પ્રકરણ 6

ત્રિકોણ અને તેના ગુણધર્મો

6.1 પ્રાસ્તાવિક (Introduction)

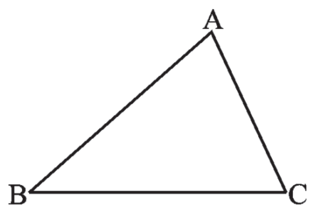
તમે શીખ્યા છો કે ત્રિકોણ એ ત્રણ રેખાખંડોથી બનેલો એક સાદો બંધ વક્ર (simple closed curve) છે. તેને ત્રણ શિરોબિંદુઓ, ત્રણ બાજુઓ અને ત્રણ ખૂણાઓ છે.

આકૃતિ 6.1 માં ΔABC દોરેલો છે. તેમાં

બાજુઓ (Sides) : $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$

ખૂણાઓ (Angles) : $\angle BAC, \angle ABC, \angle BCA$

શિરોબિંદુઓ (Vertices) : A, B, C



આકૃતિ 6.1

શિરોબિંદુ Aની સામેની બાજુ BC છે. બાજુ ABની સામેના ખૂણાનું નામ આપી શકશો ?

ત્રિકોણનું (i) તેની બાજુના આધારે અને (ii) ખૂણાના આધારે કેવી રીતે (classification) વર્ગીકરણ કરી શકાય તે તમે જાણો છો.

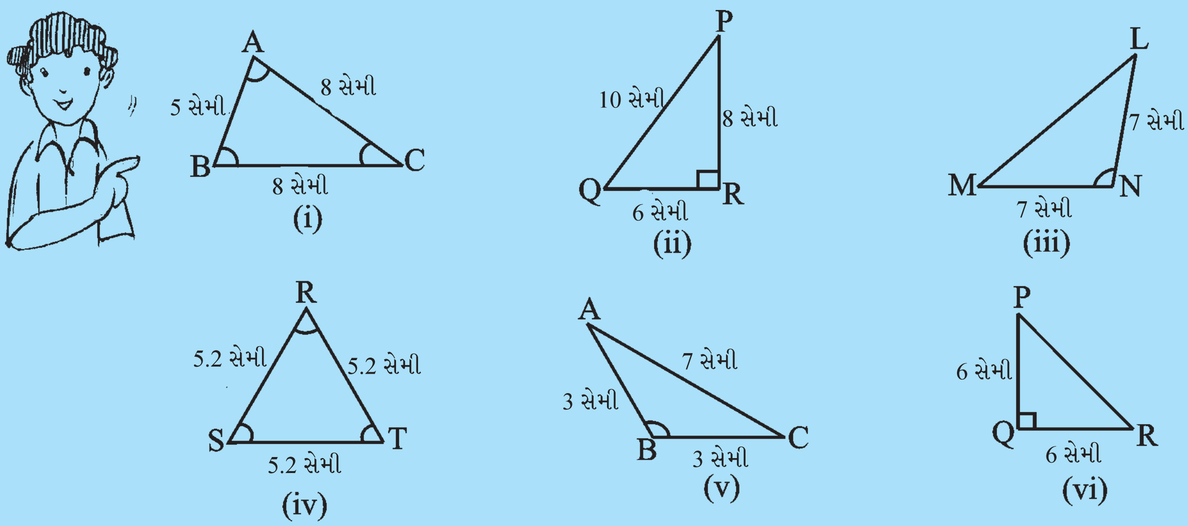
(i) બાજુને આધારે : વિષમબાજુ (scalene), સમદ્વિબાજુ (isosceles) અને સમબાજુ (equilateral) ત્રિકોણ.

(ii) ખૂણાને આધારે : લઘુકોણ, ગુરુકોણ અને કાટકોણ ત્રિકોણ.

ઉપરના દર્શાવેલાં ત્રિકોણના આકારો કાગળમાંથી કાપો. તમારા નમૂના અને તમારા મિત્રોએ કાપેલા નમૂના સરખાવો અને ચર્ચા કરો.

પ્રયત્ન કરો

1. ΔABCના છ ઘટકો (elements) (એટલે કે 3 બાજુઓ અને 3 ખૂણાઓ) લખો.
2. (i) ΔPQRમાં શિરોબિંદુ Qની સામેની બાજુ,
   (ii) ΔLMNમાં બાજુ LMની સામેનો ખૂણો,
   (iii) ΔRSTમાં બાજુ RTની સામેનું શિરોબિંદુ લખો.
3. આકૃતિ 6.2 જુઓ અને દરેક ત્રિકોણનું વર્ગીકરણ (i) બાજુ પ્રમાણે અને (ii) ખૂણા પ્રમાણે કરો :

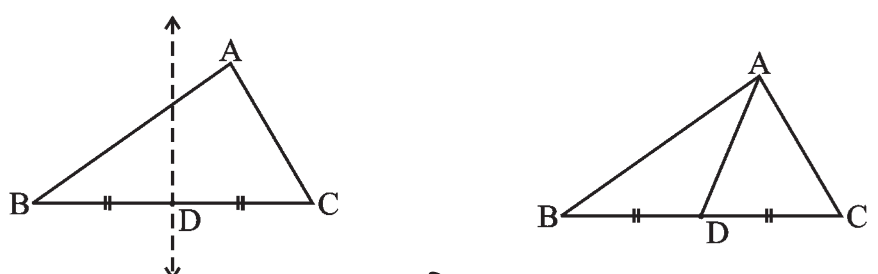


આકૃતિ 6.2

હવે આપણે ત્રિકોણ વિશે કેટલીક વિસ્તૃત સમજ મેળવીએ.

6.2 ત્રિકોણની મધ્યગા (Medians of a Triangle)

આપેલા રેખાખંડનો લંબદ્વિભાજક (perpendicular bisector) કાગળને વાળીને કેવી રીતે શોધી શકાય તે તમે જાણો છો. એક કાગળમાંથી ΔABC કાપો (આકૃતિ 6.3). તેની કોઈ પણ એક બાજુ, ધારો કે $\overline{BC}$ લો. કાગળને વાળીને $\overline{BC}$ના લંબદ્વિભાજકનું સ્થાન નક્કી કરો. વાળવાથી મળતો સળ $\overline{BC}$ને Dમાં મળે છે જે $\overline{BC}$નું મધ્યબિંદુ છે. $\overline{AD}$ દોરો.



આકૃતિ 6.3

$\overline{BC}$ના મધ્યબિંદુને તેની સામેના શિરોબિંદુ (vertex) સાથે જોડતો રેખાખંડ AD ત્રિકોણની **મધ્યગા** કહેવાય છે. બાજુઓ $\overline{AB}$ અને $\overline{CA}$ લઈને ત્રિકોણની બીજી બે મધ્યગા શોધો. **મધ્યગા ત્રિકોણના શિરોબિંદુને તેની સામેની બાજુના મધ્યબિંદુ (midpoint) સાથે જોડે છે.**

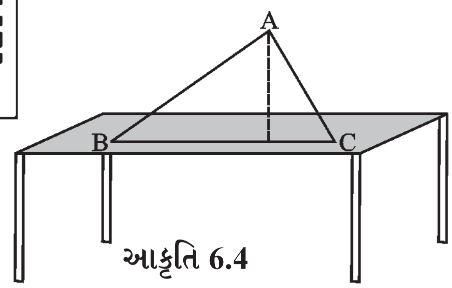
વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

1. કોઈ પણ ત્રિકોણને કેટલી મધ્યગા હોઈ શકે ?
2. આખી મધ્યગા ત્રિકોણની અંદરના ભાગ (interior)માં સમાયેલી છે ? (જો તમને લાગે કે આ સાચું નથી તો તેવી આકૃતિ દોરીને બતાવો.)

6.3 ત્રિકોણના વેધ (Altitudes of A Triangle)

3Q66Z2

ત્રિકોણ આકારનું પૂઠું (કાર્ડબૉર્ડ-card board) ABC કાપો. ટેબલ પર તેને ઊભું મૂકો. આ ત્રિકોણ કેટલો ‘ઊંચો’ છે ? શિરોબિંદુ Aથી આધાર $\overline{BC}$ સુધીના અંતરને તેની **ઊંચાઈ** કહે છે. (આકૃતિ 6.4).

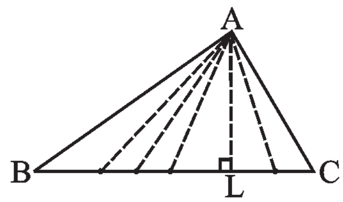


આકૃતિ 6.4

A થી $\overline{BC}$ સુધીના ઘણા રેખાખંડ દોરી શકો છો. (આકૃતિ 6.5) તેમાંનો કયો રેખાખંડ ઊંચાઈ દર્શાવશે ?

Aથી શરૂ થતો સીધો નીચે $\overline{BC}$ પર આવતો અને $\overline{BC}$ ને લંબ રેખાખંડ $\overline{AL}$ **ઊંચાઈ** દર્શાવે છે. આ $\overline{AL}$ **ત્રિકોણનો વેધ છે.**

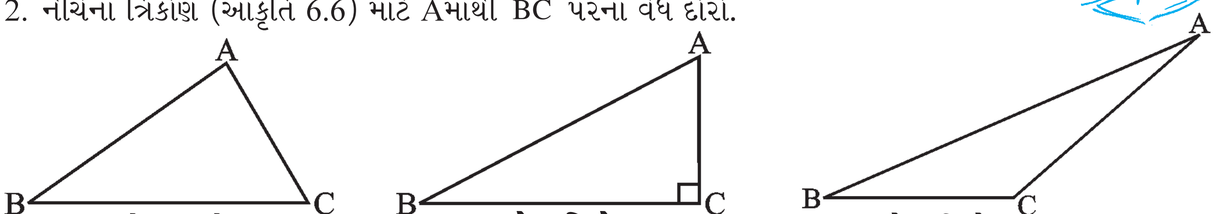
ત્રિકોણના વેધનું એક અંતિમબિંદુ ત્રિકોણનું શિરોબિંદુ છે અને બીજું સામેની બાજુને સમાવતી રેખા પર છે. દરેક શિરોબિંદુમાંથી વેધ દોરી શકાય છે.



આકૃતિ 6.5

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

1. એક ત્રિકોણના કેટલા વેધ હોઈ શકે ?
2. નીચેના ત્રિકોણ (આકૃતિ 6.6) માટે Aમાંથી $\overline{BC}$ પરના વેધ દોરો.



લઘુકોણ ત્રિકોણ (i) **કાટકોણ ત્રિકોણ** (ii) **ગુરુકોણ ત્રિકોણ** (iii)

આકૃતિ 6.6

3. શું વેધ હંમેશાં ત્રિકોણની અંદરના ભાગમાં જ આવશે ? જો તમને આ સાચું ન લાગતું હોય તો તે દર્શાવવા કાચી આકૃતિ દોરો.
4. તમે એવો ત્રિકોણ વિચારી શકો જેના બે વેધ તેની બે બાજુ જ છે ?
5. કોઈ ત્રિકોણ માટે વેધ અને મધ્યગા સમાન હોઈ શકે ?

(સૂચન : સવાલ 4 અને 5 માટે દરેક પ્રકારના ત્રિકોણના બધા વેધ દોરીને જવાબ શોધો.)

આ કરો

(i) સમબાજુ ત્રિકોણ (ii) સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ

(iii) વિષમબાજુ ત્રિકોણ પ્રકારના ભિન્ન ત્રિકોણ કાપો.

તેના વેધ અને મધ્યગા શોધો. તમને તેમાં કંઈ ખાસ વિશેષતા જણાય છે ? મિત્રો સાથે ચર્ચા કરો.

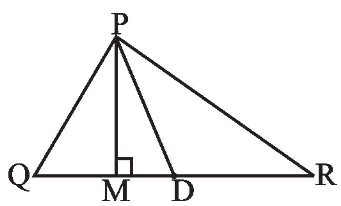
સ્વાધ્યાય 6.1

1. ΔPQRમાં, D એ $\overline{QR}$ નું મધ્યબિંદુ છે.

   $\overline{PM}$ ________ છે.

   $\overline{PD}$ ________ છે.

   QM = MR છે ?

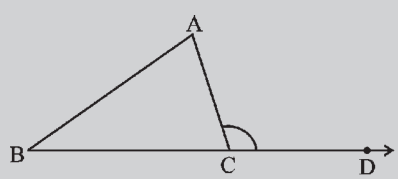


2. નીચેના માટે કાચી આકૃતિ દોરો :
   (a) ΔABCમાં $\overline{BE}$ મધ્યગા છે.
   (b) ΔPQRમાં $\overline{PQ}$ અને $\overline{PR}$ ત્રિકોણના વેધ છે.
   (c) ΔXYZમાં $\overline{YL}$ ત્રિકોણની બહારના ભાગમાં આવેલો વેધ છે.
3. આકૃતિ દોરીને ચકાસો કે સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણમાં મધ્યગા અને વેધ સમાન હોઈ શકે.

3QF31P

6.4 ત્રિકોણનો બહિષ્કોણ(Exterior Angle) અને તેના ગુણધર્મો

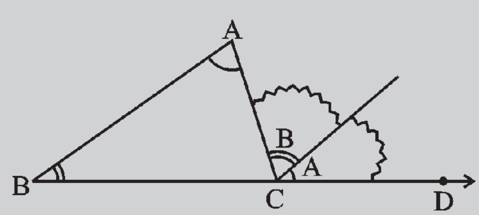
આ કરો



આકૃતિ 6.7

1. ΔABC દોરો અને આકૃતિ 6.7 માં બતાવ્યા પ્રમાણે તેની કોઈ પણ એક બાજુ, ધારો કે $\overline{BC}$ ને આગળ લંબાવો. C આગળ બનતો $\angle ACD$ જુઓ. આ ખૂણો ΔABC ની બહારના ભાગમાં છે. આપણે તેને શિરોબિંદુ C આગળ બનતો ΔABCનો **બહિષ્કોણ** કહીશું. સ્પષ્ટ છે કે $\angle BCA$ એ $\angle ACD$ નો આસન્નકોણ છે. ત્રિકોણના બાકીના બે ખૂણા $\angle A$ અને $\angle B$ **અંતઃસંમુખકોણ (interior opposite angles)** કહેવાય છે અથવા $\angle ACD$ના દૂરના અંતઃકોણ **(remote interior angles)** પણ કહેવાય છે. હવે $\angle A$ અને $\angle B$ કાપો (અથવા તેની નકલ બનાવો) અને તેમને આકૃતિ 6.8માં બતાવ્યા પ્રમાણે એકબીજાની પાસે ગોઠવો. શું આ બંને મળીને આખો $\angle ACD$ આવરી લે છે ? શું તમે કહી શકો કે, $m\angle ACD = m\angle A + m\angle B$?

2. અગાઉની જેમ ΔABC દોરો અને તેનો બહિષ્કોણ ACD બનાવો. હવે કોણમાપકથી $\angle ACD$, $\angle A$ અને $\angle B$ નાં માપ માપો.
   $\angle A + \angle B$ નાં માપનો સરવાળો કરો અને તેને $\angle ACD$નાં માપ સાથે સરખાવો.
   તમે જોયું કે $\angle ACD$,
   $\angle A + \angle B$ ને સમાન (અથવા માપનમાં ભૂલ હોય તો લગભગ સમાન) છે ?



આકૃતિ 6.8

તમે ઉપર જણાવેલી બંને પ્રવૃત્તિ બીજા કેટલાક ત્રિકોણ અને તેના બહિષ્કોણ દોરીને વારંવાર કરી શકો. દરેક વખતે તમને જણાશે કે ત્રિકોણનો બહિષ્કોણ તેના અંતઃસંમુખકોણના સરવાળા જેટલો છે. આ હકીકત તાર્કિક (logical) ક્રમબદ્ધ દલીલો (arguments)થી નિશ્ચિત કરી શકાય.

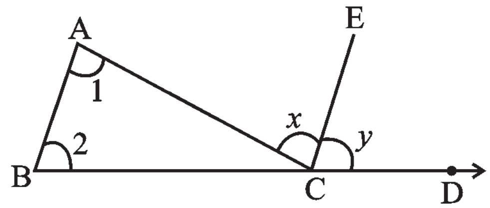
ત્રિકોણનો બહિષ્કોણ તેના અંતઃ સંમુખકોણના સરવાળા જેટલો હોય છે.

પક્ષ : ΔABC લો. $\angle ACD$ બહિષ્કોણ છે.

સાધ્ય : $m\angle ACD = m\angle A + m\angle B$

Cમાંથી $\overline{CE}$, $\overline{BA}$ને સમાંતર દોરો.

સાબિતી :



આકૃતિ 6.9

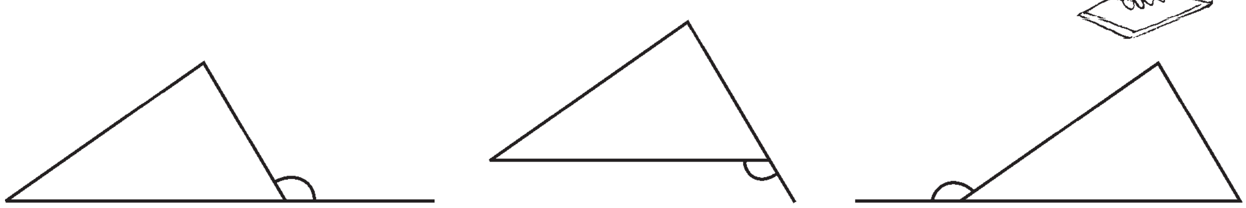
પગલું (Steps)	કારણ (Reason)
(a) $\angle 1 = \angle x$	$\overline{BA} \parallel \overline{CE}$ અને $\overline{AC}$ છેદિકા છે. આથી યુગ્મકોણ સમાન થાય.
(b) $\angle 2 = \angle y$	$\overline{BA} \parallel \overline{CE}$ અને $\overline{BD}$ છેદિકા છે. આથી અનુકોણ સમાન થાય.
(c) $\angle 1 + \angle 2 = \angle x + \angle y$	
(d) હવે $\angle x + \angle y = m\angle ACD$	આકૃતિ 6.9 પરથી

આથી $\angle 1 + \angle 2 = \angle ACD$

ત્રિકોણના બહિષ્કોણ અને તેના અંતઃસંમુખકોણ વચ્ચેનો ઉપર દર્શાવેલ સંબંધ **ત્રિકોણના બહિષ્કોણના ગુણધર્મ** તરીકે ઓળખાય છે.

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

1. ત્રિકોણના બહિષ્કોણ ઘણી રીતે બનાવી શકાય. તેમાંની ત્રણ રીત આકૃતિ 6.10 માં દર્શાવી છે.



આકૃતિ 6.10

બહિષ્કોણ મેળવવાની હજુ વધારે ત્રણ રીતો છે. તેની કાચી આકૃતિઓ (rough figures) બનાવવાનો પ્રયત્ન કરો.

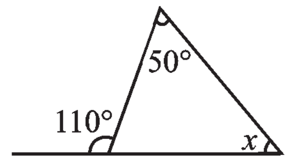
2. ત્રિકોણના દરેક ખૂણા આગળ બનતા બહિષ્કોણ સરખા છે ?
3. ત્રિકોણનો બહિષ્કોણ અને તેની અંદરના તેના આસન્નકોણના સરવાળા બાબતે તમે શું કહી શકો ?

ઉદાહરણ 1 આકૃતિ 6.11માં ખૂણો x શોધો.

ઉકેલ અંત:સંમુખકોણનો સરવાળો = બહિષ્કોણ

અથવા $50^\circ + x = 110^\circ$

અથવા $x = 60^\circ$

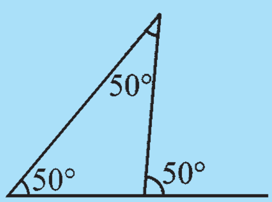


આકૃતિ 6.11

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

1. જ્યારે બહિષ્કોણ (i) કાટકોણ હોય, (ii) ગુરુકોણ હોય અને (iii) લઘુકોણ હોય તો દરેક વખતે બંને અંત:સંમુખકોણ વિશે તમે શું કહી શકો ?
2. કોઈ ત્રિકોણનો બહિષ્કોણ એ સરળકોણ (straight angle) હોઈ શકે ?

પ્રયત્ન કરો

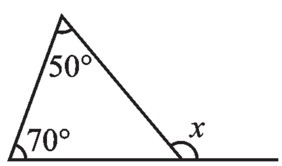


આકૃતિ 6.12

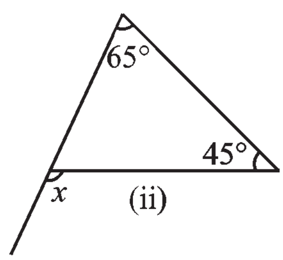
1. એક ત્રિકોણના બહિષ્કોણનું માપ 70° છે અને તેના એક અંત:સંમુખ કોણનું માપ 25° છે. બીજા અંત:સંમુખકોણનું માપ શોધો.
2. એક ત્રિકોણના બહિષ્કોણના અંત:સંમુખકોણના માપ 60° અને 80° છે. તો બહિષ્કોણનું માપ શોધો.
3. આકૃતિ 6.12 માં કંઈ ખોટું છે ? તમારું મંતવ્ય લખો.

સ્વાધ્યાય 6.2

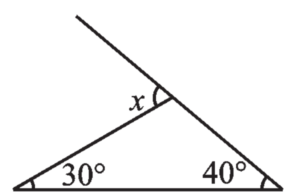
1. નીચેની આકૃતિઓમાં અજ્ઞાત બહિષ્કોણ xનું માપ શોધો.



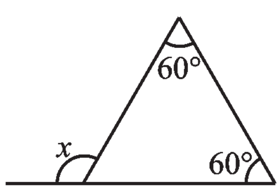
(i)



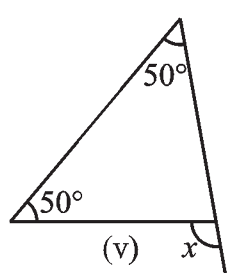
(ii)



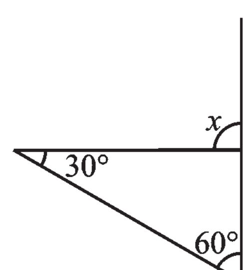
(iii)



(iv)

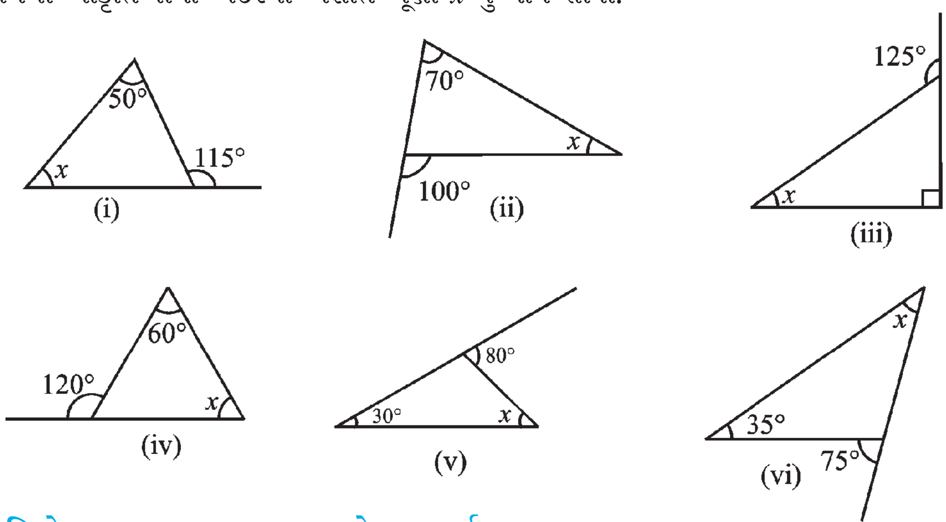


(v)



(vi)

2. નીચેની આકૃતિઓમાં અંદરના અજ્ઞાત ખૂણા x નું માપ શોધો.

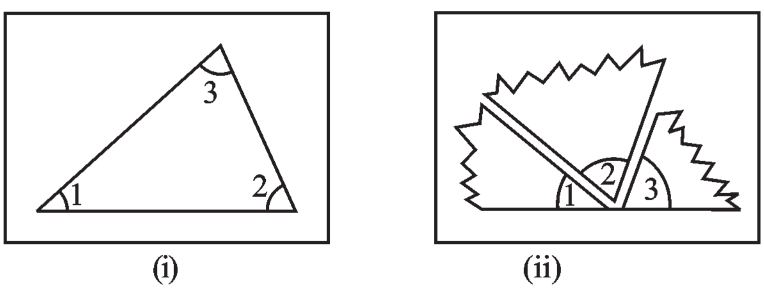


6.5 ત્રિકોણના ખૂણાના સરવાળાનો ગુણધર્મ (Angle Sum Properties of Triangle)

ત્રિકોણના ત્રણ ખૂણાને સાંકળતો ધ્યાન ખેંચે તેવો એક ગુણધર્મ છે. તમે એ નીચેની ચાર પ્રવૃત્તિ દ્વારા જોશો.

42JFFL

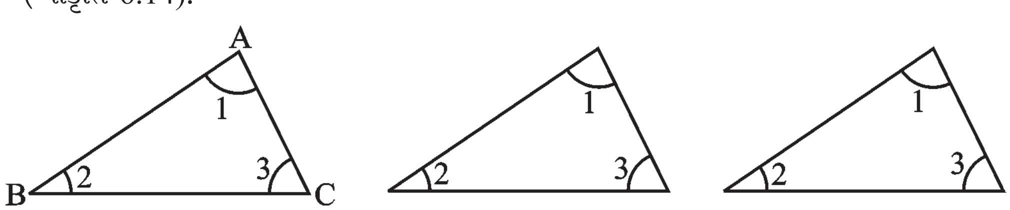
1. એક ત્રિકોણ દોરો. તેના ત્રણે ખૂણા કાપો. તેમને ફરીથી ગોઠવો [આકૃતિ 6.13 (i), (ii)]. હવે આ ત્રણ ખૂણા એક ખૂણો બનાવે છે. આ એક સરળ કોણ છે અને આથી તેનું માપ 180° છે.



આકૃતિ 6.13

આમ, ત્રિકોણના ત્રણે ખૂણાના માપનો સરવાળો 180° છે.

2. આ જ હકીકત તમે બીજી રીતે પણ જોઈ શકો. કોઈ પણ ΔABCની ત્રણ નકલ લો (આકૃતિ 6.14).

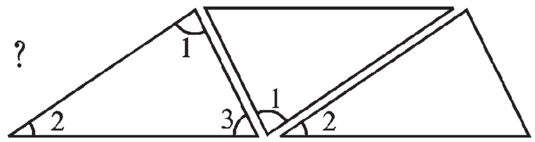


આકૃતિ 6.14

તેમને આકૃતિ 6.15 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ગોઠવો.

તમે ∠1 + ∠2 + ∠3 વિશે શું અવલોકન કરો છો ?

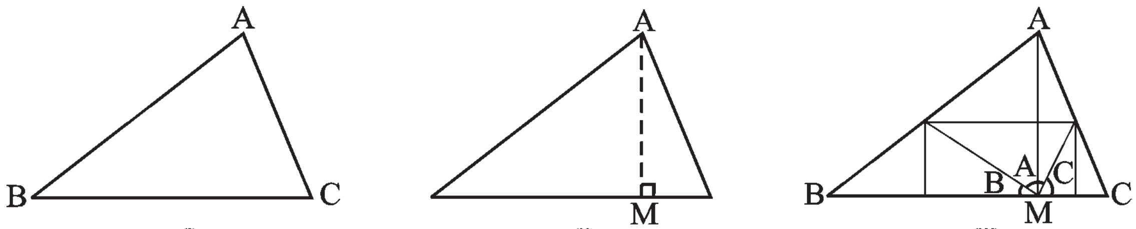
(તમે બહિષ્કોણનો ગુણધર્મ પણ જોઈ શકો છો ?)



આકૃતિ 6.15

3. એક કાગળમાંથી ΔABC કાપો (આકૃતિ 6.16).

ΔABCને A આગળથી વાળીને વેધ AM બનાવો, જે Aમાંથી પસાર થાય. હવે ત્રણે ખૂણાને એવી રીતે વાળો કે જેથી ત્રણે શિરોબિંદુઓ A, B અને C, M આગળ સ્પર્શે



આકૃતિ 6.16

તમે જોશો કે ત્રણે ખૂણા સાથે મળીને એક સરળકોણ બનાવે છે. આમ, ફરીથી જણાય છે કે ત્રિકોણના ત્રણે ખૂણાના માપનો સરવાળો 180° થાય છે.

4. તમારી નોટબુકમાં ત્રણ ત્રિકોણો ΔABC, ΔPQR અને ΔXYZ દોરો. કોણમાપક (protractor)નો ઉપયોગ કરીને દરેક ત્રિકોણના બધા ખૂણા માપો. તમારાં પરિણામોને કોષ્ટકમાં ગોઠવો.

Δનું નામ	ખૂણાના માપ	ત્રણ ખૂણાનાં માપનો સરવાળો
ΔABC	$m\angle A =$ ___ $m\angle B =$ ___ $m\angle C =$ ___	$m\angle A + m\angle B + m\angle C =$ ___
ΔPQR	$m\angle P =$ ___ $m\angle Q =$ ___ $m\angle R =$ ___	$m\angle P + m\angle Q + m\angle R =$ ___
ΔXYZ	$m\angle X =$ ___ $m\angle Y =$ ___ $m\angle Z =$ ___	$m\angle X + m\angle Y + m\angle Z =$ ___

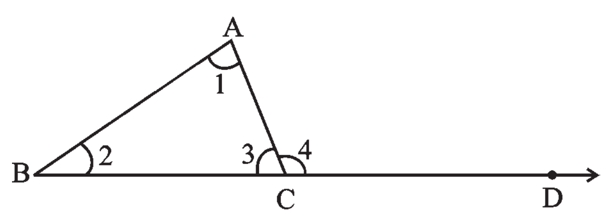
માપ લેવામાં થતી નાની ભૂલોને સ્વીકારીએ તો તમે જોશો કે છેલ્લા ખાનામાં હંમેશાં 180° (અથવા લગભગ 180°) આવે છે.

જો ચોક્સાઈપૂર્વકના માપ શક્ય હોય તો આ પણ બતાવે છે કે ત્રિકોણના ત્રણ ખૂણાનાં માપનો સરવાળો 180° છે.

હવે તમે તાર્કિક દલીલો દ્વારા તમારા આ તારણની સાબિતી આપવા માટે તૈયાર છો.

વિધાન : ત્રિકોણના ત્રણ ખૂણાનાં માપનો સરવાળો 180° છે.

આ સાબિત કરવા માટે આપણે ત્રિકોણના બહિષ્કોણના ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરીએ.



આકૃતિ 6.17

પક્ષ : $\angle 1, \angle 2, \angle 3$, ΔABCના ખૂણાઓ છે. (આકૃતિ 6.17).

$\angle 4$ એ BCને D સુધી લંબાવતાં મળતો બહિષ્કોણ છે.

સાબિતી :

$\angle 1 + \angle 2 = \angle 4$ (બહિષ્કોણનો ગુણધર્મ)

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 4 + \angle 3$ (બંને બાજુ $\angle 3$ ઉમેરતાં)

પરંતુ $\angle 4$ અને $\angle 3$ રૈખિક જોડ (એક ભુજ સામાન્ય અને બે પરસ્પર વિરોધી ભુજ) રચે છે. આથી $\angle 4 + \angle 3 = 180°$

માટે $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$.

હવે આપણે આ ગુણધર્મના ઉપયોગો જોઈશું.

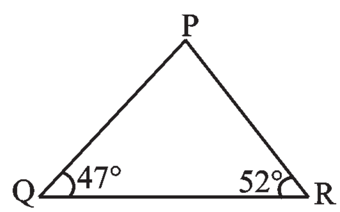
ઉદાહરણ 2 આપેલી (આકૃતિ 6.18) માં $m\angle P$ શોધો.

ઉકેલ ત્રિકોણના ખૂણાના માપના ગુણધર્મ પ્રમાણે

$$m\angle P + 47° + 52° = 180°$$

માટે $$m\angle P = 180° - 47° - 52°$$

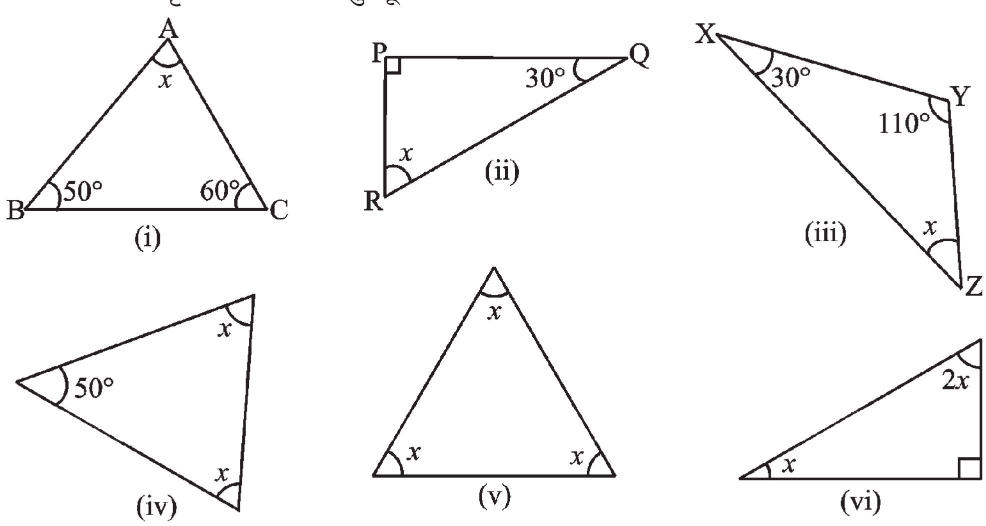
$$= 180° - 99° = 81°$$



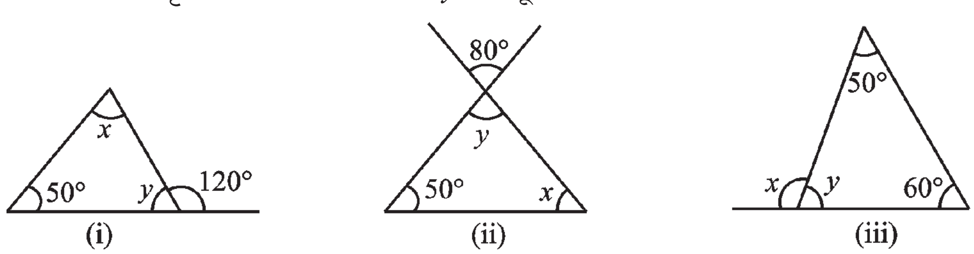
આકૃતિ 6.18

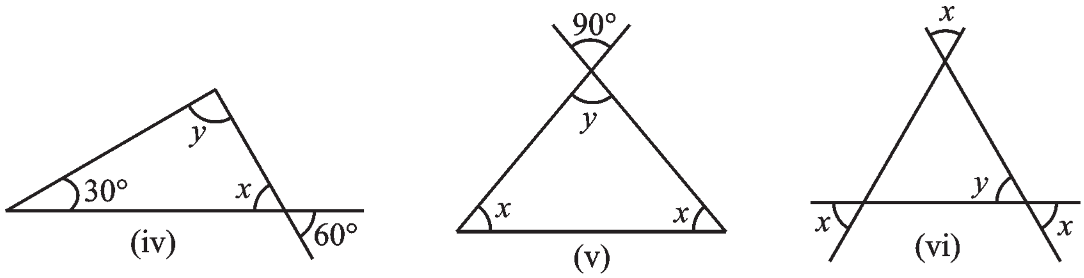
સ્વાધ્યાય 6.3

1. નીચેની આકૃતિમાં અજ્ઞાત xનું મૂલ્ય શોધો.



2. નીચેની આકૃતિઓમાં અજ્ઞાત x અને y નાં મૂલ્યો શોધો.





પ્રયત્ન કરો

1. ત્રિકોણના બે ખૂણા 30° અને 80° છે. ત્રીજો ખૂણો શોધો.
2. ત્રિકોણનો એક ખૂણો 80° નો છે અને બાકીના બંને ખૂણા સરખા છે. તે બંનેનાં માપ શોધો.
3. ત્રિકોણના ત્રણ ખૂણા 1 : 2 : 1 ના પ્રમાણમાં છે. આ ત્રિકોણના બધા ખૂણા શોધો. આ ત્રિકોણને બે ભિન્ન રીતે ઓળખો.

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

1. બે કાટખૂણાવાળો ત્રિકોણ મળી શકે ?
2. બે ગુરુકોણવાળો ત્રિકોણ મળી શકે ?
3. બે લઘુકોણવાળો ત્રિકોણ મળી શકે ?
4. જેના ત્રણે ખૂણા 60° કરતાં મોટા હોય તેવો ત્રિકોણ મળી શકે ?
5. જેના ત્રણે ખૂણા 60° હોય તેવો ત્રિકોણ મળી શકે ?
6. જેના ત્રણે ખૂણા 60° કરતાં નાના હોય તેવો ત્રિકોણ મળી શકે ?

6.6 બે વિશિષ્ટ ત્રિકોણ : સમબાજુ અને સમદ્વિબાજુ (Equilateral and Isosceles Triangles)

42TBH9

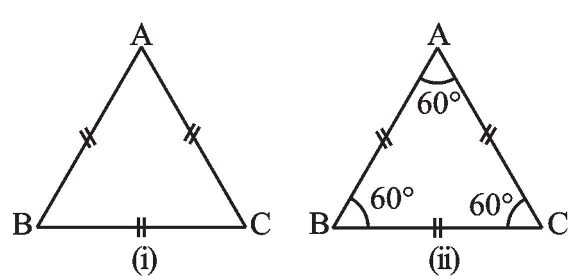
જે ત્રિકોણમાં બધી બાજુ સમાન લંબાઈની હોય તે ત્રિકોણને સમબાજુ ત્રિકોણ કહે છે.

સમબાજુ ત્રિકોણ ΔABCની બે નકલ કરો (આકૃતિ 6.19). તેમાંની એકને સ્થિર રાખો. બીજા ત્રિકોણને પહેલા પર મૂકો. તે પહેલા પર બરાબર બંધબેસતો આવે છે. તેને કોઈ પણ દિશામાં ફેરવો છતાં પણ તે બરાબર બંધબેસતો રહે છે. તમારા ધ્યાન પર આવ્યું હશે કે જ્યારે ત્રિકોણની ત્રણે બાજુનાં માપ સરખાં હોય ત્યારે ત્રણ ખૂણા પણ સમાન માપના છે ?

આપણે તારણ કાઢીએ કે સમબાજુ ત્રિકોણમાં

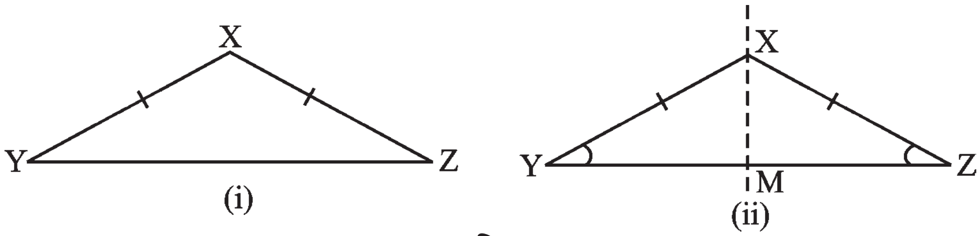
(i) બધી બાજુઓની લંબાઈ સમાન છે.

(ii) દરેક ખૂણાનું માપ 60° છે.



આકૃતિ 6.19

જે ત્રિકોણમાં બે બાજુ સમાન લંબાઈની હોય તેને સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ કહે છે.



આકૃતિ 6.20

કાગળમાંથી એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ XYZ કાપો, જેમાં XY = XZ છે (આકૃતિ 6.20). Z એ Y પર આવે તે રીતે એને વાળો. Xમાંથી મળતી રેખા (સળ) XM એ સંમિતિની અક્ષ (axis of symmetry) છે. (જે તમે પ્રકરણ 12માં શીખશો). તમને જણાશે કે $\angle Y$ અને $\angle Z$ એકબીજા પર બંધબેસતા આવે છે. XY અને XZને સમાન બાજુ કહે છે. YZ ને આધાર કહે છે, $\angle Y$ અને $\angle Z$ને આધારના ખૂણા કહે છે અને તેઓ પણ સમાન છે.

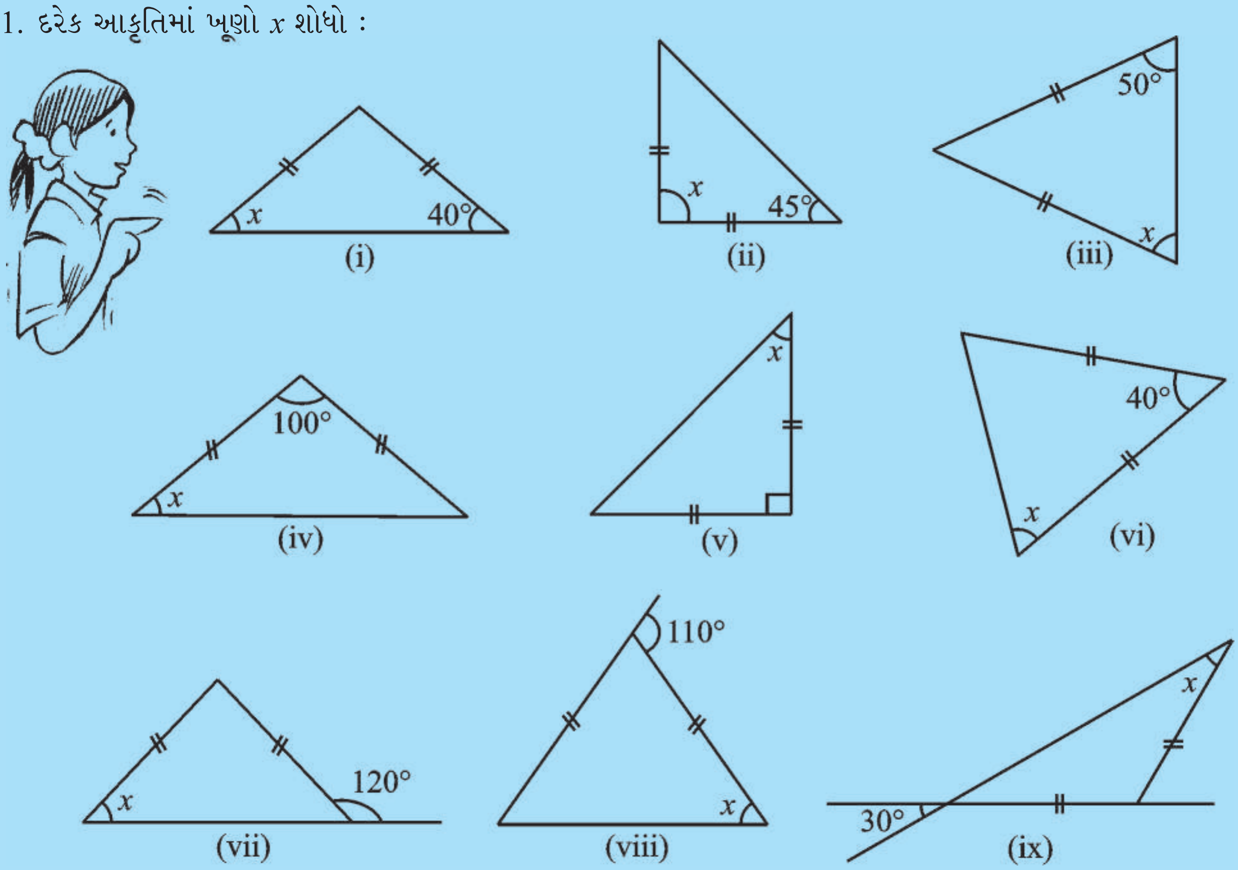
આમ, એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણમાં-

(i) બે બાજુની લંબાઈ સરખી છે.

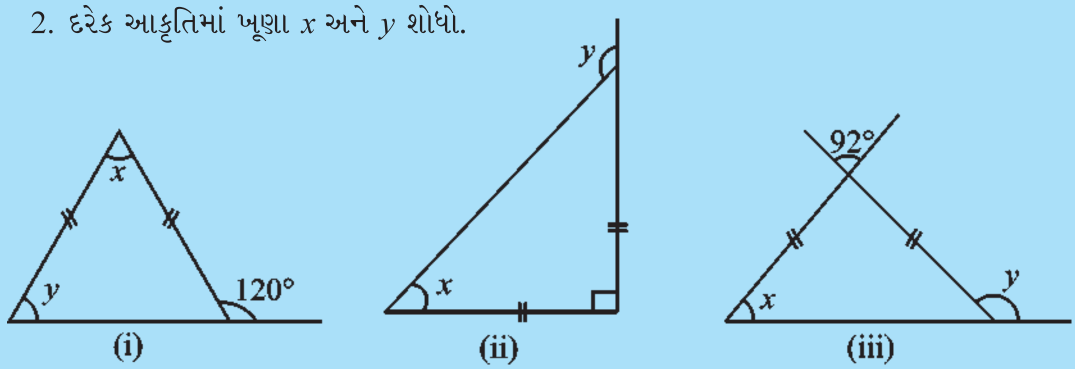
(ii) સમાન બાજુની સામેના ખૂણા સમાન છે.

પ્રયત્ન કરો

1. દરેક આકૃતિમાં ખૂણો x શોધો :

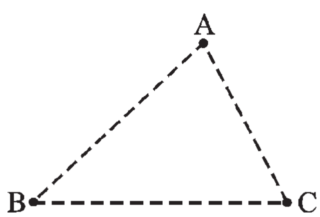


2. દરેક આકૃતિમાં ખૂણા x અને y શોધો.



6.7 ત્રિકોણની બે બાજુની લંબાઈનો સરવાળો (Sum of the Lengths of Two Sides of a Triangle)

1. રમતના મેદાનમાં ત્રણ અસમરેખ બિંદુઓ (non-collinear points) A, B અને C નક્કી કરો. ચૂનાના પાવડરથી AB, BC અને CA રસ્તા આંકો.



આકૃતિ 6.21

તમારા મિત્રને A થી ચાલવાનું શરૂ કરીને આમાંના એક અથવા વધુ રસ્તા પર ચાલીને C સુધી પહોંચવાનું કહો. જેમ કે તે પહેલાં $\overline{AB}$ પર અને પછી $\overline{BC}$ પર ચાલીને C સુધી પહોંચી જાય અથવા તે સીધો $\overline{AC}$ પર ચાલીને C પર પહોંચે. સ્વાભાવિક રીતે તે સીધો રસ્તો $\overline{AC}$ પસંદ કરશે. જો તે બીજો રસ્તો (પહેલાં $\overline{AB}$ અને પછી $\overline{BC}$ નો) પસંદ કરે તો વધારે ચાલવાનું થશે. બીજા શબ્દોમાં,

$$AB + BC > AC \qquad \text{(i)}$$

એ જ રીતે જો કોઈએ Bથી શરૂ કરીને A પર પહોંચવાનું હોય તો તે $\overline{BC}$ અને $\overline{CA}$ નો રસ્તો પસંદ નહિ કરે પણ $\overline{BA}$ પસંદ કરશે કારણ કે,

$$BC + CA > AB \qquad \text{(ii)}$$

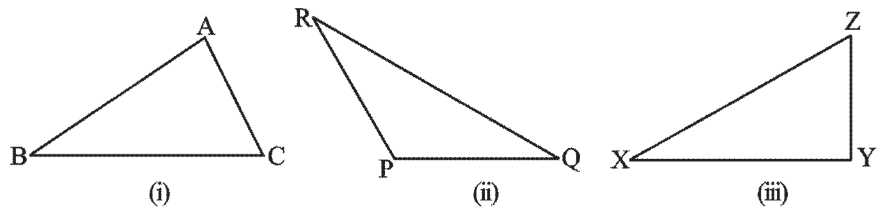
એ જ રીતે આપણને મળે કે,

$$CA + AB > BC \qquad \text{(iii)}$$

આ અવલોકનો પરથી સૂચન મળે છે કે **ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાજુની લંબાઈનો સરવાળો ત્રીજી બાજુ કરતાં વધુ છે.**

2. જુદી જુદી લંબાઈઓ, જેમ કે 6 સેમી, 7 સેમી, 8 સેમી, 9 સેમી, ..., 20 સેમીની 15 નાની લાકડીઓ (અથવા પટ્ટીઓ) લો. આમાંની કોઈ પણ ત્રણ લાકડી લો અને ત્રિકોણ બનાવવાનો પ્રયત્ન કરો. ત્રણ લાકડીઓ ભિન્ન ભિન્ન રીતે પસંદ કરી વારંવાર પ્રયત્ન કરો. ધારો કે તમે પહેલાં 6 સેમી અને 12 સેમી લંબાઈની બે દાંડીઓ પસંદ કરી છે. તમારી ત્રીજી લાકડીની લંબાઈ 12 – 6 = 6 સેમી કરતાં વધુ અને 12 + 6 = 18 સેમી કરતાં ઓછી જ હોવી જોઈએ. પ્રયત્ન કરો અને શોધો કે આવું શા માટે થાય છે ? ત્રિકોણ બનાવવા માટે તમારે એવી ત્રણ લાકડીઓ લેવી પડશે કે હંમેશાં તેમાંની કોઈ પણ બેની લંબાઈનો સરવાળો ત્રીજી કરતાં મોટો થવો જોઈએ. આ સૂચવે છે કે ત્રિકોણની બે બાજુની લંબાઈનો સરવાળો ત્રીજી બાજુથી વધુ હોય છે.

3. તમારી નોટબુકમાં કોઈ પણ ત્રણ ત્રિકોણ, ΔABC, ΔPQR અને ΔXYZ દોરો. (આકૃતિ 6.22)



આકૃતિ 6.22

તમારી માપપટ્ટી (ruler) ની મદદથી તેમની લંબાઈ માપો અને તમને મળેલાં પરિણામ નીચે પ્રમાણે કોષ્ટકમાં નોંધો :

Δનું નામ	બાજુઓની લંબાઈ	શું આ સાચું છે ?	
ΔABC	AB ___	AB – BC < CA	(હા / ના)
		___ + ___ > ___	
	BC ___	BC – CA < AB	(હા / ના)
		___ + ___ > ___	
	CA ___	CA – AB < BC	(હા / ના)
		___ + ___ > ___	
ΔPQR	PQ ___	PQ – QR < RP	(હા / ના)
		___ + ___ > ___	
	QR ___	QR – RP < PQ	(હા / ના)
		___ + ___ > ___	
	RP ___	RP – PQ < QR	(હા / ના)
		___ + ___ > ___	
ΔXYZ	XY ___	XY – YZ < ZX	(હા / ના)
		___ + ___ > ___	
	YZ ___	YZ – ZX < XY	(હા / ના)
		___ + ___ > ___	
	ZX ___	ZX – XY < YZ	(હા / ના)
		___ + ___ > ___	

આપણી અગાઉની ધારણા (guess) આનાથી વધુ **સુદૃઢ (strengthens)** થાય છે. આથી આપણે તારવીએ કે **ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાજુની લંબાઈનો સરવાળો ત્રીજી બાજુથી વધુ હોય છે.**

આપણને એ પરિણામ પણ મળે છે કે ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાજુની લંબાઈનો તફાવત ત્રીજી બાજુથી ઓછો હોય છે.

ઉદાહરણ 3 શું એવો ત્રિકોણ મળે કે જેની બાજુની લંબાઈ 10.2 સેમી, 5.8 સેમી અને 4.5 સેમી થાય ?

ઉકેલ ધારો કે આવો ત્રિકોણ શક્ય છે તો કોઈ પણ બે બાજુની લંબાઈનો સરવાળો ત્રીજી બાજુની લંબાઈ કરતાં વધુ થવો જોઈએ. ચાલો, આ ચકાસીએ.

$4.5 + 5.8 > 10.2$	થાય છે ?	હા
$5.8 + 10.2 > 4.5$	થાય છે ?	હા
$10.2 + 4.5 > 5.8$	થાય છે ?	હા

આથી આવો ત્રિકોણ શક્ય છે.

ઉદાહરણ 4 એક ત્રિકોણની બે બાજુની લંબાઈ 6 સેમી અને 8 સેમી છે. ત્રીજી બાજુની લંબાઈ કઈ બે સંખ્યાઓ વચ્ચે આવશે ?

ઉકેલ આપણે જાણીએ છીએ કે ત્રિકોણની બે બાજુની લંબાઈનો સરવાળો હંમેશાં ત્રીજી બાજુની લંબાઈ કરતાં વધુ હોય છે.

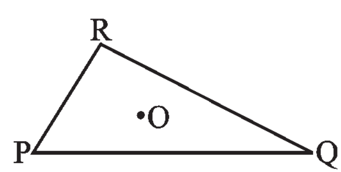
આથી ત્રીજી બાજુ આ બે બાજુનાં સરવાળા કરતાં નાની થવી જોઈએ. આમ, ત્રીજી બાજુ $8 + 6 = 14$ સેમી કરતાં નાની થવી જોઈએ.

ત્રીજી બાજુ, બે બાજુના તફાવતથી નાની ન હોઈ શકે. આમ, ત્રીજી બાજુ $8 - 6 = 2$ સેમી કરતાં મોટી હોવી જોઈએ.

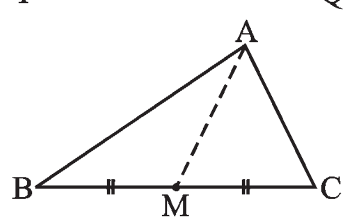
ત્રીજી બાજુ 2 સેમીથી મોટી અને 14 સેમીથી નાની કોઈ પણ લંબાઈની હોઈ શકે.

સ્વાધ્યાય 6.4

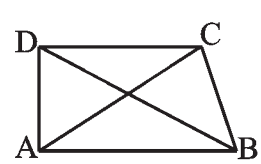
1. નીચે પ્રમાણેની બાજુઓ ધરાવતો ત્રિકોણ શક્ય છે ?
   (i) 2 સેમી, 3 સેમી, 5 સેમી (ii) 3 સેમી, 6 સેમી, 7 સેમી
   (iii) 6 સેમી, 3 સેમી, 2 સેમી



2. ΔPQRના અંદરના ભાગમાં કોઈ પણ બિંદુ O લો.
   (i) શું $OP + OQ > PQ$ છે ?
   (ii) શું $OQ + OR > QR$ છે ?
   (iii) શું $OR + OP > RP$ છે ?



3. ΔABCની મધ્યગા AM છે.
   $AB + BC + CA > 2AM$ થાય છે ?
   (ΔABM અને ΔAMCની બાજુઓને ધ્યાનમાં લો.)



4. ABCD એક ચતુષ્કોણ (quadrilateral) છે.
   $AB + BC + CD + DA > AC + BD$ થાય છે ?
5. ABCD એક ચતુષ્કોણ છે.
   $AB + BC + CD + DA < 2(AC + BD)$ થાય છે ?

6. એક ત્રિકોણની બે બાજુઓની લંબાઈ 12 સેમી અને 15 સેમી છે. ત્રીજી બાજુની લંબાઈ કયા બે માપની વચ્ચે આવવી જોઈએ ?

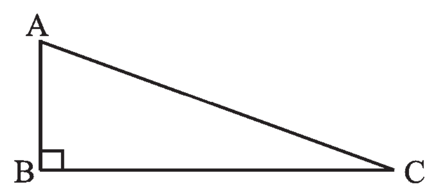
વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

1. શું ત્રિકોણના કોઈ પણ બે ખૂણાનો સરવાળો હંમેશાં ત્રીજા ખૂણા કરતાં વધુ હોય છે?

6.8 કાટકોણ ત્રિકોણ અને પાયથાગૉરસનો ગુણધર્મ (Right-angled Triangle and Pythagoras Property)

BSK4FB

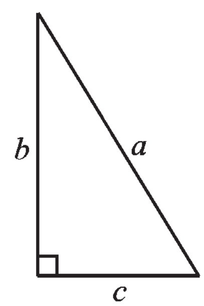
ઈ.સ. પૂર્વે છઠ્ઠી સદીમાં થયેલા ગ્રીક તત્ત્વજ્ઞાની પાયથાગૉરસે અહીં આપેલો કાટકોણ ત્રિકોણનો એક અગત્યનો ગુણધર્મ શોધ્યો હોવાનું કહેવાય છે. આથી આ ગુણધર્મ તેમના નામ સાથે જોડાયેલો છે. હકીકતે આ ગુણધર્મ બીજા કેટલાક દેશોના લોકો માટે પણ જાણીતો હતો. ભારતીય ગણિતશાસ્ત્રી બૌધાયને પણ આને સમકક્ષ ગુણધર્મ જણાવેલો છે. હવે આપણે પાયથાગૉરસનો ગુણધર્મ સમજવાનો પ્રયત્ન કરીએ.



આકૃતિ 6.23

કાટકોણ ત્રિકોણમાં બાજુઓનાં ખાસ નામ છે. કાટખૂણાની સામેની બાજુને **કર્ણ (hypotenuse)** કહેવામાં આવે છે. બાકીની બે બાજુઓને કાટકોણ ત્રિકોણના **પાયા** (કાટખૂણો બનાવતી બાજુઓ) કહેવામાં આવે છે.

ΔABCમાં (આકૃતિ 6.23) B આગળ કાટખૂણો છે. આથી AC કર્ણ છે. $\overline{AB}$ અને $\overline{BC}$ એ ΔABCના **પાયા** છે.

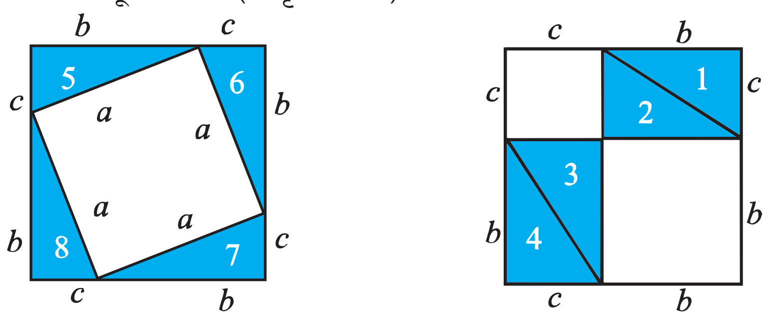


આકૃતિ 6.24

તમને યોગ્ય લાગે તે માપના કાટકોણ ત્રિકોણની 8 એકસરખી નકલો કરો. દા.ત. તમે એવો કાટકોણ ત્રિકોણ બનાવો જેનો કર્ણ a એકમ લંબાઈનો છે અને બીજી બાજુઓની લંબાઈ b અને c એકમ છે (આકૃતિ 6.24).

એક કાગળ પર બે એકસરખા ચોરસ દોરો જેની બાજુની લંબાઈ $b + c$ જેટલી હોય.

નીચેની આકૃતિ 6.25માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે તમારે ચાર ત્રિકોણ એક ચોરસમાં અને બીજા ચાર ત્રિકોણ બીજા ચોરસમાં મૂકવાના છે (આકૃતિ 6.25).



આકૃતિ 6.25

ચોરસ એકસરખા છે અને જે આઠ ત્રિકોણ મૂક્યા (ગોઠવ્યા) તે પણ એકસરખા છે.

આથી ચોરસ Aના અનાવૃત (uncovered) ભાગનું ક્ષેત્રફળ = ચોરસ Bના અનાવૃત ભાગનું ક્ષેત્રફળ.

એટલે કે ચોરસ Aની અંદરના ચોરસનું ક્ષેત્રફળ = ચોરસ Bની અંદરના બંને અનાવૃત ચોરસનું કુલ ક્ષેત્રફળ

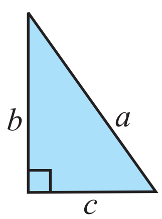
$$a^2 = b^2 + c^2$$

આ પાયથાગોરસનો ગુણધર્મ છે. તેને નીચે પ્રમાણે લખી શકાય :

કાટકોણ ત્રિકોણમાં કર્ણ પરના ચોરસનું ક્ષેત્રફળ = બાકીની બાજુઓ પરના ચોરસના ક્ષેત્રફળોનો સરવાળો

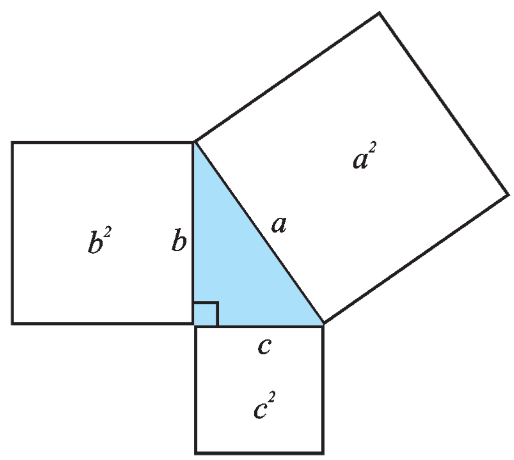
આ ગુણધર્મ ગણિતમાં ખૂબ જ ઉપયોગી **પરિણામ** છે. તમને એનો અર્થ સ્પષ્ટ હોવો જોઈએ.

પરિણામ એ છે કે કોઈ પણ કાટકોણ ત્રિકોણ માટે કર્ણ પરના ચોરસનું ક્ષેત્રફળ બીજી બે બાજુઓ પરના ચોરસનાં ક્ષેત્રફળોના સરવાળા જેટલું હોય છે.



શક્ય હોય તો ચોરસ ખાનાંવાળા કાગળ પર કાટકોણ ત્રિકોણ દોરીને તેની બાજુઓ પર ચોરસ રચો. ચોરસનું ક્ષેત્રફળ ગણીને પ્રમેયને પ્રાયોગિક રીતે ચકાસો (આકૃતિ 6.26).

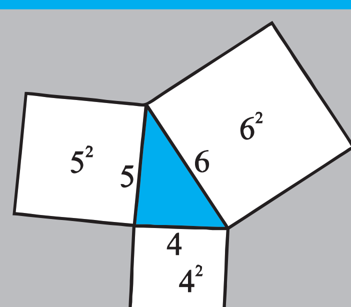
જો કાટકોણ ત્રિકોણ આપેલો હોય તો પાયથાગોરસનો ગુણધર્મ સાચો છે. જો કોઈ ત્રિકોણ માટે પાયથાગોરસનું પરિણામ સાચું હોય તો તે કાટકોણ ત્રિકોણ છે ? (આવા પ્રશ્નો એ પ્રતિપ્રશ્નો તરીકે ઓળખાય છે.) આપણે એનો જવાબ આપવાનો પ્રયત્ન કરીશું. હવે આપણે એ બતાવીશું કે જો કોઈ ત્રિકોણ માટે તેની બે બાજુના વર્ગનો સરવાળો તે ત્રીજી બાજુના વર્ગ જેટલો થાય છે તો એ કાટકોણ ત્રિકોણ જ છે.



આકૃતિ 6.26

આ કરો

1. 4 સેમી, 5 સેમી અને 6 સેમી બાજુની લંબાઈવાળા ચોરસ કાપો. એ ચોરસના ખૂણાને યોગ્ય રીતે ગોઠવીને (આકૃતિ 6.27) ત્રિકોણાકાર ભાગ મેળવો. આ ભાગની નકલ કરીને ત્રિકોણ બનાવો. આ ત્રિકોણના દરેક ખૂણા માપો. તમને જણાશે કે કોઈ પણ ખૂણો કાટકોણ નથી. ખરેખર તો આ કિસ્સામાં દરેક ખૂણો લઘુકોણ છે ! નોંધો કે $4^2 + 5^2 \neq 6^2$, $5^2 + 6^2 \neq 4^2$ અને $6^2 + 4^2 \neq 5^2$.



આકૃતિ 6.27

2. ઉપરની પ્રવૃત્તિ 4 સેમી, 5 સેમી અને 7 સેમી લંબાઈની બાજુવાળા ચોરસ માટે ફરીથી કરો. તમને એક ગુરુકોણ ત્રિકોણ મળશે !

નોંધો કે $4^2 + 5^2 \neq 7^2$ વગેરે.

આ બતાવે છે કે પાયથાગૉરસનો ગુણધર્મ સાચો હોય તો અને તો જ ત્રિકોણ, કાટકોણ ત્રિકોણ હોય. આમ, આપણને નીચેની હકીકત મળે છે.

જો પાયથાગૉરસની શરત સાબિત થતી હોય તો તે કાટકોણ ત્રિકોણ જ હોય.

ઉદાહરણ 5 જેની બાજુની લંબાઈ 3 સેમી, 4 સેમી અને 5 સેમી છે તેવો ત્રિકોણ કાટકોણ ત્રિકોણ છે કે નહિ તે નક્કી કરો.

ઉકેલ $3^2 = 3 \times 3 = 9$; $4^2 = 4 \times 4 = 16$; $5^2 = 5 \times 5 = 25$ અને $3^2 + 4^2 = 5^2$ મળે છે.

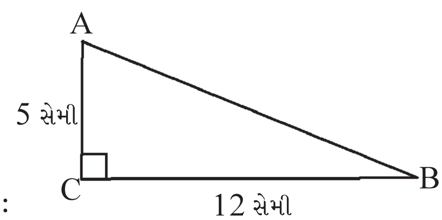
આથી આ ત્રિકોણ કાટકોણ ત્રિકોણ છે.

નોંધ : કોઈ પણ કાટકોણ ત્રિકોણમાં કર્ણ સૌથી લાંબી બાજુ છે. આ ઉદાહરણમાં 5 સેમી લંબાઈ વાળી બાજુ કર્ણ છે.

ઉદાહરણ 6 ΔABCમાં $\angle C$ કાટખૂણો છે.

જો $AC = 5$ સેમી અને $BC = 12$ સેમી

તો ABની લંબાઈ શોધો.



આકૃતિ 6.28

ઉકેલ કાચી આકૃતિ આપણને મદદરૂપ બનશે (આકૃતિ 6.28) :

પાયથાગૉરસ પ્રમેય મુજબ

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

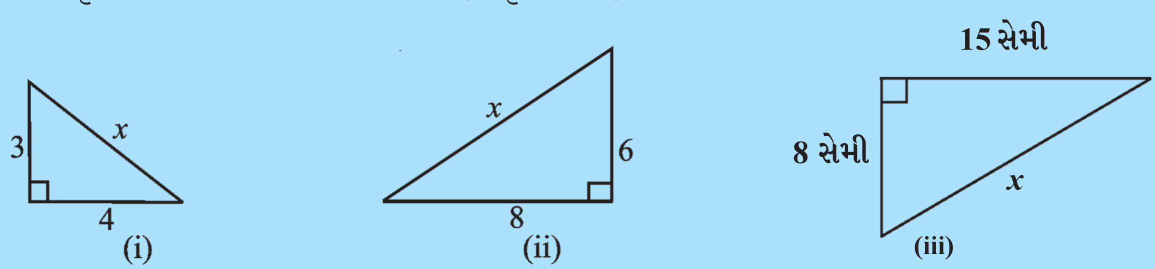
$$= 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$$

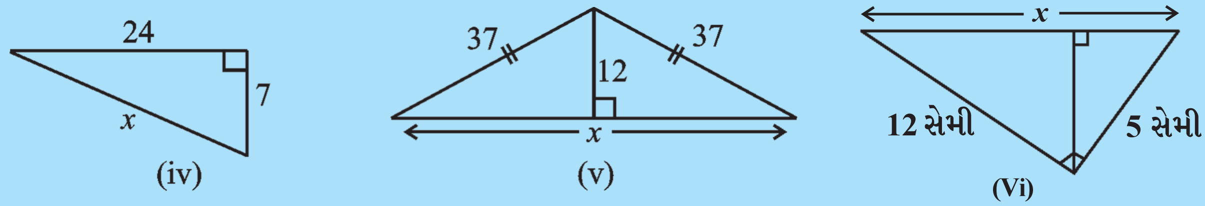
અથવા $AB^2 = 13^2$, આથી $AB = 13$ અથવા ABની લંબાઈ 13 સેમી છે.

નોંધ : પૂર્ણવર્ગ શોધવા માટે તમે અવિભાજ્ય અવયવો (prime factors) ની રીતનો ઉપયોગ કરી શકો.

પ્રયત્ન કરો

નીચેની આકૃતિઓમાં અજ્ઞાત લંબાઈ x શોધો : (આકૃતિ 6.29)

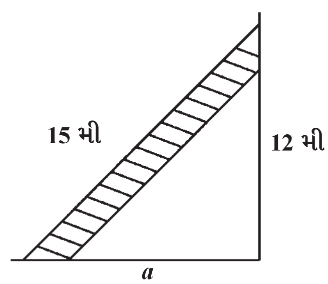




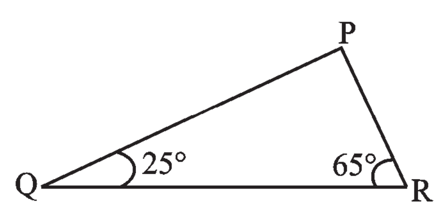
આકૃતિ 6.29

સ્વાધ્યાય 6.5

1. ΔPQRમાં ∠P કાટખૂણો છે. જો PQ = 10 સેમી અને PR = 24 સેમી હોય તો QR શોધો.
2. ΔABCમાં ∠C કાટખૂણો છે. જો AB = 25 સેમી અને AC = 7 સેમી તો BC શોધો.
3. 15 મીટર લાંબી નિસરણી (ladder)ને દીવાલ સાથે ટેકવતાં તે જમીનથી 12મીટર ઊંચી બારી સુધી પહોંચે છે. નિસરણીના જમીન પરના છેડાનું દીવાલથી અંતર a શોધો.



4. નીચેનામાંથી કાટકોણ ત્રિકોણની કઈ બાજુઓ હોઈ શકે ?
   (i) 2.5 સેમી, 6.5 સેમી, 6 સેમી
   (ii) 2 સેમી, 2 સેમી, 5 સેમી
   (iii) 1.5 સેમી, 2 સેમી, 2.5 સેમી
   જો કાટકોણ ત્રિકોણ હોય તો કયો ખૂણો કાટકોણ છે તે નક્કી કરો.
5. એક ઝાડ જમીન પરથી 5 મીટર ઊંચાઈએથી તૂટી પડે છે અને તેની ટોચ ઝાડના થડથી 12 મીટર અંતરે જમીનને અડે છે. ઝાડની મૂળ ઊંચાઈ શોધો.
6. ΔPQRમાં ∠Q અને ∠R અનુક્રમે 25° અને 65° છે. નીચેના માંથી કયું સાચું છે તે લખો :
   (i) $PQ^2 + QR^2 = RP^2$
   (ii) $PQ^2 + RP^2 = QR^2$
   (iii) $RP^2 + QR^2 = PQ^2$



7. જેની બાજુની લંબાઈ 40 સેમી અને વિકર્ણની લંબાઈ 41 સેમી હોય તેવા લંબચોરસની પરિમિતિ શોધો.
8. સમબાજુ ચતુષ્કોણ (rhombus)ના વિકર્ણો (diagonals)ના માપ 16 સેમી અને 30 સેમી છે. તેની પરિમિતિ શોધો.

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

1. P આગળ કાટખૂણો હોય તેવા ΔPQRની લાંબામાં લાંબી બાજુ કઈ ?
2. B આગળ કાટખૂણો હોય તેવા ΔABCની લાંબામાં લાંબી બાજુ કઈ ?
3. કાટકોણ ત્રિકોણની લાંબામાં લાંબી બાજુ કઈ ?
4. **"લંબચોરસના વિકર્ણ પર દોરેલા ચોરસનું ક્ષેત્રફળ, તેની લંબાઈ અને પહોળાઈ પર દોરેલા ચોરસના ક્ષેત્રફળના સરવાળા જેટલું થાય છે."** આ બૌધાયનનું પ્રમેય છે. આને પાયથાગોરસના પ્રમેય સાથે સરખાવો.

જાતે કરો

જ્ઞાનવર્ધક પ્રવૃત્તિ

પાયથાગોરસપ્રમેયની "ટુકડા કરો" અને "પુનઃ ગોઠવો" પ્રક્રિયાનો ઉપયોગ કરતી ઘણી સાબિતીઓ છે. તેમાંની કેટલીક શોધો, ભેગી કરો અને તેની સમજણ આપતા ચાર્ટ બનાવો.

આપણે શું ચર્ચા કરી ?

1. ત્રિકોણનાં **છ અંગો** એ તેની **ત્રણ બાજુ** અને **ત્રણ ખૂણા** છે.
2. ત્રિકોણના શિરોબિંદુને તેની સામેની બાજુના મધ્યબિંદુ સાથે જોડતો રેખાખંડ ત્રિકોણની મધ્યગા કહેવાય છે. ત્રિકોણમાં ત્રણ મધ્યગા છે.
3. ત્રિકોણના શિરોબિંદુમાંથી તેની સામેની બાજુને સમાવતી રેખા પર દોરેલા લંબ રેખાખંડને ત્રિકોણનો વેધ કહેવાય છે. ત્રિકોણમાં ત્રણ વેધ છે.
4. જ્યારે ત્રિકોણની કોઈ બાજુને લંબાવવામાં આવે ત્યારે બહિષ્કોણ બને છે. દરેક શિરોબિંદુ આગળ બે રીતે બહિષ્કોણ રચી શકાય.
5. બહિષ્કોણનો ગુણધર્મ :
   ત્રિકોણના કોઈ પણ બહિષ્કોણનું માપ તેના અંતઃસંમુખકોણના માપના સરવાળા જેટલું હોય છે.
6. ત્રિકોણના ખૂણાના સરવાળાનો ગુણધર્મ :
   ત્રિકોણના ત્રણે ખૂણાનાં માપનો સરવાળો 180° છે.
7. જો કોઈ ત્રિકોણની ત્રણે બાજુની લંબાઈ સમાન હોય તો તેને **સમબાજુ ત્રિકોણ** કહેવાય. સમબાજુ ત્રિકોણમાં દરેક ખૂણાનું માપ 60° છે.
8. જો ત્રિકોણની ઓછામાં ઓછી બે બાજુની લંબાઈ સમાન હોય તો તેને સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ કહે છે. બે સમાન સિવાયની ત્રીજી બાજુને તેનો આધાર કહે છે. સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના આધાર પરના ખૂણાઓ સમાન હોય છે.
9. ત્રિકોણની બાજુની લંબાઈનો ગુણધર્મ :
   ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાજુની લંબાઈનો સરવાળો ત્રીજી બાજુની લંબાઈ કરતાં વધુ હોય છે.
   ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાજુની લંબાઈનો તફાવત ત્રીજી બાજુની લંબાઈ કરતાં ઓછો હોય છે.

જ્યારે ત્રણ બાજુની લંબાઈઓ આપી હોય ત્યારે ત્રિકોણ દોરી શકાય કે કેમ તે નક્કી કરવા માટે આ ગુણધર્મ ઉપયોગી છે.

10. કાટકોણ ત્રિકોણમાં કાટખૂણાની સામેની બાજુને **કર્ણ** કહેવાય છે. બાકીની બે બાજુને કાટકોણ ત્રિકોણના પાયા કહે છે.

11. **પાયથાગૉરસનો ગુણધર્મ :**

કાટકોણ ત્રિકોણમાં,

કર્ણનો વર્ગ = બાકીની બે બાજુના વર્ગનો સરવાળો

જો કોઈ ત્રિકોણ કાટકોણ ન હોય તો આ પરિણામ સાચું નથી. આ પરિણામ ત્રિકોણ કાટકોણ છે કે નહિ તે નક્કી કરવા માટે ઉપયોગી છે.