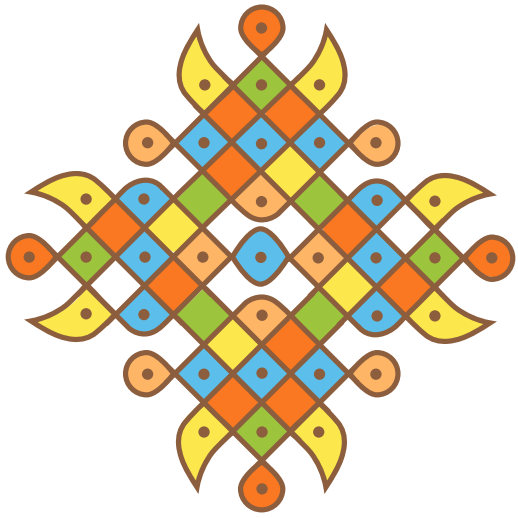
9 સંમિતિ



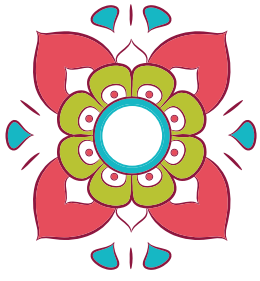
તમારી આસપાસ જુઓ, તમને ઘણી એવી વસ્તુઓ મળી શકે છે જે તમારું ધ્યાન ખેંચે. તેમાંથી કેટલીક વસ્તુઓ નીચે દર્શાવવામાં આવી છે.



ફૂલ



પતંગિયું



રંગોળી



ફરકડી (Pinwheel)

ઉપર આપેલાં ચિત્રોમાં કંઈક સુંદરતા દેખાય છે.

ફૂલ દરેક બાજુએથી સરખું દેખાય છે. પતંગિયા વિશે શું કહેશો? કોઈ શંકા નથી કે તેના રંગો ખૂબ આકર્ષક છે.

પરંતુ પતંગિયા વિશે બીજું શું તમને આકર્ષે છે?

આ ચિત્રોમાં, એવું લાગે છે કે આકૃતિના કેટલાક ભાગ પુનરાવર્તિત (repeated) થાય છે અને આ પુનરાવર્તન (repetition) ચોક્કસ પૅટર્નમાં થતું હોય તેવું લાગે છે. શું તમે જોઈ શકો છો કે સુંદર રંગોળીની આકૃતિમાં શું પુનરાવર્તિત થાય છે?

રંગોળીમાં રહેલા ફૂલને જ્યારે તેના કેન્દ્ર(centre)ની આસપાસ 90° ફેરવવામાં (rotate) આવે છે, ત્યારે લાલ પાંખડીઓ પાછી પોતાની જગ્યાએ આવે છે અને રંગોળીના અન્ય ભાગમાં પણ એમ જ થાય છે.

ફરકડીનું શું? શું તમે કહી શકો છો કે કઈ પૅટર્નનું પુનરાવર્તન થઈ રહ્યું છે?

સૂચન : પહેલાં ષટ્કોણ (hexagon) જુઓ.

હવે, શું તમે કહી શકો છો કે ષટ્કોણની દરેક બાજુએ કઈ આકૃતિનું પુનરાવર્તન થાય છે? દરેક બાજુએ જોડાયેલી આકૃતિનો આકાર કેવો છે? શું તમે તેને ઓળખી શકો છો? જ્યારે તમે ષટ્કોણની સીમારેખા (boundary) પર આગળ વધો છો, ત્યારે આ આકારો કેવી રીતે ફરે છે?



વાદળો

બીજાં ચિત્રો વિશે શું — તમને તે રચનાઓમાં શું આકર્ષક લાગે છે અને તે રચનાઓમાં કઈ પૅટર્નનું પુનરાવર્તન થાય છે?

બીજી બાજુ, વાદળોના આ ચિત્રને જુઓ. તેમાં આવી કોઈ પુનરાવર્તિત પૅટર્ન નથી.

આપણે કહી શકીએ કે પ્રથમ ચાર આકૃતિઓ સંમિતિય (symmetrical) છે અને છેલ્લી આકૃતિ સંમિતિય નથી. સંમિતિ (symmetry) એ આકૃતિના એવા એક અથવા વધુ ભાગનો સંદર્ભ આપે છે, જે કોઈ ચોક્કસ પૅટર્નમાં પુનરાવર્તિત થાય છે.



તાજમહેલ

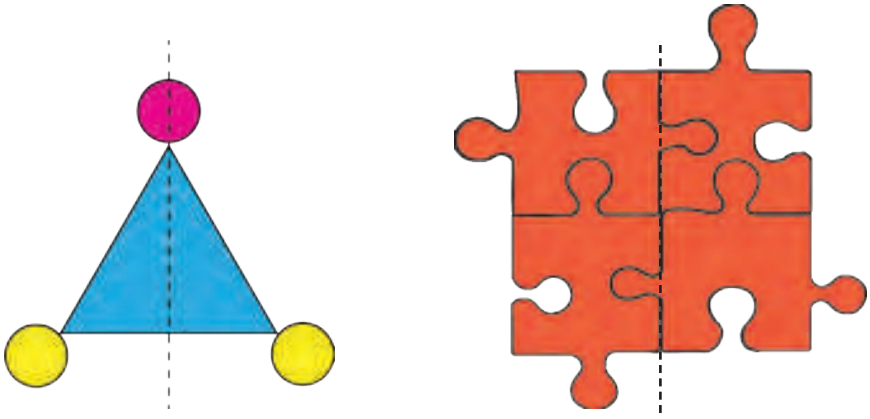


ગોપુરમ

તમને આ સુંદર રચનાઓમાં કઈ સંમિતિઓ જોવા મળે છે?

9.1 સંમિતિની રેખા (Line of Symmetry)

આકૃતિ (a)માં એક વાદળી ત્રિકોણ (triangle)નું ચિત્ર છે, જેમાં એક તૂટક રેખા (dotted line) છે. જો તમે ત્રિકોણને તૂટક રેખા પરથી વાળો તો શું થશે? હા, ત્રિકોણનો એક અડધો (half) ભાગ બીજા અડધા ભાગને સંપૂર્ણપણે ઢાંકી દે છે. આને દર્પણ પ્રતિબિંબ કહેવાય છે!



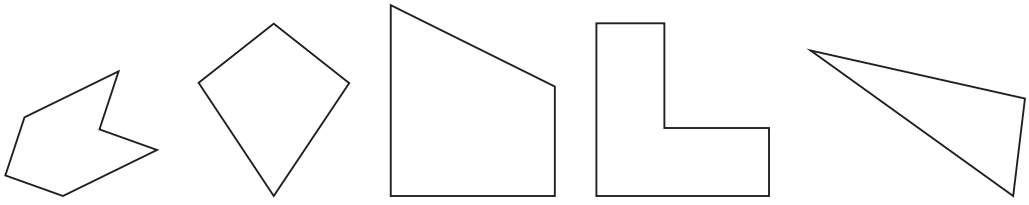
(a) (b)

કોયડાના ચાર ટુકડા અને વચ્ચેથી પસાર થતી તૂટક રેખા સાથેની આકૃતિ (b) વિશે શું કહેશો? શું તે દર્પણ પ્રતિબિંબ છે? ના, જ્યારે આપણે રેખા પરથી વાળીશું, ત્યારે ડાબો અડધો ભાગ, જમણા અડધા ભાગ પર સંપૂર્ણપણે બંધબેસતો નથી.

એક રેખા જે કોઈ આકૃતિને બે ભાગમાં એવી રીતે વહેંચે છે કે જ્યારે તે રેખા પરથી તેને વાળવામાં આવે, ત્યારે તે બંને ભાગો એકબીજા પર સંપૂર્ણપણે બંધબેસતા (overlap) આવે, આ રેખાને આકૃતિની સંમિતિની રેખા (line of symmetry) કહેવાય છે.

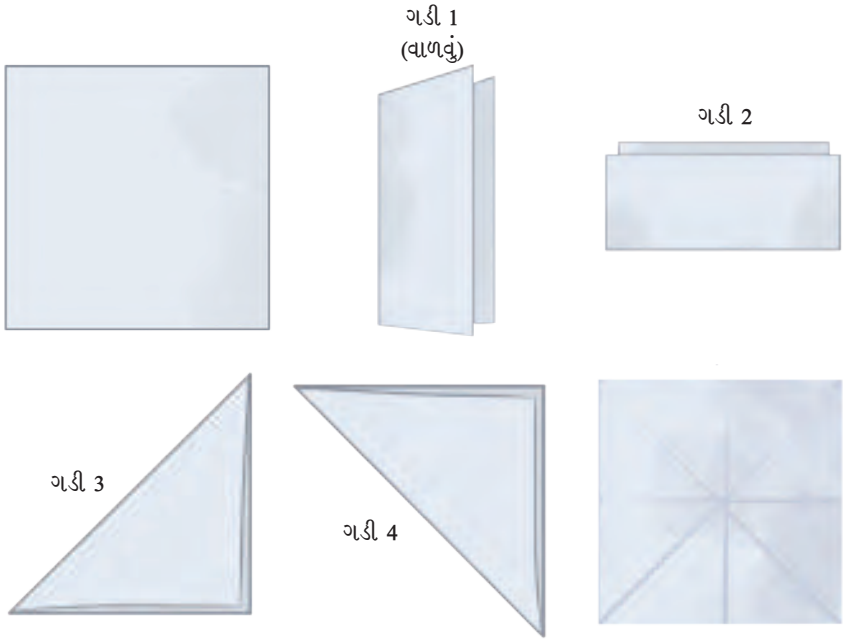
વિચારો અને શોધો

1. શું તમને પ્રકરણની શરૂઆતમાં આપેલી આકૃતિઓમાં કોઈ સંમિતિની રેખા દેખાય છે? વાદળના ચિત્ર વિશે શું કહેશો?
2. નીચેની દરેક આકૃતિઓ માટે, જો તેમાં સંમિતિની રેખાઓ હોય તો તે ઓળખો.



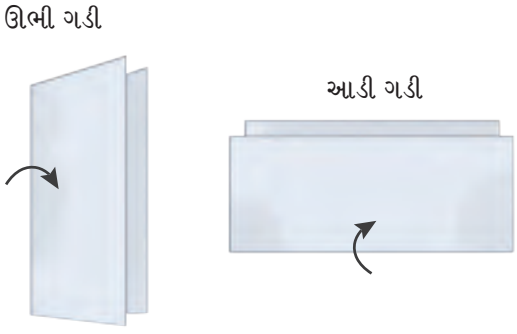
એક કરતાં વધુ સંમિતિની રેખાઓ ધરાવતી આકૃતિઓ

શું ચોરસ(square)ને માત્ર એક જ સંમિતિની રેખા હોય છે?
કાગળનો ચોરસ ટુકડો લો. તેને વાળવાથી મળતી બધી સંમિતિની રેખાઓ શોધો.



અહીં વિવિધ ગડીઓ છે, જે સંમિતિની અલગ અલગ રેખાઓ આપે છે.

- કાગળને ઊભો (vertically) અડધો વાળો.
- તેને ફરીથી આડો (horizontally) અડધો વાળો. (એટલે કે, તમે તેને બે વાર વાળ્યો છે) હવે ગડીઓ ખોલો.

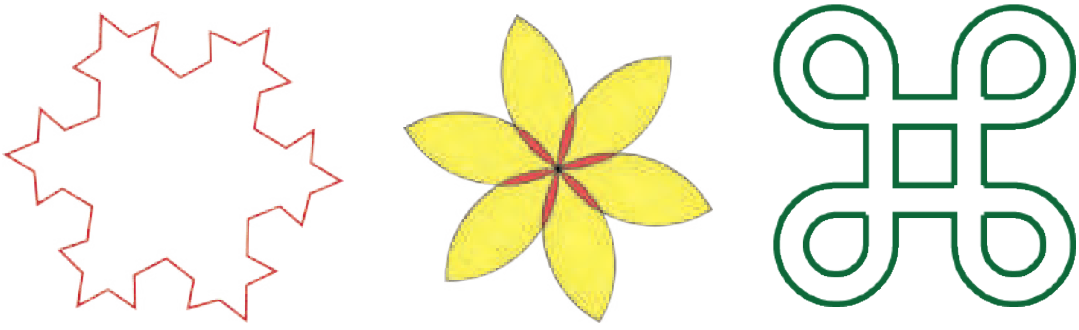


ચોરસને ફરીથી અડધો વાળો (હવે ત્રીજી વાર), પણ આ વખતે તેને આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે વિકર્ણ (diagonal) પરથી વાળો. તેને ફરીથી ખોલો.

તેને અડધો વાળો (ચોથી વાર), પરંતુ આ વખતે આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે બીજા વિકર્ણ પરથી વાળો. ગડી ખોલો.

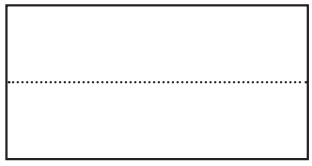
- શું ચોરસને વાળવાની કોઈ બીજી રીત છે, જેથી બંને અડધા ભાગ એકબીજા પર બંધ બેસી જાય? ચોરસમાં સંમિતિની કેટલી રેખાઓ હોય છે?

આમ, આકૃતિઓમાં સંમિતિની એક કરતાં વધુ રેખાઓ હોઈ શકે છે. નીચેની આકૃતિઓમાં પણ સંમિતિની એક કરતાં વધુ રેખાઓ છે. શું તમે તે બધી શોધી શકો છો?



- આપણે જોયું કે ચોરસનો વિકર્ણ પણ સંમિતિની રેખા છે.

ચાલો, આપણે એક લંબચોરસ (rectangle) લઈએ જે ચોરસ નથી. શું તેનો વિકર્ણ સંમિતિની રેખા છે?



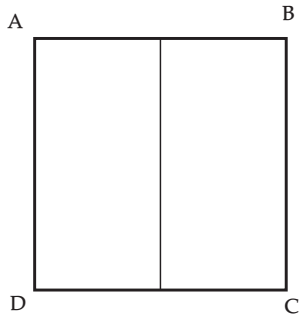
પહેલાં લંબચોરસ જુઓ અને આ પ્રશ્નનો જવાબ આપો. પછી કાગળનો લંબચોરસ ટુકડો લો અને તેના વિકર્ણ પરથી વાળીને ચકાસો કે બંને ભાગ એકબીજા પર બંધ બેસે છે કે નહીં. તમે શું અવલોકન કરો છો?

પ્રતિબિંબ (Reflection)

અત્યાર સુધી આપણે જોયું કે જ્યારે આપણે કોઈ આકૃતિને સંમિતિની રેખા પરથી વાળીએ, ત્યારે તેના બંને ભાગો સંપૂર્ણપણે એકબીજા પર બંધ બેસે છે. આપણે એમ પણ કહી શકીએ કે સંમિતિની રેખાની એક બાજુનો ભાગ રેખા દ્વારા બીજી બાજુએ પ્રતિબિંબિત (reflect) થાય છે; તેવી જ રીતે, સંમિતિની રેખાની બીજી બાજુનો ભાગ પ્રથમ બાજુએ પ્રતિબિંબિત થાય છે! ચાલો આપણે આકૃતિ પરનાં કેટલાંક બિંદુઓને ચિહ્નિત કરીને આ સમજીએ.

આકૃતિમાં એક ચોરસ દર્શાવવામાં આવ્યો છે, જેના ખૂણાઓને A, B, C અને D નામ આપવામાં આવ્યાં છે. ચાલો, આપણે પહેલાં ઊભી સંમિતિની રેખાને ધ્યાનમાં લઈએ.

જ્યારે આપણે ચોરસને આ રેખા પર પ્રતિબિંબિત કરીએ છીએ, ત્યારે જમણી બાજુનાં બિંદુઓ B, C ડાબી બાજુએ પ્રતિબિંબિત થાય છે અને તેઓ અનુક્રમે A, Dનું સ્થાન લે છે. બિંદુઓ A, Dનું શું થાય છે? બિંદુ A એ Bનું સ્થાન લે છે અને D એ Cનું સ્થાન લે છે.



જો આપણે Aથી C સુધીના વિકર્ણ પર પ્રતિબિંબિત કરીએ તો શું થશે? બિંદુઓ A, B, C અને D ક્યાં જશે? જો આપણે સમક્ષિતિજ (horizontal) સંમિતિની રેખા પર પ્રતિબિંબિત કરીએ તો શું થશે?

જે આકૃતિમાં સંમિતિની રેખા અથવા રેખાઓ હોય છે, તેને પ્રતિબિંબિત સંમિતિ (reflection symmetry) પણ કહેવાય છે.

સંમિતિની રેખાઓ ધરાવતા આકારો બનાવવા

અત્યાર સુધી આપણે સંમિતિય (symmetrical) આકૃતિઓ અને અસંમિતિય (asymmetrical) આકૃતિઓ જોઈ છે. આવી સંમિતિય આકૃતિઓ કેવી રીતે બનાવી શકાય? ચાલો આપણે તેનો અભ્યાસ કરીએ.

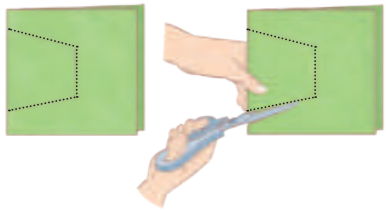
શાહીના ડાઘ (Ink Blot Devils)

તમે ધોરણ 5માં આ પ્રવૃત્તિ કરવાનો આનંદ માણ્યો હશે. કાગળનો એક ટુકડો લો. તેને અડધો વાળો. કાગળ ખોલો અને એક અડધા ભાગ પર શાહી (અથવા રંગ)નાં થોડાં ટીપાં નાખો. હવે અડધા ભાગોને એકસાથે દબાવો અને પછી કાગળને ફરીથી ખોલો.

- તમને શું દેખાય છે?
- શું પરિણામ સ્વરૂપ આકૃતિ સંમિતિય છે?
- જો હા, તો સંમિતિની રેખા ક્યાં છે?
- શું કોઈ બીજી રેખા છે જેના પરથી તેને વાળીને બે સરખા ભાગો બનાવી શકાય?
- આવી વધુ પૅટર્ન બનાવવાનો પ્રયત્ન કરો.

કાગળ વાળવો અને કાપવો (Paper Folding and Cutting)

સંમિતિય આકારો બનાવવાની આ બીજી રીત છે!



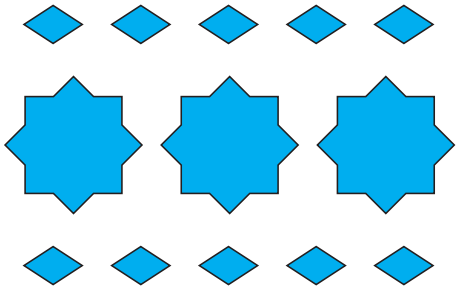
આ બંને આકૃતિઓમાં, કાગળને વાળવામાં આવે છે અને દર્શાવેલી તૂટક રેખા પર કાપવામાં આવ્યો છે. ખોલવામાં આવે ત્યારે કાગળ કેવો દેખાશે તેની રૂપરેખા (sketch) દોરો.

શું તમને આ આકૃતિમાં સંમિતિની રેખા દેખાય છે? તે કઈ છે?

કાગળને વાળીને અને કાપીને વિવિધ સંમિતિય આકારો બનાવો.

સંમિતિય આકારો મેળવવા માટે કાગળના ટુકડાને વાળવાની અને કાપવાની અન્ય રીતો છે!

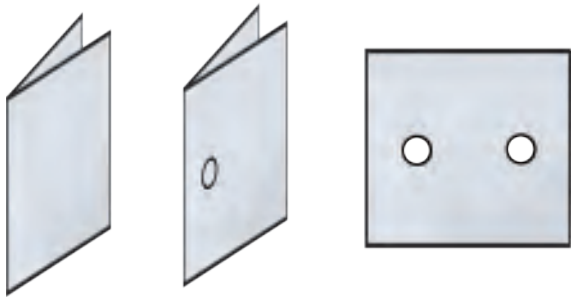
પાતળા લંબચોરસ રંગીન કાગળનો ઉપયોગ કરો. તેને ઘણી વખત વાળો અને કાગળને કાપીને અહીં બતાવ્યા પ્રમાણેની કેટલીક જટિલ પૅટર્ન બનાવો. પુનરાવર્તિત ભાતમાં સંમિતિની રેખાઓ ઓળખો. આવા કાગળના સુશોભિત કટ-આઉટનો ઉપયોગ તહેવારોના પ્રસંગો માટે કરો.



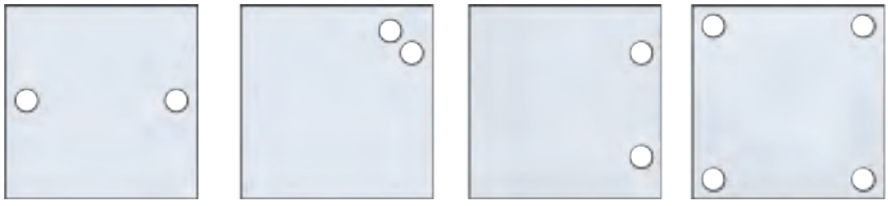
વિચારો અને શોધો

પંચિંગ રમત (Punching Game)

ગડી એ સંમિતિની રેખા છે. પંચિંગ મશીન(કાણાં પાડવાનું યંત્ર)નો ઉપયોગ કરીને કાગળની વાળેલી ચોરસ શીટ (sheet) પર વિવિધ સ્થળોએ છિદ્રો (hole) પાડો અને વિવિધ સંમિતિય પૅટર્ન બનાવો.

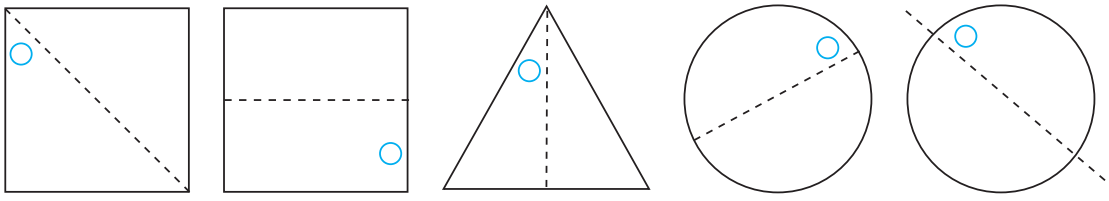


1. નીચેની દરેક આકૃતિમાં, કાગળની વાળેલી ચોરસ શીટમાં એક છિદ્ર પાડવામાં આવ્યું અને પછી કાગળને ખોલવામાં આવ્યો. કાગળ જે રેખા પરથી વાળવામાં આવ્યો, તે રેખાને ઓળખો. આકૃતિ (d) એક જ છિદ્ર પાડીને બનાવવામાં આવી. કાગળને કેવી રીતે વાળવામાં આવ્યો?



a. b. c. d.

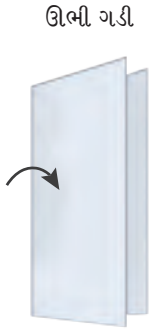
2. સંમિતિની આપેલી રેખા(ઓ) પરથી, અન્ય છિદ્ર કે છિદ્રો શોધો :



a. b. c. d. e.

3. અહીં કાગળ કાપવા સંબંધિત કેટલાક પ્રશ્નો છે. ઊભી ગડી (vertical fold) ધ્યાનમાં લો.

આપણે તેને આ રીતે રજૂ કરીએ છીએ :

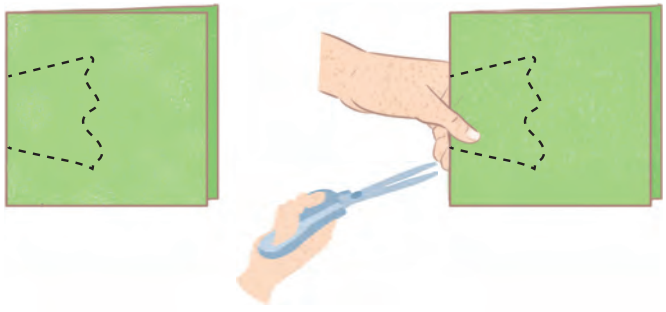


તેવી જ રીતે, આડી ગડી (horizontal fold) નીચે પ્રમાણે દર્શાવવામાં આવી છે :

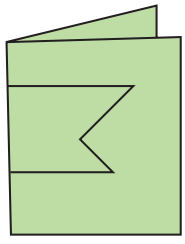


4. નીચે બતાવ્યા પ્રમાણે કાગળને કાપ્યા પછી જ્યારે ખોલવામાં આવે ત્યારે છિદ્રનો આકાર કેવો હશે તેનું અનુમાન કરો. તમારાં અનુમાન કર્યા પછી આકાર બનાવો અને તમારા જવાબની ચકાસણી કરો.

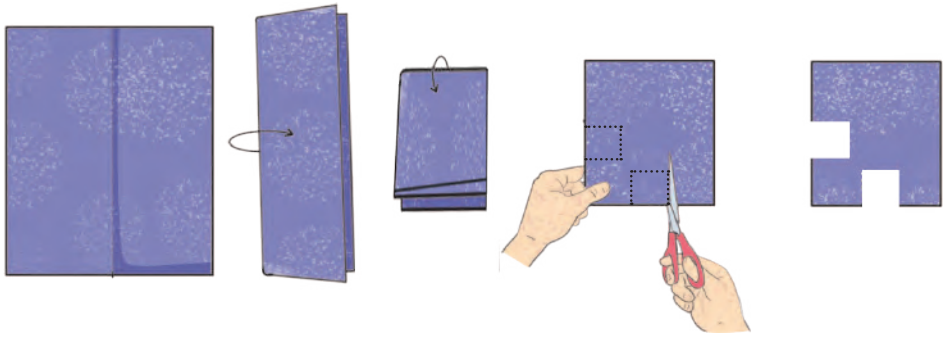
a.



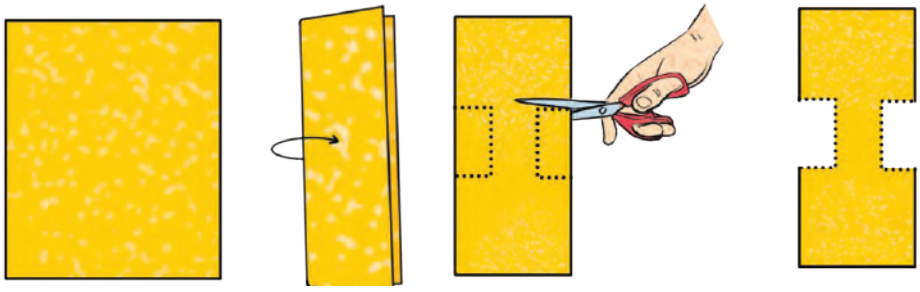
b.



c.



d.



5. ધારો કે, તમારે આ દરેક આકારોને થોડી ગડીઓ (folds) અને એક સીધા (straight) કાપથી મેળવવાના છે. તમે તે કેવી રીતે કરશો?

a. કેન્દ્રમાં એક ચોરસ છિદ્ર છે.



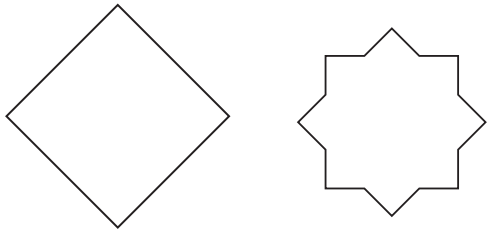
b. કેન્દ્રમાં એક ચોરસ છિદ્ર છે.



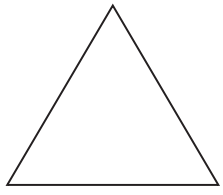
નોંધ : ઉપરોક્ત બે પ્રશ્નો માટે, ચકાસો કે કેન્દ્રમાં આવેલી 4 બાજુવાળી આકૃતિઓ ચોરસના બંને ગુણધર્મોને સંતોષે છે.

6. આ આકારોમાં સંમિતિની કેટલી રેખાઓ છે?

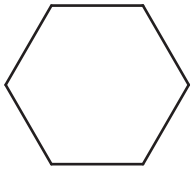
a.



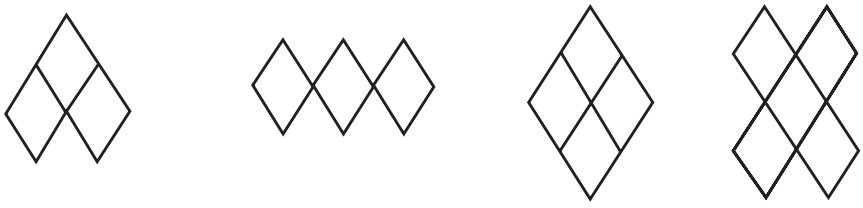
b. સમાન બાજુઓ (sides) અને સમાન ખૂણાઓ (angles) ધરાવતો ત્રિકોણ.

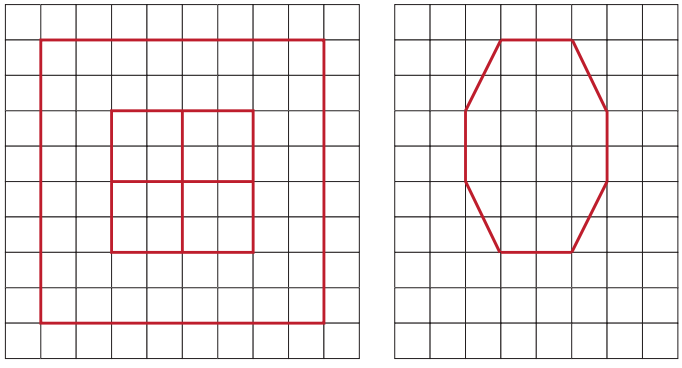


c. સમાન બાજુઓ અને સમાન ખૂણાઓ ધરાવતો ષટ્કોણ (hexagon)

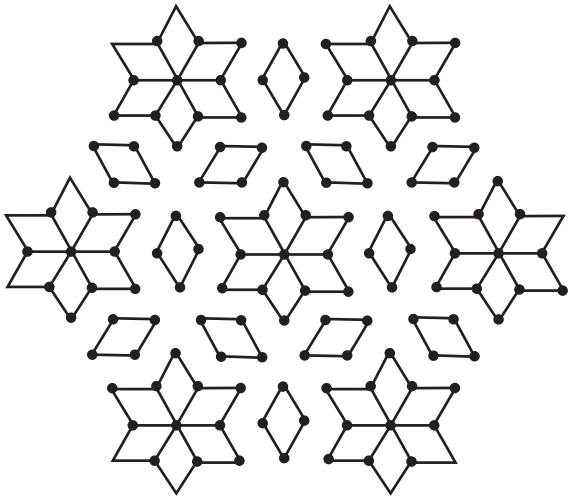


7. દરેક આકૃતિની છાપ (trace) લો અને જો તેમાં સંમિતિની રેખાઓ હોય તો તે દોરો :





8. નીચે આપેલા કોલમ (Kolam – રંગોળીનો એક પ્રકાર) માટે સંમિતિની રેખાઓ શોધો.



9. માગ્યા મુજબ દોરો.

   a. એક સંમિતિની રેખા ધરાવતો ત્રિકોણ.

   b. ત્રણ સંમિતિની રેખાઓ ધરાવતો ત્રિકોણ.

   c. એકપણ સંમિતિની રેખા ન ધરાવતો ત્રિકોણ.

   શું બરાબર બે સંમિતિની રેખાઓ ધરાવતો ત્રિકોણ દોરવાનું શક્ય છે?

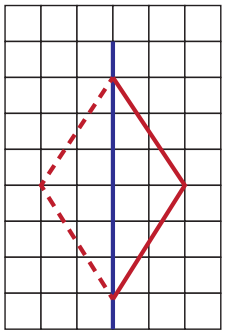
10. માગ્યા મુજબ દોરો. દરેક કિસ્સામાં, આકૃતિમાં ઓછામાં ઓછી એક વક્ર (curved) સીમા (boundary) હોવી જોઈએ.

   a. એક સંમિતિની રેખા ધરાવતી આકૃતિ.

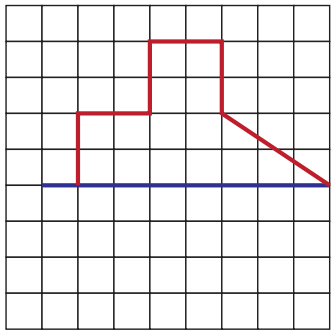
   b. બે સંમિતિની રેખાઓ ધરાવતી આકૃતિ.

   c. ચાર સંમિતિની રેખાઓ ધરાવતી આકૃતિ.

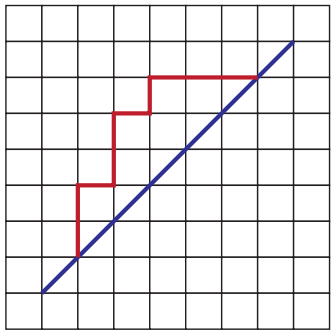
11. નીચે આપેલી આકૃતિની ચોરસ ખાનાવાળા કાગળ પર નકલ કરો. તેમને એવી રીતે પૂર્ણ કરો કે વાદળી રેખા સંમિતિની રેખા હોય. સમસ્યા (a) તમારા માટે ઉકેલવામાં આવી છે



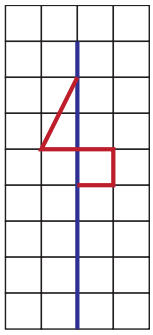
(a)



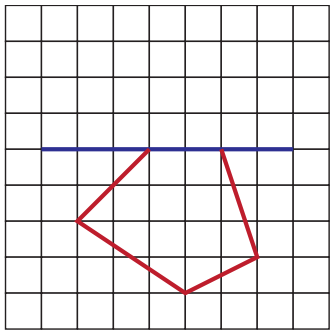
(b)



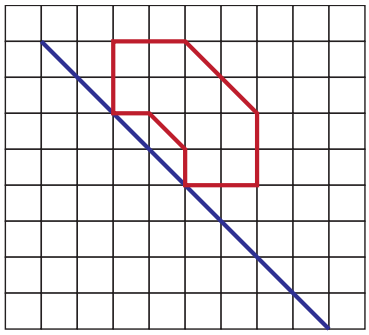
(c)



(d)



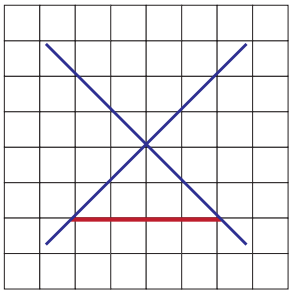
(e)



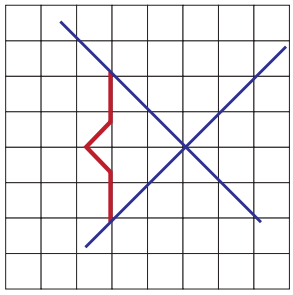
(f)

સૂચન : (c) અને (f) માટે પુસ્તક ફેરવીને જોવાથી મદદ મળી શકે !

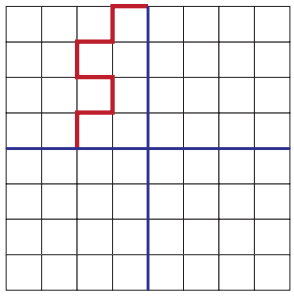
12. નીચેનાં ચિત્રોની ચોરસ ખાનાવાળા કાગળ પર નકલ કરો. દરેક આકૃતિને એવી રીતે પૂર્ણ કરો કે પરિણામી આકૃતિમાં બે વાદળી રેખાઓ સંમિતિની રેખાઓ હોય.



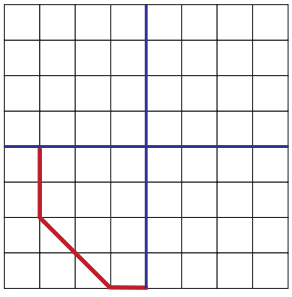
(a)



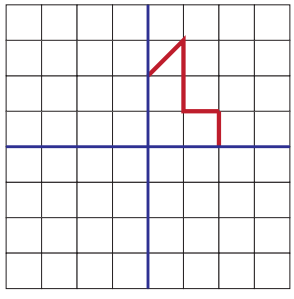
(b)



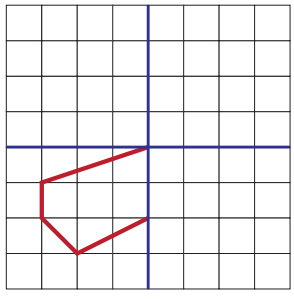
(c)



(d)

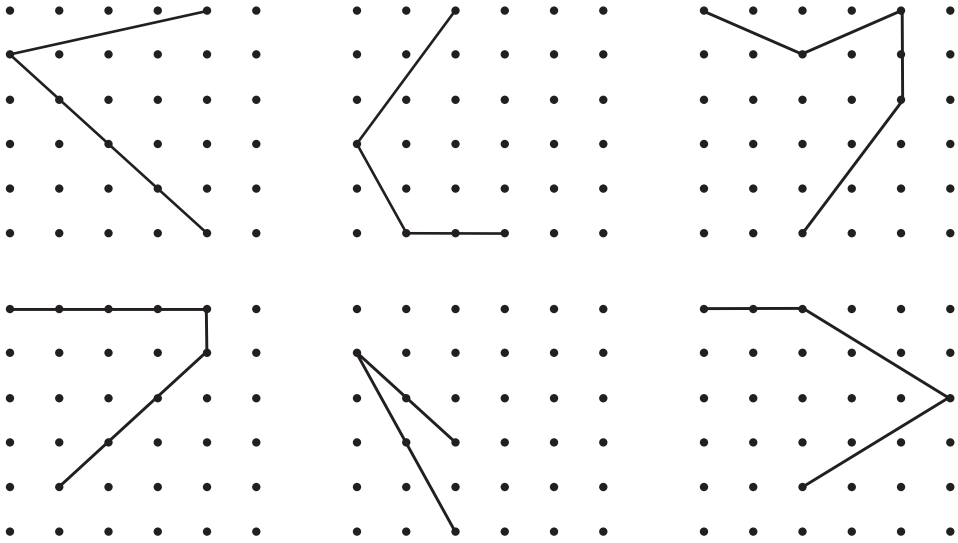


(e)

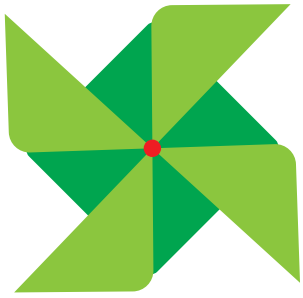


(f)

13. નીચે આપેલા ચિત્રની ટપકાંવાળા ગ્રીડ પર નકલ કરો. દરેક આકૃતિ માટે, સંમિતિની રેખા ધરાવતો આકાર બનાવવા માટે બે વધુ રેખાઓ દોરો.



9.2 પરિભ્રમણીય સંમિતિ (Rotational Symmetry)



ચિત્રમાં કાગળની ફરકડી સંમિતિય લાગે છે, પરંતુ તેમાં સંમિતિની કોઈ રેખા નથી! જોકે, જો તમે તેને વાળો છો, તો બે અડધા ભાગ બરાબર એકબીજા પર બંધબેસશે નહીં. બીજી બાજુ, જો તમે તેને કેન્દ્રમાં લાલ બિંદુની આસપાસ 90° ફેરવો, તો ફરકડી બરાબર એવી જ દેખાય છે.

આપણે કહીએ છીએ કે ફરકડીમાં **પરિભ્રમણીય સંમિતિ (rotational symmtry)** છે.

પરિભ્રમણીય સંમિતિની વાત કરતી વખતે હંમેશાં એક નિશ્ચિત બિંદુ હોય છે, જેની આસપાસ વસ્તુને ફેરવવામાં આવે છે. આ નિશ્ચિત બિંદુને **પરિભ્રમણનું કેન્દ્ર (centre of rotation)** કહેવામાં આવે છે.

શું ઉપરની ફરકડી 90° કરતાં ઓછા ખૂણેથી ફેરવવામાં આવે ત્યારે બરાબર એવી જ દેખાશે?

ના!

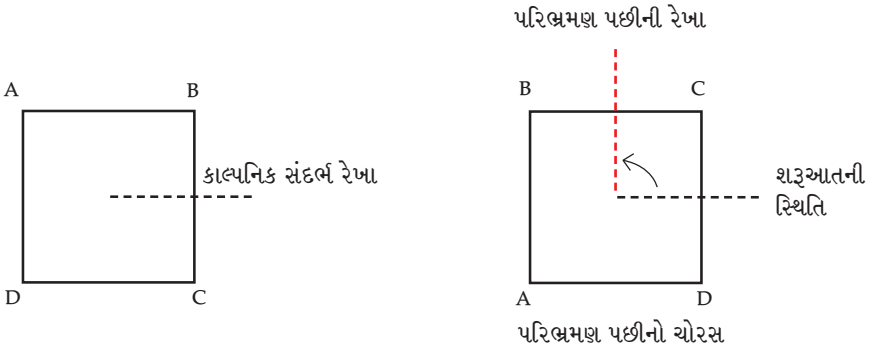
જે ખૂણા દ્વારા કોઈ આકૃતિને ફેરવવામાં આવે ત્યારે તે બરાબર એવી જ દેખાય, તેને **પરિભ્રમણીય સંમિતિ કોણ** અથવા ટૂંકમાં, ફક્ત **સંમિતિ કોણ (Angle of symmetry)** કહેવામાં આવે છે.

ફરકડી માટે, સંમિતિના ખૂણા 90° (ચોથો ભાગ), 180° (અડધો ભાગ), 270° (ત્રણ-ચતુર્થાંશ ભાગ) અને 360° (આખું ચક્કર) છે. નોંધ લો કે જ્યારે કોઈ પણ આકૃતિને 360° ફેરવવામાં આવે છે, ત્યારે તે તેની મૂળ સ્થિતિમાં પાછી આવે છે, તેથી 360° હંમેશા સંમિતિનો એક ખૂણો હોય છે.

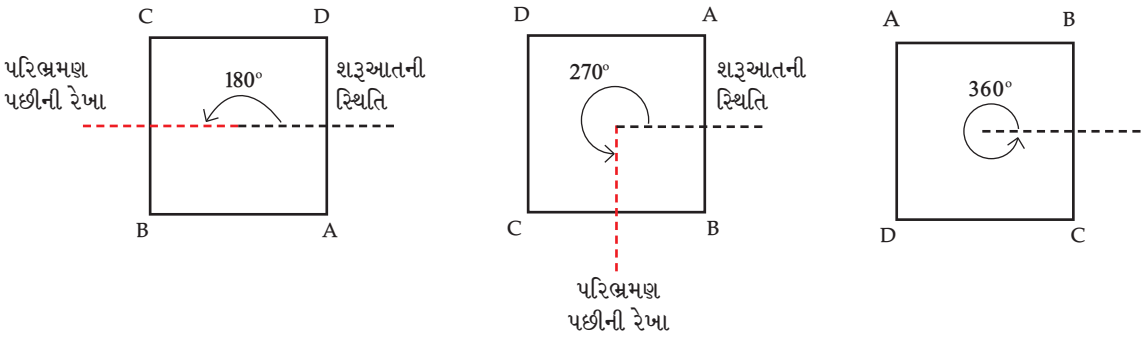
આમ, આપણે જોઈએ છીએ કે ફરકડીમાં 4 સંમિતિના ખૂણા હોય છે.

શું તમે કોઈ અન્ય આકાર જાણો છો જેમાં બરાબર ચાર સંમિતિના ખૂણા હોય? ચોરસમાં સંમિતિના કેટલા ખૂણા હોય છે? ચોરસને મૂળ સ્થિતિમાં પાછું મેળવવા માટે તેને કેટલું ફેરવવું પડે છે? 90°ના પરિભ્રમણ પછી ચોરસ પાછું તેની મૂળ સ્થિતિમાં આવે છે.

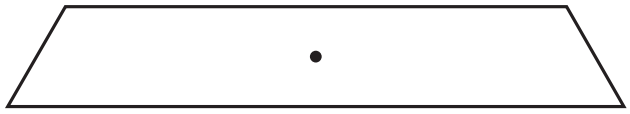
આનાથી બિંદુ A બિંદુ Bના સ્થાને, બિંદુ B બિંદુ Cના સ્થાને, બિંદુ C બિંદુ Dના સ્થાને અને બિંદુ D પાછું બિંદુ Aના સ્થાને આવે છે. શું તમે જાણો છો કે પરિભ્રમણનું કેન્દ્ર (centre of rotation) ક્યાં દર્શાવવું?



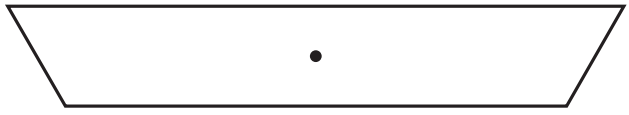
સંમિતિના અન્ય ખૂણા કયા છે?



ઉદાહરણ : નીચેની પટ્ટી (strip)ના સંમિતિના ખૂણાઓ શોધો.



ઉકેલ : ચાલો, આપણે પટ્ટીને તેના કેન્દ્રની આસપાસ ઘડિયાળના કાંટાની (સમઘડી - clockwise) દિશામાં ફેરવીએ.

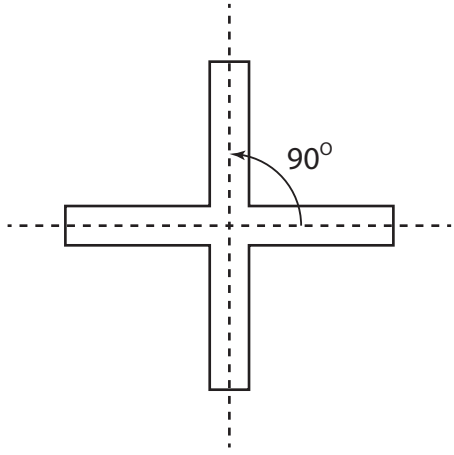


180°ના પરિભ્રમણથી ઉપરની આકૃતિ મળે છે. શું આ મૂળ આકૃતિ સાથે બંધબેસે છે?

ના. શા માટે?

આ સ્થિતિથી હજી વધુ 180°ના પરિભ્રમણથી આપણને મૂળ આકાર મળે છે. આ આકૃતિ 360°ના એક સંપૂર્ણ પરિભ્રમણ પછી જ તેના મૂળ આકારમાં પાછી આવે છે. તેથી, આપણે કહીએ છીએ કે આ આકૃતિમાં પરિભ્રમણીય સંમિતિ નથી.

રેડિયલ ભુજા (કિરણાકાર-આરા) (Radial Arms) વાળી આકૃતિઓની પરિભ્રમણીય સંમિતિ



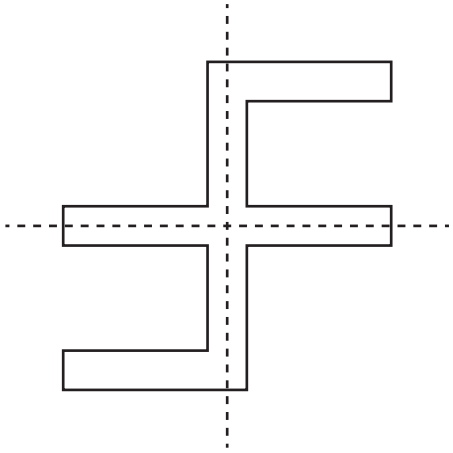
આ આકૃતિને ધ્યાનમાં લો, જેમાં 4 રેડિયલ ભુજા છે. તેમાં સંમિતિના કેટલા ખૂણા છે? તે કયા છે? નોંધ લો કે નજીકની બે કેન્દ્રિય તૂટક રેખાઓ વચ્ચેનો ખૂણો 90° છે.

શું તમે રેડિયલ ભુજાઓ વચ્ચેના ખૂણાઓ બદલી શકો, કે જેથી તે આકૃતિમાં હજુ પણ સંમિતિના 4 ખૂણાઓ હોય? તેને દોરવાનો પ્રયાસ કરો.

દોરેલી આકૃતિમાં ખરેખર સંમિતિના 4 ખૂણાઓ છે કે નહીં તે ચકાસવા માટે, તમે બે અલગ-અલગ કાગળના ટુકડા પર આકૃતિ દોરી શકો છો. એક કાગળમાંથી રેડિયલ ભુજા કાપો. કાગળ પરની આકૃતિને સ્થિર રાખો અને પરિભ્રમણીય સંમિતિ ચકાસવા માટે કાપેલા ભાગને ફેરવો.

ઉપરની આકૃતિમાં તમે કેવા ફેરફાર કરશો, જેથી તેમાં માત્ર બે સંમિતિના ખૂણાઓ હોય?

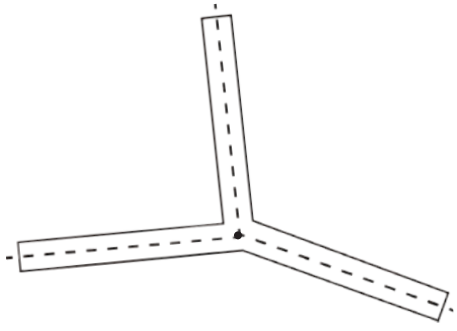
અહીં એક રીત છે :



આપણે એવી આકૃતિઓ જોઈ છે જેમાં સંમિતિના 4 અને 2 ખૂણાઓ હોય છે. શું આપણે એવી આકૃતિ મેળવી શકીએ જેમાં બરાબર 3 સંમિતિના ખૂણા હોય? શું તમે આ માટે રેડિયલ ભુજા (Radial Arms)નો ઉપયોગ કરી શકો છો?

ચાલો, આપણે નીચેની આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ 3 રેડિયલ ભુજા સાથે પ્રયાસ કરીએ. તેમાં સંમિતિના કેટલા ખૂણા છે અને તે કયા છે?

અહીં ત્રણ રેડિયલ ભુજાવાળી એક આકૃતિ છે.



આ આકૃતિની નકલ કરો અને કાપી લો. આ આકૃતિ પર કાપેલા ભાગને ફેરવીને તેના પરિભ્રમણના ખૂણાઓ નક્કી કરો.

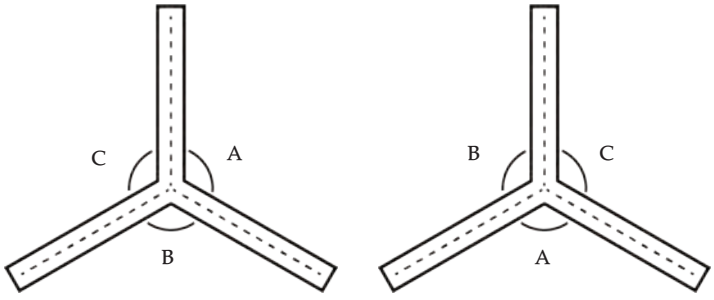
આપણે જોઈએ છીએ કે ફક્ત 360°નું સંપૂર્ણ પરિભ્રમણ જ આકૃતિને તેની મૂળ સ્થિતિમાં પાછી લાવશે. આમ, આ આકૃતિમાં પરિભ્રમણીય સંમિતિ નથી. કારણ કે 360° તેનો એકમાત્ર સંમિતિનો ખૂણો છે.

જોકે, શું આકૃતિમાં કંઈ પણ બદલી શકાય છે, જેથી તેમાં સંમિતિના 3 ખૂણાઓ બને?

શું તૂટક રેખાઓ વચ્ચેના ખૂણાઓ બદલવાથી આ કરી શકાય છે?

જો ત્રણ રેડિયલ ભુજાવાળી કોઈ આકૃતિમાં પરિભ્રમણીય સંમિતિ હોય, તો તેનું પરિભ્રમિત સ્વરૂપ મૂળ આકૃતિ સાથે બંધબેસતું થવું જોઈએ.

અહીં તે બંનેની કાચી આકૃતિઓ છે. જો આ બંને આકૃતિઓ બંધબેસતી થાય તો તમે ખૂણાઓ વિશે શું કહી શકો?



એ નોંધો કે $\angle A$, $\angle B$ સાથે બંધબેસતો થવો જોઈએ, $\angle B$, $\angle C$ સાથે બંધબેસતો થવો જોઈએ અને $\angle C$, $\angle A$ સાથે બંધબેસતો થવો જોઈએ.

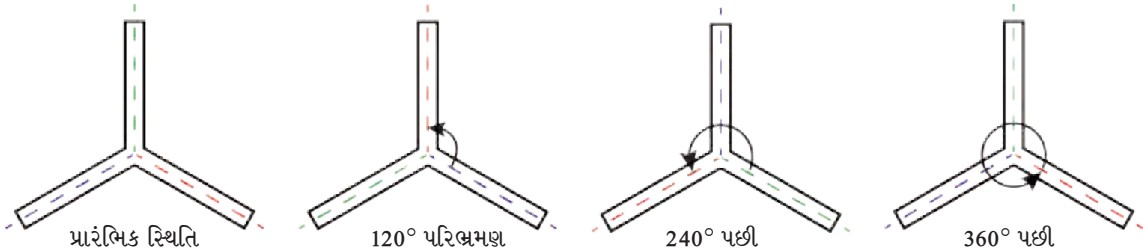
આમ, $\angle A = \angle B = \angle C$

આ ખૂણો કેટલા માપનો હોવો જોઈએ? આપણે જાણીએ છીએ કે એક સંપૂર્ણ ચક્ર $360°$નું હોય છે. આ ત્રણ ખૂણાઓમાં સમાન રીતે વિભાજિત થાય છે. તેથી દરેક ખૂણો $\frac{360°}{3} = 120°$ હોવો જોઈએ.

તેથી, 3 રેડિયલ ભુજાવાળી આકૃતિમાં પરિભ્રમણીય સંમિતિ ત્યારે જોવા મળે છે જ્યારે નજીકની તૂટક રેખાઓ વચ્ચેનો ખૂણો $120°$ હોય.

આ અવલોકનને ચકાસવા માટે કાગળના ટુકડાનો ઉપયોગ કરો.

હવે, આકૃતિમાં પરિભ્રમણના કેટલા ખૂણાઓ છે અને તે કયા છે?



પ્રારંભિક સ્થિતિ (Initial position)

$120°$ પરિભ્રમણ પછી

$240°$ પછી ($120° + 120°$ પરિભ્રમણ)

$360°$ પછી ($120° + 120° + 120°$ પરિભ્રમણ)

નોંધ : પરિભ્રમણ દર્શાવવા માટે રંગીન તૂટક રેખાઓ દોરેલ છે.

ચાલો, આપણે વધુ આકૃતિઓ શોધીએ.

- શું તમે રેડિયલ ભુજાવાળી એવી આકૃતિ દોરી શકો છો જેમાં : a) બરાબર 5 સંમિતિના ખૂણાઓ હોય, b) બરાબર 6 સંમિતિના ખૂણાઓ હોય? દરેક કિસ્સામાં સંમિતિના ખૂણાઓ પણ શોધો.

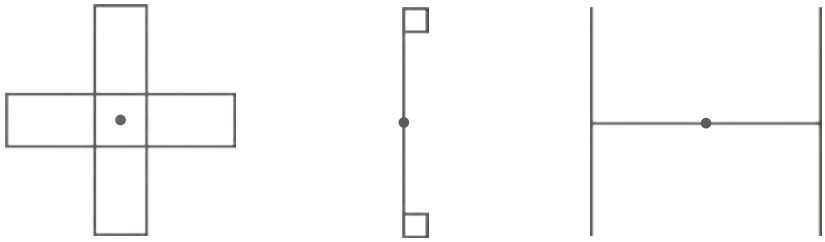
સૂચન : પ્રથમ કિસ્સા માટે 5 રેડિયલ ભુજાનો ઉપયોગ કરો. બે નજીકના રેડિયલ ભુજા વચ્ચેનો ખૂણો કેટલો હોવો જોઈએ?

- બરાબર 7 સંમિતિના ખૂણાઓ ધરાવતી રેડિયલ ભુજાવાળી આકૃતિને ધ્યાનમાં લો. તેનો સૌથી નાનો સંમિતિનો ખૂણો કયો હશે? શું આ કિસ્સામાં અંશ(ડિગ્રી - degree)ની સંખ્યામાપ પૂર્ણ (whole) સંખ્યા છે? જો ના, તો તેને મિશ્ર અપૂર્ણાંક (mixed fraction) તરીકે દર્શાવો.

ચાલો, આપણે અન્ય પ્રકારની આકૃતિઓ માટે સંમિતિના ખૂણાઓ શોધીએ.

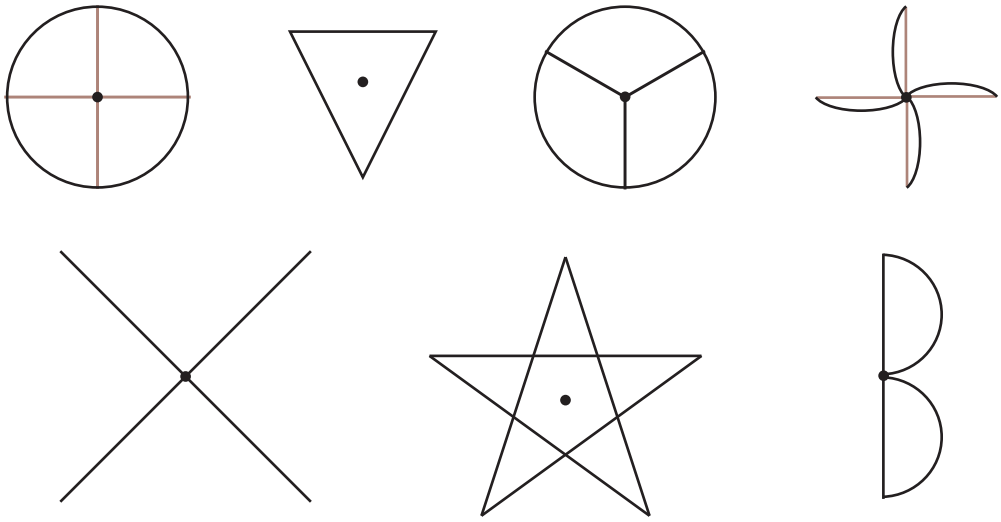
વિચારો અને શોધો

1. નીચે આપેલી આકૃતિઓ માટે દર્શાવેલ કેન્દ્ર બિંદુ (•)ની આસપાસ સંમિતિના ખૂણાઓ શોધો.

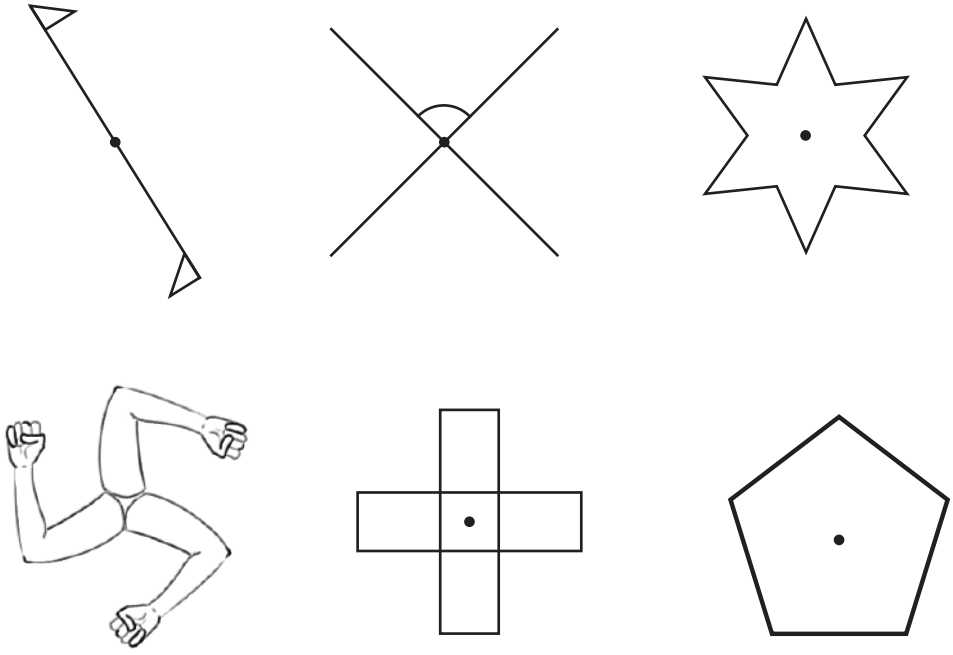


(a) (b) (c)

2. નીચેનામાંથી કઈ આકૃતિમાં એકથી વધુ સંમિતિના ખૂણા છે?



3. દરેક આકૃતિ માટે પરિભ્રમણીય સંમિતિનો ક્રમ આપો :



ચાલો, આપણે ઉપરના બધા કિસ્સાઓ માટે સંમિતિના ખૂણાઓ નોંધીએ..

- જ્યારે બરાબર 2 સંમિતિના ખૂણા હોય ત્યારે : 180°, 360°
- જ્યારે બરાબર 3 સંમિતિના ખૂણા હોય ત્યારે : 120°, 240°, 360°
- જ્યારે બરાબર 4 સંમિતિના ખૂણા હોય ત્યારે : 90°, 180°, 270°, 360°

શું તમે આ કિસ્સાઓમાં સંમિતિના ખૂણાઓ વિશે કંઈ સામાન્ય અવલોકન કરો છો? સંખ્યાઓનું પ્રથમ જૂથ 180ના અવયવી (multiple) છે. બીજું જૂથ 120ના અવયવી છે. ત્રીજું જૂથ 90ના અવયવી છે.

દરેક કિસ્સામાં, ખૂણાઓ સૌથી નાના ખૂણાના અવયવી છે. તમને આશ્ચર્ય થશે અને તમે પૂછશો કે, શું આવું હંમેશાં થશે? તમને શું લાગે છે?

સાચું કે ખોટું

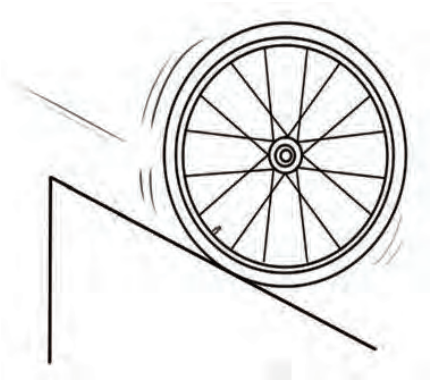
- દરેક આકૃતિમાં 360° સંમિતિનો ખૂણો હશે.

- જો કોઈ આકૃતિના સંમિતિનો સૌથી નાનો ખૂણો અંશમાં એક પ્રાકૃતિક સંખ્યા (natural numbers) હોય, તો તે 360નો અવયવ (factor) હોય છે.

શું બધી આકૃતિઓ માટે સંમિતિનો સૌથી નાનો ખૂણો હોય છે? તે વર્તુળ જેવા સૌથી વધુ સંમિતિય આકારો સિવાય મોટા ભાગની આકૃતિઓના કિસ્સામાં સાચું છે, જેના વિશે આપણે હવે ચર્ચા કરીએ.

વર્તુળની સંમિતિઓ (Symmetry of Circle)

વર્તુળ એક રસપ્રદ આકૃતિ છે. જ્યારે તમે વર્તુળને તેના કેન્દ્રની આસપાસ ઘડિયાળના કાંટાની દિશામાં (clockwise) ફેરવો છો ત્યારે શું થાય છે? તે પોતાની સાથે બંધબેસતું થઈ જાય છે. તમે તેને કયા ખૂણાથી ફેરવો છો તેનાથી કોઈ ફરક પડતો નથી! તેથી, વર્તુળ માટે દરેક ખૂણો સંમિતિનો ખૂણો છે.

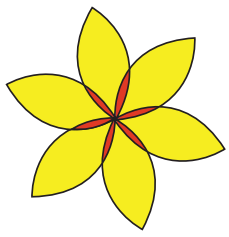


હવે, વર્તુળની ધાર (rim) પર એક બિંદુ લો અને તેને કેન્દ્ર (centre) સાથે જોડો. આ રેખાખંડને લંબાવીને વર્તુળનો વ્યાસ (diameter) બનાવો. શું તે વ્યાસ પ્રતિબિંબિત સંમિતિની રેખા છે? હા. દરેક વ્યાસ સંમિતિની રેખા છે!

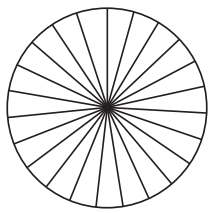
પૈડાંની જેમ, આપણે આપણી આસપાસ પરિભ્રમણીય સંમિતિ ધરાવતી અન્ય વસ્તુઓ શોધી શકીએ છીએ. તેની શોધ કરો. તેમાંથી કેટલીક નીચે દર્શાવવામાં આવી છે :



પંખો



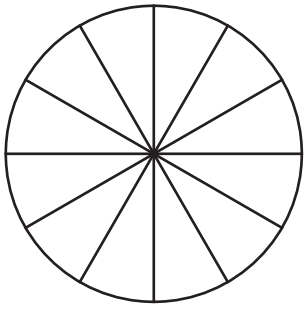
ફૂલ



ચક્ર

વિચારો અને શોધો

1. નીચે આપેલા વર્તુળના વિભાગો(વૃત્તાંશ - sector)માં એ રીતે રંગ પૂરો કે આકૃતિમાં i) 3 સંમિતિના ખૂણા હોય, ii) 4 સંમિતિના ખૂણા હોય, iii) વિભાગો(વૃત્તાંશ)ને અલગ અલગ રીતે રંગીને તમે સંમિતિના ખૂણાઓની કેટલી સંખ્યાઓ મેળવી શકો છો?



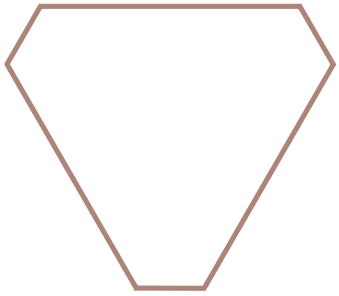
2. વર્તુળ અને ચોરસ સિવાયની એવી બે આકૃતિઓ દોરો, જેમાં પ્રતિબિંબિત સંમિતિ (reflection symmetry) અને પરિભ્રમણીય સંમિતિ (rotational symmetry) બંને હોય.
3. જ્યાં શક્ય હોય ત્યાં, નીચેના માટે કાચી આકૃતિ દોરો :
   a. ઓછામાં ઓછી બે સંમિતિની રેખાઓ અને ઓછામાં ઓછા બે સંમિતિના ખૂણાઓ ધરાવતો ત્રિકોણ.
   b. માત્ર એક સંમિતિની રેખા ધરાવતો, પરંતુ પરિભ્રમણીય સંમિતિ ન ધરાવતો ત્રિકોણ.
   c. પરિભ્રમણીય સંમિતિ ધરાવતો, પરંતુ પ્રતિબિંબિત સંમિતિ ન ધરાવતો ચતુષ્કોણ.
   d. પ્રતિબિંબિત સંમિતિ ધરાવતો, પરંતુ પરિભ્રમણીય સંમિતિ ન ધરાવતો ચતુષ્કોણ.
4. એક આકૃતિમાં 60° એ સંમિતિનો સૌથી નાનો ખૂણો છે. આ આકૃતિના અન્ય સંમિતિના ખૂણાઓ કયા છે?

પ્રયત્ન કરો

5. એક આકૃતિમાં 60° એ સંમિતિનો ખૂણો છે. આ આકૃતિમાં 60° કરતાં નાના સંમિતિના બે ખૂણાઓ છે. તેનો સૌથી નાનો સંમિતિનો ખૂણો કયો છે?
6. શું પરિભ્રમણીય સંમિતિ ધરાવતી એવી કોઈ આકૃતિ હોઈ શકે છે કે જેમાં સંમિતિનો સૌથી નાનો ખૂણો :
   a. 45° હોય?
   b. 17° હોય?

7. આ ચિત્ર દિલ્લીમાં આવેલા નવા સંસદ ભવનનું છે.





a. શું ચિત્રની બહારની સીમારેખા (boundary)માં પ્રતિબિંબિત સંમિતિ છે? જો હા, તો સંમિતિની રેખાઓ દોરો. તે કેટલી છે?

b. શું તેના કેન્દ્રની આસપાસ પરિભ્રમણીય સંમિતિ છે? જો હા, તો ભ્રમણીય સંમિતિના ખૂણાઓ શોધો.

8. પ્રકરણ 1, કોષ્ટક 3ના નિયમિત બહુકોણ (Regular Polygons)ના પ્રથમ ક્રમની આકાર શ્રેણીમાં કેટલી સંમિતિની રેખાઓ છે? તમને કયો સંખ્યાક્રમ મળે છે?

9. પ્રકરણ 1, કોષ્ટક 3, નિયમિત બહુકોણ (Regular Polygons)ના પ્રથમ ક્રમની આકાર શ્રેણી (sequence)ના કેટલી સંમિતિના ખૂણા છે? તમને કયો સંખ્યાક્રમ મળે છે?

10. પ્રકરણ 1, કોષ્ટક 3, કોચ હિમકણની (Koch Snowflake) શ્રેણીમાં આકાર શ્રેણીના છેલ્લા ક્રમમાં કેટલી સંમિતિની રેખાઓ છે? સંમિતિના કેટલા ખૂણાઓ છે?

11. અશોક ચક્રમાં કેટલી સંમિતિની રેખાઓ અને સંમિતિના ખૂણાઓ હોય છે?



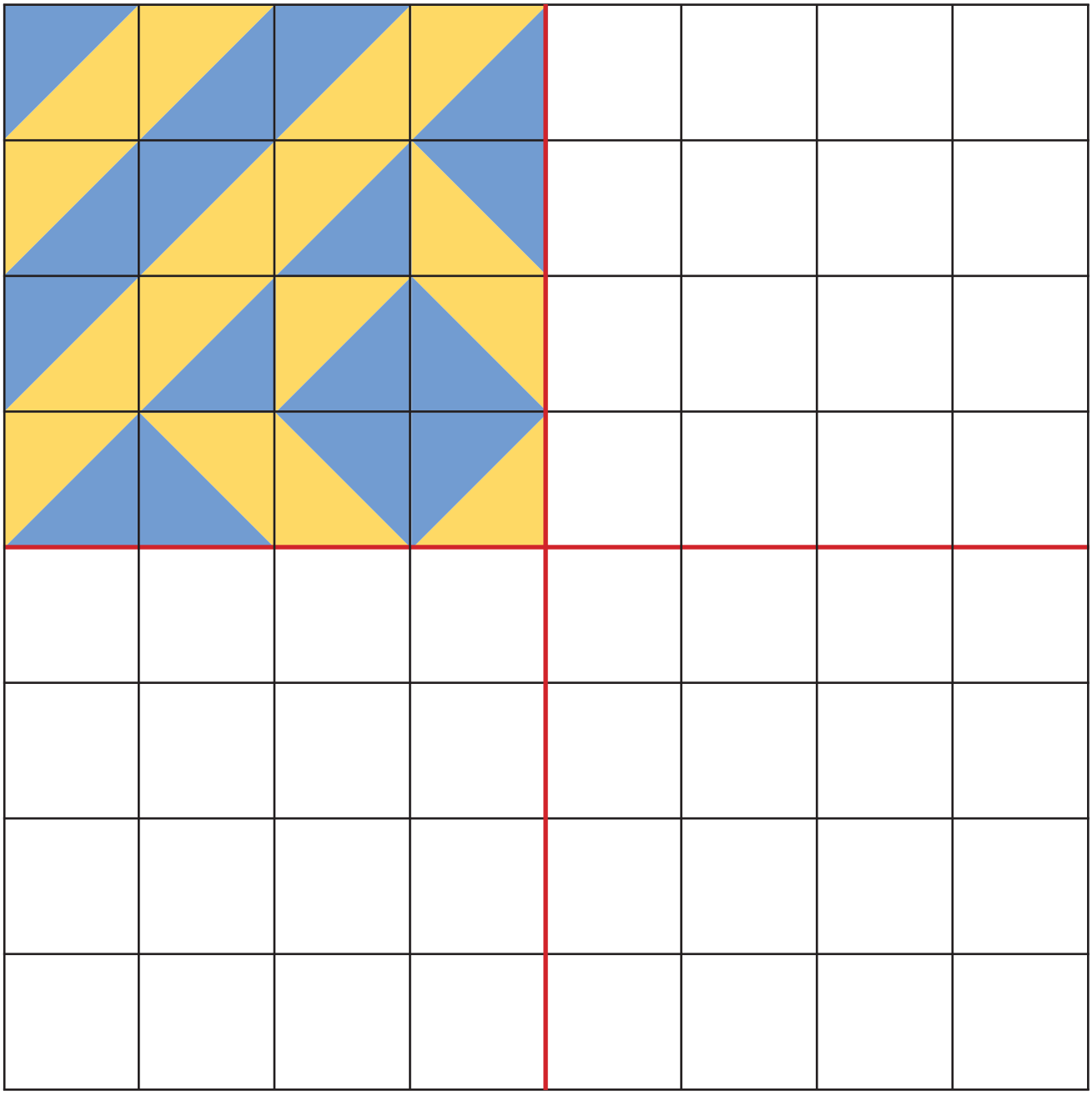
લાદી સાથે રમત

a. પુસ્તકના અંતમાં આપેલી રંગીન લાદીનો  ઉપયોગ કરીને પાછળ દર્શાવેલ આકૃતિને એવી રીતે પૂર્ણ કરો કે તેમાં બરાબર 2 સંમિતિની રેખાઓ હોય.

b. આવી 16 લાદીનો ઉપયોગ કરીને એવી આકૃતિઓ બનાવો જેમાં બરાબર :

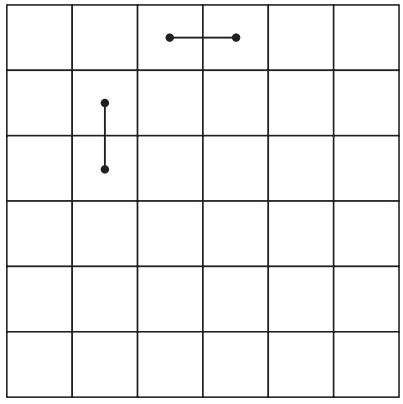
1. એક સંમિતિની રેખા હોય,
2. બે સંમિતિની રેખાઓ હોય.

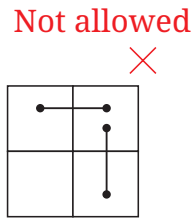
c. આ લાદીનો ઉપયોગ કરીને સર્જનાત્મક સંમિતિય ભાત (pattern) બનાવો.



રમત

6 × 6 (6 બાય 6)ની જાળી (ગ્રીડ) દોરો. બે ખેલાડીઓ વારાફરતી એક લીટી દોરીને બે નજીકના ચોરસને ઢાંકે છે. લીટી કોઈ પણ રીતે મૂકી શકાય છે : આડી કે ઊભી. એક જ ખાનામાં એકથી વધુ લીટીઓ આવવી જોઈએ નહીં. રમત ત્યાં સુધી ચાલે છે, જ્યાં સુધી કોઈ એક ખેલાડી વધુ રેખા મૂકી ન શકે. જે ખેલાડી લીટી મૂકી શકતો નથી તે હારી જાય છે.





આ રમત જીતવા માટે કઈ વ્યૂહરચનાનો ઉપયોગ કરી શકાય?

સારાંશ

- જ્યારે કોઈ આકૃતિ ચોક્કસ પૅટર્નમાં પુનરાવર્તિત થતા ભાગોથી બનેલી હોય, ત્યારે આપણે કહીએ છીએ કે આકૃતિમાં સંમિતિ છે. આપણે કહીએ છીએ કે આવી આકૃતિ સંમિતિય (symmetrical) છે.
- એક રેખા જે સમતલ આકૃતિને બે ભાગમાં એવી રીતે કાપે છે કે જ્યારે તેને તે રેખા પરથી વાળવામાં આવે, ત્યારે તે ભાગ એકબીજા પર બરાબર બંધ બેસે, તેને આકૃતિની સંમિતિની રેખા અથવા સંમિતિની ધરી (axis of symmetry) કહેવાય છે.
- એક આકૃતિમાં સંમિતિની એક કરતાં વધુ રેખાઓ હોઈ શકે છે.
- ક્યારેક કોઈ આકૃતિને એક નિશ્ચિત બિંદુની આસપાસ એક ખૂણાથી ફેરવવામાં આવે ત્યારે તે બરાબર એવું જ દેખાય છે. આવા ખૂણાને આકૃતિનો સંમિતિ કોણ કહેવાય છે. એક આકૃતિ જેમાં 0 અંશ અને 360 અંશની વચ્ચે બરાબર એક સંમિતિ કોણ હોય તેને પરિભ્રમણીય સંમિતિ (rotational symmetry) ધરાવતી આકૃતિ કહેવાય છે. આકૃતિનું જે બિંદુની આસપાસ પરિભ્રમણ થાય છે તેને પરિભ્રમણનું કેન્દ્ર કહેવાય છે.
- એક આકૃતિમાં સંમિતિના એક કરતાં વધુ ખૂણાઓ હોઈ શકે છે.
- કેટલીક આકૃતિઓમાં સંમિતિની રેખા હોય છે, પરંતુ સંમિતિનો કોઈ ખૂણો હોતો નથી, જ્યારે અન્ય આકૃતિઓમાં સંમિતિના ખૂણાઓ હોય છે, પરંતુ સંમિતિની કોઈ રેખા હોતી નથી. કેટલીક આકૃતિઓમાં સંમિતિની રેખાઓ તેમજ સંમિતિના ખૂણાઓ બંને હોઈ શકે છે.