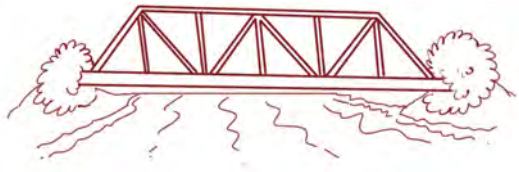
વિચારો અને શોધો

1. શું તમે આપેલાં ચિત્રોમાં ખૂણા શોધી શકો છો? કોઈ પણ એક ખૂણો બનાવતાં કિરણો દોરો અને ખૂણાના શિરોબિંદુનું નામ આપો.





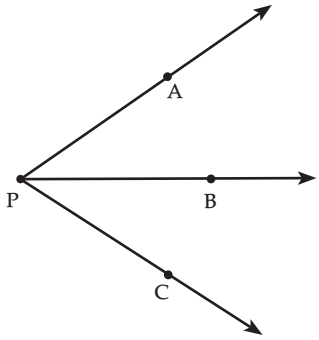




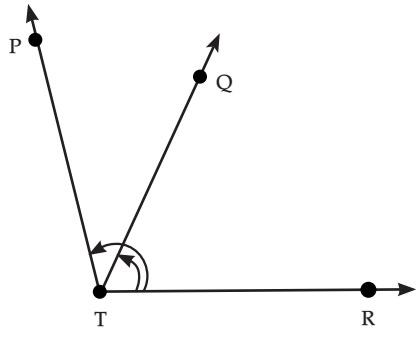
2. બાજુઓ ST અને SR ધરાવતો ખૂણો દોરો અને તેને નામ આપો.

3. $\angle APC$ ને $\angle P$ તરીકે કેમ દર્શાવી શકાય નહીં તે સમજાવો.

ગાણિતિક ચર્ચા



4. આપેલી આકૃતિમાં ચિહ્નિત કરેલા ખૂણાઓનાં નામ આપો.



5. તમારા કાગળ પર ત્રણ બિંદુઓ ચિહ્નિત કરો જે એક જ રેખા પર ન હોય. તેમને A, B, C નામ આપો. આ બિંદુઓની જોડમાંથી પસાર થતી તમામ સંભવિત રેખાઓ દોરો. તમને કેટલી રેખાઓ મળે છે? તેમનાં નામ આપો. તમે A, B, Cનો ઉપયોગ કરીને કેટલા ખૂણાને નામ આપી શકો છો તે લખો અને આકૃતિ 2.9માં દર્શાવ્યા મુજબ દરેકને વક્ર (curve) સાથે ચિહ્નિત કરો.

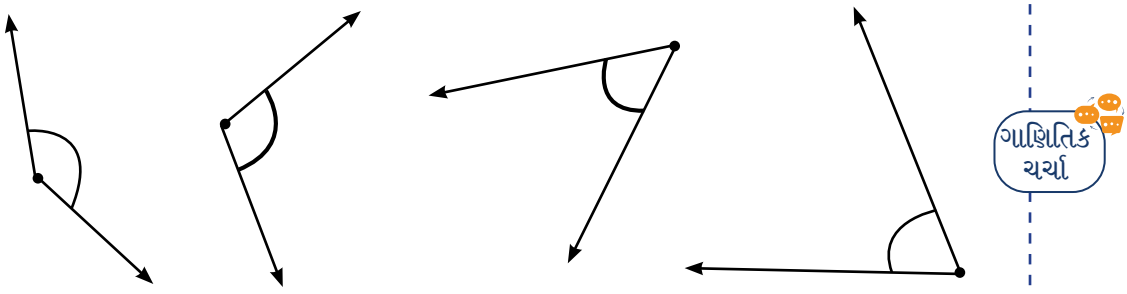
6. હવે તમારા કાગળ પર ચાર બિંદુઓ એવી રીતે ચિહ્નિત કરો કે, જેથી તેમાંના કોઈ પણ ત્રણ એક જ રેખા પર ન હોય. તેમને A, B, C, D નામ આપો. આ બિંદુઓની જોડમાંથી પસાર થતી તમામ સંભવિત રેખાઓ દોરો. તમને કેટલી રેખાઓ મળે છે? તેમનાં નામ આપો. તમે A, B, C, Dનો ઉપયોગ કરીને કેટલા ખૂણાને નામ આપી શકો છો? તે બધા લખો અને આકૃતિ 2.9માં દર્શાવ્યા મુજબ દરેકને વક્ર સાથે ચિહ્નિત કરો.

2.6 ખૂણાઓની સરખામણી (Comparing Angles)

આ પ્રાણીઓને તેમનાં મોં ખોલતાં જુઓ. શું તમને અહીં કોઈ ખૂણા દેખાય છે? જો હા, તો દરેકની ભુજા અને શિરોબિંદુને ચિહ્નિત કરો. કેટલાંક મોં અન્ય કરતાં વધુ ખુલ્લાં છે; જડબાં જેટલાં વધારે ખૂલે, તેટલો ખૂણો મોટો! શું તમે આ ચિત્રમાંના ખૂણાને નાનાથી મોટા ક્રમમાં ગોઠવી શકો છો?



શું બે ખૂણાની સરખામણી કરવી હંમેશાં સરળ છે?



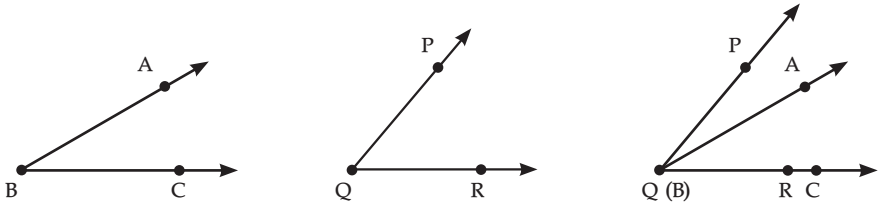
અહીં કેટલાક ખૂણા આપેલા છે. દરેક ખૂણાને નામ આપો. તમે તેમની સરખામણી કેવી રીતે કરશો?

બીજા થોડા ખૂણા દોરો; તેમને નામ આપો અને તેમની સરખામણી કરો.

અધ્યારોપણ (Superimposition) દ્વારા ખૂણાઓની સરખામણી

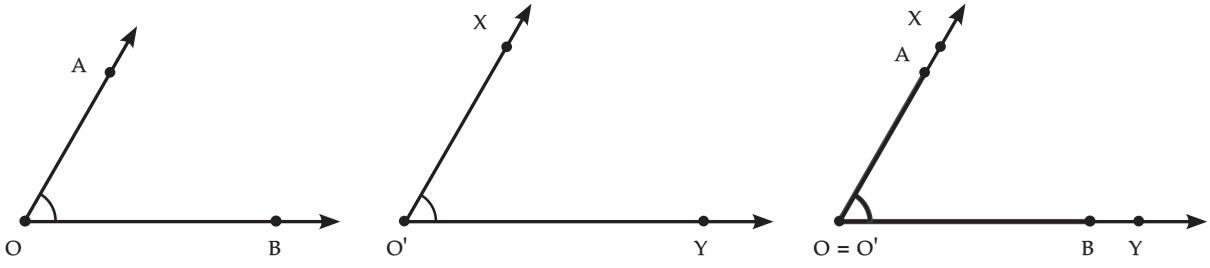
કોઈ પણ બે ખૂણાને એકબીજા પર મૂકીને, એટલે કે અધ્યારોપણ (એકબીજાની ઉપર મૂકવું) દ્વારા, સરખાવી શકાય છે. અધ્યારોપણ કરતી વખતે, ખૂણાઓના શિરોબિંદુઓ અને તેમની કોઈ પણ એક બાજુ એકબીજા પર આવવા જોઈએ.

અધ્યારોપણ પછી, કયો ખૂણો નાનો છે અને કયો મોટો છે તે સ્પષ્ટ થઈ જાય છે.



ચિત્રમાં બે ખૂણા અધ્યારોપિત (super imposed) થયેલા દર્શાવ્યા છે. હવે એ સ્પષ્ટ છે કે ∠PQR એ ∠ABC કરતાં મોટો છે.

સમાન ખૂણા (Equal angles) હવે આકૃતિમાં ∠AOB અને ∠XO'Yનો વિચાર કરો. કયો મોટો છે?



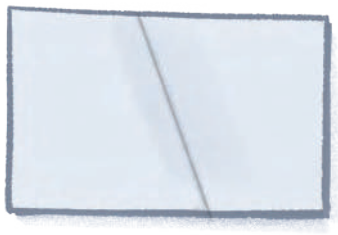
આ બંને ખૂણાનાં શિરોબિંદુઓ એકબીજા સાથે મળે છે અને બાજુઓ એકબીજા પર બંધબેસે છે, એટલે કે OA ↔ O'X અને OB ↔ O'Y. તેથી, ખૂણાનું કદ (size) (માપ) સમાન છે. આ ખૂણાને કદમાં સમાન ગણવાનું કારણ એ છે કે, જ્યારે આપણે આ દરેક ખૂણાને તે ભુજના પરિભ્રમણથી બનતા કલ્પીએ છીએ, ત્યારે આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે $\overrightarrow{OB}$ ને $\overrightarrow{OA}$ પર અને $\overrightarrow{O'Y}$ ને $\overrightarrow{O'X}$ પર ખસેડવા માટે સમાન પ્રમાણમાં પરિભ્રમણની જરૂર પડે છે.

અધ્યારોપણની દૃષ્ટિએ, જ્યારે બે ખૂણા એકબીજા પર અધ્યારોપિત થાય છે અને સામાન્ય શિરોબિંદુ અને બંને ખૂણાનાં બે કિરણો એકબીજા પર બંધ બેસે છે, ત્યારે ખૂણાઓનું કદ સમાન હોય છે.

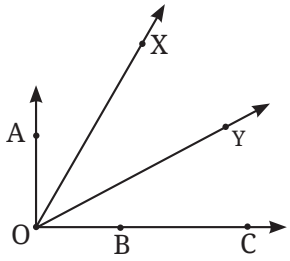
અન્ય કઈ જગ્યાએ આપણે સરખામણી કરવા માટે અધ્યારોપણનો ઉપયોગ કરીએ છીએ? ગાણિતિક ચર્ચા

વિચારો અને શોધો

1. એક લંબચોરસ (rectangle) કાગળને વાળો, પછી બનાવેલી ગડી પર એક લીટી દોરો. તે ગડી અને કાગળની બાજુઓ વચ્ચે બનતા ખૂણાને નામ આપો અને તેમની સરખામણી કરો. લંબચોરસ કાગળને વાળીને જુદા જુદા ખૂણા બનાવો અને ખૂણાની સરખામણી કરો. તમે કયો ખૂણો સૌથી મોટો અને કયો સૌથી નાનો બનાવ્યો?



2 દરેક કિસ્સામાં, કયો ખૂણો મોટો છે અને શા માટે? તે નક્કી કરો.



a. ∠AOB અથવા ∠XOY

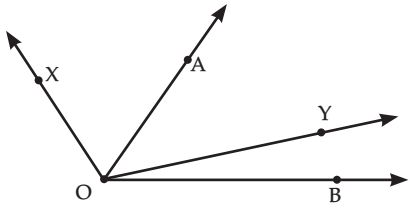
b. ∠AOB અથવા ∠XOB

c. ∠XOB અથવા ∠XOC

ગાણિતિક ચર્ચા

તમારા મિત્રો સાથે ચર્ચા કરો કે કયો ખૂણો મોટો છે. તે તમે કેવી રીતે નક્કી કર્યું?

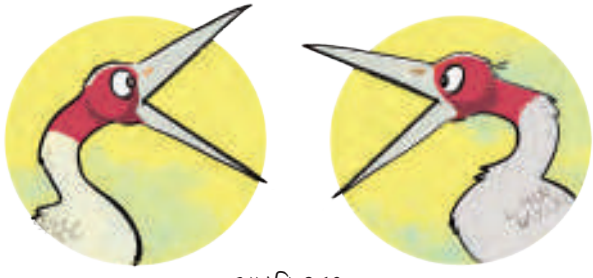
3. ક્યો ખૂણો મોટો છે : ∠XOY કે ∠AOB? કારણ આપો.



અધ્યારોપણ વગર ખૂણાઓની સરખામણી (Comparing angles without superimposition)

બે સારસ પક્ષી એવી દલીલ કરી રહ્યાં છે કે કોણ પોતાનું મોં વધુ ખોલી શકે છે, એટલે કે કોણ મોટો ખૂણો બનાવી રહ્યું છે.

ચાલો, આપણે પહેલાં તેમના ખૂણા દોરીએ. આપણે કેવી રીતે જાણી શકીએ કે કયો ખૂણો મોટો છે?

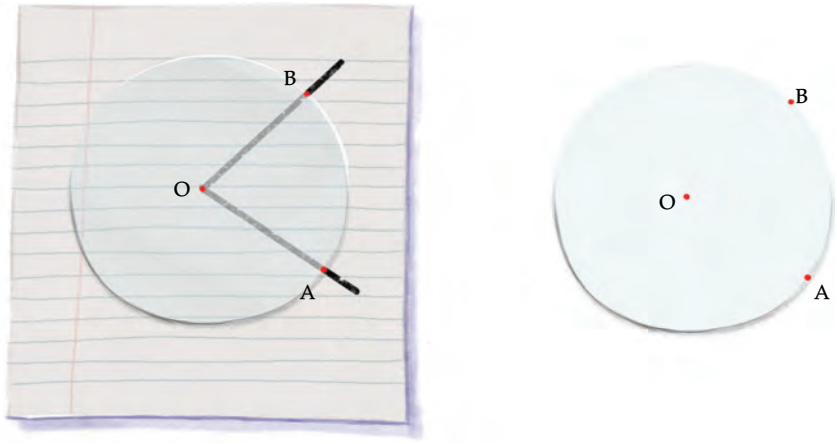


આકૃતિ 2.10

પહેલાં જોયું તેમ, કોઈ આ ખૂણાઓને ટ્રેસ (trace) કરી શકે છે, તેમને એકબીજા પર અધિરોપિત કરી શકે છે અને પછી ચકાસી શકે છે. પરંતુ શું આપણે અધ્યારોપણ વગર આ કરી શકીએ?

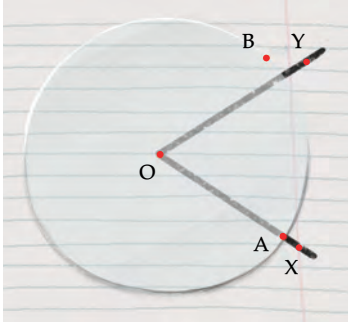
ધારો કે, આપણી પાસે એક પારદર્શક વર્તુળ (transparent circle) છે જેને ખસેડી શકાય છે અને આકૃતિઓ પર મૂકી શકાય છે. શું આપણે તેનો ઉપયોગ સરખામણી માટે કરી શકીએ?

ચાલો, આપણે આ વર્તુળાકાર કાગળને પ્રથમ સારસ પક્ષી દ્વારા બનાવેલા ખૂણા પર મૂકીએ. વર્તુળ એવી રીતે મૂકવામાં આવે છે કે, તેનું કેન્દ્ર (centre) ખૂણાના શિરોબિંદુ પર હોય. ચાલો આપણે ખૂણાની બાજુઓ વર્તુળમાં જ્યાંથી પસાર થાય છે તે વર્તુળની કિનારી પરનાં બિંદુઓને A અને Bથી ચિહ્નિત કરીએ.



શું આપણે આનો ઉપયોગ કરીને એ શોધી શકીએ કે, આ ખૂણો બીજા સારસ પક્ષી દ્વારા બનાવેલા ખૂણા કરતાં મોટો છે, સમાન છે કે નાનો છે?

ચાલો, આપણે તેને બીજા સારસ પક્ષી દ્વારા બનાવેલા ખૂણા પર મૂકીએ જેથી શિરોબિંદુ વર્તુળના કેન્દ્ર સાથે એકરૂપ થાય અને તેની એક બાજુ OAમાંથી પસાર થાય.



હવે તમે કહી શકશો કે કયો ખૂણો મોટો છે?

કયુ સારસ પક્ષી મોટો ખૂણો બનાવે છે?

જો તમે પારભાસક (translucent) કાગળનો ગોળાકાર ટુકડો બનાવી શકો, તો આકૃતિ 2.10માં દર્શાવેલા ખૂણાઓની સરખામણી કરવા માટે આ પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરો.

શિક્ષક માટે

શિક્ષકે વિદ્યાર્થીઓની ખૂણાના ખ્યાલો વિશેની સમજ ચકાસવાની જરૂર છે. ઘણીવાર વિદ્યાર્થીઓ એવું માને છે કે, જો ખૂણાની બાજુઓની લંબાઈ વધારવામાં આવે તો ખૂણો પણ મોટો થાય છે. આ ગેરસમજ દૂર કરવા માટે, વિદ્યાર્થીઓને ખૂણા સંબંધિત વિવિધ પરિસ્થિતિઓ આપીને તેમની સમજની ચકાસણી કરવી જોઈએ.

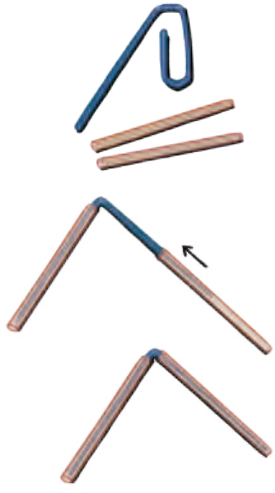
2.7 ફરતા ભુજની રચના કરો (Making Rotating Arms)

અહીં આપેલી રીત મુજબ, ચાલો, આપણે બે પેપર સ્ટ્રો (paper straw - કાગળની ભૂંગળી) અને એક પેપર ક્લિપ (paper clip) (યુ-પીન)નો ઉપયોગ કરીને 'ફરતા ભુજ' (rotating arms) બનાવવા નીચેનાં પગલાંઓને અનુસરીએ :

1. બે પેપર સ્ટ્રો અને એક પેપર ક્લિપ લો.

2. પેપર ક્લિપના ભુજમાં સ્ટ્રો નાખો.

3. તમારા ફરતા ભુજ તૈયાર છે!

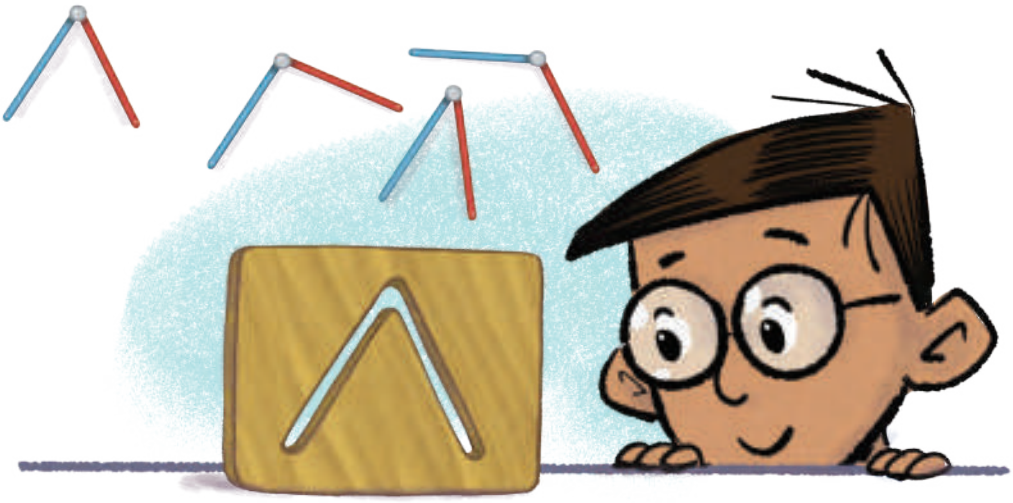


ઘણા 'ફરતા ભુજ' બનાવો જેમાં ભુજ વચ્ચે જુદા જુદા ખૂણા હોય.

તમે બનાવેલા ખૂણાઓની સરખામણી કરીને અને એકબીજા પર ગોઠવીને (superimposition) તેમને સૌથી નાનાથી સૌથી મોટા ક્રમમાં ગોઠવો.

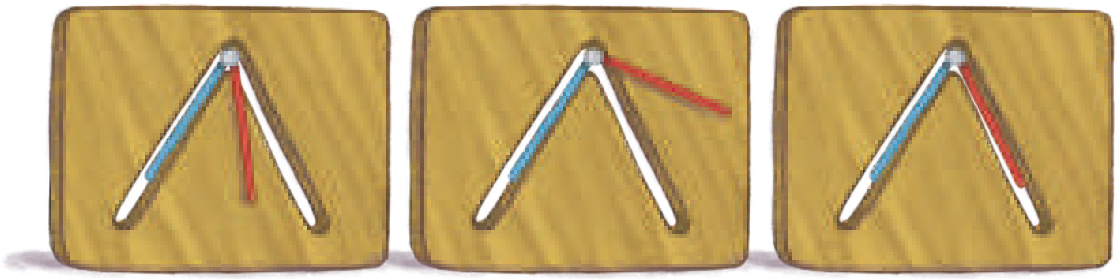
ત્યારબાદ એક ચીરા (slit) માંથી પસાર કરો : જુદા જુદા ખૂણાવાળા ઘણા ફરતા ભુજ ભેગા કરો; આ પ્રવૃત્તિ દરમિયાન કોઈ પણ ફરતા ભુજને ફેરવશો નહીં.

એક પૂઠું (card board - કાર્ડબોર્ડ) લો અને નીચે બતાવ્યા પ્રમાણે, એક ફરતા ભુજના આકારને ટ્રેસ કરી, તેને કાપીને ખૂણાના આકારનો એક ચીરો (slit) બનાવો.



હવે, બધા ફરતા ભુજને ભેળવી દો. શું તમે ઓળખી શકો છો કે કયો ફરતો ભુજ ચીરામાંથી પસાર થશે?

યોગ્ય ફરતો ભુજ શોધવા માટે, દરેક ફરતા ભુજને ચીરા પર મૂકો. ચાલો આપણે કેટલાક ફરતા ભુજ માટે આ કરીએ :



જો ચીરાનો ખૂણો ભુજના ખૂણા કરતાં મોટો હોય, તો ભુજ તેમાંથી પસાર થશે નહીં.

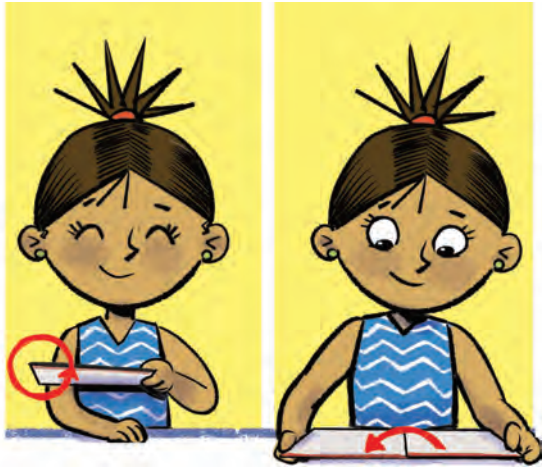
ચીરાનો ખૂણો ભુજના ખૂણા કરતાં નાનો છે. ભુજ ચીરામાંથી પસાર થશે નહીં.

ચીરાનો ખૂણો ભુજના ખૂણા જેટલો છે. ભુજ ચીરામાંથી પસાર થશે.

ફક્ત તે જ ફરતા ભુજની જોડ ચીરામાંથી પસાર થશે જેનો ખૂણો ચીરાના ખૂણા જેટલો હોય. નોંધો કે, ચીરામાંથી પસાર થવાની શક્યતા ફક્ત ફરતા ભુજ વચ્ચેના ખૂણા પર આધાર રાખે છે, તેમની લંબાઈ (length) પર નહીં (જ્યાં સુધી તે ચીરાની લંબાઈ કરતાં ટૂંકા હોય).



2.8 ખૂણાના વિશિષ્ટ પ્રકારો (Special Types of Angles)

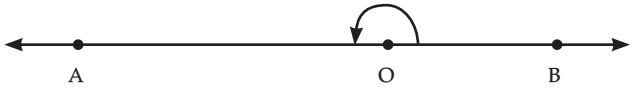


ચાલો, આપણે વિદ્યાની નોટબુક પર પાછા જઈએ અને તે ચોપડીને જુદી જુદી પરિસ્થિતિઓમાં કેવી રીતે ખોલે છે તે જોઈએ.

જ્યારે, ચોપડી હાથમાં પકડીને લખવાનું હોય છે, ત્યારે તે ચોપડીને આખી ખોલે છે.

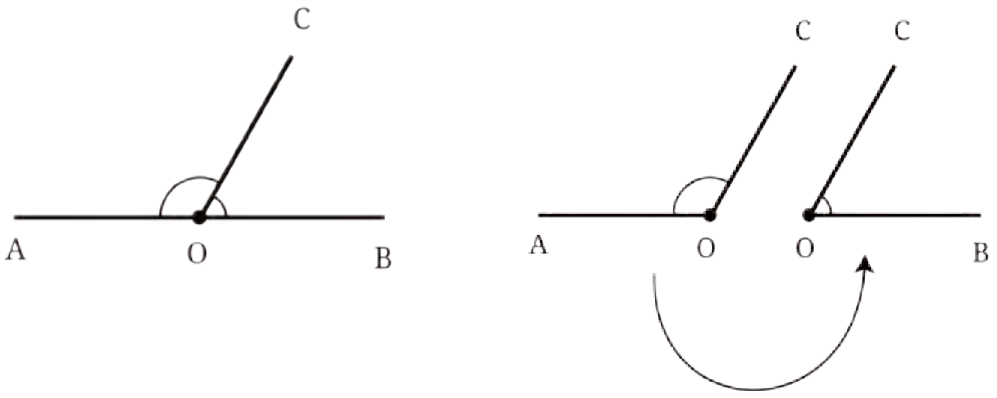
જ્યારે ટેબલ પર ચોપડી ખોલવાની હોય છે, ત્યારે તે ચોપડીને અડધી ખોલે છે.

આ કિસ્સામાં, બનેલા ખૂણાના ભુજ જુઓ. તેઓ એક સીધી રેખામાં છે. આવા ખૂણાને **સરળકોણ** (straight angle) કહે છે.



આકૃતિ 2.11

ચાલો, આપણે એક સરળકોણ ∠AOB લઈએ. જુઓ કે $\overrightarrow{OC}$ તેને બે ખૂણાઓમાં વિભાજિત કરે છે, જે ∠AOC અને ∠COB છે.



શું $\overrightarrow{OC}$ ને એવી રીતે દોરી શકાય કે જેથી બંને ખૂણાનાં માપ સરખાં થાય?

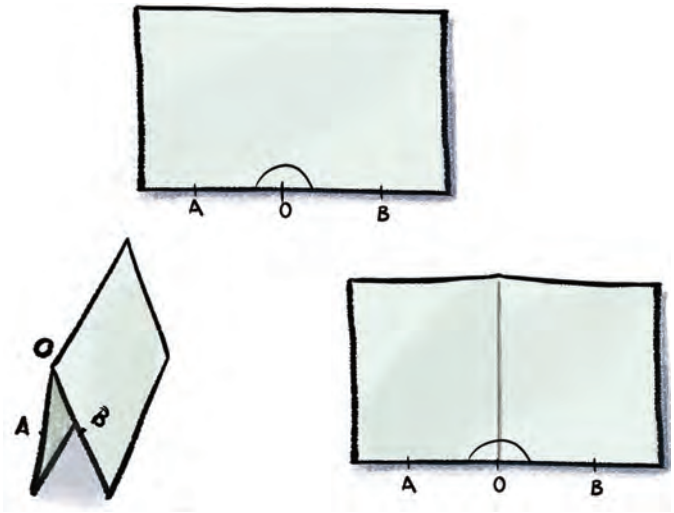
ગાણિતિક ચર્ચા

ચાલો, શોધીએ (નિરીક્ષણ કરીએ).

આ સમસ્યાનો ઉકેલ આપણે કાગળના ટુકડાનો ઉપયોગ કરીને શોધી શકીએ છીએ.
યાદ રાખો કે જ્યારે ગડી વાળવામાં આવે છે, ત્યારે તે એક સીધી લીટી બનાવે છે.

એક લંબચોરસ કાગળનો ટુકડો લો અને તેની એક બાજુ પર સરળકોણ AOB દર્શાવો. હવે, ગડી વાળીને O માંથી પસાર થતી એવી રેખા મેળવવાનો પ્રયાસ કરો કે જે ∠AOBને બે સરખા ખૂણામાં વિભાજિત કરે.

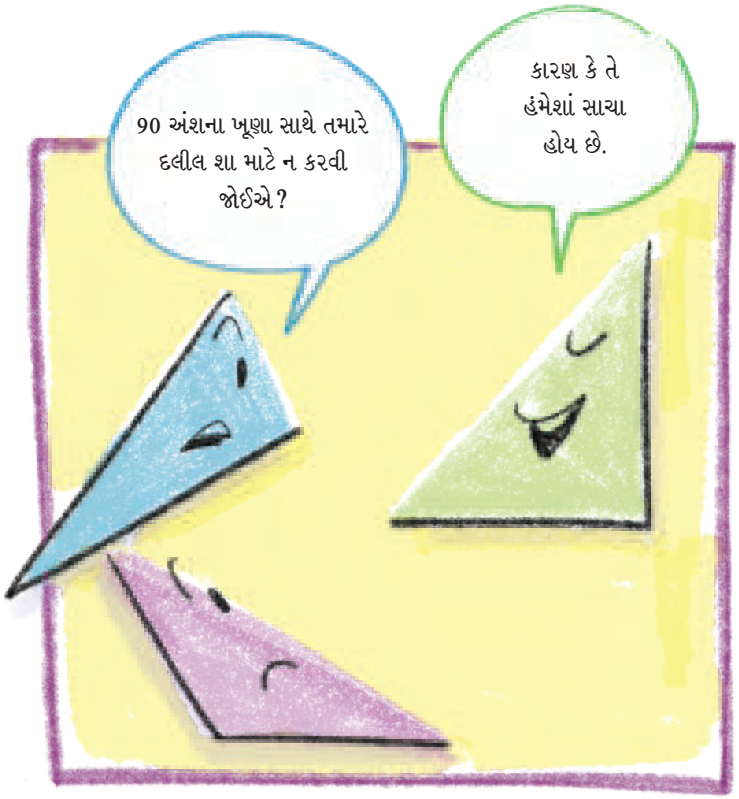
આ કેવી રીતે કરી શકાય?



કાગળને એવી રીતે વાળો કે, જેથી OB એ OA પર બંધબેસતો આવે. બનેલી ગડી (crease) અને બે ખૂણાઓ જુઓ.

આ બંને ખૂણા સરખા શા માટે છે તે સમજાવો. શું એકબીજા પર ગોઠવીને ચકાસણી કરી શકાય? શું આ એકબીજા પર ગોઠવવાનું કામ ગડી વાળીને કરી શકાય?

આ રીતે બનેલા દરેક સરખા ખૂણાને **કાટકોણ** અથવા **કાટખૂણો** (Right angle) કહેવામાં આવે છે. તેથી, એક સરળકોણમાં બે કાટકોણ હોય છે.



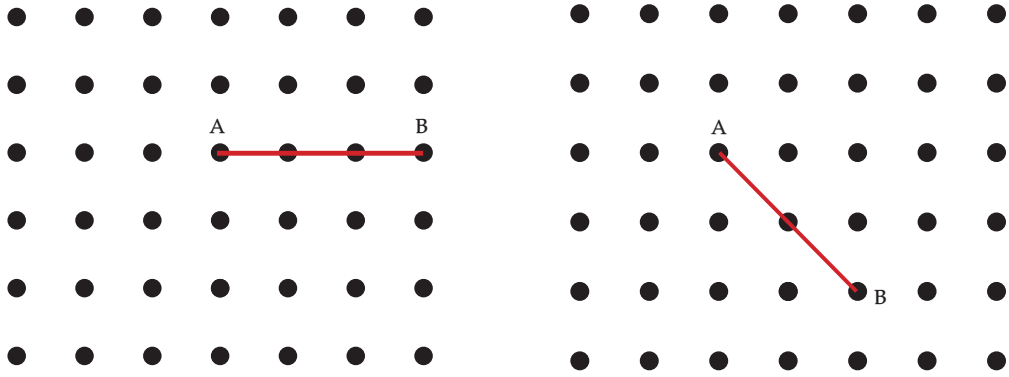
- જો એક આખા આંટાનો અડધો ભાગ લેવાથી એક સરળકોણ બને, તો આખા આંટાનો કેટલામો ભાગ કાટખૂણો બનાવશે?

  જુઓ કે કાટકોણ 'L' આકાર જેવો દેખાય છે. કોઈ ખૂણો ફક્ત ત્યારે જ કાટકોણ કહેવાય જ્યારે તે સરળકોણનો બરાબર અડધો ભાગ હોય. જે બે રેખાઓ કાટખૂણે મળે તેને **લંબ રેખાઓ** (perpendicular lines) કહેવાય છે.

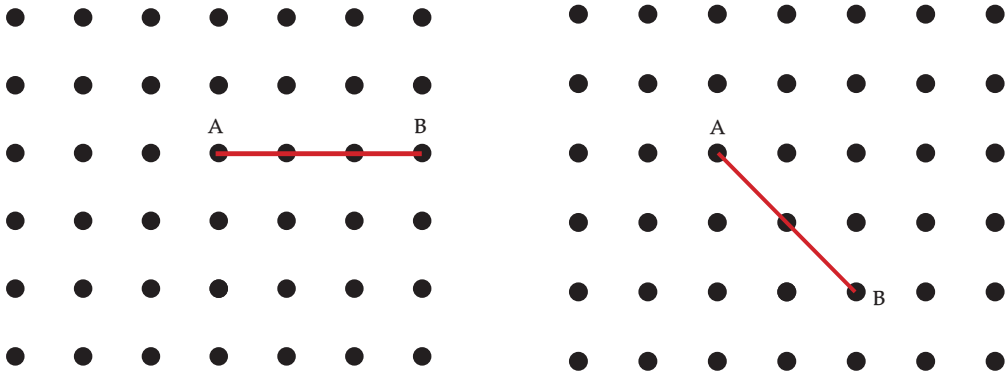
- **વિચારો અને શોધો**

  1. તમારા વર્ગખંડની બારીઓમાં કેટલા કાટખૂણા છે? શું તમને તમારા વર્ગખંડમાં બીજા કોઈ કાટકોણ દેખાય છે?

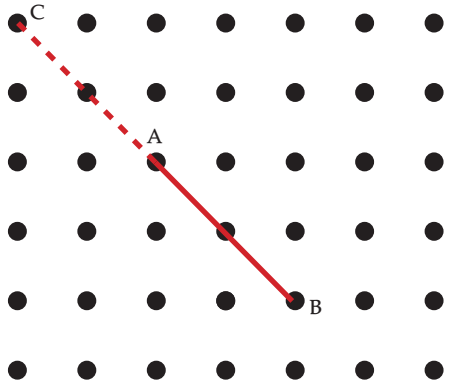
2. આપેલા ચિત્રમાં Aને અન્ય બિંદુઓ સાથે સીધી લીટીથી જોડીને સરળકોણ (straight angle) બનાવો. આ માટેની જુદી જુદી રીતો કઈ છે?



3. હવે, આપેલા ચિત્રમાં Aને અન્ય બિંદુઓ સાથે સીધી લીટીથી જોડીને કાટકોણ (right angle) બનાવો. આ માટેની જુદી જુદી રીતો કઈ છે?



સૂચન : નીચે આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે રેખાને વધુ લંબાવો. A પર કાટકોણ મેળવવા માટે, આપણે તેમાંથી પસાર થતી એવી રેખા દોરવાની જરૂર છે કે જે સરળકોણ CABને બે સરખા ભાગમાં વિભાજિત કરે.



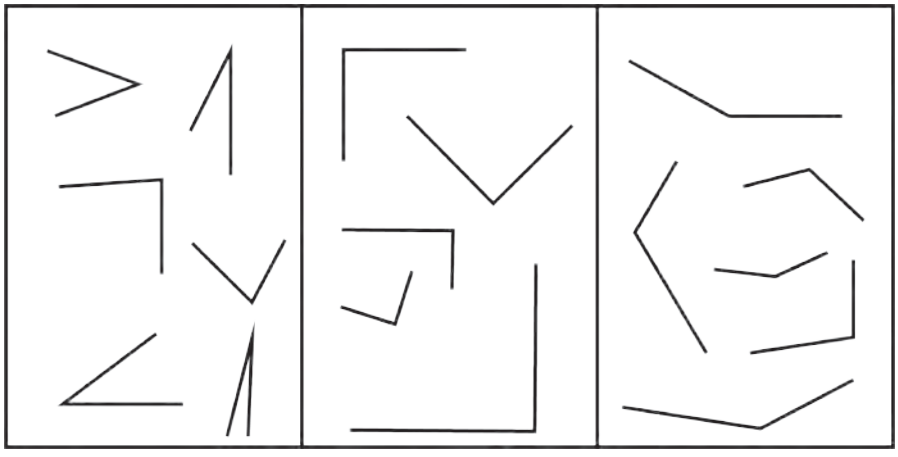
4. કાગળ પર એક ત્રાંસી ગડી (slanting crease) બનાવો. હવે, એક બીજી ગડી બનાવવાનો પ્રયાસ કરો જે આ ત્રાસી ગડીને લંબ હોય.

   a. હવે તમારી પાસે કેટલા કાટખૂણા છે? આ ખૂણાઓ ખરેખર કાટખૂણા શા માટે છે, તે સમજાવો.

   b. તમે કાગળને કેવી રીતે વાળ્યો તેનું એવી રીતે વર્ણન કરો કે, જેથી અન્ય કોઈ પણ વ્યક્તિ આ પ્રક્રિયા જાણતી ન હોય તો પણ માત્ર તમારા વર્ણનને અનુસરીને કાટકોણ મેળવી શકે.

ખૂણાઓનું વર્ગીકરણ (Classifying Angles)

ખૂણાઓને નીચે બતાવ્યા પ્રમાણે ત્રણ જૂથમાં વર્ગીકૃત કરવામાં આવ્યા છે. કાટખૂણાને બીજા જૂથમાં દર્શાવવામાં આવ્યા છે. અન્ય બે જૂથનું સામાન્ય લક્ષણ શું હોઈ શકે?



પહેલા જૂથમાં, બધા ખૂણા કાટકોણ કરતાં નાના છે અથવા બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો, એક પૂર્ણ આંટાના ચોથા ભાગ કરતાં ઓછા છે. આવા ખૂણાઓને **લઘુકોણ** (Acute angles) કહે છે.

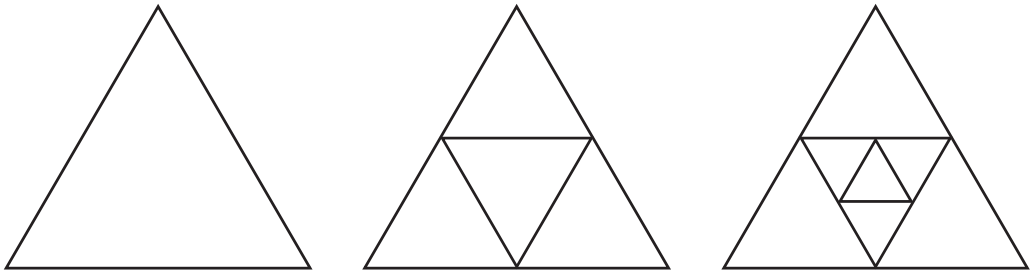
ત્રીજા જૂથમાં, બધા ખૂણા કાટકોણ કરતાં મોટા છે, પરંતુ સરળકોણ કરતાં નાના છે. તેમનો એક આંટો તેના ચોથા ભાગ કરતાં વધુ અને અડધા ભાગ કરતાં ઓછો છે. આવા ખૂણાઓને **ગુરુકોણ** (Obtuse angles) કહે છે.

વિચારો અને શોધો

1. ઉપરની આકૃતિમાં લઘુકોણ, કાટકોણ, ગુરુકોણ અને સરળકોણ ઓળખો.
2. થોડા લઘુકોણ અને થોડા ગુરુકોણ બનાવો. તેમને જુદી જુદી દિશામાં દોરો.

3. શું તમે જાણો છો કે 'લઘુકોણ' અને 'ગુરુકોણ' શબ્દોનો અર્થ શું છે? 'લઘુ'નો અર્થ નાનો અને 'ગુરુ'નો અર્થ મોટો થાય છે. તમને લાગે છે કે આ શબ્દો શા માટે પસંદ કરવામાં આવ્યા છે?

4. નીચેની દરેક આકૃતિમાં કેટલા લઘુકોણ છે?

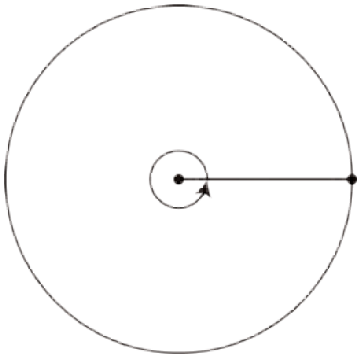


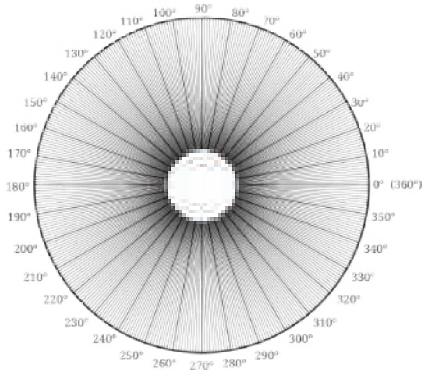
હવે, પછીની આકૃતિ કઈ હશે, અને તેમાં કેટલા લઘુકોણ હશે? શું તમને સંખ્યાઓમાં કોઈ પૅટર્ન દેખાય છે?

2.9 ખૂણાઓનું માપન (Measuring Angles)

આપણે બે ખૂણાઓની સરખામણી કેવી રીતે કરવી તે જોયું. પણ શું આપણે કોઈ બીજા ખૂણા સાથે સરખામણી કર્યા વગર, સંખ્યાનો ઉપયોગ કરીને ખૂણો કેટલો મોટો છે તે નક્કી કરી શકીએ?

આપણે જોયું કે વર્તુળ(circle)નો ઉપયોગ કરીને વિવિધ ખૂણાઓની સરખામણી કેવી રીતે કરી શકાય છે. કદાચ વર્તુળનો ઉપયોગ ખૂણાઓને માપ આપવા માટે થઈ શકે છે.



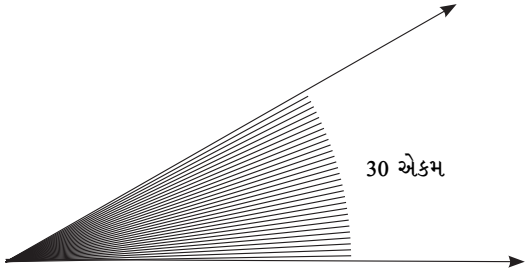


આકૃતિ 2.12

ખૂણાઓને ચોક્કસ માપ આપવા માટે, ગણિતશાસ્ત્રીઓએ એક વિચાર રજૂ કર્યો. તેઓએ વર્તુળના કેન્દ્ર (centre of circle) પરના ખૂણાને 360 સરખા ખૂણા અથવા ભાગોમાં વિભાજિત કર્યો.

આ દરેક એકમ ભાગના ખૂણાનું માપ 1 અંશ (degree) છે, જેને 1° તરીકે લખવામાં આવે છે.

ખૂણાઓના માપ માટે આ એકમ ભાગનો ઉપયોગ થાય છે : કોઈ પણ ખૂણાનું માપ એ તેની અંદર રહેલા 1° એકમ ભાગની સંખ્યા છે. ઉદાહરણ તરીકે, આ આકૃતિ જુઓ :

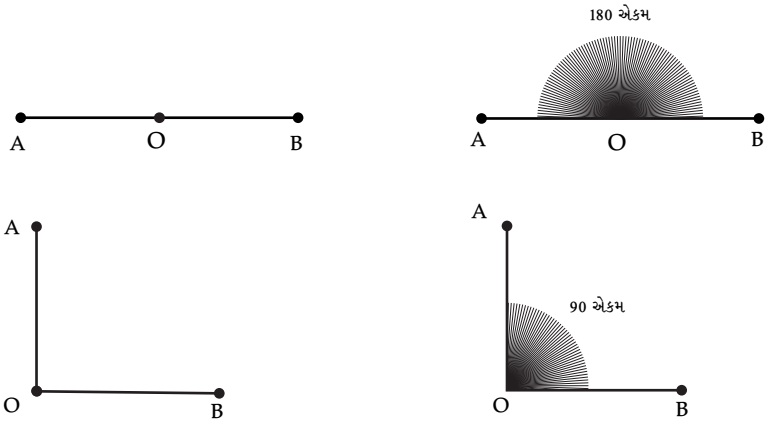


તેમાં 1° ખૂણાના 30 એકમ છે અને તેથી આપણે કહીએ છીએ કે તે ખૂણાનું માપ 30° છે.

વિવિધ ખૂણાઓના માપ (Measures of different angles) : પૂર્ણ આંટાનું માપ અંશમાં કેટલું હશે? આપણે તેને 360 અંશનો ગણ્યો છે, તેથી તેનું માપ 360° છે.

- સરળકોણનું માપ અંશમાં કેટલું છે? સરળકોણ એ આખા આંટાનો અડધો ભાગ છે. જેમ કે, પૂર્ણ આંટો 360° છે, તેથી અડધો આંટો 180° છે.

  કાટકોણનું માપ અંશમાં કેટલું છે? બે કાટકોણ ભેગા મળીને એક સરળકોણ બનાવે છે. જેમ કે, એક સરળકોણનું માપ 180° છે, તેથી એક કાટકોણનું માપ 90° છે.



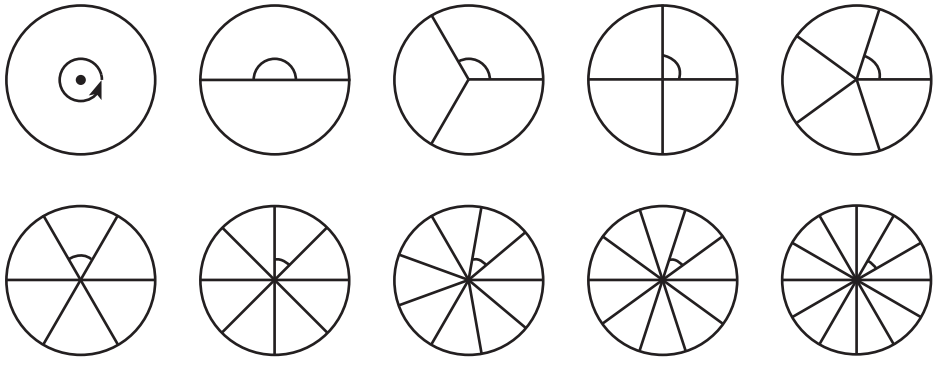
ઇતિહાસની એક ઝલક (A Pinch of History)

પૂર્ણ આંટો 360°માં કેમ વહેંચાયો? આપણે આજે 360°નો ઉપયોગ કેમ કરીએ છીએ તેનું કારણ સંપૂર્ણપણે જાણીતું નથી.

પ્રાચીન કાળથી વર્તુળને 360 ભાગોમાં વિભાજિત કરીએ છીએ. હજારો વર્ષ પૂર્વેના માનવતાના સૌથી જૂના ગ્રંથોમાંનો એક ઋગ્વેદ, 360 આરા (spokes)વાળા પૈડાંની વાત કરે છે. (શ્લોક 1.164.48) ઘણાં પ્રાચીન કેલેન્ડર્સ પણ 3000 વર્ષથી વધુ જૂનાં છે. જેમકે; ભારતીય, ફારસી, બેબીલોનિયન અને ઇજિપ્તીયન કેલેન્ડર્સ, જેઓ એક વર્ષમાં 360 દિવસો પર આધારિત હતાં. આ ઉપરાંત, બેબીલોનિયન ગણિતશાસ્ત્રીઓ વારંવાર 60 અને 360ના વિભાજનનો ઉપયોગ કરતા હતા. કારણ કે, તેઓ સાઈઠ (sixty)ને આધાર સંખ્યા ગણીને 60ના ગુણાંકમાં ગણતરી કરતા હતા.

શા માટે ગણિતશાસ્ત્રીઓએ વર્ષોથી 360 અંશનો ઉપયોગ કર્યો અને ચાલુ રાખ્યો તેનું કદાચ સૌથી મહત્ત્વપૂર્ણ અને વ્યવહારુ કારણ એ છે કે, 360 એ સૌથી નાની સંખ્યા છે, જેને 7 સિવાય 10 સુધીની તમામ સંખ્યાઓ વડે સમાન રીતે વિભાજિત કરી શકાય છે. આમ, વર્તુળને 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 કે 10 સમાન ભાગોમાં કોઈ પણ વિભાજિત કરી શકે છે અને દરેક વિભાજનમાં અંશની આખી સંખ્યા મળે છે! નોંધો કે 360 એ 12 વડે સમાન રીતે વિભાજ્ય (divisible) છે, જે એક વર્ષના મહિનાઓની સંખ્યા છે, અને 24 વડે પણ, જે એક દિવસના કલાકોની સંખ્યા છે. આ બધાં તથ્યો 360 સંખ્યાને ખૂબ જ ઉપયોગી બનાવે છે.

નીચે વર્તુળને 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 અને 12 ભાગોમાં વિભાજિત કરવામાં આવ્યું છે. પરિણામે મળતાં ખૂણાઓનાં માપ શું છે? નિર્દેશિત ખૂણાઓની નજીક અંશ માપ લખો.

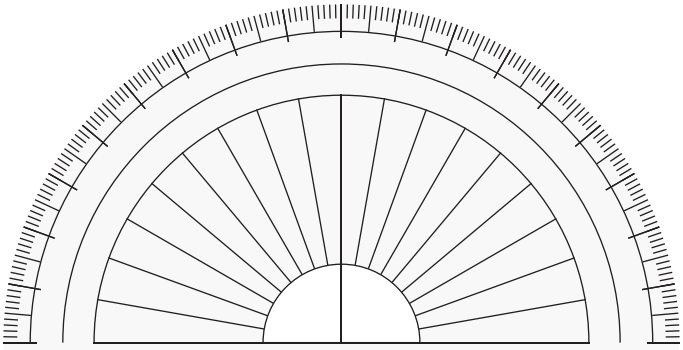


વિવિધ ખૂણાઓના અંશ માપ (Degree Measures of Different Angles)

ખૂણાઓને અંશમાં કેવી રીતે માપી શકાય? આ માટે આપણી પાસે કોણમાપક (protractor) નામનું એક સાધન છે. તે આકૃતિ 2.12 (પાના 32 પર)માં બતાવ્યા પ્રમાણે 360 સમાન ભાગોમાં વહેંચાયેલું વર્તુળ છે, અથવા તો 180 સમાન ભાગોમાં વહેંચાયેલું અર્ધવર્તુળ (half circle - semi circle) છે.

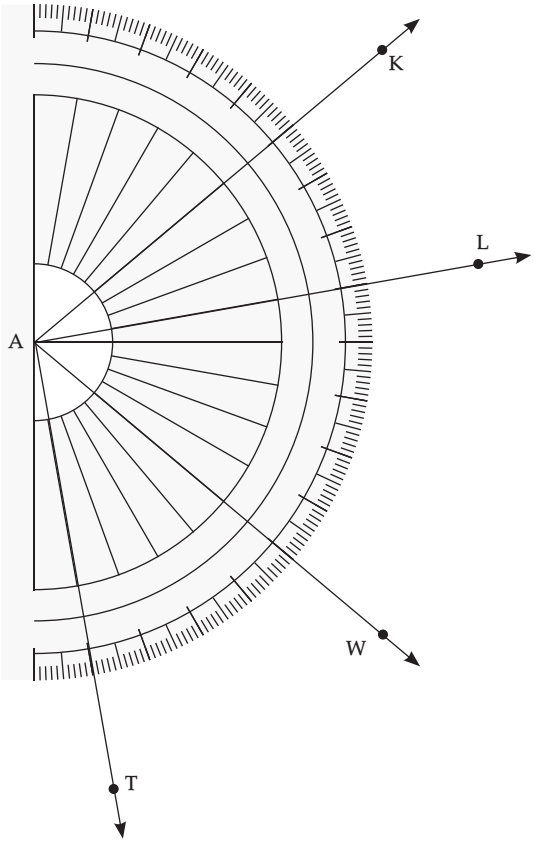
અંક વગરનું કોણમાપક (Unlabelled Protractor)

અહીં એક કોણમાપક છે. શું તમે કેન્દ્રમાં 180 એકમમાં વહેંચાયેલો સીધો ખૂણો જોઈ શકો છો, જેનો દરેક એકમ 1 અંશનો છે? જો કે, સરળકોણને વિભાજિત કરતી અમુક રેખાઓ જ દેખાય છે.



પાયાના સૌથી જમણી બાજુના બિંદુ પરના અંકથી શરૂ કરીને, દર 10° પર એક લાંબી નિશાની છે. આવી દરેક લાંબી નિશાની પછી, 5° પર એક મધ્યમ કદની નિશાની છે.

વિચારો અને શોધો



1. નીચેના ખૂણાઓનાં માપ લખો:

   a. ∠KAL

જુઓ કે આ ખૂણાનું શિરોબિંદુ (vertex) કોણમાપકના કેન્દ્ર પર બંધબેસતું થાય છે. તેથી, KA અને AL વચ્ચેના 1 અંશના ખૂણાના એકમોની સંખ્યા એ ખૂણા ∠KALનું માપ આપે છે.

ગણતરી કરીને, આપણને ∠KAL = 30° મળે છે.

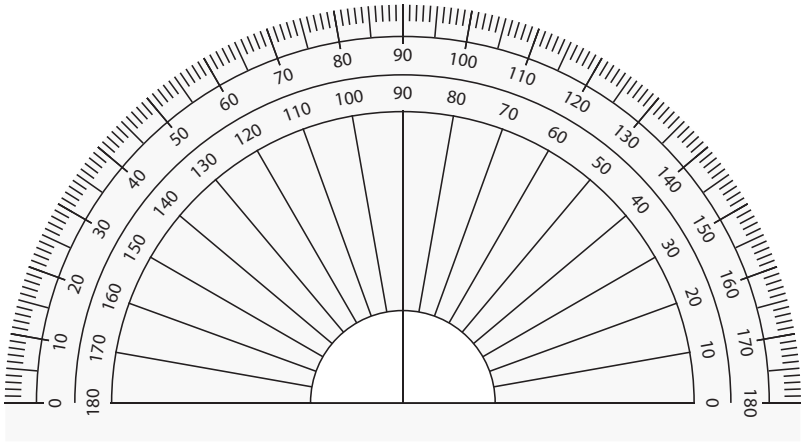
શું મધ્યમ કદની અને મોટા કદની નિશાનીઓનો ઉપયોગ કરીને 5 કે 10ની ગણતરી કરવી શક્ય છે?

   b. ∠WAL

   c. ∠TAK

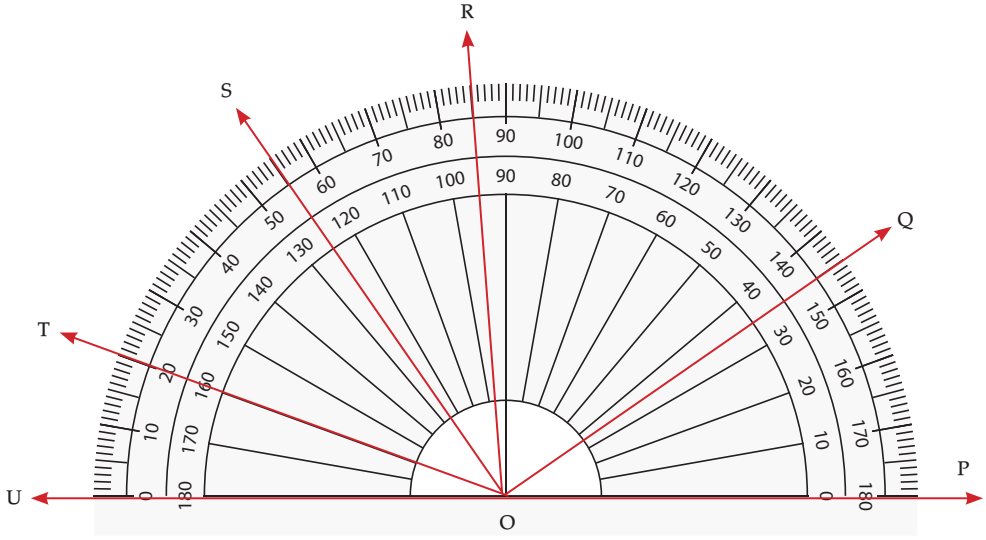
અંક સાથેનું કોણમાપક (Labelled protractor)

આ એ કોણમાપક છે જે તમને તમારી ભૂમિતિ પેટી(Geometry box-કમ્પાસ બોક્ષ)માં મળે છે. તે ઉપરના કોણમાપક જેવું જ દેખાય છે. સિવાય કે, તેના પર અંકો લખેલા હોય છે. આનાથી ખૂણાનું માપ વાંચવું સહેલુ બનશે?



કોણમાપક પર બે પ્રકારના અંકો હોય છે : એક જમણી બાજુથી ડાબી બાજુએ જતાં વધે છે અને બીજા ડાબી બાજુથી જમણી બાજુએ જતાં વધે છે. તેને બે પ્રકારના અંકો શા માટે હોય છે?

આકૃતિમાંના જુદા જુદા ખૂણાઓનાં નામ અને તેમનાં માપ લખો.



શું તમે ∠TOQ જેવા ખૂણાઓનો સમાવેશ કર્યો છે?

તમે કયા માપનો ઉપયોગ કર્યો છે — અંદરના કે બહારના?

∠TOSનું માપ શું છે?

શું તમે ચિહ્નની સંખ્યા ગણ્યા વિના ખૂણો શોધવા માટે ચિહ્નિત સંખ્યાઓનો ઉપયોગ કરી શકો છો?

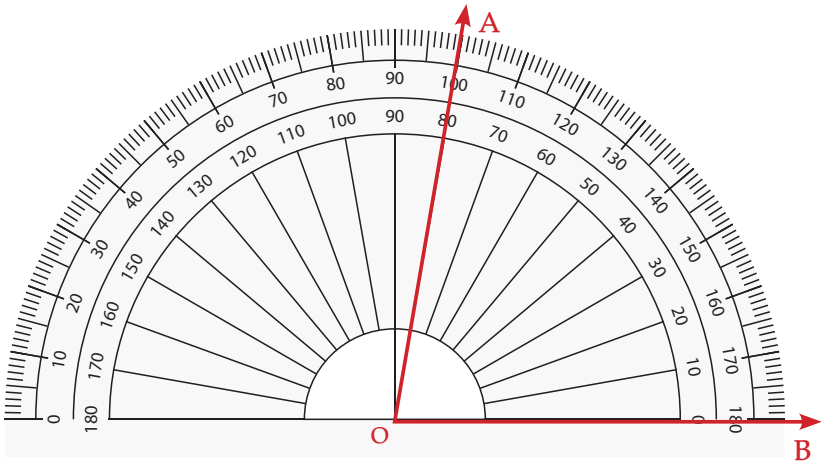
અહીં, OT અને OS બાહ્ય માપ પર 20 અને 55 નંબરોમાંથી પસાર થાય છે. આ બે ભુજા વચ્ચે 1 અંશના કેટલા એકમો સમાયેલા છે?

શું અહીં બાદબાકીનો ઉપયોગ કરી શકાય છે?

બાદબાકી કર્યા વગર આપણે સીધા ખૂણાઓને કેવી રીતે માપી શકીએ?

કોણમાપકને એવી રીતે મૂકો કે તેનું કેન્દ્ર ખૂણાના શિરોબિંદુ પર હોય.

કોણમાપકને એવી રીતે ગોઠવો કે તેનો એક ભુજ નીચેના ચિત્રમાં બતાવ્યા પ્રમાણે 0° ના ચિહ્નમાંથી પસાર થાય.

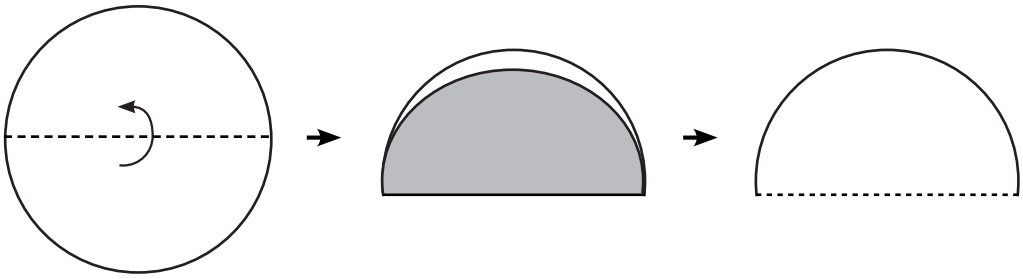


∠AOBનું અંશ માપ શું છે?

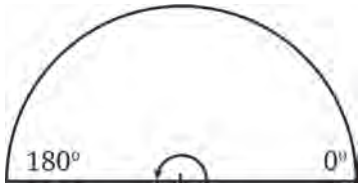
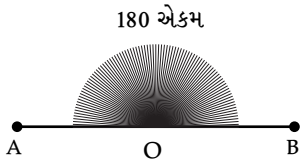
તમારું પોતાનું કોણમાપક બનાવો!

તમને કદાચ આશ્ચર્ય થયું હશે કે કોણમાપક પર સમાન અંતરે આવેલાં જુદાં જુદાં ચિહ્નો કેવી રીતે બનાવવામાં આવે છે. આપણે હવે તેમાંથી કેટલાંક કેવી રીતે બનાવી શકાય તે જોઈશું!

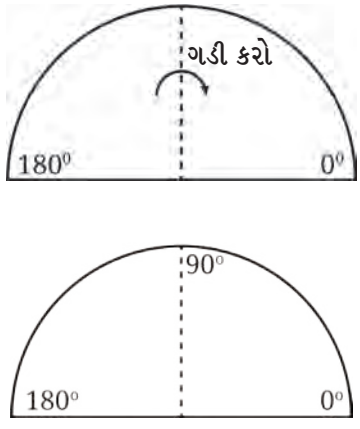
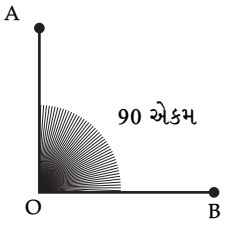
1. એક કાગળ પર અનુકૂળ ત્રિજ્યા(radius)નું એક વર્તુળ (circle) દોરો. વર્તુળને કાપી લો. (આકૃતિ 2.13) એક વર્તુળ અથવા એક સંપૂર્ણ આંટો 360° નો હોય છે.
2. વર્તુળને વાળીને તેના બે સરખા ભાગ કરો અને તેને ગડીમાંથી કાપીને એક અર્ધવર્તુળ (semi circle) મેળવો. અર્ધવર્તુળના નીચેના જમણા ખૂણામાં '0°' લખો.



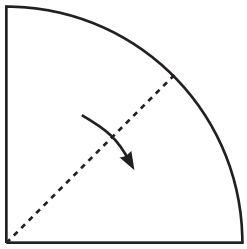
આકૃતિ 2.13

 આકૃતિ 2.14	અડધા વર્તુળનું માપ, આખા આંટાના $\frac{1}{2}$ જેટલું છે. (આકૃતિ 2.14) તેથી, અડધા આંટાનું માપ = _____ના $\frac{1}{2}$ = 180° આમ, અર્ધવર્તુળના નીચેના ડાબા ખૂણામાં 180° લખો.	

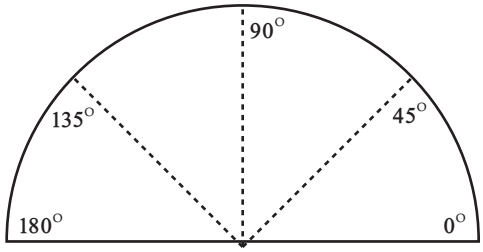
3. અર્ધવર્તુળાકાર (semicircular) કાગળને આકૃતિ 2.15માં બતાવ્યા પ્રમાણે અડધો વાળો, જેથી એક ચતુર્થાંશ વર્તુળ બને.

 આકૃતિ 2.15	ચોથા ભાગ (પા ભાગ - quarter circle) ના વર્તુળનું માપ, આખા આંટાના $\frac{1}{4}$ જેટલું છે. $\frac{1}{4}$ આંટાનું માપ = 360° ના $\frac{1}{4}$ = ... અથવા, $\frac{1}{4}$ આંટાનું માપ = અડધા આંટાના $\frac{1}{2}$ જેટલું = 180° ના $\frac{1}{2}$ = ... આમ, અર્ધવર્તુળની ટોચ પર 90° લખો	

4. આકૃતિ 2.16 અને 2.17 માં બતાવ્યા પ્રમાણે કાગળ ને ફરીથી વાળો :



આકૃતિ 2.16

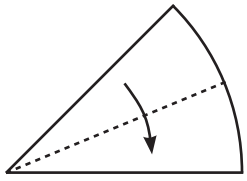


આકૃતિ 2.17

જ્યારે કાગળને વાળવામાં આવે છે, ત્યારે તે વર્તુળનો $\frac{1}{8}$ ભાગ છે, અથવા આંટાનો $\frac{1}{8}$ ભાગ, અથવા 360°નો $\frac{1}{8}$ ભાગ, અથવા 180°નો $\frac{1}{4}$ ભાગ, અથવા 90°નો $\frac{1}{2}$ ભાગ = _____.

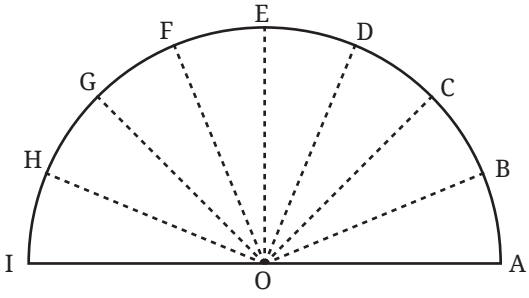
આ રીતે બનેલી નવી ગડીઓ આપણને 45° અને 180° – 45° = 135°ના માપ આપે છે, જે બતાવ્યા પ્રમાણે છે. અર્ધવર્તુળની કિનારી પરની નવી ગડીઓ પર યોગ્ય જગ્યાએ 45° અને 135° લખો.

5. ઉપર પ્રમાણે હવે અડધી ગડી વાળવાથી, આકૃતિ 2.18માં બતાવ્યું છે તે પ્રમાણે, આપણને _____ ના માપનો ખૂણો મળે છે.

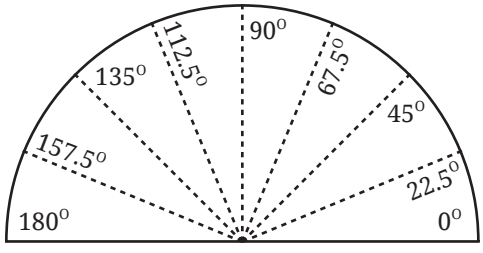


આકૃતિ 2.18

6. ગડીઓને ખોલો, આકૃતિ 2.19 અને આકૃતિ 2.20માં બતાવ્યા પ્રમાણે OB, OC, ..., વગેરે તરીકે ચિહ્નિત કરો.



આકૃતિ 2.19



આકૃતિ 2.20

વિચારો

આકૃતિ 2.19માં આપણી પાસે ∠AOB = ∠BOC = ∠COD = ∠DOE = ∠EOF = ∠GOH = ∠HOI = _____ છે. શા માટે?

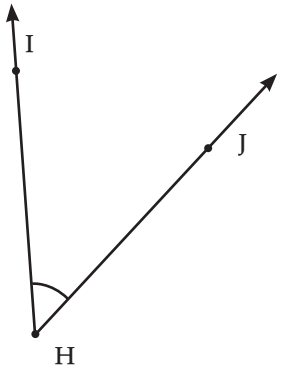
ખૂણાનો દ્વિભાજક (Angle Bisector)

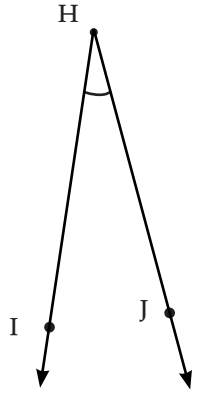
દરેક તબક્કે, આપણે અડધા ભાગમાં વાળ્યું. આપેલ ખૂણાનો અડધો ભાગ મેળવવાની આ પ્રક્રિયાને **ખૂણાનું દ્વિભાજન** (bisecting the angle) કહેવાય છે. જે રેખા આપેલ ખૂણાને દ્વિભાજિત કરે છે તેને તે **ખૂણાનો દ્વિભાજક** (angle bisector) કહેવામાં આવે છે.

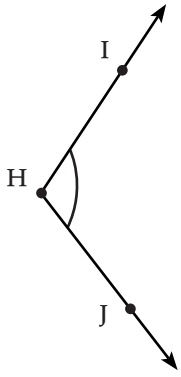
તમારા હાથે બનાવેલા કોણમાપકમાં ખૂણાના દ્વિભાજકોને ઓળખો. કાગળને વાળીને ખૂણાના દ્વિભાજકની સંકલ્પના (concept)નો ઉપયોગ કરીને જુદા જુદા ખૂણા બનાવવાનો પ્રયાસ કરો.

વિચારો અને શોધો

1. આપેલ ખૂણાઓનું અંશ માપ (degree measures) તમારા કોણમાપકનો ઉપયોગ કરીને શોધો.





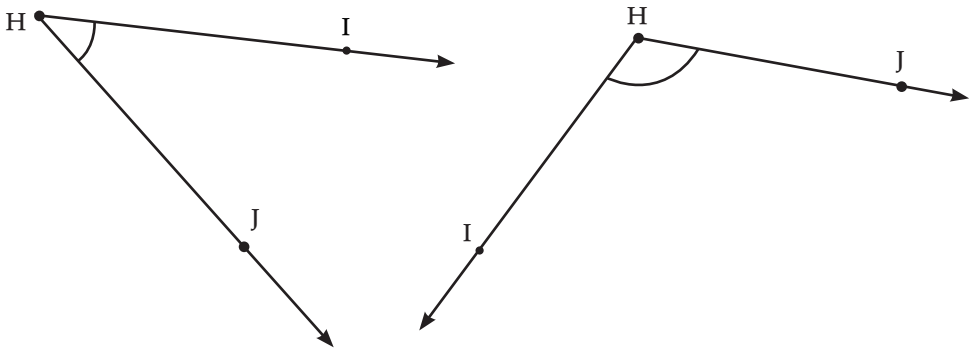


2. તમારા કોણમાપકનો ઉપયોગ કરીને તમારા વર્ગખંડમાંના વિવિધ ખૂણાઓના અંશ માપ શોધો.

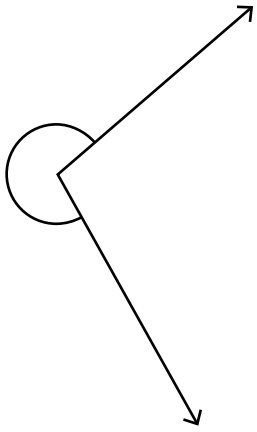
શિક્ષક માટે

વિદ્યાર્થીઓ માટે એ મહત્ત્વપૂર્ણ છે કે તેઓ પ્રમાણભૂત કોણમાપકનો ઉપયોગ કરતા પહેલાં પોતાનું કોણમાપક બનાવે અને તેનાથી વિવિધ ખૂણાઓ માપે. આનાથી તેઓ પ્રમાણભૂત કોણમાપકની નિશાની (marking)ની સંકલ્પના સમજી શકશે.

3. નીચે આપેલા ખૂણાઓ માટે અંશ માપ શોધો. ચકાસો કે શું તમારા કાગળના કોણમાપકનો અહીં ઉપયોગ કરી શકાય છે?

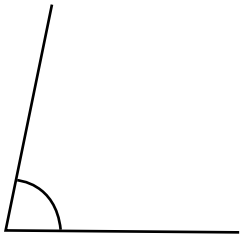


4. કોણમાપકનો ઉપયોગ કરીને નીચે આપેલા ખૂણાનું અંશમાપ કેવી રીતે શોધી શકશો?

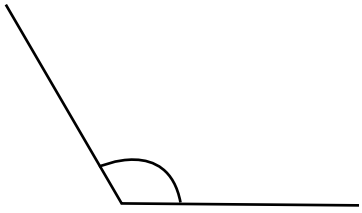


5. નીચેના દરેક ખૂણાનું અંશમાપ લખો.

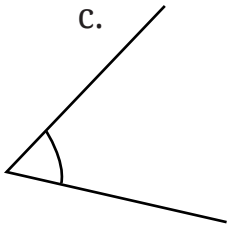
a.



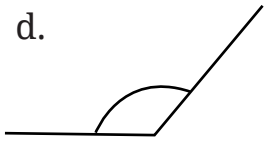
b.



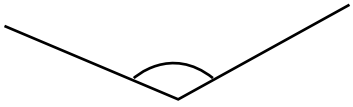
c.



d.



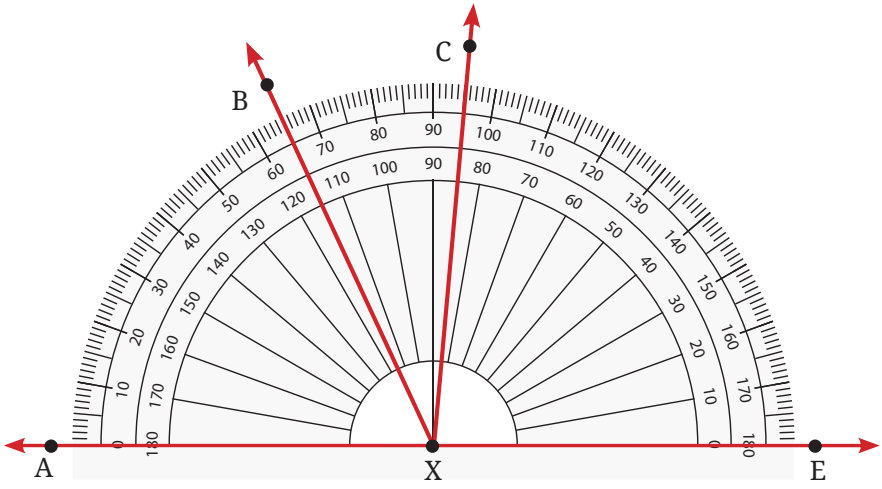
e.



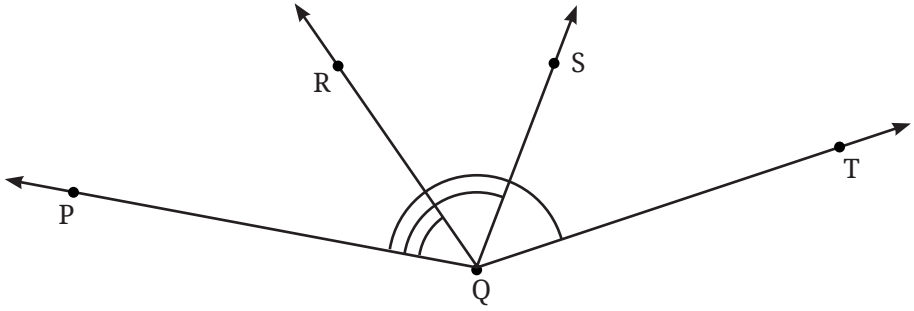
f.



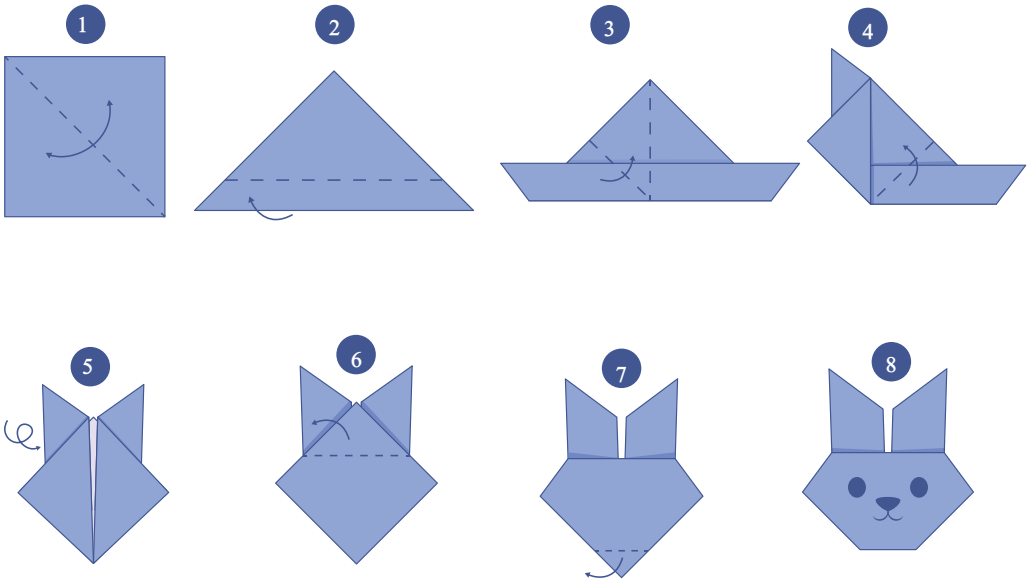
6. ∠BXE, ∠CXE, ∠AXB અને ∠BXCના અંશમાપ શોધો..



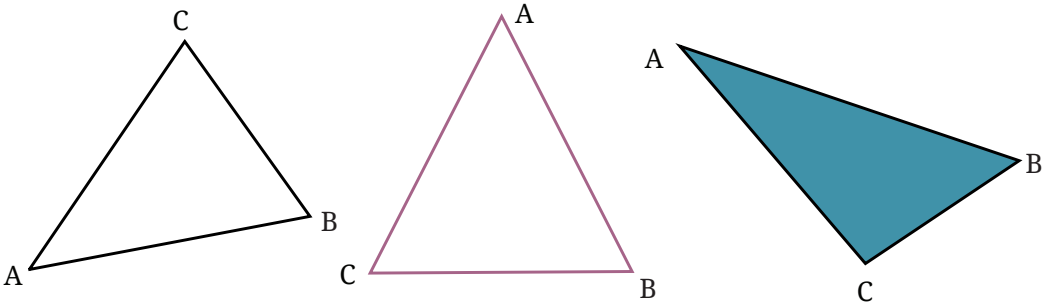
7 . ∠PQR, ∠PQS અને ∠PQTના અંશમાપ શોધો.



8. આપેલ સૂચનાઓ મુજબ કાગળનો નમૂનો બનાવો. પછી, કાગળને સંપૂર્ણપણે ખોલો. બનેલી ગડીઓ (creases) પર લીટીઓ દોરો અને બનેલા ખૂણાઓ માપો.



9. આકૃતિ 2.21 (a)માં દર્શાવેલ ત્રિકોણના ત્રણેય ખૂણાઓ માપો, અને તેના માપને સંબંધિત ખૂણાઓ પાસે લખો. હવે, આ ત્રણેય માપનો સરવાળો કરો. તમને શું મળે છે? આ જ પ્રક્રિયા આકૃતિ 2.21 (b) અને (c)માં દર્શાવેલ ત્રિકોણ માટે કરો. અન્ય ત્રિકોણ (triangle) માટે પણ આ પ્રયાસ કરો, અને પછી સામાન્ય રીતે શું થાય છે તે માટે એક અનુમાન (અટકળ) (conjecture) કરો! આમ શા માટે બને છે તે આપણે પછીના ધોરણમાં શીખીશું.

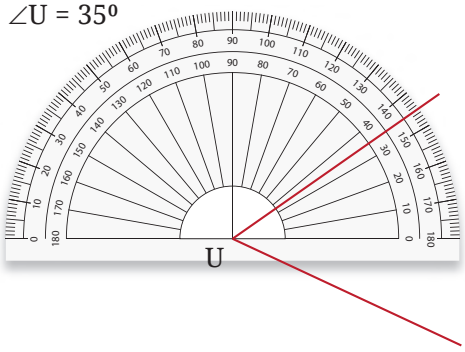


આકૃતિ 2.21

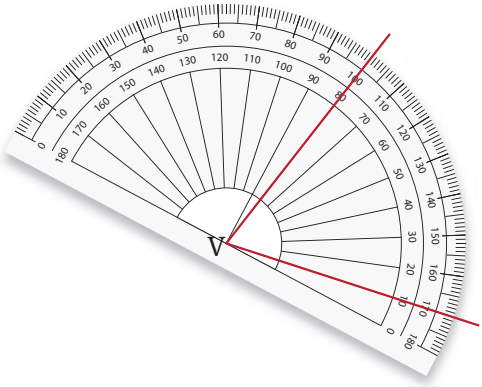
ભૂલનું ધ્યાન રાખો, ભૂલ સુધારો! (Mind the Mistake, Mend the Mistake!)

એક વિદ્યાર્થીએ નીચે બતાવ્યા પ્રમાણે ખૂણા માપવા માટે કોણમાપકનો ઉપયોગ કર્યો. દરેક આકૃતિમાં, કોણમાપકના ખોટા ઉપયોગને ઓળખો અને ચર્ચા કરો કે માપ કેવી રીતે લીધું છે અને વિચારો કે, તેને કેવી રીતે સુધારી શકાય.

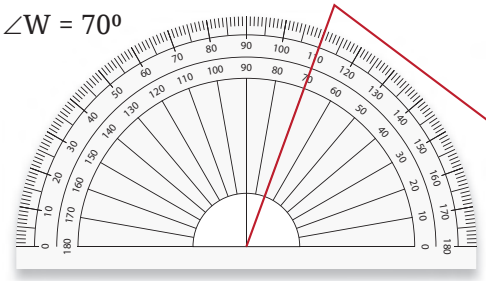
∠U = 35⁰



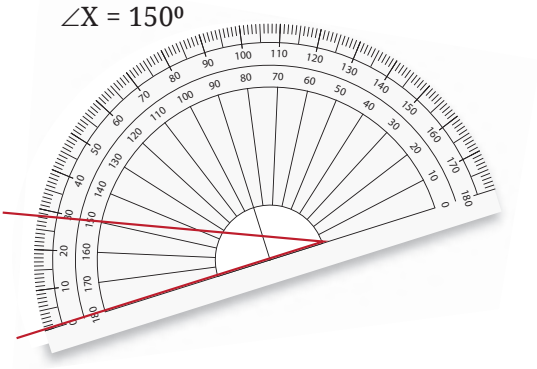
∠V = 80⁰



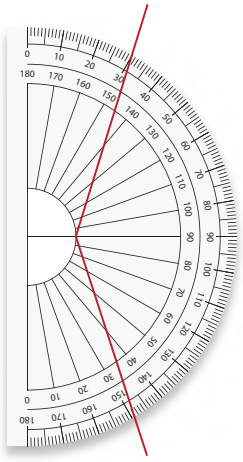
∠W = 70⁰



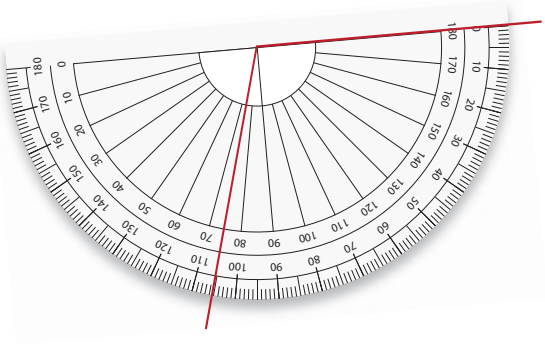
∠X = 150⁰



∠Y = 120⁰



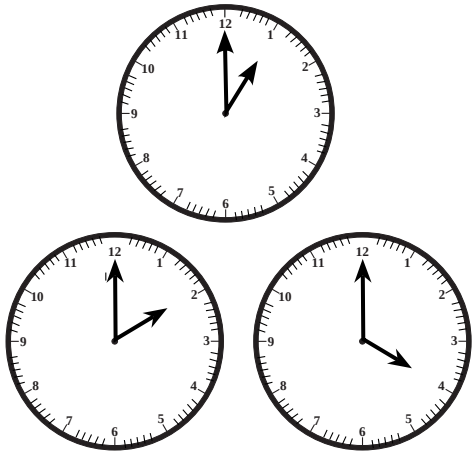
∠Z = 85⁰



વિચારો અને શોધો

ખૂણા ક્યાં છે?

1. ઘડિયાળમાં ખૂણા :



a. ઘડિયાળના કાંટા (hands) જુદા જુદા સમયે જુદા જુદા ખૂણા બનાવે છે. 1 વાગે, કાંટાઓ વચ્ચેનો ખૂણો 30° હોય છે. શા માટે?

b. 2 વાગે કેટલો ખૂણો બનશે?

4 વાગે અને 6 વાગે કેટલો ખૂણો બનશે?

c. ઘડિયાળના કાંટા દ્વારા બનતા અન્ય ખૂણાઓનું સંશોધન (explore) કરો.

2. દરવાજા(બારણા)નો ખૂણો :

દરવાજો કેટલો ખૂલ્યો છે, શું તે દર્શાવવા માટે ખૂણાનો ઉપયોગ કરવો શક્ય છે? ખૂણાનું શિરોબિંદુ શું હશે અને ખૂણાની ભુજાઓ કઈ હશે?



3. વિદ્યા ઝૂલા પર આનંદથી સમય પસાર કરી રહી છે. તે જુએ છે કે તે જેટલા મોટા ખૂણાથી ઝૂલવાની શરૂઆત કરે છે, તેટલી જ વધુ ગતિ (speed) તેને મળે છે. પરંતુ ખૂણો ક્યાં છે? શું તમે કોઈ ખૂણો જોઈ શકો છો?



4. અહીં એક રમકડું છે, જેમાં તેની એક બાજુ પર ઢાળવાળી પટ્ટીઓ જોડેલી છે; પટ્ટીઓના ખૂણા કે ઢાળ (slopes) જેટલા મોટા હોય છે, તેટલી જ ઝડપથી દડાઓ ગબડે છે. શું પટ્ટીના ઢાળનું વર્ણન કરવા માટે ખૂણાઓનો ઉપયોગ કરી શકાય? દરેક ખૂણાની ભુજાઓ કઈ છે? કઈ ભુજા દેખાય છે અને કઈ દેખાતી નથી?



5. નિરીક્ષણ કરો કે, નીચે આપેલી આકૃતિમાં જીવડાં (insects) અને તેનું ફેરવેલું સ્વરૂપ છે. શું ખૂણાઓનો ઉપયોગ પરિભ્રમણની માત્રા (amount of rotation)નું વર્ણન કરવા માટે થઈ શકે છે? કેવી રીતે? ખૂણાની ભુજાઓ અને શિરોબિંદુ શું હશે?

સૂચન : જીવડાંઓને સ્પર્શ કરતી આડી(સમક્ષિતિજ-Horizontal) રેખાનું નિરીક્ષણ કરો.



શિક્ષક માટે

વિદ્યાર્થીઓ તેમના રોજિંદા જીવનમાં દરેક ગાણિતિક સંકલ્પના(concept)નો ઉપયોગ જુએ તે મહત્ત્વનું છે. શિક્ષક કેટલીક એવી પ્રવૃત્તિઓનું આયોજન કરી શકે છે કે જ્યાં વિદ્યાર્થીઓ વાસ્તવિક જીવનની પરિસ્થિતિઓમાં ખૂણાઓના વ્યાવહારિક ઉપયોગોને સમજી શકે, જેમ કે ઘડિયાળો, દરવાજા, ઝૂલા (swings), ચઢાણ (uphill) અને ઉતરાણ(downhill)ની સંકલ્પનાઓ, સૂર્યનું સ્થાન, દિશાઓ (directions) આપવી વગેરે.

2.10 ખૂણા દોરવા

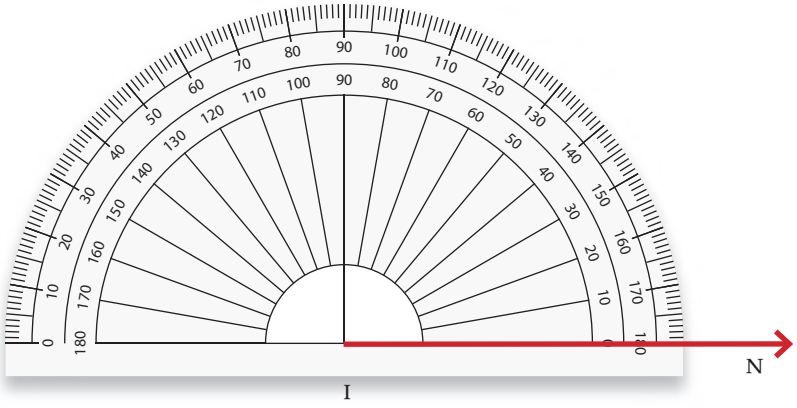
કોણમાપકનો ઉપયોગ કરીને વિદ્યા 30°નો ખૂણો દોરવા અને તેને ∠TIN નામ આપવા માંગે છે.

∠TINમાં, 'I' શિરોબિંદુ હશે, અને 'IT' અને 'IN' ખૂણાની ભુજાઓ હશે. એક ભુજા, જેમ કે, 'IN'ને સંદર્ભ (reference - આધાર) તરીકે રાખીને, બીજી ભુજા 'IT' એ 30°નું પરિભ્રમણ લેવું જોઈએ.

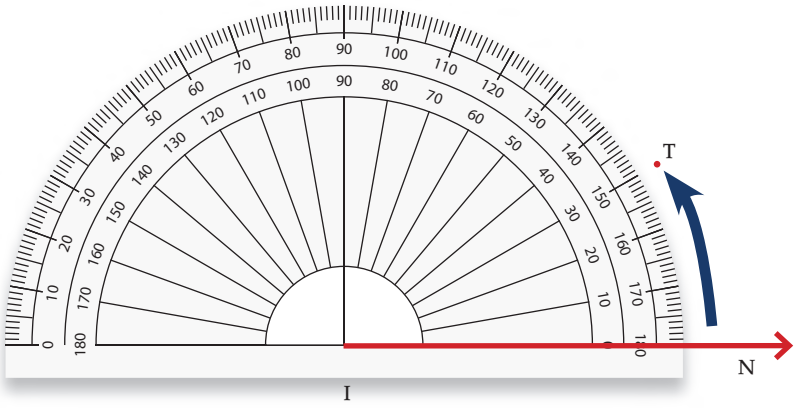
પગલું 1 : આપણે આધાર(base)થી શરૂઆત કરીશું અને $\overrightarrow{IN}$ દોરીશું :



પગલું 2 : આપણે કોણમાપકનું કેન્દ્રબિંદુ (centre point) I પર મૂકીશું અને INને 0ની રેખા સાથે ગોઠવીશું.

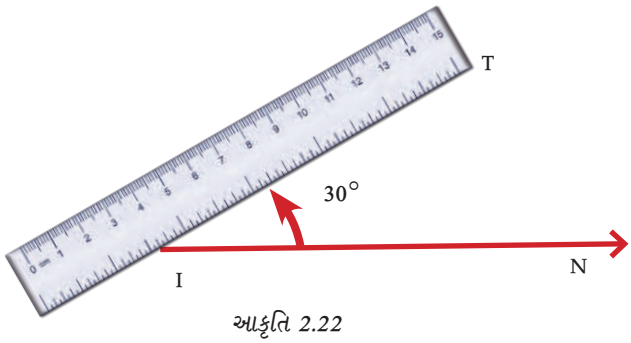


પગલું 3 : હવે, 0થી શરૂ કરીને, કોણમાપક પર 30° સુધીના અંશ ગણો (0, 10, 20, 30). 30°ના નિશાન પર બિંદુ T ચિહ્નિત કરો.



પગલું 4 : ફૂટપટ્ટી(ruler-scale)નો ઉપયોગ કરીને બિંદુ I અને T ને જોડો.

$\angle TIN = 30°$ એ માગ્યા મુજબનો ખૂણો છે.



આકૃતિ 2.22

ચાલો રમત રમીએ #1

આ ખૂણાનું અનુમાન લગાવવાની રમત છે! આ રમત તમારા સહપાઠીઓ સાથે બે ટુકડીઓ, ટુકડી 1 અને ટુકડી 2 બનાવીને રમો. અહીં રમત માટેની સૂચનાઓ અને નિયમો નીચે આપેલા છે :

- **ટુકડી 1** ગુપ્ત રીતે એક ખૂણાનું માપ પસંદ કરે છે, ઉદાહરણ તરીકે 49°, અને કોણમાપકનો ઉપયોગ કરીને ટુકડી 2ને દેખાય નહીં તેમ તે માપનો એક ખૂણો બનાવે છે.
- **ટુકડી 2** તે ખૂણાને જુએ છે. તેઓએ ઝડપથી ચર્ચા કરીને ખૂણાના માપનું અંશમાં અનુમાન લગાવવાનું છે. (કોણમાપકનો ઉપયોગ કર્યા વિના!)
- **ટુકડી 1** કોણમાપક વડે ખૂણાનું સાચું માપ દર્શાવે છે.
- **ટુકડી 2** એ તેમના અનુમાન અને સાચા માપ વચ્ચેના અંશ માપના તફાવત જેટલા ગુણ મેળવે છે. ઉદાહરણ તરીકે, જો **ટુકડી 2** એ 39°નું અનુમાન લગાવે છે, તો તેઓને 10 ગુણ મળે છે. (49° – 39°)
- દરેક ટુકડીને પાંચ વખત તક મળે છે. સૌથી ઓછા ગુણવાળી ટુકડી વિજેતા બને છે!

ચાલો રમત રમીએ #2

હવે આપણે રમતના નિયમોમાં થોડો ફેરફાર કરીશું. આ રમત તમારા સહપાઠીઓ સાથે ફરીથી બે ટુકડીઓ, ટુકડી 1 અને ટુકડી 2 બનાવીને રમો. અહીં સૂચનાઓ અને નિયમો આ પ્રમાણે છે :

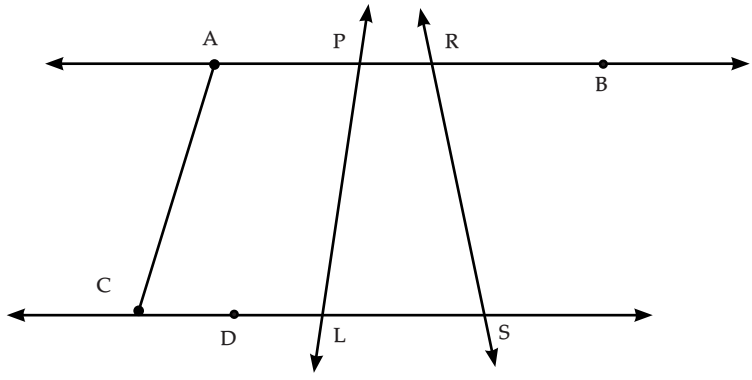
- **ટુકડી 1** બધાને એક ખૂણાનું માપ જાહેર કરે છે, દા.ત. 34°
- **ટુકડી 2**માંથી એક ખેલાડીએ કોણમાપકનો ઉપયોગ કર્યા વિના તે ખૂણો બોર્ડ પર દોરવાનો છે. **ટુકડી 2**ના અન્ય સભ્યો ખેલાડીને 'તેને મોટો બનાવો!' અથવા 'તેને નાનો બનાવો!' જેવા શબ્દો બોલીને મદદ કરી શકે છે.
- **ટુકડી 1**માંથી એક ખેલાડી બધા જોઈ શકે તે રીતે કોણમાપક વડે ખૂણો માપે છે.
- **ટુકડી 2**ને તેમના ખૂણાના માપ અને ઇચ્છિત ખૂણાના માપ વચ્ચેના અંશ માપના તફાવત જેટલા ગુણ મળે છે. ઉદાહરણ તરીકે, જો **ટુકડી 2**ના ખેલાડીનો ખૂણો 25° માપવામાં આવે, તો **ટુકડી 2**ને 9 ગુણ મળે છે. (34° – 25°)
- દરેક ટુકડીને પાંચ વખત તક મળે છે. ફરીથી, સૌથી ઓછા ગુણવાળી ટુકડી વિજેતા બને છે.

શિક્ષક માટે

આ રમતો રમવી એ ખૂણાઓ અને તેમના માપ વિશેની સમજ કેળવવા માટે મહત્ત્વપૂર્ણ છે. ખૂણાઓનો અંદાજ લગાવવાનો મહાવરો કરવા માટે જુદા જુદા દિવસે ઓછામાં ઓછા એક કે બે વાર આ રમત ફરીથી રમો. નોંધો કે આ રમતો વિદ્યાર્થીઓની જોડીમાં પણ રમી શકાય છે.

વિચારો અને શોધો

1. આકૃતિ 2.23માં, શક્ય તેટલા બધા ખૂણાઓની યાદી બનાવો. શું તમે તે બધા શોધી શક્યા? હવે, બધા ખૂણાઓના માપનું અનુમાન કરો. ત્યારબાદ, કોણમાપક વડે ખૂણાઓ માપો. તમારા બધા અનુમાનોને એક કોષ્ટકમાં નોંધો. જુઓ કે, તમારાં અનુમાનો વાસ્તવિક માપની કેટલાં નજીક છે.

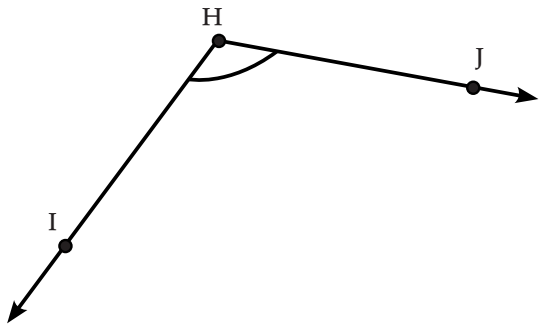


આકૃતિ 2.23

2. કોણમાપકનો ઉપયોગ કરીને નીચે આપેલા માપના ખૂણાઓ દોરો :

A. 110° B. 40° C. 75° D. 112° E. 134°

3. નીચે આપેલા ખૂણાના માપ જેટલો ખૂણો દોરો.

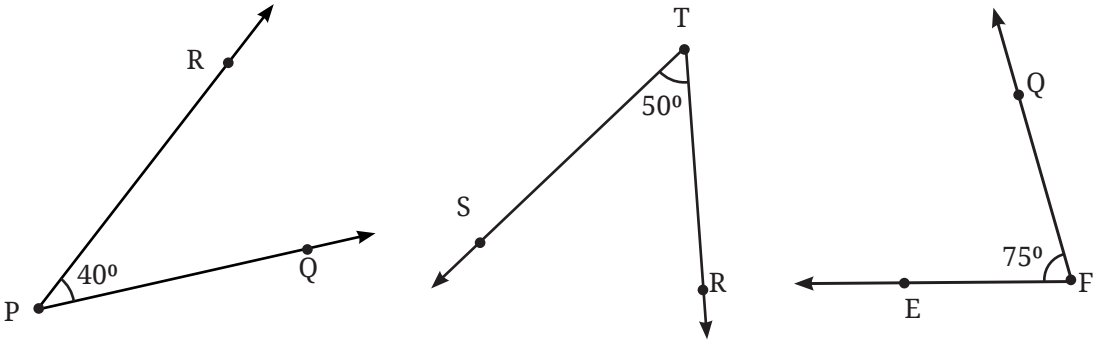


તમે ખૂણો દોરવા માટે અનુસરેલાં પગલાં પણ લખો.

2.11 ખૂણાના પ્રકાર અને તેમના માપ (Types of Angles and their Measures)

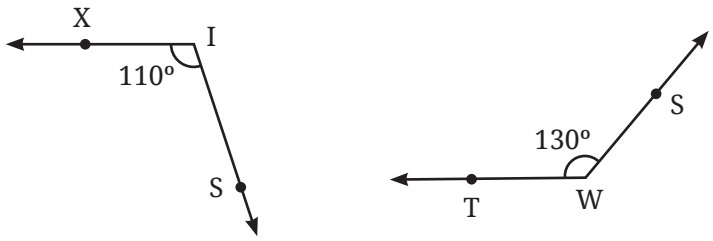
આ પ્રકરણમાં આપણે ખૂણાના વિવિધ પ્રકારો વિશે વાંચ્યું છે. આપણે જોયું છે કે સરળકોણ 180°નો હોય છે, અને કાટકોણ 90°નો હોય છે. અંશ માપના સંદર્ભમાં ખૂણાના અન્ય પ્રકારો – લઘુકોણ અને ગુરુકોણ – ને કેવી રીતે વર્ણવી શકાય?

લઘુકોણ (Acute Angle) : જે ખૂણાઓ કાટખૂણા કરતાં નાના હોય, એટલે કે 90° કરતાં ઓછા અને 0° કરતાં મોટા હોય, તેને લઘુકોણ કહેવાય છે.



લઘુકોણનાં ઉદાહરણો

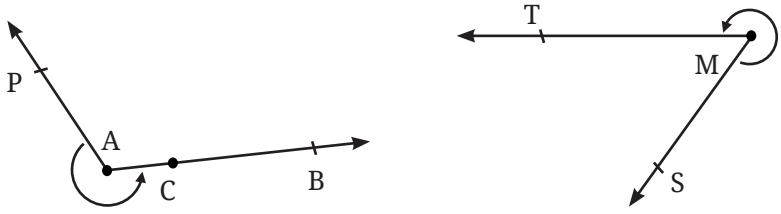
ગુરુકોણ (Obtuse Angle) : જે ખૂણાઓ કાટખૂણા કરતાં મોટા અને સરળકોણ કરતાં નાના હોય, એટલે કે 90° કરતાં મોટા અને 180° કરતાં નાના હોય, તેને ગુરુકોણ કહેવાય છે.



ગુરુકોણના ઉદાહરણો

શું આપણે ખૂણાના તમામ સંભવિત માપને આવરી લીધા છે? અહીં ખૂણાનો એક બીજો પ્રકાર છે.

વિપરીતકોણ (પ્રતિબિંબકોણ - Reflex angle) : જે ખૂણાઓ સરળકોણ કરતાં મોટા અને પૂર્ણકોણ કરતાં નાના હોય, એટલે કે 180° કરતાં મોટા અને 360° કરતાં નાના હોય, તેને વિપરીતકોણ કહેવાય છે.

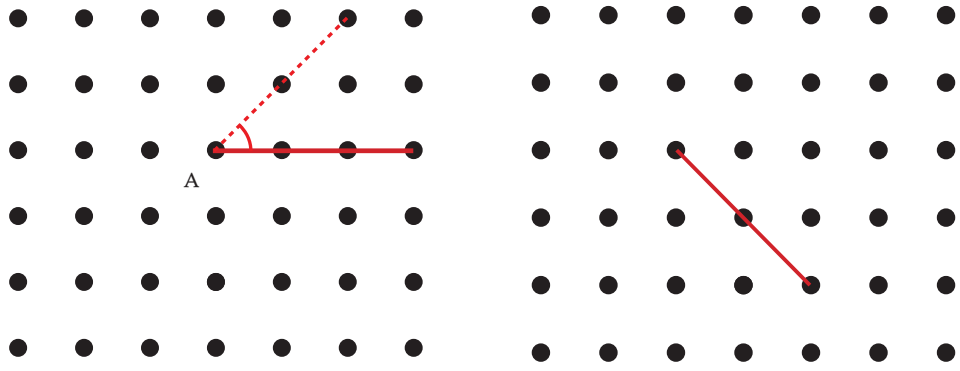


વિપરીતકોણના ઉદાહરણો

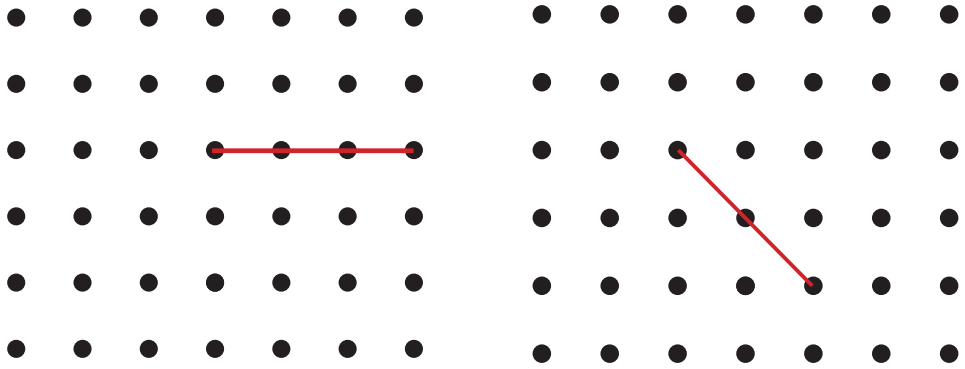
વિચારો અને શોધો

1. નીચેની દરેક ગ્રીડમાં, Aને આકૃતિમાંના અન્ય ગ્રીડ બિંદુઓ સાથે એક સીધી રેખાથી જોડીને મેળવો :

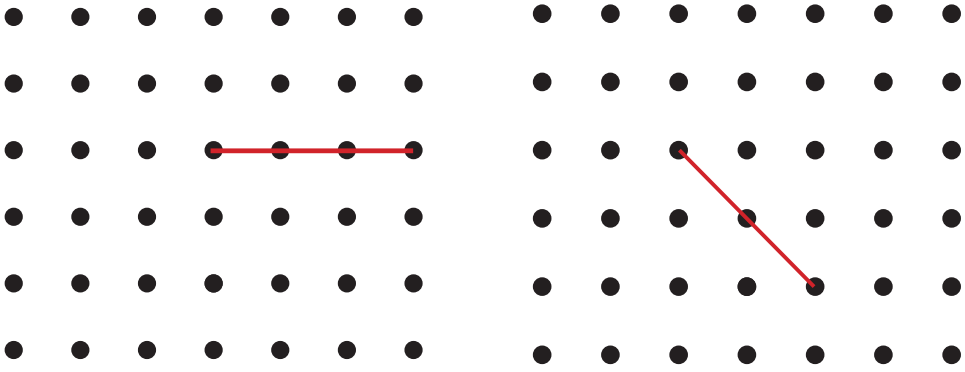
   a. લઘુકોણ



b. ગુરુકોણ



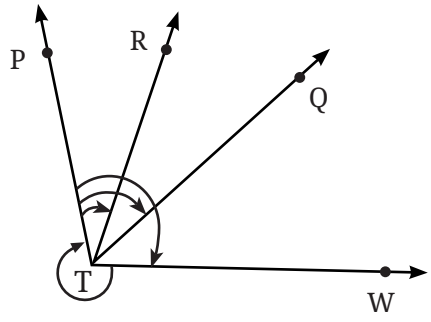
c. વિપરીત કોણ



ઇચ્છિત ખૂણાઓને દર્શાવવા માટે વક્રથી ચિહ્નિત કરો. તમારા માટે એક ઉદાહરણ કરી આપેલ છે.

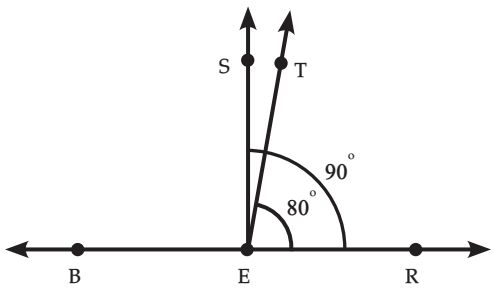
2. કોણમાપકનો ઉપયોગ કરીને દરેક ખૂણાનું માપ શોધો. પછી દરેક ખૂણાને લઘુકોણ, ગુરુકોણ, કાટકોણ અથવા વિપરીતકોણ તરીકે વર્ગીકૃત કરો.

a. ∠PTR b. ∠PTQ c. ∠PTW d. વિપરીત ∠WTP



ચાલો શોધીએ

આ આકૃતિમાં, ∠TER = 80° છે. તો ∠BETનું માપ શું છે? ∠SETનું માપ શું છે?



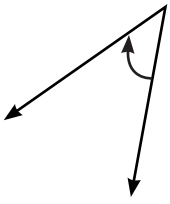
સૂચન (Hint) : અવલોકન કરો કે ∠REB એક સરળકોણ છે. તેથી, ∠REBનું અંશ માપ 180° છે, જેમાંથી ∠TER દ્વારા 80° આવરી લેવાયેલ છે. ∠SETનું માપ શોધવા માટે પણ આવી જ દલીલ (argument) લાગુ કરી શકાય છે.

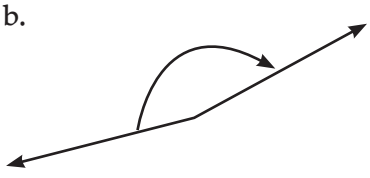
વિચારો અને શોધો

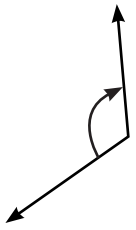
1. નીચે આપેલા માપના ખૂણા દોરો :

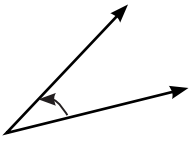
   a. 140° b. 82° c. 195° d. 70° e. 35°

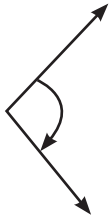
2. દરેક ખૂણાના માપનો અંદાજ લગાવો અને પછી તેને કોણમાપક વડે માપો :

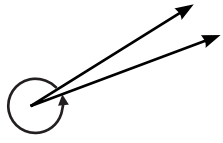
   a. 

   b. 

   c. 

   d. 

   e. 

   f. 

   આ ખૂણાઓને લઘુકોણ, કાટકોણ, ગુરુકોણ અથવા વિપરીતકોણ (પ્રતિબિંબકોણ) તરીકે વર્ગીકૃત કરો.

3. ત્રણ લઘુકોણ, એક કાટકોણ અને બે ગુરુકોણ ધરાવતી કોઈ પણ આકૃતિ બનાવો.
4. અક્ષર 'M' એવી રીતે દોરો કે તેની બાજુઓના ખૂણા 40°ના હોય અને વચ્ચેનો ખૂણો 60°નો હોય.
5. અક્ષર 'Y' એવી રીતે દોરો કે તેનાથી બનતા ત્રણ ખૂણા 150°, 60° અને 150°ના હોય.



6. અશોક ચક્રમાં 24 આરા (spokes) છે. એકબીજાની પાસે આવેલા બે આરાઓ વચ્ચેના ખૂણાનું અંશ માપ શું છે? બે આરાઓ વચ્ચે બનતો સૌથી મોટો લઘુકોણ કેટલો?
7. **કોયડો (Puzzle) :** હું એક લઘુકોણ છું. જો તમે મારા માપને બમણું (double) કરો છો, તો તમને એક લઘુકોણ મળે છે. જો તમે મારા માપને ત્રણ ગણું (triple) કરો છો, તો પણ તમને એક લઘુકોણ મળે છે. જો તમે મારા માપને ચાર ગણું (quadruple) કરો છો, તો પણ તમને ફરી એક લઘુકોણ મળે છે! પરંતુ, જો તમે મારા માપને 5 વડે ગુણો છો, તો તમને ગુરુકોણનું માપ મળે છે. મારા માપ માટે શું શક્યતાઓ છે?

સારાંશ

- **બિંદુ** (point) એક સ્થાન દર્શાવે છે. તેને અંગ્રેજી મૂળાક્ષરના મોટા અક્ષર વડે દર્શાવવામાં આવે છે.
- **રેખાખંડ** (line segment) બે બિંદુઓ વચ્ચેનું સૌથી ટૂંકું અંતર છે. બિંદુઓ S અને T ને જોડતા રેખાખંડને $\overline{ST}$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે.
- **રેખા** (line) ત્યારે મળે છે, જ્યારે રેખાખંડ $\overline{ST}$ ને બંને બાજુએ અનંત સુધી લંબાવવામાં આવે છે; તેને $\overleftrightarrow{ST}$ અથવા કેટલીકવાર m જેવા એક નાના અક્ષર વડે દર્શાવવામાં આવે છે.
- **કિરણ** (ray) એ રેખાનો એક ભાગ છે જે બિંદુ Dથી શરૂ થાય છે, અને એક દિશામાં અનંત સુધી લંબાવાય છે. તેને $\overrightarrow{DP}$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે, જ્યાં P એ કિરણ પરનું બીજું બિંદુ છે.
- ખૂણાને બે કિરણો તરીકે કલ્પના કરી શકાય છે જે એક સામાન્ય ઉદ્ભવ બિંદુથી શરૂ થાય છે. બે કિરણો $\overrightarrow{OP}$ અને $\overrightarrow{OM}$ એ $\angle POM$ (જેને $\angle MOP$ પણ કહેવાય છે) બનાવે છે; અહીં, Oને ખૂણાનું શિરોબિંદુ (vertex) કહેવામાં આવે છે, અને કિરણો $\overrightarrow{OP}$ અને $\overrightarrow{OM}$ને ખૂણાની ભુજાઓ (arms) કહેવામાં આવે છે.
- ખૂણાના એક કિરણને ખૂણાના બીજા કિરણ પર ફેરવવા માટે શિરોબિંદુની આસપાસ જરૂરી પરિભ્રમણ અથવા વક્રની માત્રાને ખૂણાનું માપ કહે છે.
- ખૂણાઓનું માપ **અંશમાં** માપી શકાય છે. એક સંપૂર્ણ પરિભ્રમણ અથવા વક્રને 360 અંશ તરીકે ગણવામાં આવે છે અને તેને 360° તરીકે દર્શાવવામાં આવે છે.
- **કોણમાપક**નો ઉપયોગ કરીને ખૂણાનું અંશમાપ માપી શકાય છે.
- ખૂણાઓ **સરળકોણ** (180°), **કાટકોણ** (90°), **લઘુકોણ** (0°થી વધુ અને 90°થી ઓછો), **ગુરુકોણ** (90°થી વધુ અને 180°થી ઓછો), અને **વિપરીતકોણ** (180°થી વધુ અને 360°થી ઓછો) હોઈ શકે છે.