

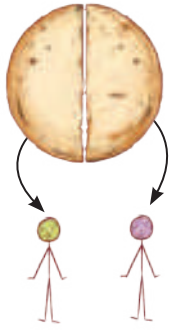
7 અપૂર્ણાંક

Y4A5L3

યાદ કરો કે, જ્યારે આખી વસ્તુને એકથી વધુ લોકો વચ્ચે સરખે ભાગે વહેંચવામાં આવે છે ત્યારે અપૂર્ણાંક (Fraction) આપણને જણાવે છે કે દરેકને કેટલો ભાગ મળશે.

શબનમ : યાદ છે તમને ! જો એક રોટલીને બે બાળકો વચ્ચે સરખે ભાગે વહેંચવામાં આવે, તો દરેક બાળકને કેટલી રોટલી મળશે?

મુક્તા : દરેક બાળકને અડધી (half) રોટલી મળશે.



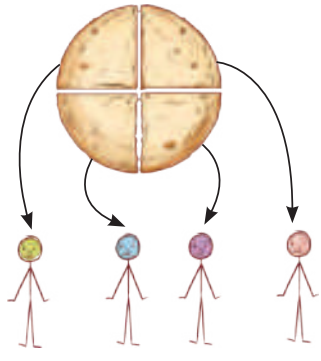
શબનમ : અડધાને અપૂર્ણાંકમાં $\frac{1}{2}$ તરીકે લખાય છે. આપણે ક્યારેક તેને 'એકના છેદમાં બે' કે 'એક દ્વિતીયાંશ' પણ કહીએ છીએ.

મુક્તા : જો એક રોટલીને 4 બાળકો વચ્ચે સરખે ભાગે વહેંચવામાં આવે, તો દરેક બાળકને કેટલી રોટલી મળશે?

શબનમ : દરેક બાળકના ભાગે $\frac{1}{4}$ રોટલી આવશે.

મુક્તા : અને કઈ વધુ છે? $\frac{1}{2}$ રોટલી કે $\frac{1}{4}$ રોટલી?

શબનમ : જ્યારે 2 બાળકો 1 રોટલી સરખે ભાગે વહેંચે છે, ત્યારે દરેક બાળકને $\frac{1}{2}$ રોટલી મળે છે. જ્યારે 4 બાળકો 1 રોટલી સરખે ભાગે વહેંચે છે, ત્યારે દરેક બાળકને $\frac{1}{4}$ રોટલી મળે છે.



કારણ કે, બીજા જૂથમાં વધુ બાળકો એવી જ એક રોટલી સરખા ભાગે વહેંચે છે, તેથી દરેક બાળકને નાનો ભાગ મળે છે. આથી, $\frac{1}{2}$ રોટલી $\frac{1}{4}$ રોટલી કરતાં વધારે છે.

$\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$

7.1 અપૂર્ણાંક એકમો અને સમાન વહેંચણી (Fractional Units and Equal Shares)

બેની : કયો અપૂર્ણાંક મોટો છે : $\frac{1}{5}$ અથવા $\frac{1}{9}$?

અરવિંદ : 9 એ 5 કરતાં મોટો છે. તેથી હું ધારીશ કે $\frac{1}{9}$ એ $\frac{1}{5}$ કરતા મોટો છે. શું હું સાચો છું?

બેની : ના! તે એક સામાન્ય ભૂલ છે. આ અપૂર્ણાંકોને ભાગ તરીકે વિચારો.

અરવિંદ : જો એક રોટલી 5 બાળકો વચ્ચે વહેંચવામાં આવે, તો દરેકને $\frac{1}{5}$ ભાગ મળે છે. જો એક રોટલીને 9 બાળકો વચ્ચે વહેંચવામાં આવે, તો દરેકને રોટલીનો $\frac{1}{9}$ ભાગ મળે છે.

બેની : બરાબર! હવે ફરીથી વિચારો – કયો ભાગ વધારે છે?

અરવિંદ : જો હું વધુ લોકો સાથે વહેંચીશ તો મને ઓછું મળશે. તેથી, $\frac{1}{9} < \frac{1}{5}$.

બેની : તમને સમજાઈ ગયું!

ઓહ, તો $\frac{1}{100}$ એ $\frac{1}{200}$ કરતાં મોટો છે!

જ્યારે એક એકમને ઘણા સમાન ભાગોમાં વહેંચવામાં આવે છે ત્યારે દરેક ભાગને **અપૂર્ણાંક એકમ (Fractional unit)** કહેવાય છે. આ બધા અપૂર્ણાંક એકમો છે :

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{50}, \ldots, \frac{1}{100}$, વગેરે.

આપણે અપૂર્ણાંક એકમોને ક્યારેક **'એકમ અપૂર્ણાંક (Unit fraction)'** તરીકે પણ ઓળખીએ છીએ.

વિચારો અને શોધો

ખાલી જગ્યાઓ અપૂર્ણાંક વડે ભરો.

1. ત્રણ જામફળનું વજન 1 કિલોગ્રામ છે. જો તે લગભગ સમાન કદ (size)નાં હોય, તો દરેક જામફળનું વજન (weight) આશરે ..... કિલોગ્રામ થશે.
2. એક જથ્થાબંધ વેપારીએ 1 કિલોગ્રામ ચોખામાંથી ચાર સમાન વજનનાં પડીકાં બનાવ્યાં. દરેક પડીકાનું વજન ..... કિલોગ્રામ હશે.
3. ચાર મિત્રોએ શેરડીના રસના 3 ગ્લાસ મંગાવ્યા અને તેને પોતાની વચ્ચે સરખે ભાગે વહેંચ્યા. દરેકે ..... ગ્લાસ શેરડીનો રસ પીધો.

ગાણિતિક ચર્ચા

4. એક મોટી માછલીનું વજન $\frac{1}{2}$ કિલોગ્રામ છે. નાની માછલીનું વજન $\frac{1}{4}$ કિલોગ્રામ છે. બંનેનું કુલ વજન ..... કિલોગ્રામ છે.



પ્રાચીનકાળનું જ્ઞાન!

ભારતમાં પ્રાચીનકાળથી અપૂર્ણાંકોનો ઉપયોગ અને નામકરણ કરવામાં આવી રહ્યું છે. ઋગ્વેદમાં, $\frac{3}{4}$ અપૂર્ણાંકને 'ત્રિ-પદ' તરીકે ઓળખવામાં આવ્યું છે. આજે ઘણી ભારતીય ભાષાઓમાં $\frac{3}{4}$ માટેના શબ્દોનો આ જ અર્થ થાય છે. ઉદાહરણ તરીકે, બોલચાલની હિન્દીમાં 'તીન પાવ', તમિલમાં 'મુક્કાલ' અને ગુજરાતીમાં 'પોણો'. ખરેખર, આજે ઘણી ભારતીય ભાષાઓમાં વપરાતા અપૂર્ણાંકો માટેના શબ્દો પ્રાચીનકાળના છે.

તમારા ઘર, શહેર કે રાજ્યમાં બોલાતી વિવિધ ભાષાઓમાં અપૂર્ણાંકો માટે વપરાતા શબ્દો શોધો અને ચર્ચા કરો. તમારાં દાદા-દાદી, માતા-પિતા, શિક્ષકો અને સહપાઠીઓને પૂછો કે તેઓ વિવિધ અપૂર્ણાંકો માટે કયા શબ્દોનો ઉપયોગ કરે છે. જેમ કે, એક પૂર્ણાંક એક દ્વિતીયાંશ (one and a half), ત્રણ ચતુર્થાંશ (three quarter), એક પૂર્ણાંક એક ચતુર્થાંશ (one and a quarter), એક દ્વિતીયાંશ (one half), એક ચતુર્થાંશ અને બે પૂર્ણાંક એક દ્વિતીયાંશ. તેમને અહીં લખો :

_____ _____ _____ _____ _____ _____

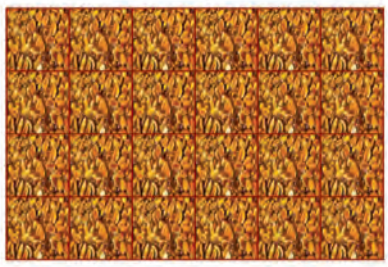
5. નીચેના ખાલી બોક્સમાં આ અપૂર્ણાંકને નાનાથી મોટા કદના ક્રમમાં ગોઠવો:

એક પૂર્ણાંક એક દ્વિતીયાંશ, ત્રણ ચતુર્થાંશ, એક પૂર્ણાંક એક ચતુર્થાંશ, એક દ્વિતીયાંશ, એક ચતુર્થાંશ અને બે પૂર્ણાંક એક દ્વિતીયાંશ.

તમારો જવાબ અહીં લખો.

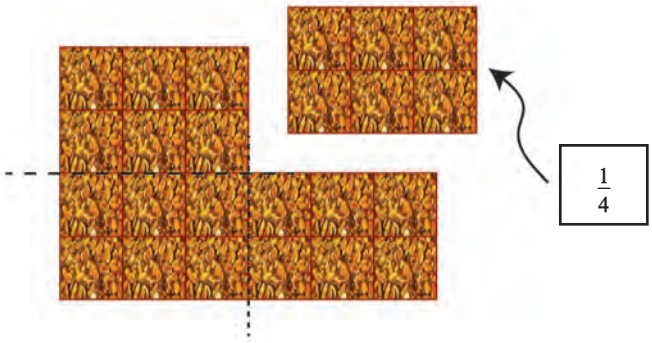
7.2 અપૂર્ણાંકના એકમો એક સંપૂર્ણના ભાગ તરીકે
(Fractional Units as Parts of a Whole)

ચિત્રમાં એક આખી ચીકી દર્શાવવામાં આવી છે.

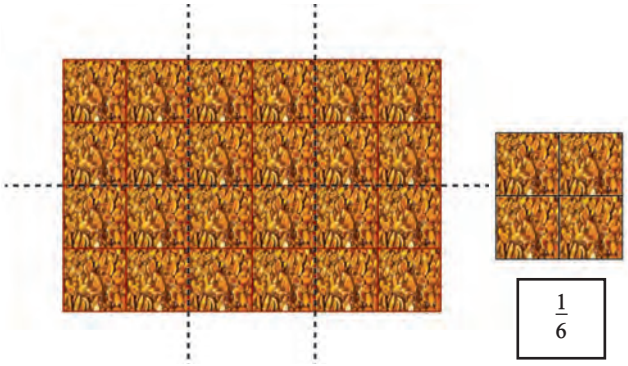


એક આખી ચીકી

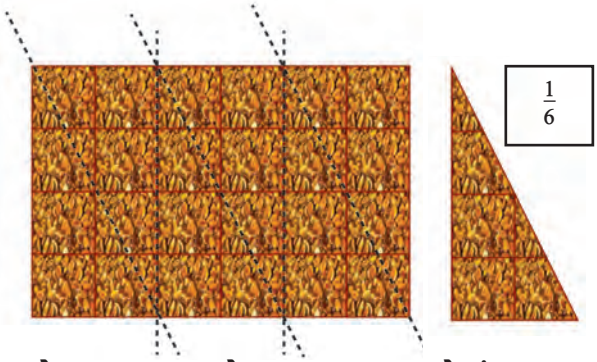
ચીકીને 2 ટુકડામાં તોડીને તેનું ચિત્ર નીચે દર્શાવવામાં આવ્યું છે. મૂળ ચીકીનો દરેક ટુકડો કેટલામો ભાગ છે?



આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, મોટા ટુકડામાં $\frac{1}{4}$ ચીકીના 3 ટુકડા છે. તેથી, આપણે મોટા ટુકડાને $\frac{1}{4}$ અપૂર્ણાંક એકમનો ઉપયોગ કરીને માપી શકીએ છીએ. આપણે જોઈએ છીએ કે, મોટો ટુકડો $\frac{3}{4}$ ચીકી છે.



એક આખી ચીકીને 6 સમાન ટુકડાઓમાં કાપવામાં આવી છે.

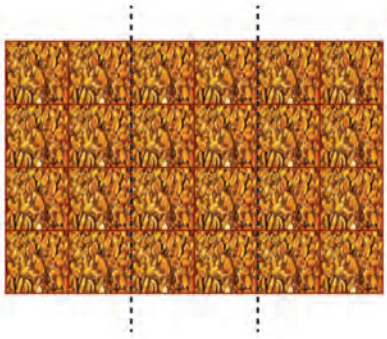


એક આખી ચીકીને 6 સમાન ટુકડાઓમાં અલગ રીતે કાપવામાં આવી છે.

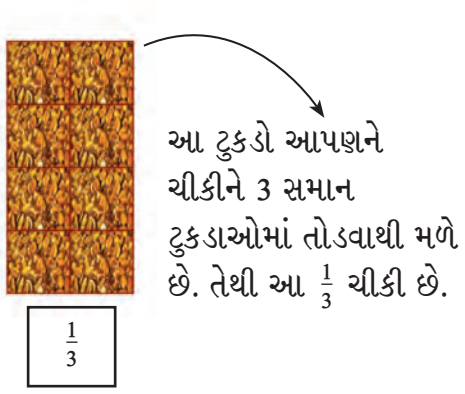
આખી ચીકીને 6 સમાન ભાગોમાં અલગ અલગ રીતે વિભાજિત કરીને, આપણને અલગ આકારના ચીકીના $\frac{1}{6}$ ટુકડા મળે છે. શું તે સમાન કદ (size)ના છે?

ગાણિતિક ચર્ચા

નીચે દર્શાવેલ ચીકીનો અપૂર્ણાંક એકમ કયો છે?



એક આખી ચીકી



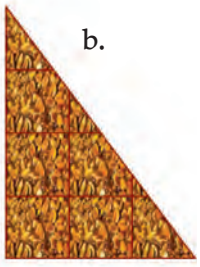
વિચારો અને શોધો

નીચેની આકૃતિઓ આખી ચીકીના વિવિધ અપૂર્ણાંક એકમો દર્શાવે છે. દરેક ટુકડો આખી ચીકીનો કેટલામો ભાગ છે?

a.



b.



c.



d.



e.



f.



g.

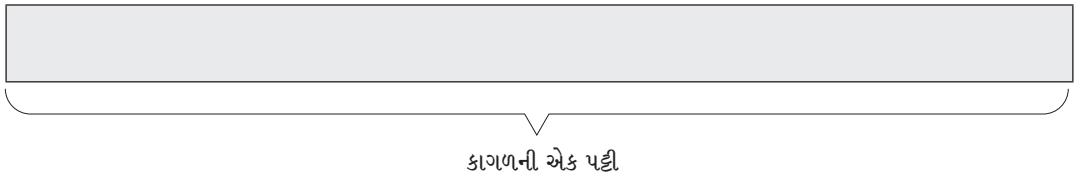


h.

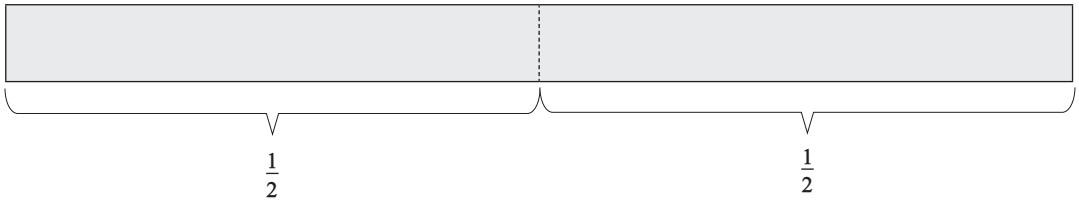


7.3 અપૂર્ણાંક એકમનો ઉપયોગ કરીને માપન
(Measuring Using Fractional Units)

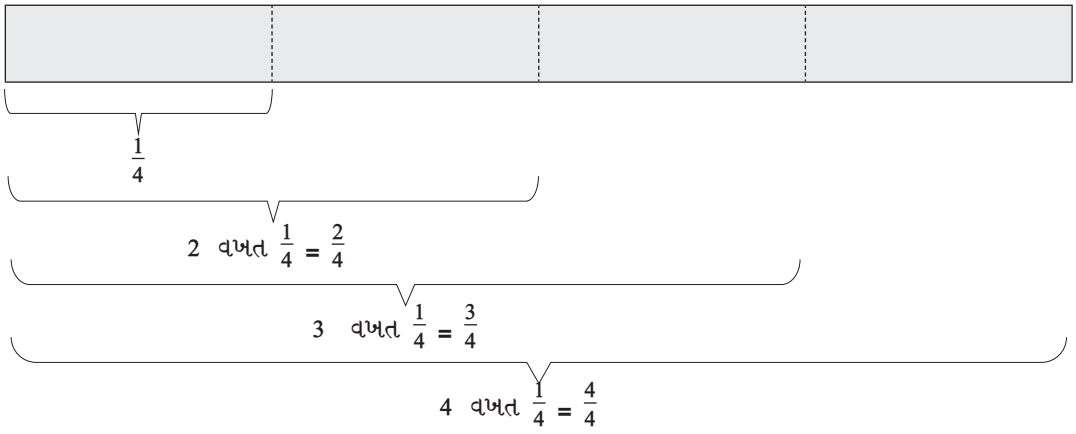
કાગળની એક પટ્ટી લો. આપણે આ કાગળની પટ્ટીને 1 એકમ લંબાઈ (unit length)ની માનીએ છીએ.



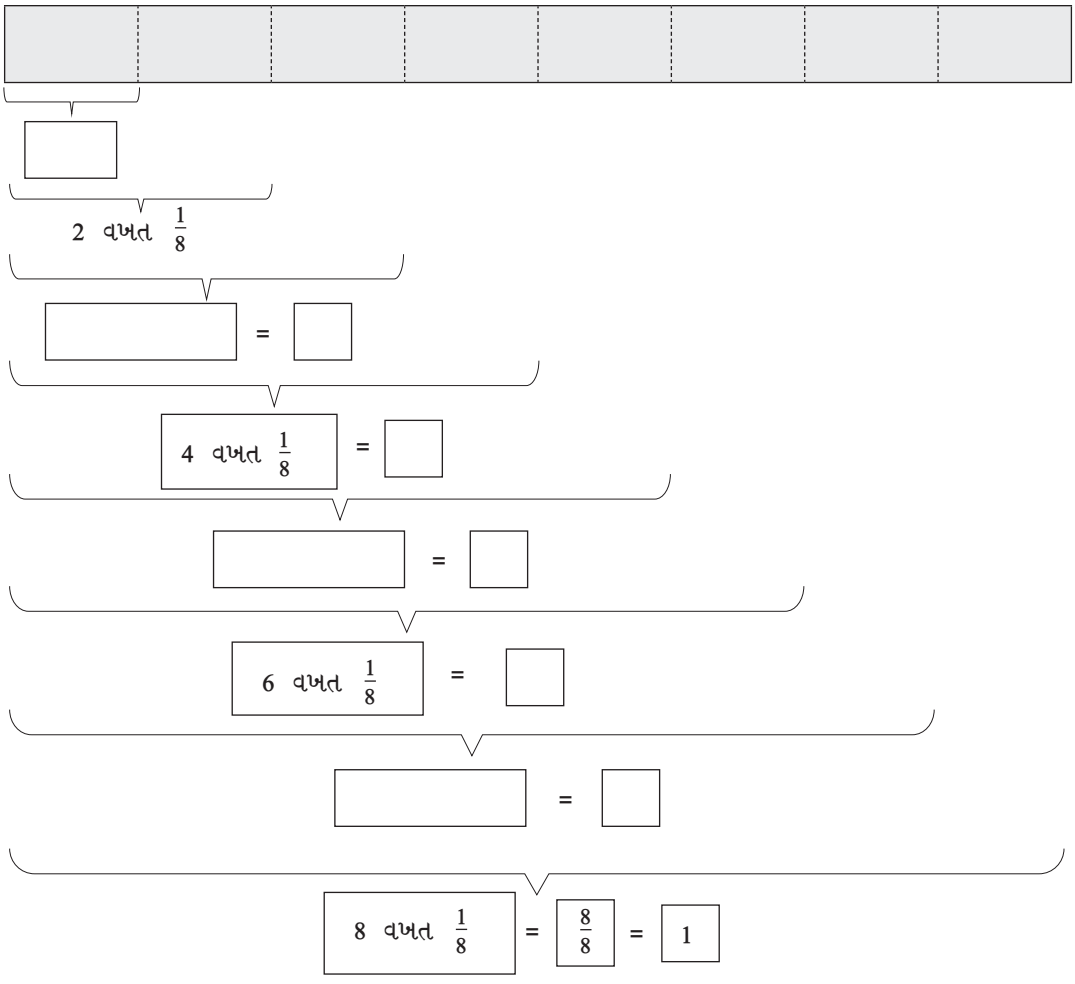
પટ્ટીને બે સમાન ભાગમાં વાળો અને પછી પટ્ટીને ફરીથી ખોલો. પટ્ટીને એક એકમ લંબાઈની માનીએ, તો સળ (ગડી) દ્વારા બનાવેલા પટ્ટીના બે નવા ભાગોની લંબાઈ કેટલી હશે?



જો તમે અગાઉથી વાળેલી પટ્ટીને ફરીથી બે સમાન ભાગમાં વાળશો તો તમને શું મળશે? તમને હવે ચાર સમાન ભાગ મળશે.



ફરી એક વખત આમ કરો! ખાલી ખાનાં ભરો.

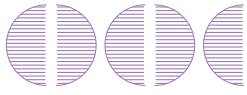


અપૂર્ણાંક જથ્થા (quantity)ને અપૂર્ણાંક એકમનો ઉપયોગ કરીને માપી શકાય છે.

ચાલો, બીજું ઉદાહરણ જોઈએ,



આખી રોટલી (પૂર્ણ - whole) દર્શાવે છે.

				
$\frac{1}{2}$ = 1 વખત અડધું	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ = 2 વખત અડધું	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ = 3 વખત અડધું	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ = 4 વખત અડધું	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ = 5 વખત અડધું (half)

અપૂર્ણાંક એકમોને એકસાથે ભેગા કરીને જથ્થો કેટલો છે તે આપણે વર્ણવી શકીએ છીએ.

વિચારો અને શોધો

1. $\frac{1}{2}$ ના કોષ્ટકને વધુ 2 પગલાં માટે ચાલુ રાખો.
2. શું તમે $\frac{1}{4}$ માટે આવું જ કોષ્ટક બનાવી શકો છો?
3. કાગળની પટ્ટીનો ઉપયોગ કરીને $\frac{1}{3}$ બનાવો. શું તમે આનો ઉપયોગ કરીને $\frac{1}{6}$ પણ બનાવી શકો છો?
4. ચિત્ર દોરો અને નીચેના માટે ઉપર બતાવ્યા પ્રમાણે સરવાળા (addition)નું વિધાન (statement) લખો :

   a. $\frac{1}{4}$ રોટલીનો 5 ગણો (5 વખત $\frac{1}{4}$ રોટલી) b. $\frac{1}{4}$ રોટલીનો 9 ગણો (9 વખત $\frac{1}{4}$ રોટલી)
5. દરેક અપૂર્ણાંક એકમને યોગ્ય ચિત્ર સાથે જોડો :

$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{6}$



અપૂર્ણાંકનું વાંચન

આપણે સામાન્ય રીતે $\frac{3}{4}$ અપૂર્ણાંકને 'ત્રણ ચતુર્થાંશ' (three quarters) અથવા 'ત્રણના છેદમાં ચાર' (three upon four) વાંચીએ છીએ. પરંતુ તેને '3 વખત $\frac{1}{4}$' તરીકે વાંચવાથી અપૂર્ણાંકનું કદ સમજવામાં મદદ મળે છે. કારણ કે, તે સ્પષ્ટપણે દર્શાવે છે કે અપૂર્ણાંક એકમ ($\frac{1}{4}$) શું છે, અને આવા કેટલા અપૂર્ણાંક એકમો (3) છે.

યાદ કરો કે, આપણે અપૂર્ણાંકોના ઉપરના અંક અને નીચેના અંકને શું કહીએ છીએ. અપૂર્ણાંક $\frac{5}{6}$ માં, 5 એ અંશ (numerator) છે અને 6 એ છેદ (denominator) છે.

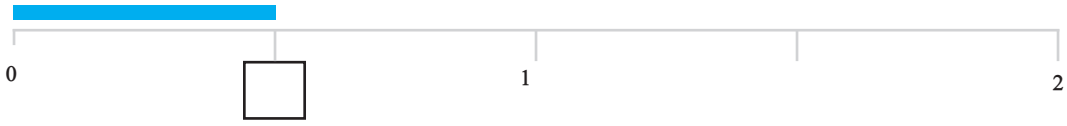
શિક્ષક માટે

બાળકોને વર્તુળ (circle), ચોરસ (square), લંબચોરસ (rectangle), ત્રિકોણ (triangle) વગેરે જેવા વિવિધ આકારો (shapes) દ્વારા અપૂર્ણાંક એકમોના વિચારને અન્વેષણ કરવાના મહાવરા કરાવો.

7.4 સંખ્યારેખા પર અપૂર્ણાંકની લંબાઈ દર્શાવવી
(Marking Fraction Lengths on the Number Line)

આપણે સંખ્યારેખા (number line) પર 1, 2, 3, ... એકમ (unit) જેટલી લંબાઈ (length) દર્શાવેલી છે. હવે, ચાલો આપણે સંખ્યારેખા પર અપૂર્ણાંકની લંબાઈ દર્શાવવાનો પ્રયાસ કરીએ.

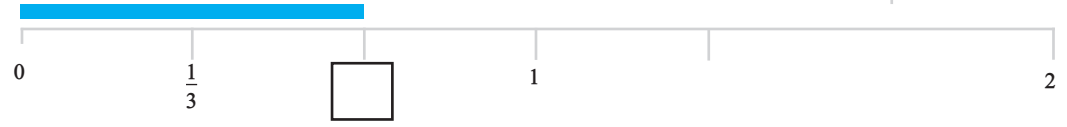
વાદળી લીટીની લંબાઈ કેટલી છે? વાદળી લીટીની લંબાઈ દર્શાવતો અપૂર્ણાંક ખાનામાં લખો.



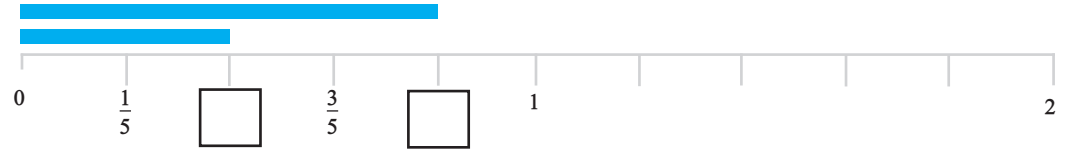
0 અને 1 વચ્ચેનું અંતર એક એકમ લાંબું છે. તેને બે સમાન ભાગોમાં વિભાજિત કરવામાં આવ્યું છે. તેથી, દરેક ભાગની લંબાઈ $\frac{1}{2}$ એકમ છે. તેથી, આ વાદળી લીટી $\frac{1}{2}$ એકમ લાંબી છે.

હવે, શું તમે નીચે દર્શાવેલી વિવિધ વાદળી લીટીઓની લંબાઈ શોધી શકો છો? ખાનામાં પણ ભરો.

1. અહીં, અપૂર્ણાંક એકમ એ 1 એકમ લંબાઈને ત્રણ સમાન ભાગમાં વિભાજિત કરી રહ્યું છે. વાદળી લીટીની લંબાઈ દર્શાવતો અપૂર્ણાંક (fraction) ખાનામાં અથવા તમારી નોટબુકમાં લખો.



2. અહીં, એક એકમને 5 સમાન ભાગોમાં વિભાજિત કરવામાં આવ્યું છે. વાદળી લીટીઓની લંબાઈ દર્શાવતો અપૂર્ણાંક સંબંધિત ખાનામાં અથવા તમારી નોટબુકમાં લખો.

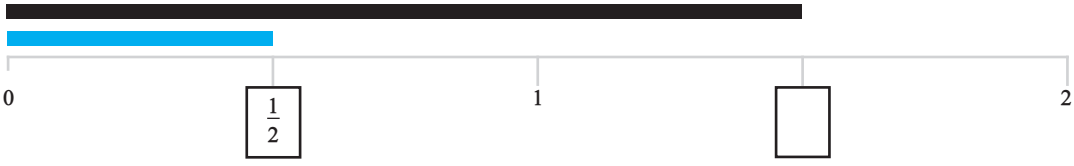


3. હવે, એક એકમને 8 સમાન ભાગોમાં વિભાજિત કરવામાં આવ્યું છે. તમારી નોટબુકમાં યોગ્ય અપૂર્ણાંક લખો.

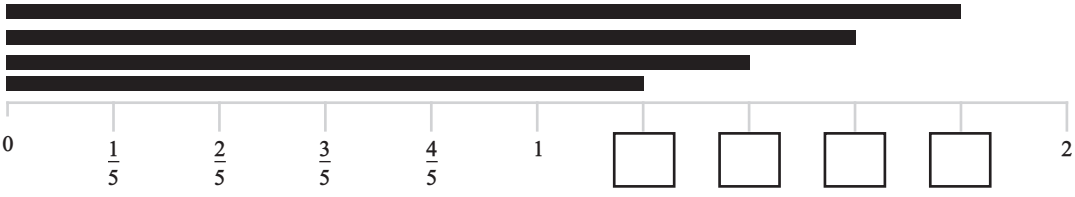
વિચારો અને શોધો

ગાણિતિક ચર્ચા

1. સંખ્યારેખા (number line) પર $\frac{1}{10}$, $\frac{3}{10}$ અને $\frac{4}{5}$ લંબાઈની લીટીઓ દોરો.
2. તમારી પસંદના પાંચ વધુ અપૂર્ણાંક (fraction) લખો અને તેમને સંખ્યારેખા પર અંકિત કરો.
3. 0 અને 1 વચ્ચે કેટલા અપૂર્ણાંક આવેલા છે? વિચારો, તમારા સહપાઠીઓ સાથે ચર્ચા કરો અને તમારો જવાબ લખો.
4. નીચે દર્શાવેલી વાદળી લીટી અને કાળી લીટીની લંબાઈ કેટલી છે? 0 અને 1 વચ્ચેનું અંતર 1 એકમ છે, અને તેને બે સમાન ભાગમાં વિભાજિત કરવામાં આવ્યું છે. દરેક ભાગની લંબાઈ $\frac{1}{2}$ છે. તેથી વાદળી લીટી $\frac{1}{2}$ એકમ (unit) લાંબી છે. કાળી લીટીની લંબાઈ દર્શાવતો અપૂર્ણાંક ખાનામાં લખો.



5. કાળી લીટીઓની લંબાઈ દર્શાવતો અપૂર્ણાંક સંબંધિત ખાનામાં લખો.



શિક્ષક માટે નોંધ

આ લીટીઓ બોર્ડ પર દોરો અને વિદ્યાર્થીઓને તેમની નોટબુકમાં જવાબો લખવા કહો.

7.5 મિશ્ર અપૂર્ણાંક (Mixed Fractions)

એક કરતાં મોટા અપૂર્ણાંક

અગાઉ સંખ્યારેખા પર કેટલાક અપૂર્ણાંક તમે અંકિત કર્યા હતા. શું તમે નોંધ્યું કે, બધી વાદળી લીટીઓની લંબાઈ એક કરતાં ઓછી હતી અને બધી કાળી લીટીઓની લંબાઈ એક કરતાં વધુ હતી?

સંખ્યારેખા પર અગાઉ તમે અંકિત કરેલા બધા અપૂર્ણાંક લખો.

હવે, ચાલો આને બે જૂથમાં વર્ગીકૃત કરીએ:

1 એકમ કરતાં ઓછી લંબાઈ	1 એકમ કરતાં વધારે લંબાઈ

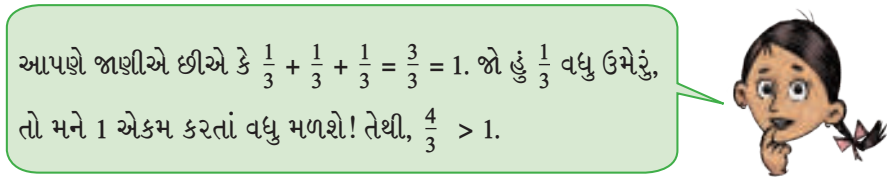
શું તમે એક કરતાં મોટા અપૂર્ણાંકો વચ્ચે કંઈક સામાન્ય છે તેની નોંધ કરી?

1 એકમ કરતાં નાના બધા અપૂર્ણાંકોમાં, અંશ (numerator) છેદ (denominator) કરતાં નાનો હોય છે, જ્યારે 1 એકમ કરતાં મોટા અપૂર્ણાંકોમાં, અંશ છેદ કરતાં મોટો હોય છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$ અને $\frac{7}{2}$ બધા 1 એકમ કરતાં મોટા છે. પણ શું આપણે જોઈ શકીએ કે તેમાં કેટલા પૂર્ણ એકમો સમાયેલા છે?

$$\frac{3}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2}$$



વિચારો અને શોધો



1. $\frac{7}{2}$ માં કેટલા પૂર્ણ (whole) એકમો (units) છે?

2. $\frac{4}{3}$ અને $\frac{7}{3}$ માં કેટલા પૂર્ણ એકમો છે?

એક કરતાં મોટા અપૂર્ણાંકોને મિશ્ર (mixed) સંખ્યા (number) તરીકે લખતાં

આપણે જોયું કે : $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$

આપણે અન્ય અપૂર્ણાંકોને પણ આ જ રીતે લખી શકીએ છીએ. ઉદાહરણ તરીકે,

$$\frac{4}{3} = \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} + \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{3}.$$

$$3 \times \frac{1}{3} = 1$$

વિચારો અને શોધો

1. નીચેના દરેક અપૂર્ણાંકમાં પૂર્ણ એકમોની સંખ્યા શોધો:

a. $\frac{8}{3}$ b. $\frac{11}{5}$ c. $\frac{9}{4}$

આપણે જોયું કે

$\frac{8}{3} = \underbrace{2 + \frac{2}{3}}$

અપૂર્ણાંક — મિશ્ર સંખ્યા

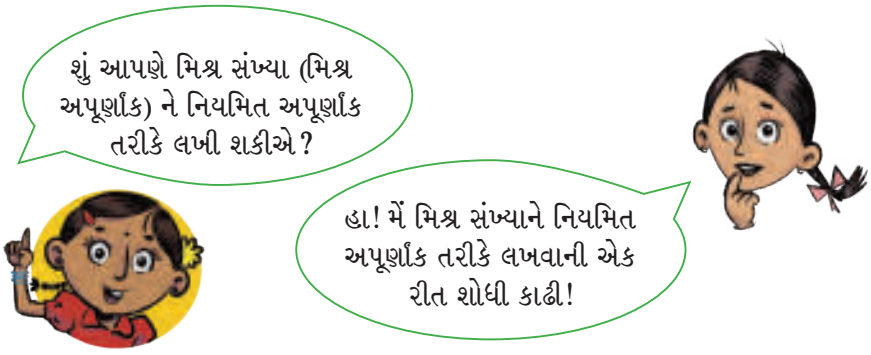
આ સંખ્યાને 'બે પૂર્ણાંક અને બે તૃતીયાંશ' પણ કહેવાય છે. આપણે તેને $2\frac{2}{3}$ તરીકે પણ લખીએ છીએ.

2. શું 1 કરતાં મોટા બધા અપૂર્ણાંકોને આવી મિશ્ર સંખ્યાઓ તરીકે લખી શકાય?

મિશ્ર સંખ્યા અથવા મિશ્ર (mixed) અપૂર્ણાંક (fraction)માં એક પૂર્ણાંક સંખ્યા (જેને પૂર્ણાંક ભાગ કહેવાય છે) અને 1 કરતાં નાનો અપૂર્ણાંક (જેને અપૂર્ણાંક ભાગ કહેવાય છે) હોય છે.

3. નીચેના અપૂર્ણાંકોને મિશ્ર અપૂર્ણાંક તરીકે લખો (દા.ત., $\frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$) :

a. $\frac{9}{2}$ b. $\frac{9}{5}$ c. $\frac{21}{19}$ d. $\frac{47}{9}$ e. $\frac{12}{11}$ f. $\frac{19}{6}$



જયા : જ્યારે મારી પાસે $3 + \frac{3}{4}$ હોય, ત્યારે આનો અર્થ $1 + 1 + 1 + \frac{3}{4}$ થાય છે. હું જાણું છું કે,

$$1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

તો મને

$$(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}) = \frac{15}{4}$$

મળે છે.

તેથી, $(4 \times \frac{1}{4}) + (4 \times \frac{1}{4}) + (4 \times \frac{1}{4}) + (3 \times \frac{1}{4}) = \frac{15}{4}$

વિચારો અને શોધો

નીચેની મિશ્ર સંખ્યાઓને અપૂર્ણાંક તરીકે લખો :

a. $3\frac{1}{4}$ b. $7\frac{2}{3}$ c. $9\frac{4}{9}$

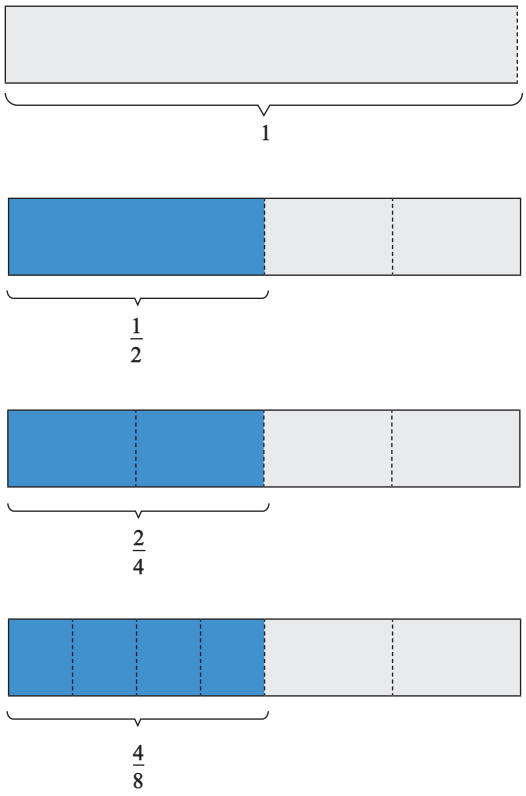
d. $3\frac{1}{6}$ e. $2\frac{3}{11}$ f. $3\frac{9}{10}$



7.6 સમઅપૂર્ણાંક (Equivalent Fractions)

સમાન અપૂર્ણાંક લંબાઈ શોધવા માટે અપૂર્ણાંક દીવાલનો ઉપયોગ!

અગાઉના વિભાગમાં, તમે અપૂર્ણાંક એકમનો ઉપયોગ કરીને વિવિધ અપૂર્ણાંકો દર્શાવવા માટે કાગળને વાળવાની રીતનો ઉપયોગ કર્યો હતો. ચાલો એ જ કાગળની પટ્ટીઓ સાથે કેટલીક વધુ પ્રવૃત્તિઓ કરીએ.



તમે શું અવલોકન કર્યું?

- શું $\frac{1}{2}$ અને $\frac{2}{4}$ લંબાઈ સમાન છે?
- શું $\frac{2}{4}$ અને $\frac{4}{8}$ લંબાઈ સમાન છે?
- આપણે કહી શકીએ કે $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$

આ 'સમઅપૂર્ણાંકો' (equivalent fractions) છે જે સમાન લંબાઈ દર્શાવે છે, પરંતુ તેઓ જુદા જુદા અપૂર્ણાંક એકમના સંદર્ભમાં દર્શાવવામાં આવ્યા છે.

હવે, કાગળની પટ્ટીઓનો ઉપયોગ કરીને $\frac{1}{3}$ અને $\frac{2}{6}$ સમઅપૂર્ણાંકો છે કે નહીં તે તપાસો.

નીચે આપેલા ચિત્રમાં દર્શાવ્યા મુજબ તમારી પોતાની અપૂર્ણાંક દીવાલ બનાવો!

અપૂર્ણાંક દીવાલ જોઈને નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. શું $\frac{1}{2}$ અને $\frac{3}{6}$ ની લંબાઈ સમાન છે?
2. શું $\frac{2}{3}$ અને $\frac{4}{6}$ સમઅપૂર્ણાંકો છે? શા માટે?
3. $\frac{1}{6}$ લંબાઈના કેટલા ટુકડા $\frac{1}{2}$ લંબાઈ બનાવશે?
4. $\frac{1}{6}$ લંબાઈના કેટલા ટુકડા $\frac{1}{3}$ લંબાઈ બનાવશે?

1 એકમ					
$\frac{1}{2}$					$\frac{2}{2}$
$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$			$\frac{3}{3}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$		$\frac{3}{4}$		$\frac{4}{4}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$		$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{6}$

આપણે આ વિચારને $\frac{1}{10}$ અપૂર્ણાંક એકમ સુધી અપૂર્ણાંક દીવાલ બનાવવા માટે વિસ્તૃત કરી શકીએ છીએ (આ અપૂર્ણાંક દીવાલ પુસ્તકના અંતે આપેલી છે).

1 એકમ									
$\frac{1}{2}$									$\frac{2}{2}$
$\frac{1}{3}$					$\frac{2}{3}$				$\frac{3}{3}$
$\frac{1}{4}$			$\frac{2}{4}$			$\frac{3}{4}$			$\frac{4}{4}$
$\frac{1}{5}$		$\frac{2}{5}$			$\frac{3}{5}$		$\frac{4}{5}$		$\frac{5}{5}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$			$\frac{3}{6}$		$\frac{4}{6}$		$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{6}$
$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$		$\frac{3}{7}$		$\frac{4}{7}$		$\frac{5}{7}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{1}{7}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$		$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$		$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}$
$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$		$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{9}{9}$
$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{10}{10}$

વિચારો અને શોધો

1. શું $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{10}$ સમઅપૂર્ણાંકો છે? શા માટે?

2. $\frac{2}{6}$ માટે બે સમઅપૂર્ણાંક લખો.

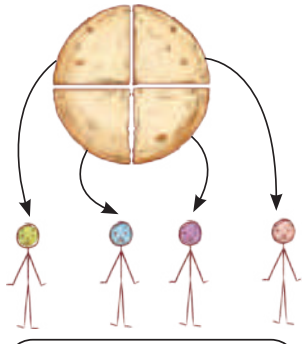
3. $\frac{4}{6} = \boxed{\quad} = \boxed{\quad} = \boxed{\quad}$ = ... (તમે જેટલા લખી શકો તેટલા લખો)

સમાન ભાગોનો ઉપયોગ કરીને સમઅપૂર્ણાંકોની સમજૂતી

એક રોટલી ચાર બાળકોને સમાન રીતે વહેંચવામાં આવી હતી. દરેક બાળકને આખી રોટલીનો કેટલો અપૂર્ણાંક (fraction) ભાગ મળ્યો હશે?

બાજુનું ચિત્ર ચાર બાળકો વચ્ચે રોટલીના વિભાજનને દર્શાવે છે.

દરેક બાળકને રોટલીનો $\frac{1}{4}$ ભાગ મળે છે.



ચાર ભાગ એકબીજાને સમાન હોવા જોઈએ.

તમે આ ઘટનાને ભાગાકાર (division) સ્વરૂપે, સરવાળા (addition) સ્વરૂપે અને ગુણાકાર (multiplication) સ્વરૂપે પણ વ્યક્ત કરી શકો છો.

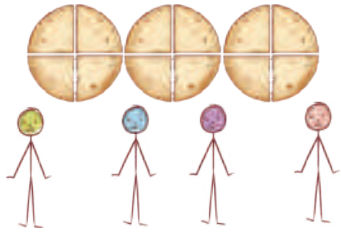
અહીં ભાગાકાર સ્વરૂપ $1 \div 4 = \frac{1}{4}$ છે.

અહીં સરવાળા સ્વરૂપ $1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ છે.

અહીં ગુણાકાર સ્વરૂપ $1 = 4 \times \frac{1}{4}$ છે.

વિચારો અને શોધો

1. ત્રણ રોટલી ચાર બાળકો દ્વારા સમાન રીતે વહેંચવામાં આવે છે. ચિત્ર દ્વારા ભાગાકાર દર્શાવો અને દરેક બાળકને કેટલો ભાગ મળે છે તેનો અપૂર્ણાંક લખો. ઉપરાંત, તેને સંબંધિત ભાગાકાર સ્વરૂપે, સરવાળા સ્વરૂપે અને ગુણાકાર સ્વરૂપે લખો.



દરેક બાળકને મળતી રોટલીનો અપૂર્ણાંક _____

ભાગાકારનું સ્વરૂપ :

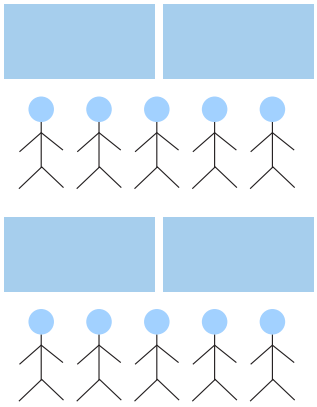
સરવાળાનું સ્વરૂપ :

ગુણાકારનું સ્વરૂપ :

તમારા ચિત્ર અને જવાબોની તમારા સહપાઠીઓના ચિત્ર અને જવાબો સાથે સરખામણી કરો!

2. જ્યારે 2 રોટલી 4 બાળકો દ્વારા સમાન રીતે વહેંચવામાં આવે ત્યારે દરેક બાળકને કેટલો ભાગ મળે છે, તે દર્શાવવા માટે એક ચિત્ર દોરો. ઉપરાંત, તેને અનુરૂપ ભાગાકારનું સ્વરૂપ, સરવાળાનું સ્વરૂપ અને ગુણાકારનું સ્વરૂપ લખો.
3. અનિલ એક એવા જૂથમાં હતો જ્યાં 2 કેક 5 બાળકો વચ્ચે સમાન રીતે વહેંચવામાં આવી હતી. અનિલને કેટલી કેક મળશે?





આ બંને પરિસ્થિતિઓમાં દરેક બાળકના ભાગ સમાન છે!



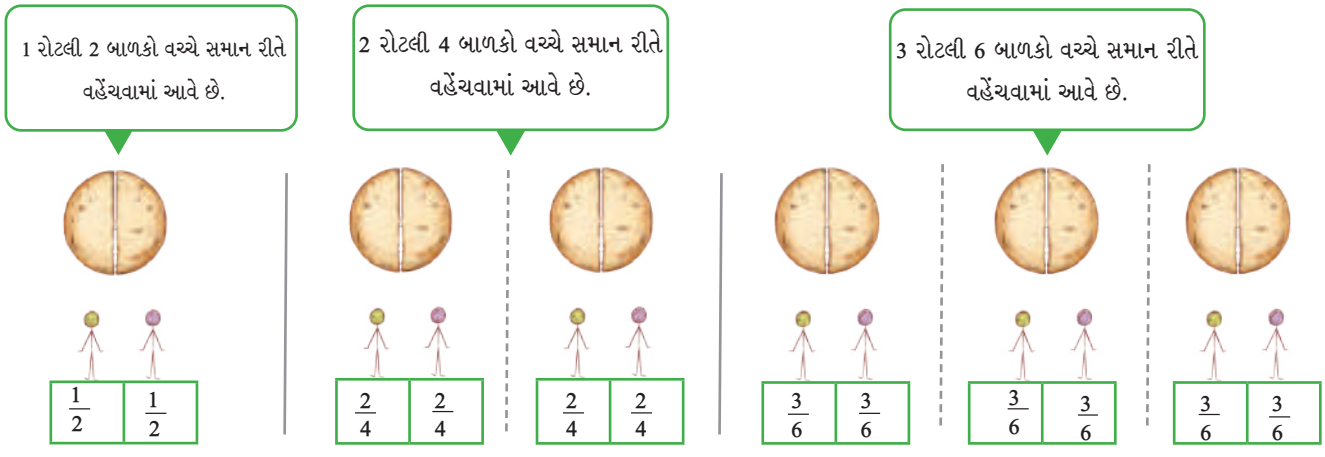
આમ $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$!

ચાલો, નીચેની સ્થિતિમાં દરેક બાળકને મળેલ ભાગની તપાસ કરીએ :

- 1 રોટલી 2 બાળકો વચ્ચે સમાન રીતે વહેંચવામાં આવે છે.
- 2 રોટલી 4 બાળકો વચ્ચે સમાન રીતે વહેંચવામાં આવે છે.
- 3 રોટલી 6 બાળકો વચ્ચે સમાન રીતે વહેંચવામાં આવે છે.

ચાલો દોરીએ અને વહેંચીએ!

શું તમે નોંધ્યું કે, દરેક પરિસ્થિતિમાં દરેક બાળકના ભાગ સમાન છે? તો, આપણે કહી શકીએ કે $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$



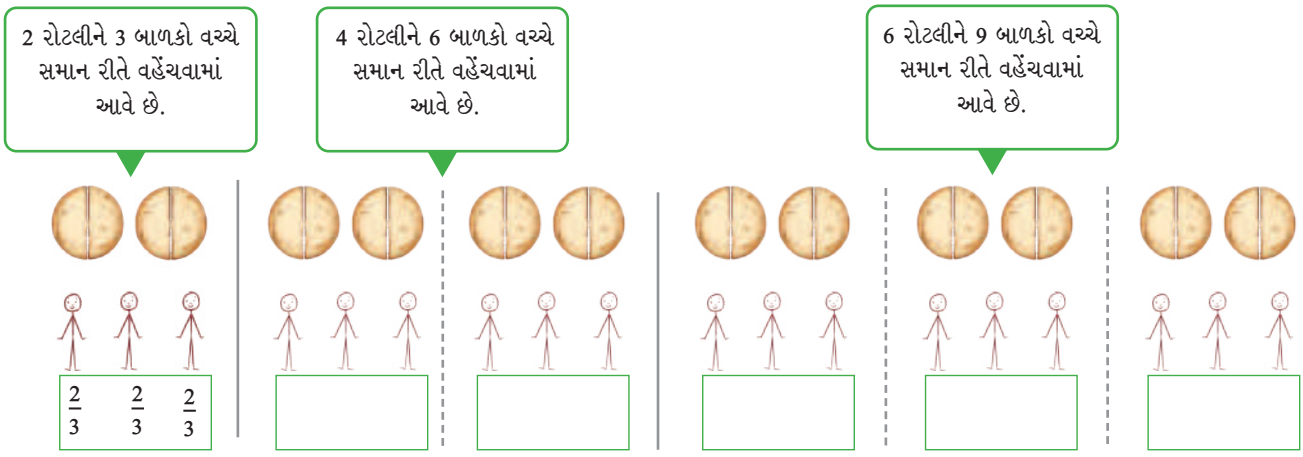
જ્યાં ભાગ સમાન હોય તેવા અપૂર્ણાંકોને 'સમઅપૂર્ણાંકો' કહેવાય છે.

તો $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$ અને $\frac{3}{6}$ તમામ **સમઅપૂર્ણાંક** છે.

$\frac{1}{2}$ ના કેટલાક વધુ સમઅપૂર્ણાંકો શોધો. તેમને અહીં ખાનામાં લખો :

☐ ☐ ☐ ☐

નીચે દર્શાવેલી પરિસ્થિતિઓમાં રોટલીઓને સમાન રીતે વિભાજિત કરો અને દરેક બાળકનો ભાગ લખો. શું આ દરેક પરિસ્થિતિમાં ભાગ સમાન છે? શા માટે?



$\frac{2}{3}$ ને $\frac{4}{6}$ નું સૌથી સરળ સ્વરૂપ પણ કહેવાય છે. તે $\frac{6}{9}$ નું પણ સૌથી સરળ સ્વરૂપ છે.



વિચારો અને શોધો

ખૂટતી સંખ્યાઓ શોધો :

a. 4 મિત્રો વચ્ચે સમાન રીતે વહેંચાયેલા 5 પ્યાલા ભરેલો રસ, એ 8 મિત્રો વચ્ચે સમાન રીતે વહેંચાયેલા _____ પ્યાલા ભરેલા રસ જેટલા જ છે.

આમ, $\frac{5}{4} = \frac{\square}{8}$

ગાણિતિક ચર્ચા

b. 3 થેલીઓમાં સમાન રીતે વિભાજિત 4 કિલો બટાકાં, એ 12 કિલો બટાકાંને ____ થેલીઓમાં સમાન રીતે વિભાજિત કરવા જેટલું જ છે.

આમ, $\frac{4}{3} = \frac{12}{\square}$

c. 5 બાળકો વચ્ચે વહેંચાયેલી 7 રોટલી એ _____ બાળકો વચ્ચે વહેંચાયેલી _____ રોટલી જેટલી જ છે.

આમ $\frac{7}{5} = \frac{\square}{\square}$

કયા જૂથમાં દરેક બાળકને વધુ ચીકી મળશે?

2 બાળકો વચ્ચે વહેંચાયેલી 1 ચીકી અથવા 8 બાળકો વચ્ચે વહેંચાયેલી 5 ચીકી.

મુક્તા : તો આપણે $\frac{1}{2}$ અને $\frac{5}{8}$ની સરખામણી કરવી જોઈએ. કયું વધારે છે?

શબનમ : સારું, આપણે જોયું છે કે $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$ અને સ્પષ્ટપણે $\frac{4}{8} < \frac{5}{8}$ તો, 8 બાળકો વચ્ચે 5 ચીકી સમાન રીતે વહેંચવામાં આવે, અને 2 બાળકો વચ્ચે 1 ચીકી સમાન રીતે વહેંચવામાં આવે તો બીજા જૂથના દરેક બાળકને વધુ ચીકી મળશે.

નીચેનાં જૂથો વિશે શું કહી શકશો? કયા જૂથમાં દરેક બાળકને વધુ મળશે?

2 બાળકો વચ્ચે વહેંચાયેલી 1 ચીકી અથવા 7 બાળકો વચ્ચે વહેંચાયેલી 4 ચીકી.

શબનમ : આ વખતે કયા જૂથનાં બાળકોને વધુ ચીકી મળશે?

મુક્તા : આપણે $\frac{1}{2}$ અને $\frac{4}{7}$ની સરખામણી કરવી જોઈએ.

હવે

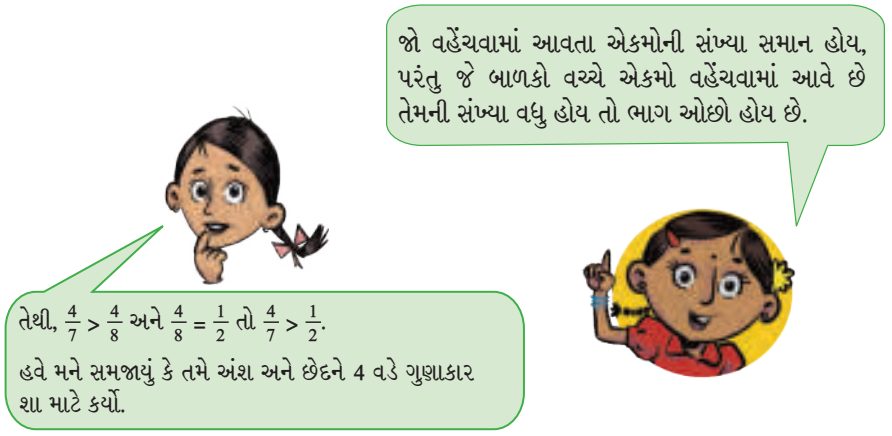
$\frac{1 \times 4}{2 \times 4} = \frac{4}{8}$ તેથી $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$

શબનમ : પણ તમે ફરીથી અંશ અને છેદનો 4 વડે ગુણાકાર (multiply) કેમ કર્યો?

મુક્તા : તમે તે જોશો.

જ્યારે 7 બાળકો વચ્ચે 4 ચીકી સમાન રીતે વહેંચવામા આવે છે ત્યારે દરેકને $\frac{4}{7}$ ચીકી મળશે. જ્યારે, 8 બાળકો વચ્ચે 4 ચીકી સમાન રીતે વહેચવામાં આવે છે ત્યારે દરેકને $\frac{4}{8}$ ચીકી મળશે. તેથી $\frac{4}{7} > \frac{4}{8}$.





- ધારો કે, બાળકોની સંખ્યા સમાન રાખવામાં આવે છે, પરંતુ વહેંચવામાં આવતા એકમોની સંખ્યા વધારવામાં આવે છે. હવે દરેક બાળકના ભાગ વિશે તમે શું કહી શકો? શા માટે? તમારો તર્ક આને કેવી રીતે સમજાવે છે, તે સમજૂતી અંગે ચર્ચા કરો :

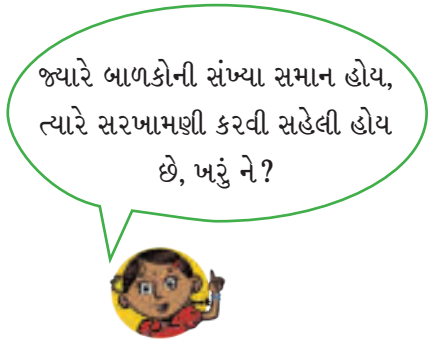
  $\frac{1}{5} < \frac{2}{5}$, $\frac{3}{7} < \frac{4}{7}$ અને $\frac{1}{2} < \frac{5}{8}$

- હવે, નક્કી કરો કે બે જૂથમાંથી કયા જૂથના દરેક બાળકને મોટો ભાગ મળશે :

ગાણિતિક ચર્ચા

1. **સમૂહ 1 :** 3 પ્યાલા શેરડીનો રસ 4 બાળકો વચ્ચે સમાન રીતે વહેંચો.
   સમૂહ 2 : 7 પ્યાલા શેરડીનો રસ 10 બાળકો વચ્ચે સમાન રીતે વહેંચો.
2. **સમૂહ 1 :** 4 પ્યાલા શેરડીનો રસ 7 બાળકો વચ્ચે સમાન રીતે વહેંચો.
   સમૂહ 2 : 5 પ્યાલા શેરડીનો રસ 7 બાળકો વચ્ચે સમાન રીતે વહેંચો.

કયાં જૂથોની સરખામણી કરવી સહેલી હતી? શા માટે?



શબનમ : પ્રથમ બે જૂથોની સરખામણી કરવા માટે આપણે $\frac{3}{4}$ અને $\frac{7}{10}$ અપૂર્ણાંકોના સમાન અપૂર્ણાંકો શોધવા પડશે.

મુક્તા : $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ અને $\frac{21}{30} = \frac{7}{10}$ વિશે શું કહેશો?

શબનમ : એક શરત છે. બંને અપૂર્ણાંકો માટે વપરાયેલો અપૂર્ણાંક એકમ સમાન હોવો જોઈએ! જેમ કે $\frac{2}{6}$ અને $\frac{3}{6}$ બંને સમાન અપૂર્ણાંક એકમ $\frac{1}{6}$ નો ઉપયોગ કરે છે. (એટલે કે, છેદ સમાન છે) પરંતુ $\frac{6}{8}$ અને $\frac{21}{30}$ સમાન અપૂર્ણાંક એકમોનો ઉપયોગ કરતા નથી. (તેમના છેદ અલગ અલગ છે)

મુક્તા : ઠીક છે, તો ચાલો સમઅપૂર્ણાંક બનાવવાનું શરૂ કરીએ :

$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16} = \frac{15}{20}$ ... પણ હું ક્યારે અટકું?

શબનમ : સમજી ગઈ! $4 \times 10 = 40$ સુધી જઈએ તો કેવું રહેશે?

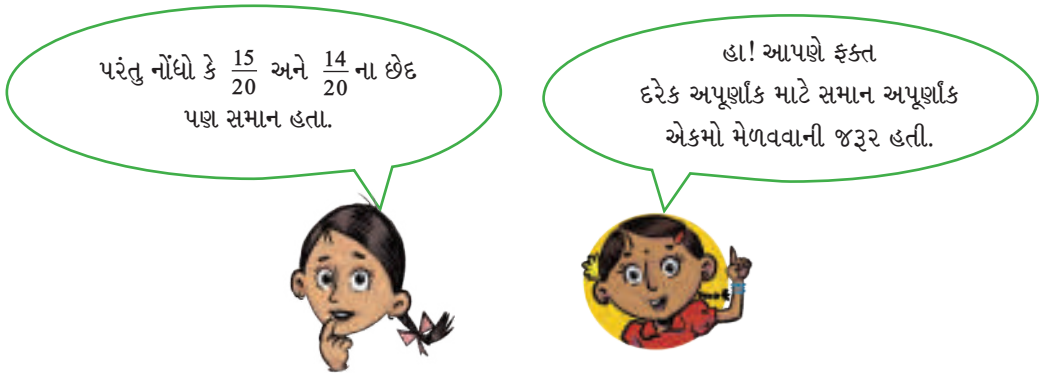
મુક્તા : તમારો કહેવાનો અર્થ બે છેદ (denominator)નો ગુણાકાર? આ સારું લાગે છે!

આપણી પાસે $\frac{3}{4}$ અને $\frac{7}{10}$ છે. બે છેદ (4 અને 10)નો ગુણાકાર 40 છે.

$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16} = \frac{15}{20} = \frac{18}{24} = \ldots = \frac{27}{36} = \frac{30}{40}$

$\frac{7}{10} = \frac{14}{20} = \frac{21}{30} = \frac{28}{40}$.

જ્યાં સુધી આપણે છેદ 40 પર ન પહોંચીએ ત્યાં સુધી જાઓ.



શબનમ : તો $\frac{3}{4}$ અને $\frac{7}{10}$ ના સમાન સમઅપૂર્ણાંક $\frac{30}{40}$ અને $\frac{28}{40}$ અથવા $\frac{15}{20}$ અને $\frac{14}{20}$ છે.

સ્પષ્ટપણે $\frac{30}{40} > \frac{28}{40}$, આપણે તારણ કાઢીએ છીએ કે $\frac{3}{4} > \frac{7}{10}$

આપેલી અપૂર્ણાંક જોડીઓ માટે સમઅપૂર્ણાંક શોધો, જેથી અપૂર્ણાંક એકમો સમાન હોય.

a. $\frac{7}{2}$ અને $\frac{3}{5}$ b. $\frac{8}{3}$ અને $\frac{5}{6}$ c. $\frac{3}{4}$ અને $\frac{3}{5}$ d. $\frac{6}{7}$ અને $\frac{8}{5}$

e. $\frac{9}{4}$ અને $\frac{5}{2}$ f. $\frac{1}{10}$ અને $\frac{2}{9}$ g. $\frac{8}{3}$ અને $\frac{11}{4}$ h. $\frac{13}{6}$ અને $\frac{1}{9}$

અપૂર્ણાંકને અતિસંક્ષિપ્ત (simplest) સ્વરૂપ (form)માં (પ્રમાણિત સ્વરૂપ) દર્શાવવા

કોઈ પણ અપૂર્ણાંકમાં, જો તેના અંશ (numerator) અને છેદ (denominator)માં 1 સિવાય કોઈ સામાન્ય અવયવ (factor) ન હોય, તો તે અપૂર્ણાંક પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં અથવા તેના અતિસંક્ષિપ્ત સ્વરૂપમાં છે એમ કહેવાય છે. અન્ય શબ્દોમાં કહીએ તો, જો અપૂર્ણાંકના અંશ અને છેદ શક્ય તેટલા નાના હોય, તો તે અપૂર્ણાંકનું અતિસંક્ષિપ્ત (simplest) સ્વરૂપ છે.

કોઈ પણ અપૂર્ણાંકને અતિસંક્ષિપ્ત સ્વરૂપમાં તેના સમઅપૂર્ણાંક શોધીને વ્યક્ત કરી શકાય છે, જેના અંશ અને છેદ શક્ય હોય તેટલા નાના હોય.

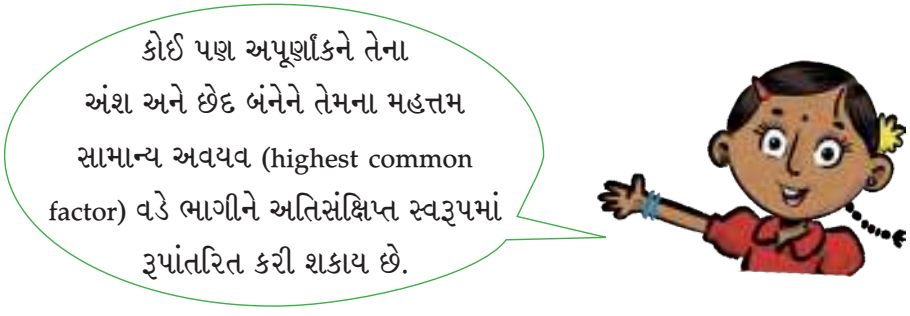
ચાલો, જોઈએ કે અપૂર્ણાંકને અતિસંક્ષિપ્ત સ્વરૂપમાં કેવી રીતે વ્યક્ત કરવા.

ઉદાહરણ : શું અપૂર્ણાંક $\frac{16}{20}$ અતિસંક્ષિપ્ત સ્વરૂપમાં છે? ના, 4 એ 16 અને 20નો સામાન્ય અવયવ (common factor) છે. ચાલો $\frac{16}{20}$ ને અતિસંક્ષિપ્ત સ્વરૂપમાં લખીએ.

આપણે જાણીએ છીએ કે 16 (અંશ) અને 20 (છેદ) બંને 4 વડે વિભાજ્ય (divisible) છે.

તો, $\frac{16 \div 4}{20 \div 4} = \frac{4}{5}$

હવે, 4 અને 5 વચ્ચે કોઈ સામાન્ય અવયવ નથી. આથી, $\frac{16}{20}$ ને અતિસંક્ષિપ્ત સ્વરૂપમાં $\frac{4}{5}$ તરીકે વ્યક્ત કરવામાં આવે છે. આમ, $\frac{4}{5}$ ને $\frac{16}{20}$ નું અતિસંક્ષિપ્ત સ્વરૂપ કહેવાય છે. કારણ કે 4 અને 5 વચ્ચે 1 સિવાય કોઈ સામાન્ય અવયવ નથી.



અપૂર્ણાંકને અતિસંક્ષિપ્ત સ્વરૂપમાં દર્શાવવાનું કાર્ય તબક્કાવાર (stepwise) પણ કરી શકાય છે.

ધારો કે, આપણે $\frac{36}{60}$ ને અતિસંક્ષિપ્ત સ્વરૂપમાં વ્યક્ત કરવા માંગીએ છીએ. સૌપ્રથમ, આપણે નોંધીએ કે, અંશ અને છેદ બંને બેકી સંખ્યા (even યુગ્મ) છે. તેથી આપણે બંનેને 2 વડે ભાગીએ છીએ અને જોઈએ છીએ કે $\frac{36}{60} = \frac{18}{30}$

અંશ અને છેદ બંને ફરીથી બેકી સંખ્યા છે, તેથી આપણે તેમને ફરીથી 2 વડે ભાગી શકીએ છીએ; આપણને $\frac{18}{30} = \frac{9}{15}$ મળશે.

આપણે હવે નોંધીએ કે, 9 અને 15 બંને 3ના અવયવી (multiple) છે, તેથી આપણે બંનેને 3 વડે ભાગીએ તો આપણને $\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ મળે છે.

હવે, 3 અને 5 વચ્ચે 1 સિવાય કોઈ સામાન્ય અવયવ નથી, તેથી અતિસંક્ષિપ્ત સ્વરૂપ $\frac{3}{5}$ છે.

વૈકલ્પિક રીતે, આપણે જોઈ શક્યા હોત કે $\frac{36}{60}$ માં, અંશ અને છેદ બંને 12ના અવયવી છે. આપણે જોઈએ છીએ કે $36 = 3 \times 12$ અને $60 = 5 \times 12$. તેથી, આપણે તરત જ તારણ કાઢ્યું હોત કે $\frac{36}{60} = \frac{3}{5}$. બંને પદ્ધતિઓ કામ કરે છે અને સમાન જવાબ આપશે! પરંતુ કેટલીક વાર તબક્કાવાર જવું સહેલું બની શકે છે.

વિચારો અને શોધો

નીચેના અપૂર્ણાંકોને અતિસંક્ષિપ્ત સ્વરૂપમાં વ્યક્ત કરો :

a. $\frac{17}{51}$ b. $\frac{64}{144}$ e. $\frac{126}{147}$ d. $\frac{525}{112}$

7.7 અપૂર્ણાંકોની સરખામણી (Comparing Fractions)

$\frac{4}{5}$ અને $\frac{7}{9}$ માંથી કયું મોટું છે? આવા બે અપૂર્ણાંકની સીધી સરખામણી કરવી મુશ્કેલ હોઈ શકે છે. આપણે જાણીએ છીએ કે, સમાન છેદવાળા બે અપૂર્ણાંકના સમઅપૂર્ણાંક કેવી રીતે શોધવા. ચાલો, જોઈએ કે આપણે તેનો ઉપયોગ કેવી રીતે કરી શકીએ છીએ :

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \times 9}{5 \times 9} = \frac{36}{45}$$

$$\frac{7}{9} = \frac{7 \times 5}{9 \times 5} = \frac{35}{45}$$

સ્પષ્ટ છે કે, $\frac{36}{45} > \frac{35}{45}$



તેથી $\frac{4}{5} > \frac{7}{9}$!

ચાલો, એક અન્ય જોડ સાથે આ પ્રયત્ન કરીએ : $\frac{7}{9}$ અને $\frac{17}{21}$

9 અને 21નો સામાન્ય અવયવી 63 છે. તેથી આપણે લખી શકીએ કે,

$\frac{7}{9} = \frac{7 \times 7}{9 \times 7} = \frac{49}{63}$, $\frac{17}{21} = \frac{17 \times 3}{21 \times 3} = \frac{51}{63}$

સ્પષ્ટ છે કે, $\frac{49}{63} < \frac{51}{63}$. આમ, $\frac{7}{9} < \frac{17}{21}$!

સંક્ષિપ્તમાં કહીએ!

બે કે તેથી વધુ આપેલા અપૂર્ણાંકોની સરખામણી કરવાનાં પગલાં :

પગલું 1 : આપેલા અપૂર્ણાંકોને સમઅપૂર્ણાંકોમાં બદલો, જેથી તે બધા સમાન છેદ (denominator) અથવા સમાન અપૂર્ણાંક એકમ સાથે વ્યક્ત થાય.

પગલું 2 : હવે, ફક્ત અંશની સરખામણી કરીને સમઅપૂર્ણાંકોની સરખામણી કરો, એટલે કે દરેક પાસે કેટલા અપૂર્ણાંક એકમો છે.

વિચારો અને શોધો

1. નીચેના અપૂર્ણાંકોની સરખામણી કરો અને તમારા જવાબોનાં યોગ્ય કારણ આપો :

   a. $\frac{8}{3}$, $\frac{5}{2}$ b. $\frac{4}{9}$, $\frac{3}{7}$ c. $\frac{7}{10}$, $\frac{9}{14}$

   d. $\frac{12}{5}$, $\frac{8}{5}$ e. $\frac{9}{4}$, $\frac{5}{2}$

2. નીચેના અપૂર્ણાંકોને ચડતા (ascending) ક્રમમાં લખો.

   a. $\frac{7}{10}$, $\frac{11}{15}$, $\frac{2}{5}$ b. $\frac{19}{24}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{12}$

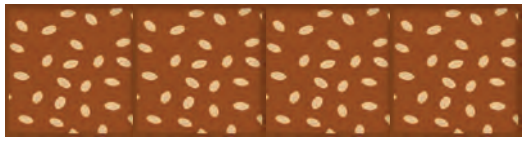
3. નીચેના અપૂર્ણાંકો ઉતરતા (descending) ક્રમમાં લખો.

   a. $\frac{25}{16}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{13}{4}$, $\frac{17}{32}$ b. $\frac{3}{4}$, $\frac{12}{5}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{5}{4}$

7.8 અપૂર્ણાંકોના સરવાળા અને બાદબાકી (Addition and Substraction of Fractions)

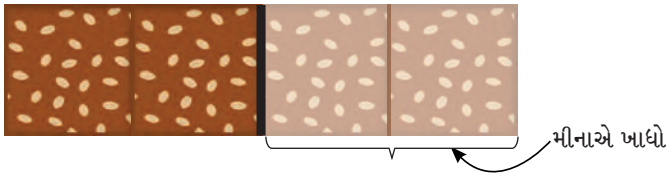


મીનાના પિતાએ કેટલીક ચીકી બનાવી. મીનાએ તેનો $\frac{1}{2}$ ભાગ ખાધો અને તેના નાના ભાઈએ તેનો $\frac{1}{4}$ ભાગ ખાધો. મીના અને તેના ભાઈએ કુલ કેટલી ચીકી ખાધી?



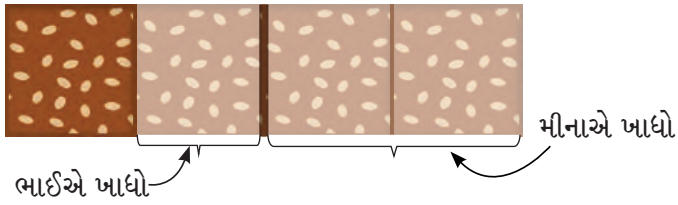
આપણે તેને કાલ્પનિક રીતે જોઈને જવાબ પર પહોંચી શકીએ છીએ. ચાલો, ચીકીનો એક ટુકડો લઈએ અને તેને પહેલાં આ રીતે બે અડધા ભાગમાં વિભાજિત કરીએ.

મીનાએ તેનો $\frac{1}{2}$ ભાગ ખાધો જે ચિત્રમાં દર્શાવેલો છે.



ચાલો, હવે બાકીના અડધા ભાગને દર્શાવ્યા મુજબ વધુ બે અડધા ભાગમાં વિભાજિત કરીએ. આ દરેક ટુકડા આખી ચીકીનો $\frac{1}{4}$ ભાગ છે.

મીનાના ભાઈએ આખી ચીકીનો $\frac{1}{4}$ ભાગ ખાધો, જે ચિત્રમાં દર્શાવેલો છે.



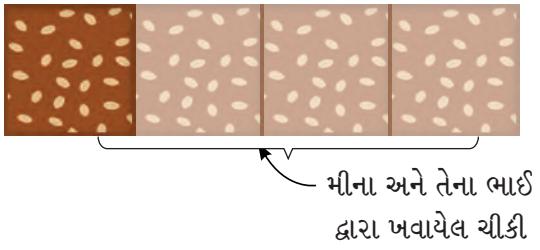
કુલ ખાધેલી ચીકી એટલે $\frac{1}{2}$ (મીના દ્વારા) અને $\frac{1}{4}$ (તેના ભાઈ દ્વારા)

કુલ ખાધેલી ચીકી

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

$= 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$



કુલ ચીકીનો કેટલો ભાગ બાકી છે?

સમાન અપૂર્ણાંક એકમ અથવા છેદ સમાન (સમચ્છેદી – same denominator – અપૂર્ણાંક) હોય તેવા અપૂર્ણાંકોનો સરવાળો

ઉદાહરણ : $\frac{2}{5}$ અને $\frac{1}{5}$નો સરવાળો શોધો.

ચાલો, આપણે બંનેને લંબચોરસ પટ્ટીઓનો ઉપયોગ કરીને રજૂ કરીએ. બંને અપૂર્ણાંકોમાં, અપૂર્ણાંક એકમ સમાન છે, $\frac{1}{5}$, તેથી દરેક પટ્ટીને 5 સમાન ભાગોમાં વિભાજિત કરવામાં આવશે.

તો $\frac{2}{5}$ ને આ રીતે રજૂ કરીશું,



અને $\frac{1}{5}$ ને આ રીતે રજૂ કરીશું.



આપેલા બે અપૂર્ણાંકોનો સરવાળો કરવો એ છાયાંકિત ભાગોની કુલ સંખ્યા શોધવા જેવું જ છે, જેમાંથી દરેક સમાન અપૂર્ણાંક એકમ $\frac{1}{5}$ રજૂ કરે છે.

આ કિસ્સામાં છાયાંકિત (shaded) ભાગોની કુલ સંખ્યા 3 છે. કારણ કે, દરેક છાયાંકિત ભાગ અપૂર્ણાંક એકમ $\frac{1}{5}$ રજૂ કરે છે, આપણે જોઈએ છીએ કે 3 છાયાંકિત ભાગો મળીને $\frac{3}{5}$ અપૂર્ણાંક રજૂ કરે છે.

તેથી, $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$



ઉદાહરણ : $\frac{4}{7}$ અને $\frac{6}{7}$ નો સરવાળો શોધો.

ચાલો, આપણે બંનેને ફરીથી લંબચોરસ (rectangle) પટ્ટીનો ઉપયોગ કરીને રજૂ કરીએ. અહીં બંને અપૂર્ણાંકોમાં, અપૂર્ણાંક એકમ સમાન છે. એટલે કે, $\frac{1}{7}$, તેથી દરેક પટ્ટીને 7 સમાન ભાગોમાં વિભાજિત કરવામાં આવશે.

પછી $\frac{4}{7}$ તરીકે રજૂ કરવામાં આવશે -

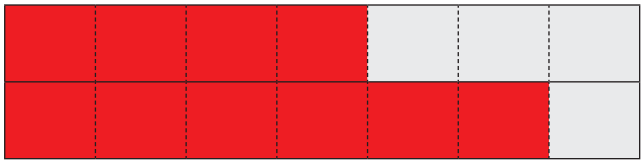


અને $\frac{6}{7}$ ને આ રીતે રજૂ કરીશું.



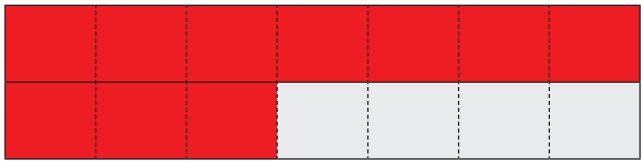
આ કિસ્સામાં છાયાંકિત ભાગોની કુલ સંખ્યા 10 છે અને દરેક છાયાંકિત ભાગ અપૂર્ણાંક એકમ $\frac{1}{7}$ રજૂ કરે છે. તેથી, 10 છાયાંકિત ભાગો મળીને અપૂર્ણાંકનું $\frac{10}{7}$ રજૂ કરે છે.

જ્યારે સમાન અપૂર્ણાંક એકમવાળા અપૂર્ણાંકોનો સરવાળો કરીએ, ત્યારે દરેક અપૂર્ણાંકમાંથી અપૂર્ણાંક એકમોની સંખ્યાનો સરવાળો કરો.



તેથી, $\frac{4}{7} + \frac{6}{7} = \frac{10}{7} = 1 + \frac{3}{7}$

$= 1\frac{3}{7}$



સંખ્યારેખાનો ઉપયોગ કરીને $\frac{4}{7} + \frac{6}{7}$ ઉમેરવાનો પ્રયાસ કરો. શું તમને સમાન જવાબ મળે છે?

અલગ અપૂર્ણાંક એકમો અથવા અસમાન (different) છેદવાળા અપૂર્ણાંકોનો સરવાળો

ઉદાહરણ : $\frac{1}{4}$ અને $\frac{1}{3}$ નો સરવાળો શોધો.

અલગ અપૂર્ણાંક એકમોવાળા અપૂર્ણાંકો ઉમેરવા માટે, પહેલાં અપૂર્ણાંકોને સમાન (equal) છેદવાળા સમઅપૂર્ણાંકોમાં (equivalent fractions) રૂપાંતરિત કરો.

આ કિસ્સામાં, સામાન્ય છેદ $3 \times 4 = 12$ બનાવી શકાય છે. એટલે કે, આપણે અપૂર્ણાંક એકમ $\frac{1}{12}$ સાથે સમઅપૂર્ણાંકો શોધી શકીએ છીએ.

ચાલો, આપેલા દરેક અપૂર્ણાંક માટે સમઅપૂર્ણાંક લખીએ.

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \times 3}{4 \times 3} = \frac{3}{12}, \quad \frac{1}{3} = \frac{1 \times 4}{3 \times 4} = \frac{4}{12}$$

હવે, $\frac{3}{12}$ અને $\frac{4}{12}$ નો અપૂર્ણાંક એક સમાન છે, એટલે કે, $\frac{1}{12}$

તેથી, $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{7}{12}$

અપૂર્ણાંક ઉમેરવાની આ પદ્ધતિ (method), જે કોઈ પણ સંખ્યાના અપૂર્ણાંકો ઉમેરવા માટે કાર્ય કરે છે, તેનું સૌપ્રથમ વિગતવાર વર્ણન સામાન્ય રીતે બ્રહ્મગુપ્ત દ્વારા 628 CEમાં કરવામાં આવ્યું હતું! આપણે, આ પ્રકરણમાં પછીથી અપૂર્ણાંકોના વિકાસના ઇતિહાસનું વધુ વિગતવાર વર્ણન કરીશું. હાલ, આપણે અપૂર્ણાંકોના સરવાળા માટે બ્રહ્મગુપ્તની પદ્ધતિનાં પગલાંને સંક્ષિપ્ત રીતે રજૂ કરીએ છીએ.

બ્રહ્મગુપ્તની અપૂર્ણાંકોના સરવાળાની પદ્ધતિ

1. બધા અપૂર્ણાંકો માટે અપૂર્ણાંક એકમ સમાન (common) હોય તેવા સમઅપૂર્ણાંકો શોધો. આ છેદના સામાન્ય અવયવી (multiple) (દા.ત., છેદના ગુણાકાર, અથવા છેદનો સૌથી નાનો સામાન્ય અવયવી) શોધીને કરી શકાય છે.
2. આ સમાન અપૂર્ણાંક એકમોવાળા અપૂર્ણાંકોને ઉમેરો. અંશનો સરવાળો કરી અને છેદને સમાન રાખીને આ કરી શકાય છે.
3. પરિણામને સંક્ષિપ્ત (simplest) સ્વરૂપમાં વ્યક્ત કરો.

ચાલો, બ્રહ્મગુપ્તની પદ્ધતિનું બીજું ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ : $\frac{2}{3}$ અને $\frac{1}{5}$ નો સરવાળો શોધો.

આપેલા અપૂર્ણાંકોના છેદ 3 અને 5 છે. 3 અને 5નો લઘુત્તમ સામાન્ય અવયવી (Least Common Multiple – LCM) 15 છે. પછી, આપણે જોઈએ છીએ કે :

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 5}{3 \times 5} = \frac{10}{15}, \quad \frac{1}{5} = \frac{1 \times 3}{5 \times 3} = \frac{3}{15}$$

તેથી, $\frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{10}{15} + \frac{3}{15} = \frac{13}{15}$

ઉદાહરણ : $\frac{1}{6}$ અને $\frac{1}{3}$ નો સરવાળો શોધો.

6 અને 3નો સૌથી નાનો સામાન્ય અવયવી 6 છે.

$\frac{1}{6}$ એ $\frac{1}{6}$ જ રહેશે.

$\frac{1}{3} = \frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{2}{6}$

આથી, $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6}$

હવે, $\frac{3}{6}$ અપૂર્ણાંકને જો જરૂરી હોય તો અતિસંક્ષિપ્ત સ્વરૂપમાં ફરીથી રજૂ કરી શકાય છે. આ અંશ અને છેદ બંનેને 3 વડે ભાગીને કરી શકાય છે. (3 અને 6નો સૌથી મોટો સામાન્ય અવયવ 3 છે.)

$\frac{3}{6} = \frac{3 \div 3}{6 \div 3} = \frac{1}{2}$

આથી, $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

વિચારો અને શોધો

1. બ્રહ્મગુપ્તની પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરીને નીચેના અપૂર્ણાંકોનો સરવાળો કરો :

   a. $\frac{2}{7} + \frac{5}{7} + \frac{6}{7}$ b. $\frac{3}{4} + \frac{1}{3}$ c. $\frac{2}{3} + \frac{5}{6}$ d. $\frac{2}{3} + \frac{2}{7}$ e. $\frac{3}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$

   f. $\frac{2}{3} + \frac{4}{5}$ g. $\frac{4}{5} + \frac{2}{3}$ h. $\frac{3}{5} + \frac{5}{8}$ i. $\frac{9}{2} + \frac{5}{4}$ j. $\frac{8}{3} + \frac{2}{7}$

   k. $\frac{3}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$ l. $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{3}{7}$ m. $\frac{9}{2} + \frac{5}{4} + \frac{7}{6}$

2. રહીમ $\frac{2}{3}$ લિટર પીળા રંગને $\frac{3}{4}$ લિટર વાદળી રંગ સાથે ભેળવીને લીલો રંગ બનાવે છે. તેણે બનાવેલા લીલા રંગનું કદ (volume) કેટલું છે?

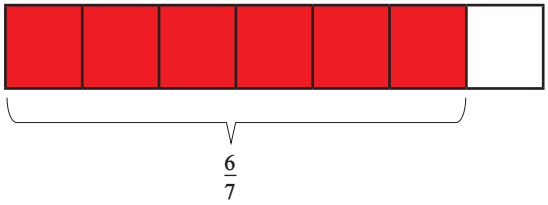
3. ગીતાએ $\frac{2}{5}$ મીટર ઝૂલ ખરીદી અને શમીમે તે જ ઝૂલ $\frac{3}{4}$ મીટર ખરીદી, જેથી ટેબલક્લૉથને સંપૂર્ણ કિનારી (border) લગાવી શકાય, જેની પરિમિતિ 1 મીટર છે. બંનેએ ખરીદેલી ઝૂલની લંબાઈ શોધો. શું ઝૂલ ટેબલક્લોથની સંપૂર્ણ કિનારીને આવરી લેવા માટે પૂરતી હશે?

સમાન અપૂર્ણાંક એકમ અથવા સમછેદવાળા અપૂર્ણાંકોની બાદબાકી

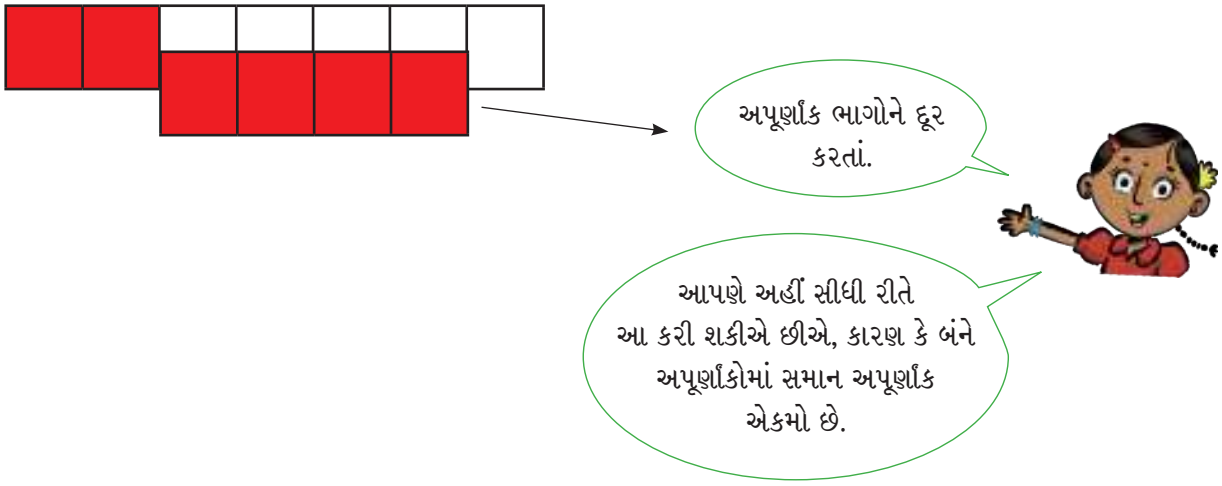
બ્રહ્મગુપ્તની પદ્ધતિ અપૂર્ણાંકોની બાદબાકી કરતી વખતે પણ લાગુ પડે છે!

ચાલો, આપણે $\frac{6}{7}$ માંથી $\frac{4}{7}$ બાદ કરવાની સમસ્યાથી શરૂઆત કરીએ. એટલે કે, $\frac{6}{7} - \frac{4}{7}$ નો ઉકેલ શું મળશે?

આ સમસ્યાને ઉકેલવા માટે, આપણે ફરીથી લંબચોરસ પટ્ટીઓનો ઉપયોગ કરી શકીએ છીએ. બંને અપૂર્ણાંકોમાં, અપૂર્ણાંક એકમ સમાન છે. એટલે કે, $\frac{1}{7}$. ચાલો, પહેલાં મોટા અપૂર્ણાંકને લંબચોરસ પટ્ટીનો ઉપયોગ કરીને નીચે પ્રમાણે રજૂ કરીએ :



દરેક છાયાંકિત ભાગ $\frac{1}{7}$ રજૂ કરે છે. હવે, આપણે $\frac{4}{7}$ બાદ કરવાની જરૂર છે. આ કરવા માટે, ચાલો આપણે છાયાંકિત ભાગોમાંથી 4ને દૂર કરીએ :



તો, આપણી પાસે 2 છાયાંકિત ભાગો બાકી રહે છે. એટલે કે, $\frac{6}{7} - \frac{4}{7} = \frac{2}{7}$

આ જ અભ્યાસ સંખ્યારેખા (number line)નો ઉપયોગ કરીને કરવાનો પ્રયત્ન કરો.

વિચારો અને શોધો

1. $\frac{5}{8} - \frac{3}{8}$ 2. $\frac{7}{9} - \frac{5}{9}$ 3. $\frac{10}{27} - \frac{1}{27}$

અલગ અપૂર્ણાંક એકમો અથવા વિષમ (different) છેદવાળા અપૂર્ણાંકોની બાદબાકી (subtraction)

ઉદાહરણ : $\frac{3}{4} - \frac{2}{3}$ શું થશે?

આપણે અપૂર્ણાંક એકમો સમાન હોય તેવા અપૂર્ણાંકોની બાદબાકી કરવાની પ્રક્રિયા પહેલેથી જ જાણીએ છીએ. ચાલો, આપણે આપેલ દરેક અપૂર્ણાંકને સમાન અપૂર્ણાંક એકમોવાળા સમઅપૂર્ણાંકોમાં રૂપાંતરિત કરીએ.

$$\frac{3}{4} = \frac{(3 \times 3)}{(4 \times 3)} = \frac{9}{12}$$

હા! આમ કરવાથી આપણે બે અપૂર્ણાંકોને સરળતાથી બાદ કરી શકીએ છીએ.

વિચારો! આપણે અંશ અને છેદ બંનેને 3 વડે ગુણવાનું કેમ પસંદ કર્યું?

અને તે જ રીતે,

$$\frac{2}{3} = \frac{(2 \times 4)}{(3 \times 4)} = \frac{8}{12}$$

ફરીથી! આપણે અહીં અંશ અને છેદ બંનેને 4 વડે ગુણવાનું કેમ પસંદ કર્યું?

તેથી, $\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{9}{12} - \frac{8}{12} = \frac{1}{12}$

બ્રહ્મગુપ્તની બે અપૂર્ણાંકોને બાદ કરવાની પદ્ધતિ —

1. આપેલા અપૂર્ણાંકોને સમાન અપૂર્ણાંક એકમ, એટલે કે સમાન છેદવાળા સમઅપૂર્ણાંકોમાં રૂપાંતરિત કરો.
2. સમાન અપૂર્ણાંક એકમોવાળા અપૂર્ણાંકોની બાદબાકી કરો. આ અંશને બાદ કરીને અને છેદને સમાન રાખીને કરી શકાય છે.
3. જો જરૂરી હોય તો પરિણામને અતિસંક્ષિપ્ત સ્વરૂપમાં ફેરવીને સરળ બનાવો.

વિચારો અને શોધો

1. બ્રહ્મગુપ્તની પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરીને નીચેની બાદબાકી કરો :

   a. $\frac{8}{15} - \frac{3}{15}$ b. $\frac{2}{5} - \frac{4}{15}$ c. $\frac{5}{6} - \frac{4}{9}$ d. $\frac{2}{3} - \frac{1}{2}$

2. દર્શાવ્યા મુજબ બાદબાકી કરો :

   a. $\frac{10}{3}$ માંથી $\frac{13}{4}$ b. $\frac{23}{3}$ માંથી $\frac{18}{5}$ c. $\frac{45}{7}$ માંથી $\frac{29}{7}$

3. નીચેની સમસ્યાઓ ઉકેલો :

   a. જયાની શાળા તેના ઘરથી $\frac{7}{10}$ કિમી દૂર છે. તે દરરોજ તેના ઘરથી $\frac{1}{2}$ કિમી માટે રિક્ષા લે છે અને પછી શાળાએ પહોંચવા માટે બાકીનું અંતર ચાલે છે. શાળાએ પહોંચવા માટે તે દરરોજ કેટલું ચાલે છે?

   b. જીવિકાને બગીચાનો એક સંપૂર્ણ ચક્કર લગાવવા માટે $\frac{10}{3}$ મિનિટ લાગે છે અને તેના મિત્ર નમિતને તે જ કાર્ય કરવા માટે $\frac{13}{4}$ મિનિટ લાગે છે. કોણ ઓછો સમય લે છે અને કેટલો?

7.9 ઇતિહાસનો એક નાનકડો ભાગ (A Pinch of History)

શું તમે જાણો છો કે પ્રાચીન (ancient) ભારતમાં અપૂર્ણાંકને શું કહેવામાં આવતું હતું? તેને સંસ્કૃતમાં 'ભિન્ન' કહેવામાં આવતું હતું, જેનો અર્થ 'તૂટેલું' થાય છે. તેને 'ભાગ' અથવા 'અંશ' પણ કહેવામાં આવતું હતું, જેનો અર્થ 'વિભાગ' અથવા 'ટુકડો' થાય છે.

આપણે આજે અપૂર્ણાંકો જે રીતે લખીએ છીએ, વૈશ્વિક સ્તરે તેનો ઉદ્‌ભવ ભારતમાં થયો હતો. પ્રાચીન ભારતીય ગણિતીય ગ્રંથોમાં; જેમ કે, બક્ષાલિ હસ્તપ્રત (લગભગ 300 CEથી), જ્યારે તેઓ $\frac{1}{2}$ લખવા માંગતા હતા ત્યારે તેઓ તેને $\frac{1}{2}$ તરીકે લખતા હતા, જે ખરેખર આપણે આજે જે રીતે લખીએ છીએ તેના જેવું જ છે! અપૂર્ણાંકોને લખવાની અને તેની સાથે કામ કરવાની આ પદ્ધતિ ભારતમાં ત્યારબાદ ઘણી સદીઓ સુધી ઉપયોગમાં લેવાતી રહી, જેમાં આર્યભટ્ટ (499 CE), બ્રહ્મગુપ્ત (628 CE), શ્રીધરાચાર્ય (લગભગ 750 CE), મહાવીરાચાર્ય (લગભગ 850 CE) અને અન્યોનો સમાવેશ થાય છે.

ત્યારબાદ, મોરોક્કન ગણિતશાસ્ત્રી અલ-હસાર (12મી સદીમાં) દ્વારા '$\frac{1}{2}$' અને અન્ય અપૂર્ણાંકોમાં અંશ અને છેદ વચ્ચેની લીટી રજૂ કરવામાં આવી હતી. તે પછીની કેટલીક સદીઓમાં આ પદ્ધતિ યુરોપ અને વિશ્વભરમાં ફેલાઈ ગઈ.

અપૂર્ણાંકોનો ઉપયોગ પ્રાચીન ઇજિપ્તીયન અને બેબીલોનીયન સભ્યતાઓ જેવી અન્ય સંસ્કૃતિઓમાં પણ થતો હતો. પરંતુ તેઓ મુખ્યત્વે ફક્ત અપૂર્ણાંક એકમોનો ઉપયોગ કરતા હતા. એટલે કે, અંશમાં 1 ધરાવતા અપૂર્ણાંકો. વધુ સામાન્ય અપૂર્ણાંકોને અપૂર્ણાંક એકમોના સરવાળા તરીકે વ્યક્ત કરવામાં આવતા હતા, જેને હવે 'ઇજિપ્તીયન અપૂર્ણાંકો' કહેવામાં આવે છે.

સંખ્યાઓને અપૂર્ણાંક એકમોના સરવાળા તરીકે લખવી, દા.ત. $\frac{19}{24} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}$, તે એક કલા હોઈ શકે છે અને તે એક સુંદર કોયડાઓ તરફ દોરી જાય છે. આપણે નીચે પ્રમાણેના આવા જ એક કોયડાને ધ્યાનમાં લઈશું.

સામાન્ય અપૂર્ણાંકો (જ્યાં અંશ જરૂરી નથી કે 1 હોય) સૌપ્રથમ ભારતમાં રજૂ કરવામાં આવ્યા હતા. તેની સાથે સરવાળા, બાદબાકી, ગુણાકાર અને ભાગાકાર જેવી અંકગણિતીય ક્રિયાઓના નિયમો પણ હતા. 'શુલ્બ સૂત્રો' નામનો પ્રાચીન ભારતીય ગ્રંથ દર્શાવે છે કે વૈદિક સમયમાં પણ ભારતીયોએ અપૂર્ણાંકો સાથેની ક્રિયાઓના નિયમો શોધી કાઢ્યા હતા. અપૂર્ણાંકો સાથે કામ કરવા અને ગણતરી કરવા માટેના સામાન્ય નિયમો અને પ્રક્રિયાઓ સૌપ્રથમ બ્રહ્મગુપ્ત દ્વારા ઔપચારિક રીતે અને આધુનિક સ્વરૂપમાં સંકલિત કરવામાં આવી હતી.

બ્રહ્મગુપ્તની અપૂર્ણાંકો સાથે કામ કરવાની અને ગણતરી કરવાની પદ્ધતિઓનો આજે પણ આપણે ઉપયોગ કરીએ છીએ. ઉદાહરણ તરીકે, બ્રહ્મગુપ્તે અપૂર્ણાંકોનો સરવાળો અને બાદબાકી કેવી રીતે કરવાં તે નીચે મુજબ વર્ણવ્યું છે :

"દરેક અપૂર્ણાંકના અંશ અને છેદનો અન્ય છેદ વડે ગુણાકાર કરવાથી, અપૂર્ણાંકોને સામાન્ય છેદમાં રૂપાંતરિત કરવામાં આવે છે. પછી, સરવાળાની પ્રક્રિયામાં અંશનો સરવાળો કરવામાં આવે છે. બાદબાકીના કિસ્સામાં તેમનો તફાવત લેવામાં આવે છે." (બ્રહ્મગુપ્ત, બ્રહ્મસ્ફુટસિદ્ધાંત, શ્લોક 12.2, 628 CE)

અપૂર્ણાંકોને લગતા ભારતીય ખ્યાલો અને પદ્ધતિઓ તે પછીની કેટલીક સદીઓમાં આરબો દ્વારા યુરોપમાં પ્રસારિત થયાં અને લગભગ 17મી સદીમાં યુરોપમાં તેનો સામાન્ય ઉપયોગ શરૂ થયો અને પછી વિશ્વભરમાં ફેલાઈ ગયો.

કોયડો (Puzzle) !

તમે સમાન અપૂર્ણાંક એકમનો ઉપયોગ કરો, તો અપૂર્ણાંક એકમોનો સરવાળો 1 મેળવવો સરળ છે. ઉદાહરણ તરીકે :

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$, $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$, વગેરે.

જોકે, શું તમે એવી કોઈ રીત વિચારી શકો છો કે, જેમાં બધા જ અલગ અપૂર્ણાંક એકમોનો સરવાળો કરીને 1 મળે?

બે અલગ અપૂર્ણાંક એકમોનો સરવાળો કરીને 1 મેળવવો શક્ય નથી. કારણ કે $\frac{1}{2}$ એ સૌથી મોટો અપૂર્ણાંક એકમ છે, અને $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. અલગ અપૂર્ણાંક એકમો મેળવવા માટે આપણે ઓછામાં ઓછા એક $\frac{1}{2}$ ને કેટલાક નાના અપૂર્ણાંક એકમમાં બદલવો પડશે - પરંતુ પછી સરવાળો 1 કરતાં ઓછો થશે! તેથી, બે અલગ અલગ અપૂર્ણાંક એકમોનો સરવાળો 1 મેળવવો શક્ય નથી.

તેના બદલે, આપણે 1ને ત્રણ અલગ અલગ અપૂર્ણાંક એકમોના સરવાળા તરીકે લખવાની રીત શોધી શકીએ છીએ.

પ્રયત્ન કરો

1. શું તમે ત્રણ અલગ અપૂર્ણાંક એકમો શોધી શકો છો જેનો સરવાળો 1 થાય?

   આ સમસ્યાનો ફક્ત એક જ ઉકેલ છે. (3 અપૂર્ણાંકોનો ક્રમ બદલ્યા સિવાય) શું તમે તેને શોધી શકો છો? આગળ વાંચતાં પહેલાં તેને શોધવાનો પ્રયાસ કરો.

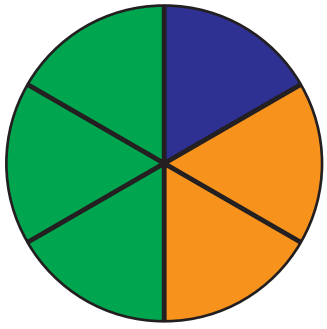
   અહીં ઉકેલ શોધવા માટેની એક વ્યવસ્થિત રીત છે. આપણે જાણીએ છીએ કે $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$. અપૂર્ણાંક એકમોને અલગ બનાવવા માટે, આપણે ઓછામાં ઓછા એક $\frac{1}{3}$ ને વધારવો પડશે, અને તે વધારાને ભરપાઈ કરવા માટે અન્ય $\frac{1}{3}$ ને ઘટાડવો પડશે. $\frac{1}{3}$ ને બીજા અપૂર્ણાંક એકમમાં વધારવાનો એકમાત્ર રસ્તો તેને $\frac{1}{2}$ થી બદલવાનો છે. તેથી $\frac{1}{2}$ એ અપૂર્ણાંક એકમોમાંનો એક હોવો જોઈએ.

   હવે, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$. અપૂર્ણાંક એકમોને અલગ બનાવવા માટે આપણે $\frac{1}{4}$ ને એક વખત ઉમેરવું પડશે અને તે વધારાને ભરપાઈ કરવા માટે બીજા $\frac{1}{4}$ ને ઘટાડવો પડશે.

હવે $\frac{1}{4}$ ને બીજા અપૂર્ણાંક એકમમાં ઉમેરવાનો એકમાત્ર રસ્તો, જે $\frac{1}{2}$ થી અલગ હોય તે તેને $\frac{1}{3}$ થી બદલવાનો છે.

તો બે અપૂર્ણાંકો $\frac{1}{2}$ અને $\frac{1}{3}$ હોવા જોઈએ! તો ત્રીજો અપૂર્ણાંક કયો હોવો જોઈએ, જેથી ત્રણેય અપૂર્ણાંકોનો સરવાળો 1 થાય?

આ સમજાવે છે કે, શા માટે ઉપરોક્ત સમસ્યાનો ફક્ત એક જ ઉકેલ છે.



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$$

જો આપણે ચાર અલગ અલગ અપૂર્ણાંક એકમો શોધીએ જેનો સરવાળો 1 થાય તો શું?

પ્રયત્ન કરો

2. શું તમે ચાર અલગ અલગ અપૂર્ણાંક એકમો શોધી શકો છો જેનો સરવાળો 1 થાય?

   આ સમસ્યાના છ ઉકેલો છે! શું તમે તેમાંથી ઓછામાં ઓછો એક શોધી શકો છો? શું તમે તે બધા શોધી શકો છો? તમે બે અને ત્રણ અપૂર્ણાંક એકમોના કિસ્સાઓમાં સમાન તર્કનો ઉપયોગ કરવાનો પ્રયાસ કરી શકો છો — અથવા તમારી પોતાની પદ્ધતિ શોધી શકો છો!

સારાંશ

- **સમાન ભાગ (share) તરીકે અપૂર્ણાંક :** જ્યારે કોઈ આખા એકમોની સંખ્યાને સમાન ભાગોમાં વિભાજિત કરવામાં આવે અને સમાન રીતે વહેંચવામાં આવે ત્યારે અપૂર્ણાંક બને છે.
- **અપૂર્ણાંક એકમો :** જ્યારે એક સંપૂર્ણ મૂળભૂત એકમને સમાન ભાગોમાં વિભાજિત કરવામાં આવે, ત્યારે દરેક ભાગને અપૂર્ણાંક એકમ કહેવાય છે.
- **અપૂર્ણાંક વાંચન :** $\frac{5}{6}$ જેવા અપૂર્ણાંકમાં, 5ને અંશ (numerator) અને 6ને છેદ (denominator) કહેવાય છે.
- **મિશ્ર અપૂર્ણાંક (Mixed fractions) :** મિશ્ર અપૂર્ણાંકમાં પૂર્ણાંક ભાગ અને અપૂર્ણાંક ભાગ બંને હોય છે.
- **સંખ્યારેખા (Number line) :** અપૂર્ણાંકોને સંખ્યારેખા પર દર્શાવી શકાય છે. દરેક અપૂર્ણાંક માટે સંખ્યારેખા પર એક ચોક્કસ બિંદુ હોય છે.
- **સમઅપૂર્ણાંકો (Equivalent fractions) :** જ્યારે બે અથવા વધુ અપૂર્ણાંકો સમાન હિસ્સો અથવા સંખ્યા દર્શાવે છે ત્યારે તેમને સમઅપૂર્ણાંકો કહેવાય છે.
- **સંક્ષિપ્ત સ્વરૂપ (Lowest terms) :** જે અપૂર્ણાંકના અંશ અને છેદમાં 1 સિવાય કોઈ સામાન્ય અવયવ ન હોય, તેને સંક્ષિપ્ત સ્વરૂપમાં અથવા તેના સૌથી સરળ સ્વરૂપમાં કહેવાય છે.
- **બ્રહ્મગુપ્તની અપૂર્ણાંકોના સરવાળાની પદ્ધતિ :** અપૂર્ણાંકો ઉમેરતી વખતે, તેમને સમાન અપૂર્ણાંક એકમ (એટલે કે, સમાન છેદ)વાળા સમઅપૂર્ણાંકોમાં રૂપાંતરિત કરો અને પછી સરવાળો મેળવવા માટે દરેક અપૂર્ણાંકમાં અપૂર્ણાંક એકમોની સંખ્યા ઉમેરો. આ અંશનો સરવાળો કરીને અને છેદને સમાન રાખવાથી સરવાળો પૂર્ણ થાય છે.
- **બ્રહ્મગુપ્તની અપૂર્ણાંકો બાદ કરવાની પદ્ધતિ :** અપૂર્ણાંકો બાદ કરતી વખતે, તેમને સમાન અપૂર્ણાંક એકમ (એટલે કે, સમાન છેદ)વાળા સમઅપૂર્ણાંકોમાં રૂપાંતરિત કરો અને પછી અપૂર્ણાંક એકમોની સંખ્યા બાદ કરો. આ અંશને બાદ કરીને અને છેદને સમાન રાખવાથી બાદબાકી પૂર્ણ થાય છે.