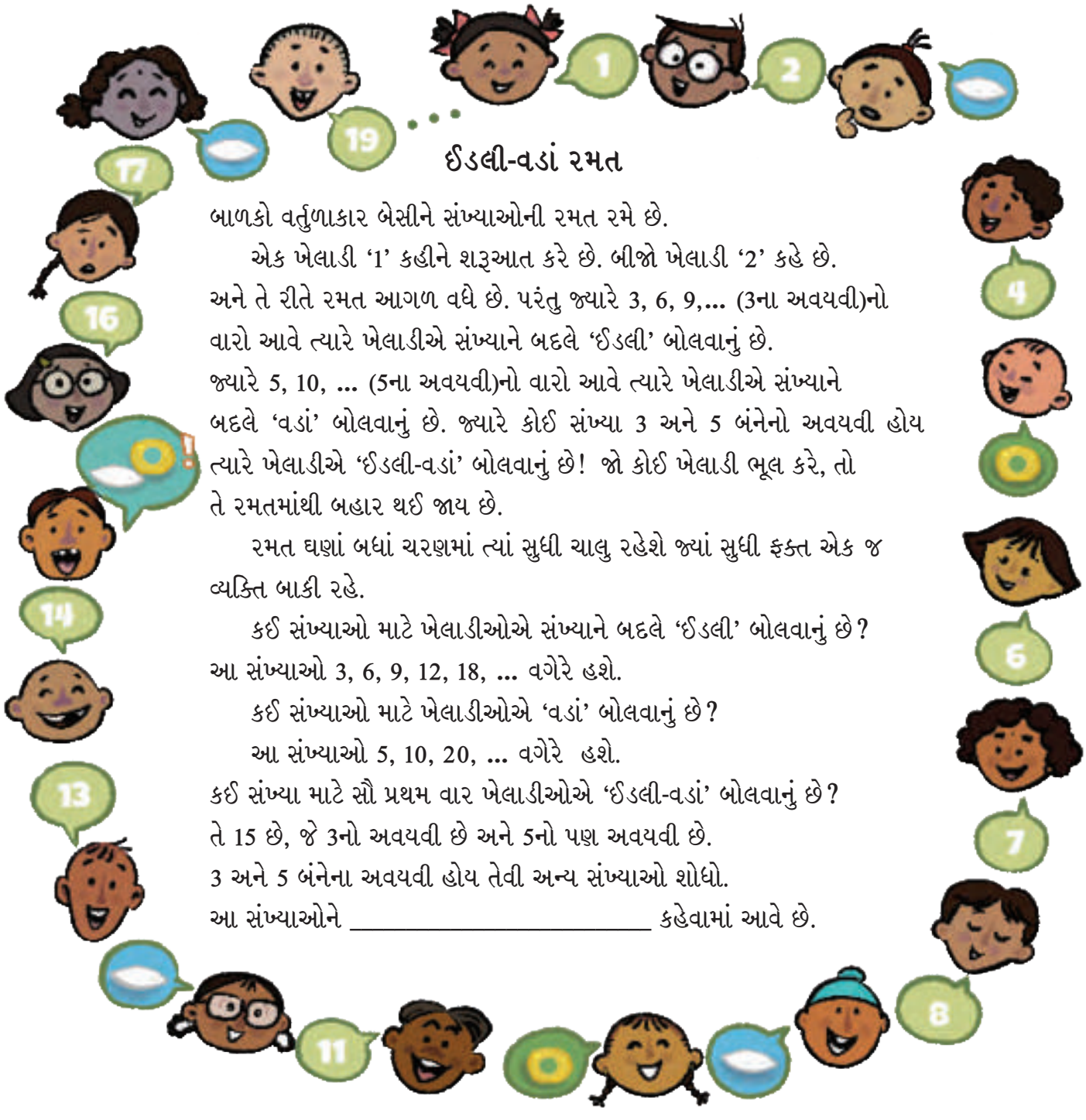
5 અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ

5.1 સામાન્ય અવયવી (Multiples) અને સામાન્ય અવયવો (Common Factors)



ઈડલી-વડાં રમત

બાળકો વર્તુળાકાર બેસીને સંખ્યાઓની રમત રમે છે.

એક ખેલાડી '1' કહીને શરૂઆત કરે છે. બીજો ખેલાડી '2' કહે છે. અને તે રીતે રમત આગળ વધે છે. પરંતુ જ્યારે 3, 6, 9,... (3ના અવયવી)નો વારો આવે ત્યારે ખેલાડીએ સંખ્યાને બદલે 'ઈડલી' બોલવાનું છે. જ્યારે 5, 10, ... (5ના અવયવી)નો વારો આવે ત્યારે ખેલાડીએ સંખ્યાને બદલે 'વડાં' બોલવાનું છે. જ્યારે કોઈ સંખ્યા 3 અને 5 બંનેનો અવયવી હોય ત્યારે ખેલાડીએ 'ઈડલી-વડાં' બોલવાનું છે! જો કોઈ ખેલાડી ભૂલ કરે, તો તે રમતમાંથી બહાર થઈ જાય છે.

રમત ઘણાં બધાં ચરણમાં ત્યાં સુધી ચાલુ રહેશે જ્યાં સુધી ફક્ત એક જ વ્યક્તિ બાકી રહે.

કઈ સંખ્યાઓ માટે ખેલાડીઓએ સંખ્યાને બદલે 'ઈડલી' બોલવાનું છે? આ સંખ્યાઓ 3, 6, 9, 12, 18, ... વગેરે હશે.

કઈ સંખ્યાઓ માટે ખેલાડીઓએ 'વડાં' બોલવાનું છે?

આ સંખ્યાઓ 5, 10, 20, ... વગેરે હશે.

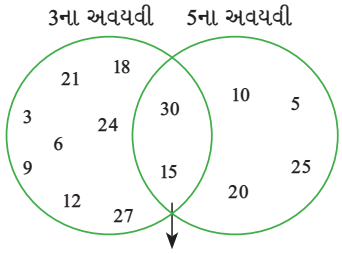
કઈ સંખ્યા માટે સૌ પ્રથમ વાર ખેલાડીઓએ 'ઈડલી-વડાં' બોલવાનું છે? તે 15 છે, જે 3નો અવયવી છે અને 5નો પણ અવયવી છે.

3 અને 5 બંનેના અવયવી હોય તેવી અન્ય સંખ્યાઓ શોધો.

આ સંખ્યાઓને _____ કહેવામાં આવે છે.

વિચારો અને શોધો

1. ‘ઈડલી-વડાં’ દસમી વખત કઈ સંખ્યા માટે કહેવામાં આવે છે?
2. જો રમત 1થી 90 સુધીની સંખ્યાઓ માટે રમવામાં આવે તો શોધો કે :
   અ. બાળકો ‘ઈડલી’ કેટલી વખત કહેશે? (જ્યારે ‘ઈડલી-વડાં’ કહેવામાં આવે તે સહિત)
   બ. બાળકો ‘વડાં’ કેટલી વખત કહેશે? (જ્યારે ‘ઈડલી-વડાં’ કહેવામાં આવે તે સહિત)
   ક. બાળકો ‘ઈડલી-વડાં’ કેટલી વખત કહેશે?
3. જો રમત 900 સુધી રમવામાં આવે તો શું થાય? તમારા જવાબો કેવી રીતે બદલાશે?
4. શું આ આકૃતિ ‘ઈડલી-વડાં’ રમત સાથે સંબંધિત છે?
   સૂચન : 30 સુધી રમત રમવાની કલ્પના કરો. જો રમત 60 સુધી રમવામાં આવે તો આકૃતિ 5.1ના જેવી આકૃતિ દોરો.

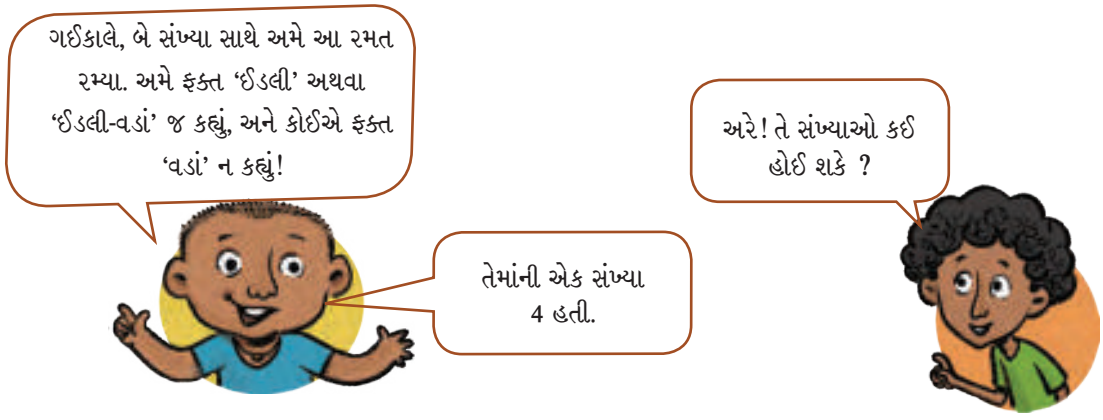


આકૃતિ 5.1

ચાલો, હવે આપણે ‘ઈડલી-વડાં’ રમતને સંખ્યાઓની અલગ અલગ જોડીઓ સાથે રમીએ :

a. 2 અને 5
b. 3 અને 7
c. 4 અને 6

આપણે નાની સંખ્યાના અવયવી માટે ‘ઈડલી’, મોટી સંખ્યાના અવયવી માટે ‘વડાં’ અને સામાન્ય અવયવી માટે ‘ઈડલી-વડાં’ કહીશું. જો રમત 60 સુધી રમવામાં આવે તો આકૃતિ 5.1 જેવી જ આકૃતિ દોરો.



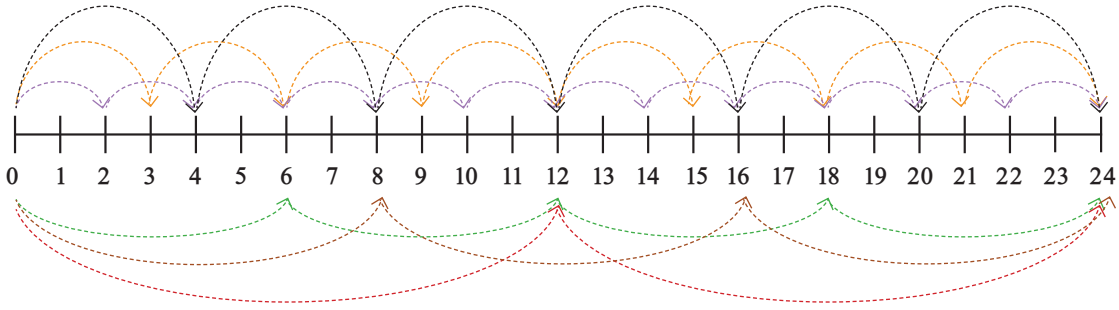
નીચેનામાંથી કોઈ બીજી સંખ્યા હોઈ શકે છે :

2, 3, 5, 8, 10 ?

જેકપોટ માટે કૂદકા

જમ્પી અને ગ્રમ્પી એક રમત રમે છે.

- ગ્રમ્પી કોઈ સંખ્યા પર ખજાનો મૂકે છે. ઉદાહરણ તરીકે, તે 24 પર મૂકી શકે છે.
- જમ્પી એક કૂદકાનું માપ પસંદ કરે છે. જો તે 4 પસંદ કરે, તો તેને 0 થી શરૂ કરીને ફક્ત 4ના અવયવી પર જ કૂદવું પડશે.
- જો જમ્પી તે સંખ્યા પર પહોંચે જ્યાં ગ્રમ્પીએ ખજાનો મૂક્યો છે, તો તેને ખજાનો મળે છે.
- કયા માપના કૂદકાથી જમ્પી 24 પર પહોંચશે?
- જો તે 4 પસંદ કરે, તો જમ્પી $4 \rightarrow 8 \rightarrow 12 \rightarrow 16 \rightarrow 20 \rightarrow 24 \rightarrow 28 \rightarrow \ldots$ પર પહોચે છે. અન્ય સફળ કૂદકાના બીજાં માપ 2, 3, 6, 8 અને 12 છે.



1 અને 24ના કૂદકાના માપ વિશે શું કહેશો? હા, તેનાથી પણ 24 પર પહોંચાશે.

સંખ્યાઓ 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 એ તમામ 24ને નિઃશેષ ભાગે છે. યાદ રાખો કે આવી સંખ્યાઓને 24ના **અવયવ અથવા ભાજક (divisor)** કહેવામાં આવે છે.

ગ્રમ્પી રમતનું સ્તર વધારે છે. બે અલગ અલગ સંખ્યાઓ પર બે ખજાના રાખવામાં આવે છે. જમ્પીએ એક કૂદકાનું માપ પસંદ કરવું પડશે અને તેને વળગી રહેવું પડશે. જમ્પીને ફક્ત ત્યારે જ ખજાના મળે છે, જો તે પસંદ કરેલા કૂદકાના માપ સાથે બંને સંખ્યાઓ પર પહોંચશે. પહેલાંની જેમ, જમ્પી 0થી શરૂ કરે છે.

ગ્રમ્પીએ 14 અને 36 પર ખજાના રાખ્યા છે અને જમ્પી કૂદકાનું માપ 7 પસંદ કરે છે. શું જમ્પી બંને ખજાના પર પહોંચી શકશે? 0થી શરૂ કરીને, તે $7 \rightarrow 14 \rightarrow 21 \rightarrow 28 \rightarrow 35 \rightarrow 42 \ldots$ પર કૂદે છે.

આપણે જોઈએ છીએ કે તે 14 પર પહોંચ્યો. પણ 36 પર પહોંચી શક્યો નહીં. તેથી તેને ખજાનો મળતો નથી. તેણે કૂદકાનું માપ કયું પસંદ કરવું જોઈતું હતું?

14ના અવયવો 1, 2, 7, 14 છે. તેથી, આ કૂદકાના માપથી 14 પર પહોંચશે.

36ના અવયવો 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 અને 36 છે. આ કૂદકાના માપથી 36 પર પહોંચશે.

તેથી, 1 અથવા 2ના કૂદકાના માપથી 14 અને 36 બંને પર પહોંચી શકાય. નોંધો કે 1 અને 2 એ 14 અને 36ના **સામાન્ય અવયવો** છે.

જે કૂદકાના માપનો ઉપયોગ કરીને બંને ખજાના સુધી પહોંચી શકાય છે તે આપેલ બે સંખ્યાઓના સામાન્ય અવયવો છે, કે જ્યાં ખજાના મૂકવામાં આવ્યા છે.

- કયા કૂદકાના માપ દ્વારા 15 અને 30 બંને સુધી પહોંચી શકાય છે? ત્યાં બહુવિધ કૂદકાનાં માપ શક્ય છે તે બધાં શોધવાનો પ્રયાસ કરો.

- નીચેનું કોષ્ટક જુઓ. તમે શું નોંધ્યું?

31	(32)	33	34	35	(36)	37	38	39	(40)
41	42	43	(44)	45	46	47	(48)	49	50
51	(52)	53	54	55	(56)	57	58	59	(60)
61	62	63	(64)	65	66	67	(68)	69	70

કોષ્ટકમાં,

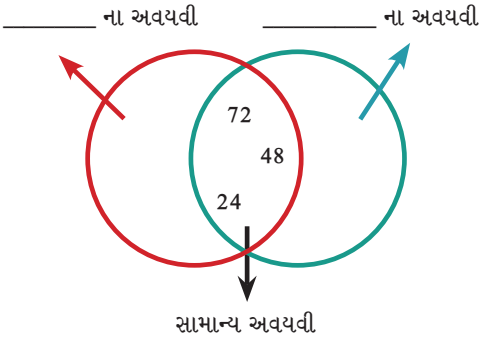
1. શું છાયાંકિત (shaded) સંખ્યાઓમાં કંઈ સામાન્ય છે?
2. શું વર્તુળ (circle) કરેલી સંખ્યાઓમાં કંઈ સામાન્ય છે?
3. કઈ સંખ્યાઓ છાયાંકિત અને વર્તુળ બંને કરેલી છે? આ સંખ્યાઓને શું કહેવામાં આવે છે?

ગાણિતિક ચર્ચા

- **વિચારો અને શોધો**

1. 310 અને 410 વચ્ચે આવતા 40ના તમામ અવયવી શોધો.

2. હું કોણ છું?
   a. હું 40 કરતાં નાની સંખ્યા છું. મારો એક અવયવ 7 છે. મારા અંકોનો સરવાળો 8 છે.
   b. હું 100 કરતાં નાની સંખ્યા છું. મારા બે અવયવો 3 અને 5 છે. મારો એક અંક બીજા અંક કરતાં 1 વધારે છે.
3. જે સંખ્યા માટે તેના બધા અવયવોનો સરવાળો તે સંખ્યાના બમણા (twice) જેટલો હોય, તેને **સંપૂર્ણ સંખ્યા** (Perfect Number) કહેવામાં આવે છે. સંખ્યા 28 એક સંપૂર્ણ સંખ્યા છે. તેના અવયવો 1, 2, 4, 7, 14 અને 28 છે. તેમનો સરવાળો 56 છે, જે 28ના બમણા જેટલો છે. 1 અને 10 વચ્ચે એક સંપૂર્ણ સંખ્યા શોધો.
4. સામાન્ય અવયવ શોધો :
   a. 20 અને 28 b. 35 અને 50
   c. 4, 8 અને 12 d. 5, 15 અને 25
5. 25ના અવયવી હોય પરંતુ 50ના અવયવી ન હોય તેવી કોઈ પણ ત્રણ સંખ્યાઓ શોધો.
6. અંશુ અને તેના મિત્રો બે સંખ્યાઓ સાથે 'ઈડલી-વડાં' રમત રમે છે, બંને 10 કરતાં નાની છે. પ્રથમ વખત જ્યારે કોઈ 'ઈડલી-વડાં' કહે છે તે સંખ્યા 50 પછી આવે છે. 'ઈડલી' અને 'વડાં' માટે નિયુક્ત બે સંખ્યાઓ કઈ હોઈ શકે છે?
7. ખજાનાની શોધની રમતમાં, ગ્રમ્પીએ 28 અને 70 પર ખજાના રાખ્યા છે. કયા કૂદકાના માપ વડે બંને સંખ્યાઓ પર પહોંચશે?
8. નીચેની આકૃતિમાં ગુણાએ સામાન્ય અવયવી સિવાયની બધી સંખ્યાઓ ભૂંસી નાખી છે. તે સંખ્યાઓ કઈ હોઈ શકે છે તે શોધો અને ખાલી જગ્યાઓમાં ખૂટતી સંખ્યાઓ ભરો.



ગાણિતિક ચર્ચા

9. એવી સૌથી નાની સંખ્યા શોધો જે 7 સિવાયની 1થી 10 સુધીની તમામ સંખ્યાઓનો અવયવી હોય.
10. એવી સૌથી નાની સંખ્યા શોધો જે 1થી 10 સુધીની તમામ સંખ્યાઓનો અવયવી હોય.

પ્રયત્ન કરો

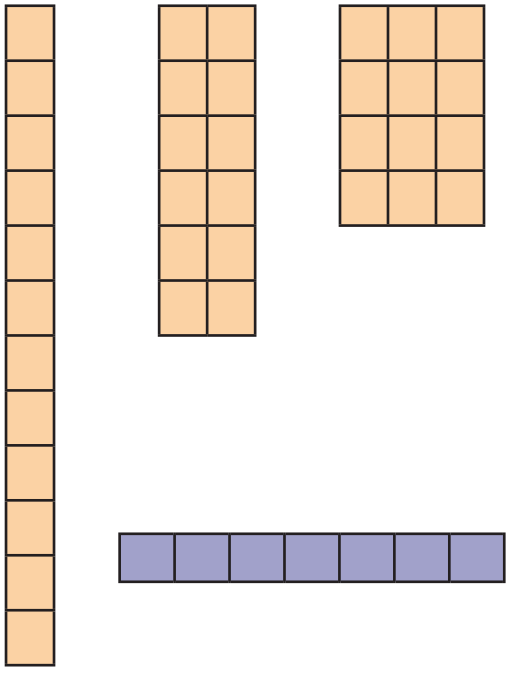
5.2 અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ (Prime Numbers)

ગુણા અને અંશુ તેમના ખેતરમાં ઊગેલા અંજીરને પેક કરવા માંગે છે. ગુણા દરેક ખોખામાં 12 અંજીર મૂકવા માંગે છે અને અંશુ દરેક ખોખામાં 7 અંજીર મૂકવા માંગે છે.

આવી કેટલી ગોઠવણીઓ શક્ય છે?

વિચારો અને જુદીજુદી રીતો શોધો કે કેવી રીતે –

1. ગુણા 12 અંજીરને લંબચોરસ (rectangle) રીતે ગોઠવી શકે છે.
2. અંશુ 7 અંજીરને લંબચોરસ રીતે ગોઠવી શકે છે.



ગુણાએ આ શક્યતાઓની સૂચિ બનાવી છે.

દરેક ગોઠવણીમાં હાર (row) અને સ્તંભ (column)ની સંખ્યાનું નિરીક્ષણ કરો. તેઓ 12 સાથે કેવી રીતે સંબંધિત છે? ઉદાહરણ તરીકે, બીજી ગોઠવણીમાં, 12 અંજીરને દરેકમાં 6 આવે તે રીતે બે સ્તંભોમાં ગોઠવવામાં આવ્યાં છે અથવા $12 = 2 \times 6$.

અંશુ ફક્ત એક જ ગોઠવણી કરી શક્યો :

$7 = 7 \times 1$ અથવા 1×7.

અન્ય કોઈ લંબચોરસ ગોઠવણી શક્ય નથી.

ગુણાની દરેક ગોઠવણીમાં, હારની સંખ્યાને સ્તંભોની સંખ્યા વડે ગુણવાથી (multiplying) સંખ્યા 12 મળે છે. તેથી, હાર અથવા સ્તંભોની સંખ્યા 12ના અવયવો છે.

આપણે જોયું કે સંખ્યા 12ને એક કરતાં વધુ રીતે લંબચોરસમાં ગોઠવી શકાય છે કારણકે 12ને બે કરતાં વધુ અવયવો છે. સંખ્યા 7ને ફક્ત એક જ રીતે ગોઠવી શકાય છે. કારણ કે તેને ફક્ત બે અવયવો 1 અને 7 છે.

જે સંખ્યાઓને ફક્ત બે અવયવો હોય છે તેને **અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ** (Prime numbers) કહેવામાં આવે છે. અહીં શરૂઆતની થોડી અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 છે. નોંધો કે, અવિભાજ્ય સંખ્યાના અવયવો 1 અને તે સંખ્યા પોતે છે. જે સંખ્યાઓને બે કરતાં વધુ અવયવો હોય છે તેનું શું? તેમને **વિભાજ્ય સંખ્યાઓ** (composite numbers) કહેવામાં આવે છે. શરૂઆતની થોડી વિભાજ્ય સંખ્યાઓ 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20 છે.

1 વિશે શું, જેને ફક્ત એક જ અવયવ છે? સંખ્યા 1 ન તો અવિભાજ્ય સંખ્યા છે કે ન તો વિભાજ્ય સંખ્યા છે.

21થી 30 સુધીમાં કેટલી અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ છે? 21થી 30 સુધીમાં કેટલી વિભાજ્ય સંખ્યાઓ છે?

શું આપણે 1થી 100 સુધીની બધી અવિભાજ્ય સંખ્યાઓની સૂચિ (યાદી - list) બનાવી શકીએ?

અહીં અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ શોધવાની એક રસપ્રદ રીત છે. નીચે આપેલાં પગલાં અનુસરો અને જુઓ શું થાય છે.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

પગલું 1 : 1 પર ચોકડી (cross) કરો કારણ કે તે અવિભાજ્ય કે વિભાજ્ય સંખ્યા નથી.

પગલું 2 : 2 પર વર્તુળ કરો, અને તે પછી 2ના બધા અવયવી પર ચોકડી કરો. એટલે કે, 4, 6, 8, અને તેથી વધુ.

પગલું 3 : તમે જોશો કે આગલી રદ ન થયેલી સંખ્યા 3 છે. 3 પર વર્તુળ કરો અને તે પછી 3 ના બધા ગુણીતો પર ચોકડી કરો. એટલે કે 6, 9, 12, અને તેથી વધુ.

પગલું 4 : હવે, રદ ન થયેલી સંખ્યા 5 છે. 5 પર વર્તુળ કરો અને તે પછી 5ના બધા અવયવી પર ચોકડી કરો. એટલે કે 10, 15, 20, અને તેથી વધુ.

પગલું 5 : જ્યાં સુધી યાદીમાંની બધી સંખ્યાઓ પર વર્તુળ અથવા ચોકડી ન કરેલી હોય ત્યાં સુધી આ પ્રક્રિયા ચાલુ રાખો.

વર્તુળ કરેલી બધી સંખ્યાઓ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ છે.

1 સિવાયની બધી ચોકડી કરેલી સંખ્યાઓ વિભાજ્ય સંખ્યાઓ છે. આ પદ્ધતિને ઇરેટોસ્થેનીસની ચાળણી (Sieve of Eratosthenes) કહેવામાં આવે છે. આ પ્રક્રિયા 100થી મોટી સંખ્યાઓ માટે પણ ચાલુ રાખી શકાય છે. 2200 વર્ષ પહેલાં ઇરેટોસ્થેનીસ નામના એક ગ્રીક ગણિતશાસ્ત્રી હતા તેમણે અવિભાજ્ય સંખ્યાઓની યાદી બનાવવાની આ પદ્ધતિ વિકસાવી હતી.



ગુણા અને અંશુ આશ્ચર્ય પામે છે કે આ સરળ પદ્ધતિ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ કેવી રીતે શોધી શકે છે! આ પદ્ધતિ કેવી રીતે કામ કરે છે તે વિશે વિચારો. ઉપર આપેલા પગલાં ફરીથી વાંચો અને જુઓ કે દરેક પગલું પૂર્ણ થયા પછી શું થાય છે.

વિચારો અને શોધો

1. આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે 2 એક અવિભાજ્ય અને યુગ્મ સંખ્યા (even number) પણ છે. શું કોઈ અન્ય યુગ્મ અવિભાજ્ય સંખ્યા છે?
2. 100 સુધીની અવિભાજ્ય સંખ્યાઓની યાદી જુઓ. બે ક્રમિક (successive) અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ વચ્ચેનો સૌથી નાનો તફાવત (difference) શું છે? સૌથી મોટો તફાવત શું છે?
3. શું પાના નંબર 113 પરના કોષ્ટકમાં દરેક હારમાં સમાન સંખ્યામાં અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ છે? કયા દશકની (decades) હરોળમાં સૌથી ઓછી સંખ્યામાં અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ છે? કયા દશકની હરોળમાં સૌથી વધુ સંખ્યામાં અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ છે?

ઘણાં વર્ષો પહેલાંની અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ

અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ એ તમામ પૂર્ણ સંખ્યાઓ(whole numbers)ના પાયાની ઈંટો છે. ગ્રીક સંસ્કૃતિના સમયથી (2000 વર્ષ પહેલાંથી) લઈને આજના દિવસ સુધી ગણિતજ્ઞો હજુ પણ તેમનાં રહસ્યો ઉકેલવા માટે સંઘર્ષ કરી રહ્યા છે!

વિચારણીય વિષય : શું સૌથી મોટી અવિભાજ્ય સંખ્યા છે? અથવા અવિભાજ્ય સંખ્યાઓની યાદી અંત વિના ચાલુ રહે છે? યુક્લિડ નામના ગણિતજ્ઞે આનો જવાબ શોધ્યો હતો અને તમે પણ પછીના ધોરણમાં આ શોધશો!

રમૂજી હકીકત : કોઈએ 'લખેલી' zસૌથી મોટી અવિભાજ્ય સંખ્યા એટલી મોટી છે કે તેને લખવા માટે લગભગ 6500 પાનાં લાગે! તેથી તેને ફક્ત કમ્પ્યુટર પર જ લખી શકાય!

4. આપેલી સંખ્યાઓમાંથી કઈ સંખ્યાઓ અવિભાજ્ય છે : 23, 51, 37, 26?
5. 20 કરતાં નાની અવિભાજ્ય સંખ્યાઓની ત્રણ જોડ લખો, જેનો સરવાળો 5નો અવયવી હોય.
6. સંખ્યાઓ 13 અને 31 અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ છે. આ બંને સંખ્યાઓમાં સમાન અંકો 1 અને 3 છે. 100 સુધી આવી અવિભાજ્ય સંખ્યાઓની જોડ શોધો.
7. 1 અને 100 વચ્ચેની સાત ક્રમિક (consecutive) વિભાજ્ય સંખ્યાઓ શોધો.
8. અવિભાજ્ય સંખ્યાઓની જોડ જેમનો તફાવત 2 હોય તેમને **અવિભાજ્ય યુગ્મ (Twin Prime)** કહેવામાં આવે છે. ઉદાહરણ તરીકે, 3 અને 5 અવિભાજ્ય યુગ્મ છે. આ જ પ્રમાણે 17 અને 19 પણ છે. 1 અને 100 વચ્ચેની અન્ય અવિભાજ્ય યુગ્મ સંખ્યાઓ શોધો.

9. દરેક વિધાન સાચું (True) છે કે ખોટું (False) તે કહો તથા સમજાવો.
   a. એવી કોઈ અવિભાજ્ય સંખ્યા નથી જેનો એકમનો અંક (unit digit) 4 હોય.
   b. અવિભાજ્ય સંખ્યાઓનો ગુણાકાર (product) પણ અવિભાજ્ય હોઈ શકે છે.
   c. અવિભાજ્ય સંખ્યાઓને કોઈ અવયવો હોતા નથી.
   d. બધી યુગ્મ સંખ્યાઓ વિભાજ્ય સંખ્યાઓ છે.
   e. 2 એક અવિભાજ્ય સંખ્યા છે અને પછીની સંખ્યા, 3 પણ અવિભાજ્ય સંખ્યા છે. દરેક અન્ય અવિભાજ્ય સંખ્યા માટે, પછીની સંખ્યા વિભાજ્ય હોય છે.
10. નીચેનામાંથી કઈ સંખ્યા બરાબર ત્રણ અલગ-અલગ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓનો ગુણાકાર છે : 45, 60, 91, 105, 330?
11. તમે 2, 4 અને 5માંથી દરેકનો એકવાર ઉપયોગ કરીને ત્રણ-અંકની કેટલી અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ બનાવી શકો છો?
12. નિરીક્ષણ કરો કે 3 એક અવિભાજ્ય સંખ્યા છે અને $2 \times 3 + 1 = 7$ પણ એક અવિભાજ્ય છે. શું એવી અન્ય અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ છે જેના બમણા કરીને 1 ઉમેરવાથી બીજી અવિભાજ્ય સંખ્યા મળે? આવા ઓછામાં ઓછાં પાંચ ઉદાહરણ શોધો.

5.3 ખજાનાની સુરક્ષા માટે સહ-અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ (Co-prime Numbers for Safekeeping Treasures)

કઈ જોડીઓ સુરક્ષિત છે?

ચાલો, આપણે ખજાનો શોધવાની રમત પર પાછા જઈએ. આ વખતે ખજાના બે સંખ્યાઓ પર રાખવામાં આવ્યા છે. જો જમ્પી સમાન કૂદકાના માપ સાથે બંને સંખ્યાઓ સુધી પહોંચે તો જ તેને ખજાના મળી શકે છે. એક નવો નિયમ પણ છે. 1ના કૂદકાનું માપ માન્ય નથી.

ગ્રમ્પીએ ખજાના ક્યાં મૂકવા જોઈએ જેથી જમ્પી બંને ખજાના સુધી પહોંચી ન શકે?

શું 12 અને 26 પર ખજાનો મૂકવાથી કામ થશે? ના! જો કૂદકાનું માપ 2 પસંદ કરવામાં આવે તો જમ્પી 12 અને 26 બંને સુધી પહોંચી જશે.

4 અને 9 વિશે શું? જમ્પી 1 સિવાયના અન્ય કોઈ કૂદકાના માપનો ઉપયોગ કરીને બંને સુધી પહોંચી શકતો નથી. તેથી, ગ્રમ્પી જાણે છે કે 4 અને 9ની જોડ સુરક્ષિત છે.

આપેલ જોડીઓ સુરક્ષિત છે કે કેમ તે તપાસો:

a. 15 અને 39 b. 4 અને 15

c. 18 અને 29 d. 20 અને 55

સુરક્ષિત જોડ વિશે શું વિશિષ્ટ છે? તેમનામાં 1 સિવાય કોઈ સામાન્ય અવયવ નથી. તે સંખ્યાઓને એકબીજાની **સહ-અવિભાજ્ય (co-prime)** કહેવામાં આવે છે. જો તેમનામાં 1 સિવાય કોઈ સામાન્ય અવયવ (Common Factor) ન હોય.

ઉદાહરણ : 15 અને 39માં 3 એક સામાન્ય અવયવ હોવાથી, તે સહ-અવિભાજ્ય નથી. પરંતુ 4 અને 9 સહ-અવિભાજ્ય છે.

નીચેનામાંથી સંખ્યાઓની કઈ જોડ સહ-અવિભાજ્ય છે?

a. 18 અને 35 b. 15 અને 37 c. 30 અને 415
d. 17 અને 69 e. 81 અને 18

જુદી જુદી સંખ્યાઓની જોડીઓ સાથે 'ઈડલી-વડાં' રમત રમતી વખતે અંશુએ કંઈક રસપ્રદ અવલોકન કર્યું!

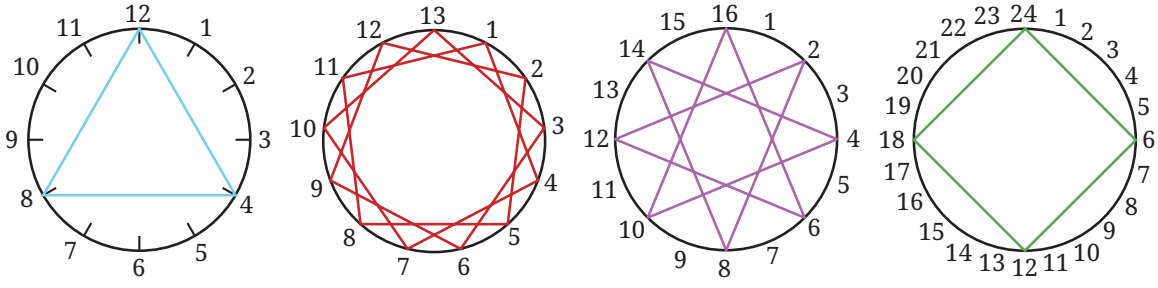
ગાણિતિક ચર્ચા

a. ક્યારેક પ્રથમ સામાન્ય અવયવી તે બે સંખ્યાઓના ગુણાકાર જેટલો હતો.
b. અન્ય સમયે પ્રથમ સામાન્ય અવયવી તે બે સંખ્યાઓના ગુણાકાર કરતાં ઓછો હતો.
c. ઉપરોક્ત દરેક માટે ઉદાહરણો શોધો. તે સંખ્યાઓની જોડ સહ-અવિભાજ્ય હોવા સાથે કેવી રીતે સંબંધિત છે?

સહ-અવિભાજ્ય કલા

નીચે દર્શાવેલી દોરાની કલા (Thread art)નું નિરીક્ષણ કરો. પ્રથમ આકૃતિમાં 12 ખીલીઓ છે અને દોરો દરેક ચોથી ખીલીએ બાંધેલો છે. (આપણે કહીએ છીએ કે દોરા વચ્ચેનું અંતર 4 છે.) બીજી આકૃતિમાં 13 ખીલીઓ છે અને દોરા વચ્ચેનું અંતર 3 છે. અન્ય આકૃતિઓ વિશે શું કહી શકાય ? આ ચિત્રોનું નિરીક્ષણ કરો, તમારાં તારણો વર્ગમાં બધાને જણાવો અને ચર્ચા કરો.

ગાણિતિક ચર્ચા



કેટલીક આકૃતિઓમાં દોરો (thread) દરેક ખીલી સાથે બાંધવામાં આવ્યો છે. કેટલીક આકૃતિઓમાં, તે બાંધવામાં આવેલ નથી. શું આ બે સંખ્યાઓ (ખીલીઓની સંખ્યા અને દોરા વચ્ચેનું અંતર) સહ-અવિભાજ્ય હોવા સાથે સંબંધિત છે?

નીચેના માટે આવા ચિત્રો બનાવો :

a. 15 ખીલીઓ, દોરા વચ્ચેનું અંતર 10
b. 10 ખીલીઓ, દોરા વચ્ચેનું અંતર 7
c. 14 ખીલીઓ, દોરા વચ્ચેનું અંતર 6
d. 8 ખીલીઓ, દોરા વચ્ચેનું અંતર 3

5.4 અવિભાજ્ય અવયવીકરણ (Prime Factorisation)

બે સંખ્યાઓ સહ-અવિભાજ્ય છે કે કેમ તે તપાસવું

શિક્ષક : શું 56 અને 63 સહ-અવિભાજ્ય છે?

અંશુ અને ગુણા : જો તેમનામાં 1 સિવાય કોઈ સામાન્ય અવયવ હોય તો તે સહ-અવિભાજ્ય નથી. ચાલો તપાસીએ.

અંશુ : હું $56 = 14 \times 4$ અને $63 = 21 \times 3$ લખી શકું છું. તેથી, 14 અને 4 એ 56ના અવયવો છે. વધુમાં, 21 અને 3 એ 63ના અવયવો છે. તેથી, કોઈ સામાન્ય અવયવો નથી. આ સંખ્યાઓ સહ-અવિભાજ્ય છે.

ગુણા : થોભો. હું $56 = 7 \times 8$ અને $63 = 9 \times 7$ પણ લખી શકું છું. આપણે જોઈએ છીએ કે 7 બંને સંખ્યાઓનો અવયવ છે, તેથી તે સહ-અવિભાજ્ય નથી.

દેખીતી રીતે ગુણા સાચી છે, કારણ કે 7 એક સામાન્ય અવયવ છે.

પરંતુ અંશુ ક્યાં ખોટો હતો?

$56 = 14 \times 4$ લખવાથી આપણને ખબર પડે છે કે 14 અને 4 બંને 56ના અવયવો છે, પરંતુ તે 56ના બધા અવયવો જણાવતું નથી. 63ના અવયવો માટે પણ તે જ સાચું છે.

ચાલો, બીજું ઉદાહરણ લઈએ : 80 અને 63 બંને સંખ્યાઓના અવયવીકરણની ઘણી રીતો છે.

$80 = 40 \times 2 = 20 \times 4 = 10 \times 8 = 16 \times 5 = ???$

$63 = 9 \times 7 = 3 \times 21 = ???$

અમે '???' એવું કહેવા માટે લખ્યું છે કે, આ સંખ્યાઓના અવયવીકરણની વધુ રીતો હોઈ શકે છે. પરંતુ જો આપણે આપેલા કોઈ પણ અવયવીકરણ, ઉદાહરણ તરીકે, $80 = 16 \times 5$ અને $63 = 9 \times 7$ લઈએ, તો કોઈ સામાન્ય અવયવો નથી. શું આપણે નિષ્કર્ષ (તારણ) કાઢી શકીએ કે 80 અને 63 સહ-અવિભાજ્ય છે? અંશુની ઉપરની ભૂલ બતાવે છે તેમ, આપણે તે નિષ્કર્ષ કાઢી શકતાં નથી. કારણ કે સંખ્યાઓના અવયવીકરણની અન્ય રીતો હોઈ શકે છે.

આનો અર્થ એ છે કે બે સંખ્યાઓ સહ-અવિભાજ્ય છે કે કેમ તે તપાસવા માટે આપણને વધુ વ્યવસ્થિત અભિગમની જરૂર છે.

અવિભાજ્ય અવયવીકરણ

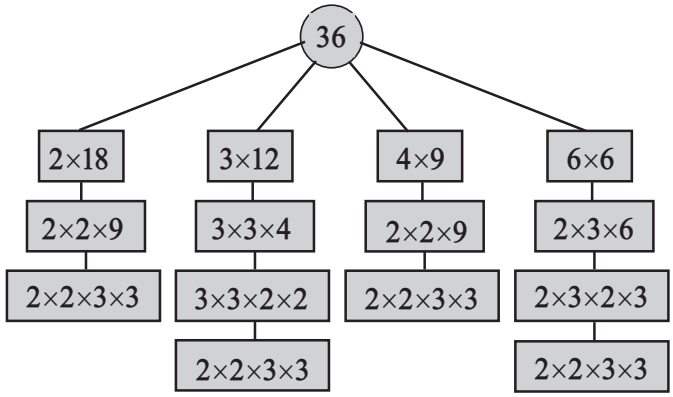
કોઈ એક સંખ્યા, જેવી કે 56 લો. તે વિભાજ્ય છે, કારણ કે આપણે જોયું કે તેને **56 = 4 × 14** તરીકે લખી શકાય છે. તેથી 4 અને 14 બંને 56ના અવયવો છે. હવે તેમાંથી કોઈ એક અવયવ લો, ઉદાહરણ તરીકે 14. તે પણ વિભાજ્ય છે અને તેને 14 = 2 × 7 તરીકે લખી શકાય છે. તેથી, **56 = 4 × 2 × 7**. હવે, 4 વિભાજ્ય છે અને તેને 4 = 2 × 2 તરીકે લખી શકાય છે. તેથી, **56 = 2 × 2 × 2 × 7**. અહીં દેખાતા બધા અવયવો, 2 અને 7 અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ છે. તેથી, આપણે તેમને વધુ ભાગી શકતાં નથી.

નિષ્કર્ષમાં, આપણે 56ને અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ગુણાકાર તરીકે દર્શાવેલ છે, જેને 56નું **અવિભાજ્ય અવયવીકરણ (prime factorisation)** કહેવામાં આવે છે. એકબીજાથી જુદા પડતા (Individual) અવયવોને અવિભાજ્ય અવયવો કહેવામાં આવે છે. ઉદાહરણ તરીકે, 56ના અવિભાજ્ય અવયવો 2 અને 7 છે.

1 કરતાં મોટી દરેક સંખ્યાનું અવિભાજ્ય અવયવીકરણ હોય છે. ઉદ્દેશ્ય એ છે કે વિભાજ્ય સંખ્યાઓને અવયવોમાં ત્યાં સુધી વિભાજિત (breaking) કરતા રહો જ્યાં સુધી ફક્ત અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ જ બાકી રહે. સંખ્યા 1નું કોઈ અવિભાજ્ય અવયવીકરણ નથી. તે કોઈ પણ અવિભાજ્ય સંખ્યાથી વિભાજ્ય નથી. 7 જેવી અવિભાજ્ય સંખ્યાનું અવિભાજ્ય અવયવીકરણ શું છે? તે ફક્ત 7 છે. (આપણે તેને વધુ ભાગી શકતા નથી)

ચાલો, થોડાં વધુ ઉદાહરણો જોઈએ.

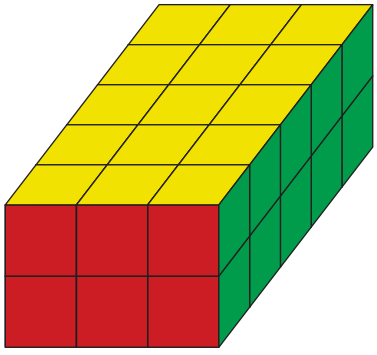
સંખ્યાને વિભાજિત કરવાની જુદી જુદી રીતો દ્વારા, આપણે 63ને 3 × 3 × 7 અને 3 × 7 × 3 તરીકે લખ્યું. શું તે અલગ છે? ખરેખર નહીં! સમાન અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ 3 અને 7 બંને કિસ્સાઓમાં આવે છે. વધુમાં, 3 બંનેમાં બે વાર અને 7 એક વાર આવે છે.



અહીં, તમે 36ના અવિભાજ્ય અવયવીકરણ મેળવવાની ચાર અલગ અલગ રીતો જુઓ છો. નિરીક્ષણ કરો કે આ ચારેય કિસ્સાઓમાં, આપણને બે વખત 2 અને બે વખત 3 મળે છે. તમને ચારેય કિસ્સાઓમાં 36 મળે છે કે કેમ તે પાછું ગુણાકાર કરીને તપાસો. તે એક નોંધપાત્ર હકીકત છે કે કોઈ પણ સંખ્યાને ફક્ત એક જ અવિભાજ્ય અવયવીકરણ હોય છે. સિવાય કે અવિભાજ્ય અવયવ અલગ અલગ ક્રમમાં આવી શકે.

જેમ કે આપણે નીચે સમજાવીશું કે ક્રમ (order) મહત્ત્વનો નથી. જો કે, આપણે આ ઉદાહરણોમાં જોયું કે, અવિભાજ્ય અવયવીકરણ સુધી પહોંચવાની ઘણી રીતો છે!

શું ક્રમ મહત્ત્વનો છે?



આ આકૃતિનો ઉપયોગ કરીને,

તમે સમજાવી શકો છો કે **30 = 2 × 3 × 5**, ભલે તમે 2, 3 અને 5નો ગુણાકાર ગમે તે ક્રમમાં કરો.

સંખ્યાઓનો ગુણાકાર કરતી વખતે, આપણે તે કોઈ પણ ક્રમમાં કરી શકીએ છીએ. અંતિમ પરિણામ સમાન મળે છે. તેથી જ, જ્યારે બે વાર 2 અને બે વાર 3નો કોઈ પણ ક્રમમાં ગુણાકાર કરવામાં આવે છે ત્યારે આપણને 36 મળે છે. પછીના ધોરણમાં, આપણે આનો અભ્યાસ **ગુણાકાર માટે ક્રમનો નિયમ (Commutative law) તથા જૂથનો નિયમ (Associative law)** નામ હેઠળ કરીશું.

આમ, ક્રમ મહત્ત્વનો નથી. સામાન્ય રીતે આપણે અવિભાજ્ય સંખ્યાઓને ચડતા ક્રમ(Increasing order)માં લખીએ છીએ.

ઉદાહરણ તરીકે, 225 = 3 × 3 × 5 × 5 અથવા 30 = 2 × 3 × 5.

બે સંખ્યાઓના ગુણાકારનું અવિભાજ્ય અવયવીકરણ
(Prime factorisation of a product of two numbers)

જ્યારે આપણે કોઈ સંખ્યાનું અવિભાજ્ય અવયવીકરણ શોધીએ છીએ, ત્યારે આપણે પહેલાં તેને બે અવયવોના ગુણાકાર તરીકે લખીએ છીએ. ઉદાહરણ તરીકે, 72 = 12 × 6. પછી, આપણે દરેક અવયવનું અવિભાજ્ય અવયવીકરણ શોધીએ છીએ. ઉપરોક્ત ઉદાહરણમાં 12 = 2 × 2 × 3 અને 6 = 2 × 3. હવે, શું તમે કહી શકો છો કે 72નું અવિભાજ્ય અવયવીકરણ શું છે?

મૂળ સંખ્યાનું અવિભાજ્ય અવયવીકરણ આ બધાને એક સાથે મૂકીને મેળવવામાં આવે છે.

72 = 2 × 2 × 3 × 2 × 3

આપણે આને 2 × 2 × 2 × 3 × 3 તરીકે પણ લખી શકીએ છીએ. ગુણાકાર કરો અને તપાસો કે તમને ફરીથી 72 મળે છે?

72ના અવયવીકરણમાં દરેક અવિભાજ્ય અવયવ કેટલી વાર આવે છે તેનું નિરીક્ષણ કરો.

તે 12 અને 6ના અવયવીકરણને એક સાથે મૂકતાં તેઓ કેટલીવાર આવે છે તેની સાથે તેમની સરખામણી કરો.

વિચારો અને શોધો

1. નીચેની સંખ્યાઓના અવિભાજ્ય અવયવ શોધો : 64, 104, 105, 243, 320, 141, 1728, 729, 1024, 1331, 1000.
2. એક સંખ્યાના અવિભાજ્ય અવયવીકરણમાં એક વાર 2, બે વાર 3 અને એક વાર 11 છે. તે સંખ્યા કઈ છે?
3. 30 કરતાં નાની હોય તેવી ત્રણ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ શોધો, જેનો ગુણાકાર 1955 છે.
4. ગુણાકાર કર્યા વગર આ સંખ્યાઓના અવિભાજ્ય અવયવ શોધો :

   a. 56 × 25 b. 108 × 75 c. 1000 × 81
5. સૌથી નાની સંખ્યા કઈ છે જેના અવિભાજ્ય અવયવીકરણમાં

   a. ત્રણ અલગ અલગ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ હોય?

   b. ચાર અલગ અલગ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ હોય?

અવિભાજ્ય અવયવીકરણ સંખ્યાઓના અભ્યાસમાં મૂળભૂત મહત્ત્વ ધરાવે છે. ચાલો આપણે બે રીતોની ચર્ચા કરીએ જેમાં તે ઉપયોગી થઈ શકે છે.

બે સંખ્યાઓ સહ-અવિભાજ્ય છે કે કેમ તે તપાસવા માટે અવિભાજ્ય અવયવીકરણનો ઉપયોગ

ચાલો, આપણે ફરીથી સંખ્યાઓ 56 અને 63 લઈએ. આપણે તે સહ-અવિભાજ્ય છે કે કેમ તે કેવી રીતે તપાસી શકીએ? આપણે બંને સંખ્યાઓના અવિભાજ્ય અવયવીકરણનો ઉપયોગ કરી શકીએ —

$56 = 2 \times 2 \times 2 \times 7$ અને $63 = 3 \times 3 \times 7$

હવે, આપણે જોઈએ છીએ કે 7 એ 56 તેમજ 63નો સામાન્ય અવિભાજ્ય અવયવ છે. તેથી 56 અને 63 સહ-અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ નથી. 80 અને 63 વિશે શું કહી શકાય? તેમનાં અવિભાજ્ય અવયવીકરણ નીચે મુજબ છે :

$80 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5$ અને $63 = 3 \times 3 \times 7$

અહીં કોઈ સામાન્ય અવિભાજ્ય અવયવો નથી. શું આપણે નિષ્કર્ષ કાઢી શકીએ કે તે સહ-અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ છે? ધારો કે તેમનામાં એક સામાન્ય અવયવ છે જે વિભાજ્ય છે. શું આ વિભાજ્ય સામાન્ય અવયવના અવિભાજ્ય અવયવો 80 અને 63ના અવિભાજ્ય અવયવીકરણમાં દેખાશે?

તેથી, આપણે કહી શકીએ કે જો કોઈ સામાન્ય અવિભાજ્ય અવયવો ન હોય, તો તે બે સંખ્યાઓ સહ-અવિભાજ્ય છે.

ચાલો, આપણે કેટલાંક ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ : 40 અને 231નો વિચાર કરો. તેમનાં અવિભાજ્ય અવયવીકરણ નીચે મુજબ છે :

$40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$ અને $231 = 3 \times 7 \times 11$

આપણે જાણીએ છીએ કે 40 અને 231 બંનેને ભાગે તેવી કોઈ સામાન્ય અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ નથી. ખરેખર, 40ના અવિભાજ્ય અવયવો 2 અને 5 છે, જ્યારે 231ના અવિભાજ્ય અવયવો 3, 7 અને 11 છે. તેથી, 40 અને 231 સહ-અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ છે.

ઉદાહરણ : 242 અને 195નો વિચાર કરો. તેમનાં અવિભાજ્ય અવયવીકરણ નીચે મુજબ છે :

$242 = 2 \times 11 \times 11$ અને $195 = 3 \times 5 \times 13$

242ના અવિભાજ્ય અવયવો 2 અને 11 છે. 195ના અવિભાજ્ય અવયવો 3, 5 અને 13 છે. અહીં કોઈ સામાન્ય અવિભાજ્ય અવયવો નથી. તેથી, 242 અને 195 સહ-અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ છે.

એક સંખ્યા બીજી સંખ્યાથી વિભાજ્ય (divisible) છે કે કેમ તે તપાસવા માટે અવિભાજ્ય અવયવીકરણનો ઉપયોગ

આપણે કહી શકીએ કે જો એક સંખ્યા બીજી સંખ્યાથી વિભાજ્ય (divisible) હોય, તો બીજી સંખ્યાનું અવિભાજ્ય અવયવીકરણ પ્રથમ સંખ્યાના અવિભાજ્ય અવયવીકરણમાં સમાયેલું છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે 48, 12થી વિભાજ્ય છે. કારણ કે જ્યારે આપણે 48ને 12થી ભાગીએ છીએ ત્યારે શેષ (remainder) શૂન્ય રહે છે. આપણે લાંબા ભાગાકાર કર્યા વગર એક સંખ્યા બીજી સંખ્યાથી વિભાજ્ય છે કે કેમ તે કેવી રીતે તપાસી શકીએ?

ઉદાહરણ : શું 168, 12થી વિભાજ્ય છે? બંનેના અવિભાજ્ય અવયવ શોધો :

$168 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7$ અને $12 = 2 \times 2 \times 3$

આપણે કોઈ પણ ક્રમમાં ગુણાકાર કરી શકીએ છીએ, તેથી હવે તે સ્પષ્ટ છે કે,

$$168 = 2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 7 = 12 \times 14$$

તેથી 168, 12થી વિભાજ્ય છે.

ઉદાહરણ : શું 75, 21થી વિભાજ્ય છે? બંનેના અવિભાજ્ય અવયવ શોધો :

$75 = 3 \times 5 \times 5$ અને $21 = 3 \times 7$

જેમ કે આપણે ઉપરની ચર્ચામાં જોયું, જો 75, 21 નો અવયવી હોત, તો 21 ના બધા જ અવિભાજ્ય અવયવો 75ના પણ અવિભાજ્ય અવયવો હોત. જોકે, 7 એ 21નો અવિભાજ્ય અવયવ છે પરંતુ 75નો અવિભાજ્ય અવયવ નથી. તેથી, 75, 21થી વિભાજ્ય નથી.

ઉદાહરણ : શું 42, 12થી વિભાજ્ય છે? બંનેના અવિભાજ્ય અવયવ શોધો :

$42 = 2 \times 3 \times 7$ અને $12 = 2 \times 2 \times 3$.

12ના બધા અવિભાજ્ય અવયવો પણ 42ના અવિભાજ્ય અવયવો છે. પરંતુ 12નું અવિભાજ્ય અવયવીકરણ 42ના અવિભાજ્ય અવયવીકરણમાં સમાયેલું નથી. આ એટલા માટે છે કે, 12ના અવિભાજ્ય અવયવીકરણમાં 2 બે વાર આવે છે પરંતુ 42ના અવિભાજ્ય અવયવીકરણમાં ફક્ત એકજ વાર આવે છે. આનો અર્થ એ છે કે 42, 12થી વિભાજ્ય નથી. આપણે કહી શકીએ કે જો એક સંખ્યા બીજી સંખ્યાથી વિભાજ્ય હોય, તો બીજી સંખ્યાનું અવિભાજ્ય અવયવીકરણ પ્રથમ સંખ્યાના અવિભાજ્ય અવયવીકરણમાં સમાયેલું છે.

વિચારો અને શોધો

1. શું નીચેની સંખ્યાઓની જોડ સહ-અવિભાજ્ય છે? પહેલાં અનુમાન કરો અને પછી તમારા જવાબને ચકાસવા માટે અવિભાજ્ય અવયવીકરણનો ઉપયોગ કરો.

   a. 30 અને 45 b. 57 અને 85 c. 121 અને 1331 d. 343 અને 216

2. શું પ્રથમ સંખ્યા બીજી સંખ્યાથી વિભાજ્ય છે? અવિભાજ્ય અવયવીકરણનો ઉપયોગ કરો.

   a. 225 અને 27 b. 96 અને 24 c. 343 અને 17 d. 999 અને 99

3. પ્રથમ સંખ્યાનું અવિભાજ્ય અવયવીકરણ $2 \times 3 \times 7$ છે અને બીજી સંખ્યાનું અવિભાજ્ય અવયવીકરણ $3 \times 7 \times 11$ છે. શું તે સહ-અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ છે? શું તે એકબીજાને નિઃશેષ ભાગે છે?

4. ગુણા કહે છે, "કોઈ પણ બે અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ સહ-અવિભાજ્ય હોય છે?"

5.5 વિભાજ્યતાની ચાવીઓ (Keys of Divisibility)

અત્યાર સુધી, આપણે જુદા જુદા સંદર્ભોમાં સંખ્યાઓના અવયવો શોધી રહ્યા છીએ, જેમાં કોઈ સંખ્યા અવિભાજ્ય છે કે નહીં અથવા આપેલી જોડ સહ-અવિભાજ્ય છે કે નહીં તે નક્કી કરવાનો સમાવેશ થાય છે.

નાની સંખ્યાઓના અવયવો શોધવા સરળ છે. મોટી સંખ્યાના અવયવો આપણે કેવી રીતે શોધીશું?

ચાલો, 8560 લઈએ. શું તેના 2થી 10 (2, 3, 4, 5, ..., 9, 10) માંથી કોઈ અવયવો છે?

આમાંથી કેટલીક સંખ્યાઓ અવયવો છે કે નહીં તે લાંબા ભાગાકાર કર્યા વિના તપાસવું સરળ છે. શું તમે તેમને શોધી શકો છો?

10 દ્વારા વિભાજ્યતા (Divisibility by 10)

ચાલો, 10 લઈએ. શું 8560 એ 10 દ્વારા વિભાજ્ય છે? આનો અર્થ એવો પણ થાય છે કે શું 10 એ 8560નો અવયવ છે?

આ માટે, આપણે 10ના અવયવીઓમાં પૅટર્ન જોઈ શકીએ છીએ. 10ના પ્રથમ થોડા અવયવી 10, 20, 30, 40, ... છે. આ શ્રેણી (sequence) ચાલુ રાખો અને પૅટર્નનું અવલોકન કરો. શું 125 એ 10નો અવયવી છે? શું આ સંખ્યા પાછલી શ્રેણીમાં દેખાશે? શા માટે અથવા શા માટે નહીં? શું તમે હવે જવાબ આપી શકો છો કે 8560 એ 10 દ્વારા વિભાજ્ય છે?

આ વિધાનનો વિચાર કરો :



જે સંખ્યા 10 દ્વારા વિભાજ્ય હોય છે, તેનો એકમનો અંક (unit digit) '0' હોય છે. શું તમે સહમત છો?

5 દ્વારા વિભાજ્યતા (Divisibility by 5)

સંખ્યા 5 બીજી એવી સંખ્યા છે જેની વિભાજ્યતા સરળતાથી ચકાસી શકાય છે. આપણે તે કેવી રીતે કરીશું?

અવયવીઓની યાદી બનાવીને શોધોઃ 5, 10, 15, 20, 25, ... આ સંખ્યાઓ વિશે તમે શું અવલોકન કરો છો? શું તમને એકમના અંકમાં કોઈ પૅટર્ન દેખાય છે?

399થી નાની એવી કઈ સૌથી મોટી સંખ્યા છે જે 5 દ્વારા વિભાજ્ય છે? શું 8560 એ 5 દ્વારા વિભાજ્ય છે?

આ વિધાનને ધ્યાનમાં લો :



જે સંખ્યાઓ 5 દ્વારા વિભાજ્ય હોય છે તેમનો એકમનો અંક '0' અથવા '5' હોય છે.

શું તમે સહમત છો?

2 દ્વારા વિભાજ્યતા (Divisibility by 2)

2ના પ્રથમ થોડા અવયવી 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, ... છે. તમે શું અવલોકન કરો છો? શું તમને છેલ્લા અંકમાં કોઈ પૅટર્ન દેખાય છે?

શું 682 એ 2 દ્વારા વિભાજ્ય છે? શું આપણે લાંબા ભાગાકાર કર્યા વિના આનો જવાબ આપી શકીએ?

શું 8560 એ 2 દ્વારા વિભાજ્ય છે? શા માટે અથવા શા માટે નહીં?

આ વિધાનનો વિચાર કરો :

જે સંખ્યાઓ 2 દ્વારા વિભાજ્ય હોય છે તેમનો એકમનો અંક '0', '2', '4, '6' અથવા '8' હોય છે.



શું તમે સહમત છો?

399 અને 411 વચ્ચે 2ના બધા અવયવી કયા છે?

4 દ્વારા વિભાજ્યતા (Divisibility by 4)

સંખ્યા 4 દ્વારા વિભાજ્યતા પણ સરળતાથી ચકાસી શકાય છે! તેના અવયવી જુઓ : 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, ...શું તમે કોઈ એવી પૅટર્નનું અવલોકન કરી શકો છો જેનો ઉપયોગ કરી શકાય? 10, 5 અને 2ના અવયવીમાં તેમના છેલ્લા અંકોમાં એક પૅટર્ન છે, જેનો ઉપયોગ આપણે વિભાજ્યતા ચકાસવા માટે કરી શકીએ છીએ. તેવી જ રીતે, શું આપણે છેલ્લા અંકને જોઈને ચકાસી શકીએ કે કોઈ સંખ્યા 4 દ્વારા વિભાજ્ય છે કે નહીં?

ના, તે શક્ય નથી. 12 અને 22 જુઓ. તેમના છેલ્લા અંકો સમાન છે, પરંતુ 12 એ 4નો અવયવી છે, જ્યારે 22 નથી. તેવી જ રીતે 14 અને 24નો છેલ્લા અંક સમાન છે, પરંતુ 14 એ 4નો અવયવી નથી જ્યારે 24 છે. તેવી જ રીતે, 16 અને 26 અથવા 18 અને 28. આનો અર્થ એ છે કે છેલ્લા અંકને જોઈને આપણે કહી શકતા નથી કે કોઈ સંખ્યા 4નો અવયવી છે કે નહીં.

શું આપણે વધુ અંકો જોઈને પ્રશ્નનો જવાબ આપી શકીએ? 1 અને 200ની વચ્ચે 4ના અવયવીની યાદી બનાવો અને એક પૅટર્ન શોધો. 330 અને 340 વચ્ચેની એવી સંખ્યાઓ શોધો જે 4 દ્વારા વિભાજ્ય હોય. ઉપરાંત, 1730 અને 1740 તથા 2030 અને 2040 વચ્ચેની એવી સંખ્યાઓ શોધો જે 4 દ્વારા વિભાજ્ય હોય. તમે શું અવલોકન કરો છો?

શું 8536 એ 4 દ્વારા વિભાજ્ય છે?

આ વિધાનોનો વિચાર કરો :

a. કોઈ આપેલી સંખ્યા 4 દ્વારા વિભાજ્ય છે કે નહીં તે નક્કી કરતી વખતે ફક્ત છેલ્લા બે અંકો જ મહત્ત્વ ધરાવે છે.

b. જો છેલ્લા બે અંકોથી બનેલી સંખ્યા 4 દ્વારા વિભાજ્ય હોય તો મૂળ સંખ્યા 4 દ્વારા વિભાજ્ય છે.

c. જો મૂળ સંખ્યા 4 દ્વારા વિભાજ્ય હોય તો છેલ્લા બે અંકોથી બનેલી સંખ્યા 4 દ્વારા વિભાજ્ય છે. શું તમે સહમત છો? શા માટે અથવા શા માટે નહીં?

8 દ્વારા વિભાજ્યતા (Divisibility by 8)

રસપ્રદ રીતે, 8 દ્વારા વિભાજ્યતાની ચકાસણી પણ સરળ કરી શકાય છે. શું આ માટે છેલ્લા બે અંકોનો ઉપયોગ કરી શકાય?

- 120 અને 140 વચ્ચેની એવી સંખ્યાઓ શોધો જે 8 દ્વારા વિભાજ્ય હોય. ઉપરાંત 1120 અને 1140, તથા 3120 અને 3140 વચ્ચેની એવી સંખ્યાઓ શોધો જે 8 દ્વારા વિભાજ્ય હોય. તમે શું અવલોકન કરો છો?
- 8560ના છેલ્લા બે અંકો બદલો જેથી પરિણામી સંખ્યા 8નો અવયવી બને.
- આ વિધાનોનો વિચાર કરો :

ગાણિતિક ચર્ચા

1. કોઈ આપેલી સંખ્યા 8 દ્વારા વિભાજ્ય છે કે નહીં તે નક્કી કરતી વખતે ફક્ત છેલ્લા ત્રણ અંકો જ મહત્ત્વ ધરાવે છે.
2. જો છેલ્લા ત્રણ અંકોથી બનેલી સંખ્યા 8 દ્વારા વિભાજ્ય હોય તો મૂળ સંખ્યા 8 દ્વારા વિભાજ્ય છે.
3. જો મૂળ સંખ્યા 8 દ્વારા વિભાજ્ય હોય તો છેલ્લા ત્રણ અંકોથી બનેલી સંખ્યા 8 દ્વારા વિભાજ્ય છે.

શું તમે સહમત છો? શા માટે અથવા શા માટે નહીં?

આપણે જોયું છે કે કોઈ સંખ્યા અવયવ છે કે નહીં તે ચકાસવા માટે લાંબા ભાગાકારની હંમેશાં જરૂર નથી. આપણે 10, 5, 2, 4, 8 માટે સરળ પદ્ધતિઓ સમજવા માટે કેટલાંક અવલોકનોનો ઉપયોગ કર્યો છે. શું આપણી પાસે અન્ય સંખ્યાઓ માટે પણ આવી સરળ પદ્ધતિઓ છે? આપણે પછીના વર્ગોમાં 3, 6, 7 અને 9 દ્વારા વિભાજ્યતા ચકાસવા માટેની સરળ પદ્ધતિઓની ચર્ચા કરીશું!

વિચારો અને શોધો

1. 2024 એ લીપ (leap) વર્ષ છે. (કારણ કે, ફેબ્રુઆરીમાં 29 દિવસ છે) લીપ વર્ષ એવાં વર્ષોમાં આવે છે જે 4નો અવયવી હોય, સિવાય કે તે વર્ષો જે 100 દ્વારા વિભાજ્ય હોય પરંતુ 400 દ્વારા નહીં.
   a. તમે જનમ્યા તે વર્ષથી અત્યાર સુધી કયાં વર્ષો લીપ વર્ષ હતાં?
   b. 2024 થી 2099 સુધી, કેટલાં લીપ વર્ષો છે?
2. 4-અંકની સૌથી મોટી અને સૌથી નાની એવી સંખ્યાઓ શોધો જે 4 દ્વારા વિભાજ્ય હોય અને પેલિન્ડ્રોમ (palindromes) પણ હોય.
3. દરેક વિધાન હંમેશાં સાચું, ક્યારેક સાચું કે ક્યારેય સાચું નથી તે શોધો. તમે તમારા તર્કના સમર્થનમાં ઉદાહરણો આપી શકો છો.

a. બે યુગ્મ (even) સંખ્યાઓનો સરવાળો 4નો અવયવી આપે છે.

b. બે અયુગ્મ (odd) સંખ્યાઓનો સરવાળો 4નો અવયવી આપે છે.

4. નીચેની દરેક સંખ્યાઓને (a) 10, (b) 5, (c) 2 વડે ભાગવામાં (divide) આવે ત્યારે મળતી શેષ (remainder) શોધો. 78, 99, 173, 572, 980, 1111, 2345

5. શિક્ષકે પૂછ્યું કે શું 14560 એ 2, 4, 5, 8 અને 10 દ્વારા વિભાજ્ય છે? ગુણાએ 14560ની વિભાજ્યતા આમાંથી ફક્ત બે સંખ્યાઓ દ્વારા તપાસી અને પછી જાહેર કર્યું કે તે આપેલી બધી જ સંખ્યાઓ દ્વારા વિભાજ્ય છે. તે બે સંખ્યાઓ કઈ હોઈ શકે?

6. નીચેનામાંથી કઈ સંખ્યાઓ 2, 4, 5, 8 અને 10 દ્વારા વિભાજ્ય છે : 572, 2352, 5600, 6000, 77622160.

7. બે એવી સંખ્યાઓ લખો જેમનો ગુણાકાર 10000 છે. આ બે સંખ્યાઓમાં એકમનો અંક 0 ન હોવો જોઈએ.

5.6 સંખ્યાઓ સાથે ગમ્મત (Fun with Numbers)

વિશિષ્ટ સંખ્યાઓ (Special Numbers)

આ બોક્સમાં ચાર સંખ્યાઓ છે. તમને કઈ સંખ્યા વિશિષ્ટ લાગે છે? તમે એવું શા માટે કહો છો?

9	16
25	43

જુઓ કે ગુણાના સહાધ્યાયી શું કહે છે :

- કર્ણાવતી કહે છે, “9 વિશિષ્ટ છે, કારણ કે તે એક-અંકની સંખ્યા છે જ્યારે બાકીની બધી સંખ્યાઓ 2-અંકની સંખ્યાઓ છે.”
- ગુરુપ્રીત કહે છે, “9 વિશિષ્ટ છે, કારણ કે તે એકમાત્ર એવી સંખ્યા છે જે 3નો અવયવી છે.”
- મુરુગન કહે છે, “16 વિશિષ્ટ છે, કારણ કે તે એકમાત્ર બેકી (even) સંખ્યા છે અને 4નો પણ એકમાત્ર અવયવી છે.”
- ગોપિકા કહે છે, “25 વિશિષ્ટ છે, કારણ કે તે 5નો એકમાત્ર અવયવી છે.”
- યાજ્ઞિકી કહે છે, “43 વિશિષ્ટ છે, કારણ કે તે એકમાત્ર અવિભાજ્ય સંખ્યા છે.”
- રાધા કહે છે, “43 વિશિષ્ટ છે, કારણ કે તે એકમાત્ર એવી સંખ્યા છે જે વર્ગ (square) નથી.”

ગાણિતિક ચર્ચા

નીચે કેટલાંક ખાના છે, જેમાં દરેક ખાનામાં ચાર સંખ્યાઓ છે. દરેક ખાનામાં રહેલી સંખ્યા બાકીની સંખ્યાઓની તુલનામાં કેવી રીતે વિશિષ્ટ છે તે કહેવાનો પ્રયત્ન કરો. તમારા સહપાઠીઓ સાથે તેની આપ-લે કરો અને શોધો કે કોણે તમારા જેવાં જ કારણો આપ્યાં! શું કોઈએ એવાં જુદાં કારણો આપ્યાં છે જેનો કદાચ તમને ખ્યાલ ન આવ્યો હોય?

5	7
12	35

3	8
11	24

27	3
123	31

17	27
44	65

એક અવિભાજ્ય કોયડો (A Prime Puzzle)

ગાણિતિક ચર્ચા

ડાબી બાજુની આકૃતિ કોયડો બતાવે છે. જમણી બાજુની આકૃતિ કોયડાનો ઉકેલ બતાવે છે. કોયડાને ઉકેલવા માટેના નિયમો શું હોઈ શકે તે વિચારો.

			75
			42
			102
170	30	63	

5	5	3	75
2	3	7	42
17	2	3	102
170	30	63	

નિયમો

ખાલી જગ્યાઓ (Grid)ને ફક્ત અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ (Prime Numbers) વડે ભરો, જેથી દરેક પંક્તિ (row)નો ગુણાકાર પંક્તિની જમણી બાજુ આપેલી સંખ્યાને સમાન થાય અને દરેક સ્તંભ (column)નો ગુણાકાર નીચે આપેલી સંખ્યાને સમાન થાય.

			105
			20
			30
28	125	18	

			8
			105
			70
30	70	28	

			63
			27
			190
45	42	171	

			343
			660
			44
28	154	231	

સારાંશ

- જો કોઈ સંખ્યા બીજી સંખ્યા દ્વારા વિભાજ્ય હોય, તો બીજી સંખ્યાને પ્રથમ સંખ્યાનો અવયવ કહેવામાં આવે છે. ઉદાહરણ તરીકે, 4 એ 12નો અવયવ છે, કારણ કે 12 એ 4 દ્વારા વિભાજ્ય છે. (12 ÷ 4 = 3)
- અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ એવી સંખ્યાઓ છે જેના માત્ર બે જ અવયવો હોય. જેમ કે 2, 3, 5, 7, 11, ... , એટલે કે 1 અને તે સંખ્યા પોતે.
- વિભાજ્ય સંખ્યાઓ એવી સંખ્યાઓ છે જેના 2થી વધુ અવયવો હોય. જેમ કે 4, 6, 8, 9, ... એટલે કે 1 અને તે પોતે સિવાય ઓછામાં ઓછો એક વધુ અવયવ હોય. ઉદાહરણ તરીકે, 8નો અવયવ 4 છે અને 9નો અવયવ 3 છે, તેથી 8 અને 9 બંને વિભાજ્ય છે.
- 1 કરતાં મોટી દરેક સંખ્યાને અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના ગુણાકાર તરીકે લખી શકાય છે. આને સંખ્યાનું અવિભાજ્ય અવયવીકરણ કહેવામાં આવે છે. ઉદાહરણ તરીકે, $84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7$.
- કોઈ પણ સંખ્યાનું અવિભાજ્ય અવયવોમાં અવયવીકરણ હંમેશાં એક જ હોય છે, અવયવોના ક્રમમાં ફેરફાર હોઈ શકે.
- જે બે સંખ્યાઓમાં 1 સિવાય કોઈ સામાન્ય અવયવ ન હોય તેને સહ-અવિભાજ્ય કહેવામાં આવે છે.
- બે સંખ્યાઓ સહ-અવિભાજ્ય છે કે નહીં તે ચકાસવા માટે, આપણે પહેલાં તેમનું અવિભાજ્ય અવયવીકરણ શોધી શકીએ છીએ અને તપાસ કરી શકીએ છીએ કે કોઈ સામાન્ય અવિભાજ્ય અવયવ છે કે નહીં. જો કોઈ સામાન્ય અવિભાજ્ય અવયવ ન હોય તો તે સહ-અવિભાજ્ય છે, અન્યથા તે નથી.
- એક સંખ્યા બીજી સંખ્યાનો અવયવ છે, જો પ્રથમ સંખ્યાનું અવિભાજ્ય અવયવીકરણ બીજી સંખ્યાના અવિભાજ્ય અવયવીકરણમાં સમાયેલું હોય.