ગણિતમાં સાબિતીઓ A1

A1.1 પ્રાસ્તાવિક

આપણા રોજિંદા જીવનમાં તર્ક કરવાની અને વિચારવાની ક્ષમતા ખૂબ જ ઉપયોગી છે. ઉદાહરણ તરીકે, ધારો કે, જો કોઈ રાજકારણી તમને એમ કહે કે, 'જો તમને સ્વચ્છ સરકારમાં રસ હોય, તો તમારે મને મત આપવો જોઈએ' તો તે વાસ્તવમાં તમને એમ ગળે ઉતારવા ઇચ્છે છે કે, જો તમે તેને મત ન આપ્યો, તો તમને સ્વચ્છ સરકારમાં રસ નથી. એ જ રીતે, જો કોઈ જાહેરાત એવું દર્શાવતી હોય કે, 'બુદ્ધિશાળી લોકો *XYZ* બુટ પહેરે છે,' તો શું કંપની તમને એવું તારણ કાઢવા પ્રેરે છે કે, જો તમે *XYZ* બુટ નહિ પહેરો, તો તમે પૂરતા બુદ્ધિશાળી નથી. તમે એ જોઈ શકો છો કે, ઉપરનાં વિધાનો સામાન્ય લોકોને ગેરમાર્ગે દોરી શકે છે. તેથી, જો આપણે તર્કની પદ્ધતિ યોગ્ય રીતે સમજીએ, તો આપણે અજાણતાં પણ આવા છળમાં પડીએ નહિ.

તર્કનો સાચો ઉપયોગ ગણિતનું હાર્દ છે. વિશિષ્ટ રીતે સાબિતીની રચનામાં તેનો ઉપયોગ થાય છે. ખાસ કરીને ભૂમિતિમાં ધોરણ IXમાં તમે સાબિતીની સંકલ્પનાનો પરિચય મેળવ્યો છે અને તમે ખરેખર ઘણાં વિધાનો સાબિત કર્યાં છે. યાદ કરો કે, જેમાંનું પ્રત્યેક ગાણિતિક વિધાન સાબિતીમાંના અગાઉના વિધાન પરથી અથવા અગાઉ સાબિત કરેલ કોઈ પ્રમેય પરથી અથવા પૂર્વધારણા કે પ્રતીપ પરથી તાર્કિક રીતે તારવેલું હોય છે એવાં કેટલાંક વિધાનોથી સાબિતી રચાય છે. સાબિતીની રચનામાં મુખ્ય સાધન, આનુમાનિક તર્કની પ્રક્રિયા છે.

આ પ્રકરણની શરૂઆત આપણે ગાણિતિક વિધાન શું છે, તેના પુનરાવર્તનથી કરીશું. આપણે આનુમાનિક તર્કમાં આપણાં કૌશલ્યો ધારદાર બનાવવા કેટલાંક ઉદાહરણોનો ઉપયોગ કરીને આગળ વધીશું. આપણે નિષેધનો ખ્યાલ પણ મેળવીશું અને આપેલા વિધાનનું નિષેધ મેળવીશું. પછી આપણે ચર્ચા કરીશું કે, આપેલ વિધાનનું પ્રતીપ કેવી રીતે શોધી શકાય. અંતે, આપણે ધોરણ IX માં શીખેલા કેટલાક પ્રમેયોની સાબિતીના પૃથક્કરણથી સાબિતીના ઘટકોનું પુનરાવર્તન કરીશું. તેનો તમે ધોરણ IX માં પરિચય મેળવ્યો છે તેમ જ તે આ પુસ્તકના ઘણાં પ્રકરણમાં છે.

A1.2 ગાણિતિક વિધાનોનો પુનઃપરિચય

યાદ કરો કે, વિધાન એ આજ્ઞા, ઉદ્‌ગાર કે પ્રશ્ન ન હોય તેવું અર્થપૂર્ણ વાક્ય છે, ઉદાહરણ તરીકે, ''ક્રિકેટના

વિશ્વકપની અંતિમ મૅચમાં કઈ બે ટીમ રમી રહી છે ?'' તે પ્રશ્ન છે, વિધાન નથી. ''જાઓ અને તમારું ગૃહકાર્ય પૂરું કરો.'' તે આજ્ઞા છે, વિધાન નથી. ''કેવો અદ્ભૂત ગોલ !'' તે ઉદ્ગાર છે, વિધાન નથી.

યાદ રાખો, સામાન્ય રીતે વિધાન નીચેનામાંથી કોઈ એક હોઈ શકે :

- *હંમેશાં સત્ય*
- *હંમેશાં અસત્ય*
- *અસ્પષ્ટ (સંદિગ્ધ)*

ધોરણ IX માં તમે **ગણિતમાં** એ પણ અભ્યાસ કર્યો છે કે, **વાક્ય કાં તો સત્ય હોય અથવા અસત્ય હોય તો જ તે વાક્ય સ્વીકાર્ય વિધાન બને.** તેથી સંદિગ્ધ વિધાનોને ગાણિતિક વિધાનો તરીકે ગણતરીમાં લેવામાં આવતાં નથી.

હવે, ચાલો કેટલાંક ઉદાહરણોથી આપણી સમજની સમીક્ષા કરીએ.

ઉદાહરણ 1 : નીચેનાં વિધાનો હંમેશાં સત્ય, હંમેશાં અસત્ય કે સંદિગ્ધ છે તે જણાવો. તમારા જવાબનાં કારણો આપો :

(i) સૂર્ય પૃથ્વીની આસપાસ પરિભ્રમણ કરે છે.

(ii) વાહનોને ચાર પૈડાં હોય છે.

(iii) પ્રકાશની અંદાજિત ઝડપ 3×10^5 કિમી/સે છે.

(iv) કોલકત્તાનો રસ્તો નવેમ્બરથી માર્ચ બંધ રહે છે.

(v) દરેક મનુષ્ય મૃત્યુને અધીન છે.

ઉકેલ :

(i) આ વિધાન હંમેશાં અસત્ય છે. કારણ કે, ખગોળશાસ્ત્રીઓએ પ્રસ્થાપિત કર્યું છે કે, પૃથ્વી સૂર્યની આસપાસ પરિભ્રમણ કરે છે.

(ii) આ વિધાન સંદિગ્ધ છે, કારણ કે, આપણે નક્કી ન કરી શકીએ કે, તે હંમેશાં સત્ય છે કે હંમેશાં અસત્ય. તે વાહન કયું છે તેના પર આધારિત છે. વાહનને *2, 3, 4, 6, 10* વગેરે પૈડાં હોઈ શકે.

(iii) આ વિધાન હંમેશાં સત્ય છે, કારણ કે, ભૌતિકશાસ્ત્રીઓએ તે સિદ્ધ કર્યું છે.

(iv) આ વિધાન સંદિગ્ધ છે, કારણ કે, કયા રસ્તાનો નિર્દેશ કરેલો છે, તે સ્પષ્ટ નથી.

(v) આ વિધાન હંમેશાં સત્ય છે કારણ કે, દરેક મનુષ્યે ક્યારેક તો મરવાનું છે.

ઉદાહરણ 2 : નીચેનાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય તે જણાવો અને તમારા જવાબનાં કારણો જણાવો :

(i) બધા સમબાજુ ત્રિકોણો સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે.

(ii) કેટલાક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણો સમબાજુ ત્રિકોણ છે.

(iii) બધા સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણો સમબાજુ ત્રિકોણ છે.

(iv) કેટલીક સંમેય સંખ્યા પૂર્ણાંક સંખ્યા છે.

(v) કેટલીક સંમેય સંખ્યા પૂર્ણાંક સંખ્યા નથી.

(vi) બધા પૂર્ણાંકો સંમેય હોય છે તેવું નથી.

(vii) કોઈ પણ બે સંમેય સંખ્યાઓની વચ્ચે કોઈ સંમેય સંખ્યા નથી.

ઉકેલ :

(i) આ વિધાન સત્ય છે, કારણ કે સમબાજુ ત્રિકોણોમાં બધી બાજુઓ સમાન હોય છે, અને તેથી તે સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ પણ છે.

(ii) આ વિધાન સત્ય છે, કારણ કે, જેના આધાર ખૂણાઓ 60° હોય એવો સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ સમબાજુ ત્રિકોણ હોઈ શકે છે.

(iii) આ વિધાન અસત્ય છે. તેનું કોઈ પ્રતિ ઉદાહરણ આપો.

(iv) આ વિધાન સત્ય છે, કારણ કે, જ્યાં p કોઈ પૂર્ણાંક અને $q = 1$ હોય તેવી $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપની સંમેય સંખ્યાઓ પૂર્ણાંકો છે. (ઉદાહરણ તરીકે $3 = \frac{3}{1}$)

(v) આ વિધાન સત્ય છે, કારણ કે, સંમેય સંખ્યા $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં છે, p અને q પૂર્ણાંક છે અને p એ q વડે નિઃશેષ વિભાજ્ય ન હોય, તો તે પૂર્ણાંક નથી. (ઉદાહરણ તરીકે $\frac{3}{2}$)

(vi) 'સંમેય સંખ્યા ન હોય તેવી પૂર્ણાંક સંખ્યા છે' એવું આ વિધાન કહે છે. આ અસત્ય છે, કારણ કે, બધા પૂર્ણાંકો સંમેય સંખ્યા છે.

(vii) આ વિધાન અસત્ય છે. તમે જાણો છો કે બે સંમેય સંખ્યાઓ r અને s વચ્ચે સંમેય સંખ્યા $\frac{r+s}{2}$ છે.

ઉદાહરણ 3 : જો $x < 4$ હોય, તો નીચેનાં વિધાનોમાંથી કયું વિધાન સત્ય છે ? તમારા જવાબ માટે કારણ આપો.

(i) $2x > 8$ (ii) $2x < 6$ (iii) $2x < 8$

ઉકેલ :

(i) આ વિધાન અસત્ય છે. ઉદાહરણ તરીકે $x = 3$ લેતાં $x < 4$ છે અને $2x > 8$ નું સમાધાન ન થાય.

(ii) આ વિધાન અસત્ય છે. ઉદાહરણ તરીકે $x = 3.5$ લેતાં $x < 4$ છે અને $2x < 6$ નું સમાધાન ન થાય.

(iii) આ વિધાન સત્ય છે. તે $x < 4$ અને $2x < 8$ સમાન વિધાનો છે.

ઉદાહરણ 4 : નીચેનાં વિધાનોને યોગ્ય શરત સાથે એવી રીતે પુનઃ લખો કે જેથી સત્ય વિધાન મળે.

(i) જો કોઈ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો સમાન હોય, તો તે લંબચોરસ છે.

(ii) કોઈ ત્રિકોણની બે બાજુઓ પરનાં કોઈ પણ બે બિંદુઓને જોડતી રેખા ત્રીજી બાજુને સમાંતર હોય છે.

(iii) બધા પૂર્ણાંક p માટે $\sqrt{p}$ એ અસંમેય છે.

(iv) બધાં દ્વિઘાત સમીકરણોને બે વાસ્તવિક ઉકેલ હોય છે.

ઉકેલ :

(i) જો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો સમાન હોય, તો તે લંબચોરસ છે.

(ii) કોઈ ત્રિકોણની બે બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને જોડતી રેખા ત્રીજી બાજુને સમાંતર હોય છે.

(iii) બધા અવિભાજ્યો p માટે $\sqrt{p}$ એ અસંમેય છે.

(iv) બધાં દ્વિઘાત સમીકરણોને વધુમાં વધુ બે વાસ્તવિક ઉકેલ હોય છે.

નોંધ : ઉપરનાં વિધાનોને ફરીથી દર્શાવવાની અન્ય રીત પણ હોઈ શકે. સરળતા ખાતર (iii) ને ફરીથી $\sqrt{p}$ એ બધા પૂર્ણવર્ગ ન હોય તેવા પૂર્ણાંકો માટે અસંમેય છે એમ પણ દર્શાવી શકાય.

સ્વાધ્યાય A 1.1

1. નીચેનાં વિધાનો હંમેશાં સત્ય, હંમેશાં અસત્ય કે સંદિગ્ધ પૈકી કયાં પ્રકારનાં છે તે જણાવો. તમારા જવાબનાં કારણ આપો :

(i) ગણિતનાં બધાં પાઠ્યપુસ્તકો રસપ્રદ હોય છે.

(ii) પૃથ્વીથી સૂર્યનું અંતર આશરે 1.5×10^8 કિમી છે.

(iii) બધા મનુષ્યો વૃદ્ધ થશે.

(iv) ઉત્તરકાશીથી હર્શિલની મુસાફરી કંટાળાજનક છે.

(v) એક સ્ત્રીએ દૂરબીનમાંથી એક હાથી જોયો.

2. નીચેનાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય તે જણાવો. તમારા જવાબનાં કારણો આપો :

(i) બધા ષટ્કોણો બહુકોણો છે.

(ii) કેટલાક બહુકોણો પંચકોણો છે.

(iii) બધી જ યુગ્મ સંખ્યાઓ *2* વડે વિભાજ્ય હોય તે સત્ય નથી.

(iv) કેટલીક વાસ્તવિક સંખ્યાઓ અસંમેય છે.

(v) બધી જ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ સંમેય હોય તે સત્ય નથી.

3. ધારો કે, a તથા b એવી વાસ્તવિક સંખ્યા છે જેની માટે $ab \neq 0$ છે. નીચેનામાંથી કયું વિધાન સત્ય છે ? તમારા જવાબનું કારણ આપો :

(i) a અને b બંને શૂન્ય હોવા જોઈએ.

(ii) a અને b બંને શૂન્યેતર હોવા જોઈએ.

(iii) a અને b પૈકી કોઈ એક શૂન્યેતર હોવો જોઈએ.

4. નીચેનાં વિધાનોને યોગ્ય શરતોની સાથે તે સત્ય બને તે રીતે પુનઃ લખો :

(i) જો $a^2 > b^2$, હોય, તો $a > b$

(ii) જો $x^2 = y^2$, હોય, તો $x = y$

(iii) જો $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ હોય, તો $x = 0$

(iv) ચતુષ્કોણના વિકર્ણો એકબીજાને દુભાગે છે.

A1.3 આનુમાનિક તર્ક

ધોરણ IX માં તમે આનુમાનિક તર્કની સંકલ્પનાનો પરિચય મેળવ્યો છે. અહીં આપણે બીજાં વધુ ઉદાહરણો લઈને આપેલાં અને સત્ય ધારેલાં વિધાનો પરથી તારણ કાઢવામાં આનુમાનિક તર્ક કેવી રીતે ઉપયોગી છે તે દર્શાવીશું. આપેલાં વિધાનોને 'પ્રકલ્પના' અથવા 'પૂર્વધારણાઓ' કહે છે. આપણે કેટલાંક ઉદાહરણોથી શરૂ કરીશું.

ઉદાહરણ 5 : 'બિજાપુર કર્ણાટક રાજ્યમાં છે' એમ આપેલ છે અને ધારો કે, શબાના બિજાપુરમાં રહે છે. શબાના કયા રાજ્યમાં રહે છે ?

ઉકેલ : અહીં બે પ્રકલ્પનાઓ છે :

(i) બિજાપુર કર્ણાટક રાજ્યમાં છે. (ii) શબાના બિજાપુરમાં રહે છે.

આ પ્રકલ્પનાઓ પરથી આપણે તારવી શકીએ કે, શબાના કર્ણાટક રાજ્યમાં રહે છે.

ઉદાહરણ 6 : 'ગણિતનાં બધાં પાઠ્યપુસ્તકો રસપ્રદ હોય છે' એવું આપેલ છે અને ધારો કે, તમે ગણિતનું પાઠ્યપુસ્તક વાંચી રહ્યા છો. તમે જે પાઠ્યપુસ્તક વાંચી રહ્યા છો તેના વિશે શું કહી શકાય ?

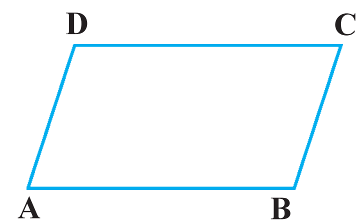
ઉકેલ : આપેલ પ્રકલ્પના વિધાન (અથવા પૂર્વધારણાઓ)નો ઉપયોગ કરીને તારવી શકાય કે તમે રસપ્રદ પાઠ્યપુસ્તક વાંચી રહ્યા છો.

ઉદાહરણ 7 : આપેલું છે કે, $y = -6x + 5$ અને જો $x = 3$ તો y નું મૂલ્ય કેટલું ?

ઉકેલ : આપેલ બે પૂર્વધારણાઓ પરથી,

$y = -6(3) + 5 = -13$ મળે.

ઉદાહરણ 8 : ABCD સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે એવું આપેલું છે. ધારો કે, AD = 5 સેમી અને AB = 7 સેમી (જુઓ આકૃતિ A1.1). DC અને BC ની લંબાઈઓ વિશે તમે શું તારણ કાઢી શકો ?



આકૃતિ A 1.1

ઉકેલ : અહીં આપેલ છે કે ABCD સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે. તેથી આપણે તારવી શકીએ કે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના બધા ગુણધર્મો ચતુષ્કોણ ABCD ને લાગુ પડે છે. વિશેષ કરીને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની સામસામેની બાજુ એકબીજીને સમાન છે તે ગુણધર્મ સત્ય છે. તેથી હવે AD = 5 સેમી છે તે પરથી આપણે તારવી શકીએ કે, BC = 5 સેમી. એ જ રીતે તારવી શકાય કે DC = 7 સેમી.

નોંધ : આ ઉદાહરણમાં પ્રકલ્પના (પક્ષ)માં સમાયેલા ગુણધર્મોને શોધીને તેનો કેવી રીતે ઉપયોગ કરવો તે આપણે જોયું.

ઉદાહરણ 9 : બધા અવિભાજ્યો p માટે $\sqrt{p}$ અસંમેય છે અને ધારો કે, 19423 અવિભાજ્ય છે. $\sqrt{19423}$ માટે શું તારણ કાઢી શકાય ?

ઉકેલ : આપણે તારવી શકીએ કે, $\sqrt{19423}$ અસંમેય છે.

ઉપરના ઉદાહરણમાં તમે નોંધ્યું હશે કે, પ્રકલ્પના સત્ય છે કે નહિ તે આપણે જાણતા નથી આપણે માની લઈએ છીએ કે પક્ષ સત્ય છે અને પછી આનુમાનિક તર્ક લગાડીએ છીએ. ઉદાહરણ તરીકે, ઉદાહરણ 9 માં આપણે પરીક્ષણ નથી કર્યું કે 19423 એ અવિભાજ્ય છે કે નહીં. દલીલની સરળતા ખાતર આપણે એવું ધાર્યું છે કે, તે અવિભાજ્ય છે. આ વિભાગમાં આપણે એ વાત પર ભાર મૂકવા માંગીએ છીએ કે, એક ચોક્કસ વિધાન આપ્યું હોય તો તારણ પર આવવા માટે આનુમાનિક તર્કનો ઉપયોગ કેવી રીતે કરવો. અહીં વાસ્તવિક બાબત એ છે કે, આપણે તર્કની સાચી પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરી રહ્યા છીએ અને તર્કની આ પદ્ધતિ પૂર્વધારણાઓની સત્યાર્થતા કે અસત્યાર્થતા હોવા પર આધારિત નથી. એ નોંધવું જોઈએ કે, જો આપણે અસત્ય આધાર વિધાનોથી (કે પૂર્વધારણાઓથી) શરૂ કરીએ તો આપણે અસત્ય તારણ પર આવીએ.

સ્વાધ્યાય A 1.2

1. એવું આપેલ છે કે, 'સ્ત્રીઓ મૃત્યુને અધીન છે' અને ધારો કે A સ્ત્રી છે. આપણે A ના વિશે શું તારણ કાઢી શકીએ ?
2. 'બે સંમેય સંખ્યાઓનો ગુણાકાર સંમેય છે' તેમ આપેલ છે. a અને b સંમેય સંખ્યાઓ છે. ab માટે તમે શું તારણ કાઢી શકો ?
3. 'અસંમેય સંખ્યાઓનું દશાંશ નિરૂપણ અનંત અનાવૃત છે અને $\sqrt{17}$ અસંમેય છે' એમ આપેલ છે. $\sqrt{17}$ ના દશાંશ નિરૂપણ માટે આપણે શું તારણ કાઢી શકીએ ?
4. '$y = x^2 + 6$ અને $x = -1$' આપેલ હોય તો y ની કિંમત માટે શું તારણ કાઢી શકાય ?

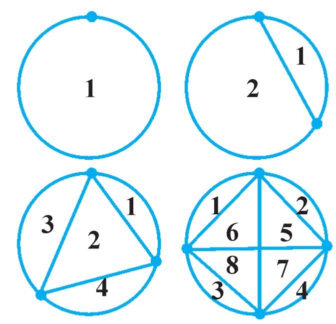
5. ABCD સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ આપેલ છે અને $\angle B = 80°$. સમાંતર બાજુ ચતુષ્કોણના બીજા ખૂણાઓ માટે શું તારણ કાઢી શકાય ?

6. ‘PQRS ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે’ એવું આપેલ છે અને તેના વિકર્ણો એકબીજાને દુભાગે છે. ચતુષ્કોણ PQRS વિશે તમે શું તારણ કાઢી શકો ?

7. બધા અવિભાજ્યો p માટે $\sqrt{p}$ અસંમેય છે એમ આપેલું છે અને ધારો કે, 3721 અવિભાજ્ય છે. તમે તારવી શકો કે, $\sqrt{3721}$ અસંમેય સંખ્યા છે ? તમારું તારણ સાચું છે ? સત્ય હોય તો શા માટે અને અસત્ય હોય તો શા માટે ?

A1.4 ધારણાઓ, પ્રમેયો, સાબિતીઓ અને ગાણિતિક તર્ક

આકૃતિ A 1.2 ધ્યાનમાં લો. પ્રથમ વર્તુળમાં એક બિંદુ, બીજા વર્તુળમાં બે બિંદુઓ, ત્રીજા વર્તુળમાં ત્રણ બિંદુઓ અને એ પ્રમાણે આગળ આપેલું છે. દરેક વિકલ્પમાં બિંદુઓને જોડતી શક્ય બધી રેખાઓ દોરેલી છે.



આકૃતિ A 1.2

રેખાઓ વર્તુળને પરસ્પર અનાચ્છાદી પ્રદેશોમાં (સામાન્ય ભાગ ન હોય તેવા) વિભાજિત કરે છે. આ પ્રદેશોને આપણે ગણી શકીએ અને પરિણામોને નીચે દર્શાવેલા કોષ્ટકમાં નોંધીએ :

બિંદુઓની સંખ્યા	પ્રદેશોની સંખ્યા
1	1
2	2
3	4
4	8
5	
6	
7	

તમારામાંથી કેટલાકે આપેલાં બિંદુઓથી બનતા પ્રદેશોની સંખ્યા વિશેના સૂત્રનું અનુમાન કર્યું હશે. ધોરણ IXના અભ્યાસ પરથી તમને યાદ હશે કે, આ બુદ્ધિગમ્ય અનુમાનને ગાણિતિક અટકળ કહે છે.

ધારો કે, તમારી ધારણા છે કે, વર્તુળ પર આપેલાં n બિંદુઓમાંથી પ્રત્યેક બે બિંદુઓને જોડતી બધી શક્ય રેખાઓ દોરીએ તો મળતા પરસ્પર અનાચ્છાદી પ્રદેશોની સંખ્યા 2^{n-1} છે. આ એક ખૂબ જ બુદ્ધિગમ્ય અનુમાન છે. અને કોઈ પરીક્ષણ કરી શકે કે, જો $n = 5$ હોય, તો આપણને 16 પ્રદેશો મળે. તેથી, 5 બિંદુઓ માટે આ સૂત્ર સત્ય

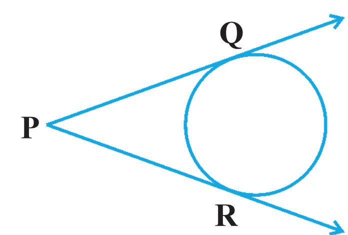
છે. તમે ગમે તે n બિંદુઓ માટે 2^{n-1} અનાચ્છાદિત પ્રદેશો મળે તે સત્ય છે એમ તમે કેવી રીતે જવાબ આપશો. જો કોઈ તમને પૂછે કે, આ $n = 25$ માટે તમે સંતુષ્ટ થશો ? તો આવા પ્રશ્નો સાથે કામ કરવા માટે તમારે જે શંકાથી પર રહીને આ પરિણામ સત્ય છે તેવું દર્શાવતી હોય એવી સાબિતીની જરૂર પડે અથવા કોઈ n માટે આ પરિણામ ખોટું છે તેવું દર્શાવતા ઉદાહરણની જરૂર પડે. ખરેખર, જો તમે આના માટે ગંભીર હો અને $n = 6$ માટે પ્રયત્ન કર્યો હોય, તો તમે જોશો કે, 31 પ્રદેશો મળે છે. અને $n = 7$ માટે 57 પ્રદેશો છે. તેથી, $n = 6$ એ ઉપરની ધારણા માટેનું પ્રતિઉદાહરણ છે. આ પ્રતિઉદાહરણની અગત્યતા દર્શાવે છે. તમને કદાચ યાદ હશે કે, ધોરણ IX માં આપણે ચર્ચા કરી છે કે **કોઈ વિધાનને અસત્ય છે તેમ સાબિત કરવા કોઈ એક પ્રતિઉદાહરણ આપવું પર્યાપ્ત છે.**

તમારા ધ્યાનમાં આવ્યું હશે કે, $n = 1, 2, 3, 4$ અને 5 માટે પરિણામ ચકાસવાને બદલે પ્રદેશોની સંખ્યા સંબંધી સાબિતી પર આપણે ભાર મૂકવો જોઈએ. હવે બીજાં વધારે ઉદાહરણો જોઈએ. તમે નીચેના પરિણામથી પરિચિત છો. (પ્રકરણ 5માં આપેલું છે).

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

તેની યથાર્થતા પ્રસ્થાપિત કરવા માટે પરિણામને $n = 1, 2, 3...$ વગેરે માટે ચકાસવું પૂરતું નથી, કારણ કે, કોઈ n માટે આ પરિણામ સત્ય ન પણ હોય. ઉપરના ઉદાહરણમાં $n = 6$ માટે પરિણામ અસત્ય ઠરે છે. જે શંકાથી પર રહીને સત્ય પ્રસ્થાપિત કરે છે એવી સાબિતીની આપણી જરૂરિયાત છે. પછીના વર્ગોમાં તમે સાબિતી શીખશો.

હવે, આકૃતિ A 1.3 ધ્યાનમાં લો. તેમાં P માંથી વર્તુળને સ્પર્શકો PQ અને PR દોરેલા છે.



આકૃતિ A 1.3

તમે સાબિત કર્યું છે કે, PQ = PR (પ્રમેય 10.2). તમે ફક્ત આવી કેટલીક આકૃતિઓ દોરી, સંબંધિત સ્પર્શકોની લંબાઈ માપીને અને દરેક કિસ્સામાં પરિણામ સત્ય છે તેવું તમારી જાતે ચકાસીને સંતુષ્ટ થતા નથી.

તમને યાદ છે કે, સાબિતી શાની બનેલી છે ? તે સાબિતીમાં આવેલાં અગાઉનાં વિધાન પરથી અથવા સાબિત કરવાના પરિણામ પર આધારિત ન હોય તેવાં અગાઉ સાબિત કરેલાં (અને જાણીતાં) પરિણામો પરથી અથવા પૂર્વધારણાઓથી અથવા વ્યાખ્યા પરથી અથવા તમે કરેલી ધારણાઓ પરથી મળેલાં વિધાનોની શ્રૃંખલાથી (યથાર્થ દલીલો) તે બની હતી. તમે તમારી સાબિતી વિધાન PQ = PR મેળવી પૂર્ણ કરો. કોઈપણ સાબિતી રચવાની એક પદ્ધતિ છે.

સાબિતીની રચના કેમ થાય તેની વધુ સારી સમજ મેળવવામાં ઉપયોગી થાય તે માટે હવે આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો અને પ્રમેયો અને સાબિતીનાં પૃથક્કરણ જોઈશું.

આપણે સાબિતીની કહેવાતી પ્રત્યક્ષ રીત કે આનુમાનિક રીતનો ઉપયોગ કરીને શરૂ કરીશું. આ રીતમાં, આપણે કેટલાંક વિધાનો રચીશું. દરેક વિધાન આગળનાં વિધાનો પર આધારિત છે. જો દરેક વિધાન તાર્કિક રીતે સત્ય હોય (એટલે કે માન્ય દલીલ હોય), તો તાર્કિક સત્ય તારણ મળે.

ઉદાહરણ 10 : બે સંમેય સંખ્યાઓનો સરવાળો સંમેય સંખ્યા છે.

ઉકેલ :

અ.નં.	વિધાનો	પૃથક્કરણ/નોંધ
1	ધારો કે, x અને y સંમેય સંખ્યા છે.	આપણે x અને y સંમેય છે ત્યાંથી શરૂ કરીશું, કારણ કે, પરિણામ સંમેય સંખ્યા વિશે છે.
2	ધારો કે, પૂર્ણાંકો m, n, p અને q માટે $x = \frac{m}{n}$, $n \neq 0$ અને $y = \frac{p}{q}$, $q \neq 0$	સંમેય સંખ્યાની વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરતાં
3	તેથી, $x + y = \frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq+np}{nq}$	પરિણામ સંમેય સંખ્યાઓના સરવાળાનો નિર્દેશ કરે છે. તેથી, આપણે $x + y$ મેળવીએ.
4	પૂર્ણાંક સંખ્યાઓના ગુણધર્મોનો ઉપયોગ કરીને, આપણે જોઈ શકીએ કે, $mq + np$ અને nq પૂર્ણાંકો છે.	પૂર્ણાંકોના જાણીતા ગુણધર્મોનો ઉપયોગ કર્યો.
5	$n \neq 0$ અને $q \neq 0$ હોવાથી $nq \neq 0$ મળે.	પૂર્ણાંકોના જાણીતા ગુણધર્મોનો ઉપયોગ કર્યો.
6	તેથી, $x + y = \frac{mq+np}{nq}$ સંમેય સંખ્યા છે.	સંમેય સંખ્યાની વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કર્યો.

નોંધ : ધ્યાન આપો કે, ઉપરની સાબિતીનું દરેક વિધાન આગળ પ્રસ્થાપિત થયેલ તથ્ય કે વ્યાખ્યા પર આધારિત છે.

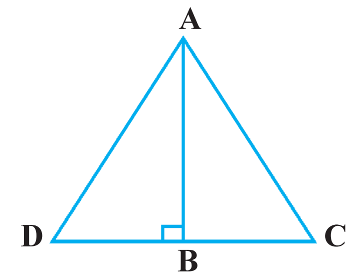
ઉદાહરણ 11 : 3 કરતાં મોટી દરેક અવિભાજ્ય સંખ્યા કોઈક પૂર્ણાંક k માટે $6k + 1$ કે $6k + 5$ સ્વરૂપમાં હોય છે.

ઉકેલ :

અ.નં.	વિધાનો	પૃથક્કરણ/નોંધ
1	ધારો કે, p એ 3 કરતાં મોટી અવિભાજ્ય સંખ્યા છે.	3 કરતાં મોટી અવિભાજ્ય સંખ્યા વિષે પરિણામ છે. આથી, આપણે એવી સંખ્યાથી શરૂ કરીશું.
2	p ને 6 વડે ભાગતાં, p એ ધન પૂર્ણાંક k માટે $6k$, $6k + 1$, $6k + 2$, $6k + 3$, $6k + 4$, અનૃણ k માટે $6k + 5$ સ્વરૂપનો હોઈ શકે.	યુક્લિડની ભાગવિધિ પરથી
3	પરંતુ $6k = 2\,(3k)$, $6k + 2 = 2\,(3k + 1)$, અને $6k + 3 = 3(2k + 1)$, $6k + 4 = 2(3k+2)$ તેથી, તે અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ નથી.	p અવિભાજ્ય છે એમ આપેલું હોવાથી p ના સ્વરૂપનું પૃથક્કરણ કરીએ.
4	તેથી કોઈ ધનપૂર્ણાંક k માટે, p એ $6k + 1$ કે અનૃણ પૂર્ણાંક k માટે $6k + 5$ સ્વરૂપમાં જ હોવો જોઈએ.	બીજા વિકલ્પો દૂર કરીને આપણે આ તારણ પર આવીએ.

નોંધ : (1) $3k$, $3k + 1$, $2k + 1$ અને $3k + 2$ એ 1 કરતાં મોટા છે. કારણ કે, $k \neq 0$

(2) ઉપરના ઉદાહરણમાં, આપણે અલગ-અલગ વિકલ્પો દૂર કરીને તારણ પર આવ્યા. આ રીતને કેટલીક વાર **વિકલ્પ નિવારણની રીત** તરીકે પણ ઓળખવામાં આવે છે.



આકૃતિ A 1.4

પ્રમેય A1.1 : (*પાયથાગોરસના પ્રમેયનું પ્રતીપ*) : જો કોઈ ત્રિકોણમાં એક બાજુનો વર્ગ બાકીની બે બાજુના વર્ગોના સરવાળા જેટલો હોય, તો પહેલી બાજુની સામેનો ખૂણો કાટખૂણો છે.

ઉકેલ :

અ.નં.	વિધાનો	પૃથક્કરણ/નોંધ
1	ધારો કે ΔABC એ વિધાન $AC^2 = AB^2 + BC^2$ નું સમાધાન કરે છે.	આપણે આવા ત્રિકોણ વિશેનું એક વિધાન સાબિત કરીએ છીએ. આથી આ પરિણામ લઈને આપણે શરૂઆત કરીએ.
2	AB ને લંબરેખા BD રચો જેથી BD = BC અને A તથા D જોડો.	જેના વિશે વાત કરી છે તેવું આ એક સાહજિક સોપાન છે. આપણે વારંવાર સાબિત થયેલા પ્રમેયોની જરૂર પડશે.
3	રચના પરથી, ΔABD કાટકોણ ત્રિકોણ છે અને પાયથાગોરસ પ્રમેય પરથી $AD^2 = AB^2 + BD^2$	આપણે પાયથાગોરસ પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીશું. તેને સાબિત કર્યો છે.
4	રચના પરથી, BD = BC હોવાથી $AD^2 = AB^2 + BC^2$	તાર્કિક તારણ
5	તેથી, $AC^2 = AB^2 + BC^2 = AD^2$	ધારણાનો ઉપયોગ અને આગળનું વિધાન
6	AC અને AD ધન હોવાથી AC = AD	સંખ્યાના જાણીતા ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરતાં
7	આપણે દર્શાવ્યું છે કે AC = AD. ઉપરાંત રચના કરી છે કે BC = BD અને AB સામાન્ય છે. તેથી બાબાબા પરથી, $\Delta ABC \cong \Delta ABD$	જાણીતા પ્રમેયનો ઉપયોગ કર્યો.
8	$\Delta ABC \cong \Delta ABD$ હોવાથી, $\angle ABC \cong \angle ABD$ મળે અને $\angle ABD$ કાટકોણ છે. $\therefore \angle ABC = 90°$	અગાઉ પ્રસ્થાપિત હકીકતને આધારે તાર્કિક તારણ

નોંધ : ઉપરના પૈકી દરેક પરિણામ બધાં એકબીજા સાથે જોડાયેલાં પરિણામો છે. તેમને સોપાનોની ક્રમિકતાથી સાબિત કર્યાં છે તેમનો ક્રમ અગત્યનો છે. સાબિતીમાંનું દરેક સોપાન આગળના સોપાનને અને અગાઉના જાણીતાં પરિણામોને અનુસરે છે.

સ્વાધ્યાય A 1.3

નીચેનાં દરેક પ્રશ્નમાં એક વિધાન સાબિત કરવાનું છે. દરેક સાબિતીમાં બધાં સોપાનોની યાદી બનાવો અને દરેક સોપાન માટે કારણ આપો :

1. બે ક્રમિક અયુગ્મ સંખ્યાઓનો સરવાળો 4 વડે વિભાજ્ય છે.
2. બે ક્રમિક અયુગ્મ સંખ્યાઓ લો. તેમના વર્ગોનો સરવાળો લો. અને મળતા પરિણામમાં 6 ઉમેરો. સાબિત કરો કે આ રીતે પ્રાપ્ત નવી સંખ્યા હંમેશાં 8 વડે વિભાજ્ય છે.
3. જો $p \geq 5$ અવિભાજ્ય સંખ્યા હોય, તો સાબિત કરો કે, $p^2 + 2$ એ 3 વડે વિભાજ્ય છે.

   (***સૂચન :*** ઉદાહરણ 11નો ઉપયોગ કરો).
4. જો x અને y સંમેય સંખ્યાઓ હોય, તો સાબિત કરો કે, xy સંમેય સંખ્યા છે.
5. જો a અને b ધન પૂર્ણાંક હોય, તો તમે જાણો છો કે, $a = bq + r$, $0 \leq r < b$, જ્યાં q એ પૂર્ણ સંખ્યા છે. સાબિત કરો કે ગુ.સા.અ. (a, b) = ગુ.સા.અ. (b, r)

   [**સૂચન :** ધારો કે, ગુ.સા.અ. $(b, r) = h$. તેથી, $b = k_1h$ અને $r = k_2h$ જ્યાં k_1 અને k_2 સહઅવિભાજ્ય છે].
6. ત્રિકોણ ABCની બાજુ BC ને સમાંતર રેખા AB અને AC ને અનુક્રમે D અને E માં છેદે છે. સાબિત કરો કે, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

A1.5 વિધાનનું નિષેધ

આ વિભાગમાં, આપણે વિધાનના નિષેધનો અર્થ શું છે તેની ચર્ચા કરીશું. આપણે શરૂ કરીએ તે પહેલાં આપણે સંકલ્પના સમજવી સરળ બને તે માટે કેટલાક સંકેત દાખલ કરીએ. શરૂઆતમાં આપણે વિધાનને એક એકમ તરીકે લઈએ અને તેને એક સંકેત આપીએ. ઉદાહરણ તરીકે, વિધાન : 'દિલ્લીમાં પહેલી સપ્ટેમ્બર 2005ના રોજ વરસાદ હતો.' ને આપણે p વડે દર્શાવીએ. આને આમ પણ લખી શકાય.

p : દિલ્લીમાં પહેલી સપ્ટેમ્બર 2005ના રોજ વરસાદ હતો.

એ જ રીતે, ચાલો આપણે લખીએ.

q : બધા શિક્ષકો સ્ત્રી છે.

r : માઈકના કૂતરાને કાળી પૂંછડી છે.

s : $2 + 2 = 4$

t : ત્રિકોણ ABC સમબાજુ ત્રિકોણ છે.

આ સંકેત આપણને વિધાનોના ગુણધર્મોની ચર્ચા કરવા તેમજ કેવી રીતે તેમને જોડી શકાય તે માટે મદદ કરે છે. શરૂઆતમાં આપણે જેને 'સાદું' વિધાન કહીએ છીએ તેના વિશે જોઈશું અને પછી 'સંયુક્ત' વિધાન વિશે જોઈશું.

હવે નીચેનું કોષ્ટક ધ્યાનમાં લો. તેમાં આપેલા દરેક વિધાન પરથી નવું વિધાન બનાવ્યું છે.

મૂળ વિધાન	**નવું વિધાન**
p : દિલ્લીમાં 1 સપ્ટેમ્બર 2005ના રોજ વરસાદ હતો.	$\sim p$: તે અસત્ય છે કે, 1 સપ્ટેમ્બર 2005ના રોજ દિલ્લીમાં વરસાદ હતો.
q : બધા શિક્ષકો સ્ત્રી છે.	$\sim q$: તે અસત્ય છે કે, બધા શિક્ષકો સ્ત્રી છે.
r : માઈકના કૂતરાને કાળી પૂંછડી છે.	$\sim r$: તે અસત્ય છે કે, માઈકના કૂતરાને કાળી પૂંછડી છે.
$s : 2 + 2 = 4$	$\sim s$: તે અસત્ય છે કે, $2 + 2 = 4$
t : ત્રિકોણ ABC સમબાજુ છે.	$\sim t$: તે અસત્ય છે કે, ત્રિકોણ ABC સમબાજુ છે.

કોષ્ટકમાંનું નવું વિધાન જૂના વિધાનને અનુરૂપ નિષેધ છે. એટલે કે, $\sim p$, $\sim q$, $\sim r$, $\sim s$ અને $\sim t$ અનુક્રમે વિધાનો p, q, r, s અને t નાં નિષેધ છે. અહીં, $\sim p$ એ 'p નથી' એમ વંચાય. વિધાન $\sim p$ એ હકાર વિધાન p નું નકાર બનાવે છે. ધ્યાન આપો કે, આપણી સામાન્ય વાતચીતમાં આપણે $\sim p$ નો સરળ અર્થ 'દિલ્લીમાં 1 સપ્ટેમ્બર *2005*ના રોજ વરસાદ ન હતો એમ લઈએ છીએ.' તેમ છતાં જ્યારે આપણે આમ કરીએ ત્યારે તેની કાળજી લેવી જરૂરી છે. તમે કદાચ એવું ધારતા હો કે, વિધાનનું નિષેધ સરળ રીતે મેળવવા આપેલા વિધાનમાં યોગ્ય જગ્યાએ 'નહી' દાખલ કરીને મેળવી શકાય.

જ્યારે વિધાન ''બધા''થી શરૂ થતું હોય, ત્યારે p ના આ કિસ્સામાં મુશ્કેલી આવશે. ઉદાહરણ તરીકે વિધાન q નો વિચાર કરો. q : બધા શિક્ષકો સ્ત્રી છે. આ વિધાનનું નિષેધ આપણે $\sim q$ તરીકે લઈએ. તે અસત્ય છે કે, બધા શિક્ષકો સ્ત્રી છે તે ''કેટલાક શિક્ષકો પુરુષ છે''ના જેવું વિધાન છે.

ચાલો આપણે જોઈએ કે, જો માત્ર ''નહિ'' એ q માં ઉમેરીએ તો શું થાય. આપણને એવું વિધાન મળે : ''બધા શિક્ષકો સ્ત્રી નથી'' અથવા આપણે એ વિધાન મેળવી શકીએ : ''બધા જ શિક્ષકો સ્ત્રી નથી.'' પહેલું વિધાન લોકોને ગૂંચવણમાં મૂકી શકે. તેનો સૂચિતાર્થ (જો આપણે શબ્દ 'બધા' પર ભાર મૂકીએ) એ છે કે, બધા શિક્ષકો પુરુષ છે. આ ચોક્કસ રીતે q નું નિષેધ નથી. તેમ છતાં, બીજું વિધાન $\sim q$ નો અર્થ આપે છે. એટલે કે, ઓછામાં ઓછો એક શિક્ષક હોય જે સ્ત્રી ન હોય. તેથી, જ્યારે વિધાનનું નિષેધ લખો ત્યારે કાળજી લો !

તેથી, આપણે સાચા નિષેધનો નિર્ણય કેવી રીતે કરીશું? આપણે નીચેના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરીએ.

ધારો કે, p એક વિધાન છે અને ~ p તેનું નિષેધ છે. જ્યારે p સત્ય હોય ત્યારે ~ p અસત્ય હોય અને જ્યારે p અસત્ય હોય ત્યારે ~ p સત્ય હોય.

ઉદાહરણ તરીકે, જો માઈકના કૂતરાની પૂંછડી કાળી છે, તે સત્ય હોય, તો માઈકના કૂતરાની પૂંછડી કાળી નથી તે અસત્ય છે. ''જો માઈકના કૂતરાની પૂંછડી કાળી છે'' એ અસત્ય હોય તો માઈકના કૂતરાની પૂંછડી કાળી નથી તે સત્ય હોય.

આ જ રીતે વિધાનો s અને t ના નિષેધ માટે, $s = 2 + 2 = 4$ નું નિષેધ, $\sim s = 2 + 2 \neq 4$

t : ત્રિકોણ ABC સમબાજુ છે.

નિષેધ, $\sim t$: ત્રિકોણ ABC સમબાજુ નથી.

તો હવે, $\sim(\sim s)$ શું થશે ? તે $2 + 2 = 4$ થશે. તે s છે અને $\sim(\sim t)$ શું છે ?

''ત્રિકોણ ABC સમબાજુ છે'' તેમ થશે. એટલે કે t છે.

હકીકતમાં કોઈ પણ વિધાન p માટે $\sim(\sim p)$ એ p છે.

ઉદાહરણ 12 : નીચેનાં વિધાનોનાં નિષેધ જણાવો :

(i) માઈકના કૂતરાને કાળી પૂંછડી નથી.

(ii) બધી અસંમેય સંખ્યાઓ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે.

(iii) $\sqrt{2}$ અસંમેય સંખ્યા છે.

(iv) કેટલીક સંમેય સંખ્યાઓ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે.

(v) બધા શિક્ષકો પુરુષ નથી.

(vi) કેટલાક ઘોડાઓ બદામી રંગના નથી.

(vii) કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા x એવી નથી કે, જેથી $x^2 = -1$ થાય.

ઉકેલ :

(i) માઈકના કૂતરાની પૂંછડી કાળી નથી તે અસત્ય છે. એટલે કે, માઈકના કૂતરાની પૂંછડી કાળી છે.

(ii) બધી અસંમેય સંખ્યાઓ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે તે અસત્ય છે, એટલે કે, કેટલીક (ઓછામાં ઓછી એક) અસંમેય સંખ્યા વાસ્તવિક સંખ્યા નથી. કોઈ આને એવું પણ લખી શકે ''બધી જ અસંમેય સંખ્યાઓ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે તેવું સત્ય નથી.''

(iii) $\sqrt{2}$ અસંમેય છે તે અસત્ય છે, એટલે કે, $\sqrt{2}$ અસંમેય નથી.

(iv) કેટલીક સંમેય સંખ્યાઓ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ છે તે અસત્ય છે, એટલે કે કોઈક સંમેય સંખ્યા પૂર્ણાંક સંખ્યા નથી.

(v) બધા શિક્ષકો પુરુષો નથી તે અસત્ય છે, એટલે કે, કેટલાક શિક્ષકો સ્ત્રીઓ છે.

(vi) કેટલાક ઘોડાઓ બદામી રંગના નથી તે અસત્ય છે, એટલે કે, બધા ઘોડાઓ બદામી રંગના છે.

(vii) કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા એવી નથી કે જેથી, $x^2 = -1$ થાય તે અસત્ય છે, એટલે કે, ઓછામાં ઓછી એક વાસ્તવિક સંખ્યા x એવી છે જેથી, $x^2 = -1$ થાય.

નોંધ : ઉપરની ચર્ચા પરથી, કોઈ વિધાનનું નિષેધ મેળવવા માટે આપણે નીચેના કાર્યનિયમો સુધી પહોંચ્યા છીએ.

(i) પહેલાં નહિ લખીને વિધાન લખો.

(ii) જો તેમાં કોઈ ગૂંચવણ હોય, તો વિશિષ્ટ રીતે, વિધાનોમાં 'બધા' કે 'કેટલાક' સમાયેલા હોય ત્યારે યોગ્ય સુધારા કરો.

સ્વાધ્યાય A 1.4

1. નીચેનાં વિધાનોનાં નિષેધ જણાવો :

(i) મનુષ્ય મૃત્યુને અધીન છે.

(ii) રેખા l એ રેખા m ને સમાંતર છે.

(iii) આ પ્રકરણમાં ઘણા સ્વાધ્યાય છે.

(iv) બધી પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ સંમેય સંખ્યાઓ છે.

(v) કેટલીક અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ અયુગ્મ છે.

(vi) કોઈ વિદ્યાર્થી આળસુ નથી.

(vii) કેટલીક બિલાડીઓ કાળી નથી.

(viii) $\sqrt{x} = -1$ થાય તેવી કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા x નથી.

(ix) પૂર્ણાંક સંખ્યા a, 2 વડે વિભાજ્ય છે.

(x) a અને b પરસ્પર અવિભાજ્ય પૂર્ણાંકો છે.

2. નીચેના દરેક પ્રશ્નોમાં, બે વિધાનો છે. બીજું વિધાન એ પહેલા વિધાનનું નિષેધ છે કે નહીં તે જણાવો.

(i) મુમતાઝ ભૂખી છે.
મુમતાઝ ભૂખી નથી.

(ii) કેટલીક બિલાડીઓ કાળી છે.
કેટલીક બિલાડીઓ કથ્થાઈ છે.

(iii) બધા હાથી મોટા છે.
એક હાથી મોટો નથી.

(iv) બધાં અગ્નિશામક યંત્રો લાલ હોય છે.
બધાં અગ્નિશામક યંત્રો લાલ નથી.

(v) કોઈ મનુષ્ય ગાય નથી.
કેટલાક મનુષ્યો ગાય છે.

A1.6 વિધાનનું પ્રતીપ

હવે, આપણે વિધાનના પ્રતીપની સંકલ્પનાનું પરીક્ષણ કરીએ. આના માટે, આપણને સંયુક્ત વિધાનની સંકલ્પનાની જરૂર પડશે તે એક અથવા વધારે સાદાં વિધાનોનું સંયોજન છે. સંયુક્ત વિધાનો બનાવવા માટેની ઘણી રીતો છે. પરંતુ, આપણે બે સાદાં વિધાનોને 'જો અને તો' નો ઉપયોગ કરી જોડવા ઉપર ધ્યાન આપીશું. ઉદાહરણ તરીકે, કોઈ વિધાન 'જો વરસાદ પડે, તો સાયકલ પર જવું મુશ્કેલ પડે' એ બે વિધાનોનું બનેલું છે.

p : વરસાદ પડે છે.

q : સાઇકલ પર જવું મુશ્કેલ પડે.

આગળ દર્શાવેલ સંકેતનો ઉપયોગ કરીને આપણે કહી શકીએ : ***જો p તો q.***

આપણે એવું પણ કહી શકીએ કે, ***p પરથી q સૂચિત થાય છે અને તેને $p \Rightarrow q$ વડે દર્શાવાય છે.***

હવે, ધારો કે, કોઈ એવું વિધાન છે, 'જો પાણીની ટાંકી કાળી હોય, તો તેમાં પીવાલાયક પાણી છે.' આ વિધાન $p \Rightarrow q$ સ્વરૂપમાં છે.

અહીં p પક્ષ છે. (પાણીની ટાંકી કાળી છે) અને q તારણ છે. (ટાંકીમાં પીવાલાયક પાણી છે) ધારો કે, આપણે પક્ષ અને તારણને બદલીએ, તો શું મળે ? અહીં $q \Rightarrow p$ મળે. એટલે કે, જો ટાંકીમાંનું પાણી પીવાલાયક હોય, તો તે ટાંકી કાળી હોય. આ વિધાનને વિધાન $p \Rightarrow q$ નું પ્રતીપ વિધાન કહે છે.

સામાન્ય રીતે, જો p અને q વિધાનો હોય, તો વિધાન $p \Rightarrow q$ નું પ્રતીપ વિધાન $q \Rightarrow p$ છે, યાદ રાખો કે, $p \Rightarrow q$ અને $q \Rightarrow p$ બંને એકબીજાનાં પ્રતીપ વિધાનો છે.

ઉદાહરણ 13 : નીચેનાં વિધાનોનાં પ્રતીપ લખો :

(i) જો જમિલા સાયકલ ચલાવતી હોય, તો 17 ઑગસ્ટે રવિવાર હોય.

(ii) જો 17 ઓગસ્ટે રવિવાર હોય, તો જમિલા સાઇકલ ચલાવતી હોય.

(iii) જો પૌલિન ગુસ્સે થાય, તો તેનો ચહેરો લાલ થાય.

(iv) જો કોઈ વ્યક્તિ પાસે શિક્ષણની ડિગ્રી હોય, તો તે ભણાવી શકે.

(v) જો કોઈ વ્યક્તિને વાયરસનો ચેપ લાગે, તો તેનું તાપમાન ઊંચું રહે.

(vi) જો અહમદ મુંબઈમાં હોય, તો તે ભારતમાં છે.

(vii) જો ત્રિકોણ ABC સમબાજુ ત્રિકોણ હોય, તો તેના અંતઃકોણો સમાન છે.

(viii) જો x એ અસંમેય સંખ્યા હોય, તો x નું દશાંશ નિરૂપણ અનંત અનાવૃત્ત છે.

(ix) જો $x - a$ બહુપદી $p(x)$ નો અવયવ હોય, તો $p(a) = 0$

ઉકેલ :

ઉપરનું દરેક વિધાન $p \Rightarrow q$ સ્વરૂપમાં છે. તેથી તેનું પ્રતીપ શોધવા માટે પહેલા p અને q ઓળખીશું અને પછી $q \Rightarrow p$ લખીશું.

(i) p : જમિલા સાઇકલ ચલાવે છે અને

q : 17 ઑગસ્ટ રવિવારે આવશે.

તેથી તેનું પ્રતીપ થશે : જો 17 ઑગસ્ટ રવિવાર આવે, તો જમિલા સાઇકલ ચલાવે.

(ii) આ વિધાન (i) નું પ્રતીપ વિધાન છે. તેથી, તેનું પ્રતીપ એ ઉપર આપેલું વિધાન (i) છે.

(iii) જો પૌલિનનો ચહેરો લાલ થાય, તો તે ગુસ્સે હોય.

(iv) જો કોઈ વ્યક્તિ ભણાવી શકે, તો તેની પાસે શિક્ષણની ડિગ્રી હોય.

(v) જો કોઈ વ્યક્તિનું તાપમાન ઊંચુ રહે, તો તેને વાઇરસનો ચેપ લાગ્યો હોય.

(vi) જો અહમદ ભારતમાં હોય, તો તે મુંબઈમાં હોય.

(vii) જો ત્રિકોણ ABC ના બધા અંતઃકોણો સમાન હોય, તો તે સમબાજુ છે.

(viii) જો x નું દશાંશ નિરૂપણ અનંત અનાવૃત્ત હોય, તો x એ અસંમેય સંખ્યા છે.

(ix) જો $p(a) = 0$ હોય, તો $x - a$ એ બહુપદી $p(x)$નો અવયવ છે.

જુઓ કે, આપણે ઉપર આપેલા દરેક વિધાનના પ્રતીપ તે સત્ય છે કે, અસત્ય તેની ચિંતા કર્યા સિવાય એમ જ લખ્યાં છે. ઉદાહરણ તરીકે નીચેનું વિધાન વિચારો. જો અહમદ મુંબઈમાં હોય, તો તે ભારતમાં છે. આ વિધાન સત્ય છે. હવે, તેનું પ્રતીપ વિધાન ધ્યાનમાં લો : જો અહમદ ભારતમાં હોય, તો તે મુંબઈમાં છે. આ હંમેશાં સત્ય ન પણ હોઈ શકે. તે ભારતનાં ગમે તે ભાગમાં હોઈ શકે.

ગણિતમાં, ખાસ કરીને ભૂમિતિમાં, તમે એવી ઘણી સ્થિતિમાં આવ્યા હશો કે, જ્યાં $p \Rightarrow q$ સત્ય હોય અને તમારે નક્કી કરવું પડે કે તેનું પ્રતીપ વિધાન, અર્થાત્, $q \Rightarrow p$ પણ સત્ય છે.

ઉદાહરણ 14 : નીચેનાં વિધાનોનાં પ્રતીપ વિધાનો જણાવો. દરેક કિસ્સામાં તે સત્ય છે કે અસત્ય એ પણ નક્કી કરો.

(i) જો n યુગ્મ પૂર્ણાંક હોય, તો $2n + 1$ અયુગ્મ પૂર્ણાંક છે.

(ii) જો વાસ્તવિક સંખ્યાનું દશાંશ નિરૂપણ સાન્ત હોય, તો તે સંખ્યા સંમેય છે.

(iii) જો બે સમાંતર રેખાઓને એક છેદિકા છેદતી હોય, તો અનુકોણોની પ્રત્યેક જોડ સમાન હોય છે.

(iv) જો કોઈ ચતુષ્કોણની સામસામેની બાજુઓની પ્રત્યેક જોડની બાજુઓ સમાન હોય, તો તે ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

(v) જો બે ત્રિકોણો એકરૂપ હોય, તો તેમના અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન હોય છે.

ઉકેલ :

(i) પ્રતીપ વિધાન 'જો $2n + 1$ અયુગ્મ પૂર્ણાંક હોય, તો n યુગ્મ પૂર્ણાંક છે' થાય. આ વિધાન અસત્ય છે. (ઉદાહરણ તરીકે, $15 = 2\ (7) + 1$ અને 7 તે અયુગ્મ છે).

(ii) પ્રતીપ વિધાન 'જો કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા સંમેય હોય, તો તેનું દશાંશ નિરૂપણ સાન્ત હોય' થાય. આ અસત્ય વિધાન છે, કારણ કે, સંમેય સંખ્યાનું દશાંશ નિરૂપણ અનંત આવૃત પણ હોઈ શકે છે.

(iii) પ્રતીપ વિધાન થશે 'જો કોઈ છેદિકા બે રેખાને એવી રીતે છેદે કે તેથી બનતા અનુકોણ સમાન થાય, તો તે બે રેખાઓ સમાંતર છે.' આપણે ધોરણ IX માં અભ્યાસ કરેલ છે, તેથી આ વિધાન સત્ય છે.

(iv) જો કોઈ ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હોય, તો તેની સામેની બાજુઓની પ્રત્યેક જોડની બાજુ સમાન છે. આ સત્ય છે. (પ્રમેય 8.2, ધોરણ IX)

(v) 'જો બે ત્રિકોણોમાં અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન હોય, તો એકરૂપ છે' એ પ્રતીપ છે. આ વિધાન અસત્ય છે. આનું કોઈ યોગ્ય પ્રતિઉદાહરણ શોધવાનું તમારા પર છોડી દઈશું.

સ્વાધ્યાય A 1.5

1. નીચેનાં વિધાનોનાં પ્રતીપ લખો :

(i) જો ટોક્યોમાં ગરમી હોય, તો શરણને ખૂબ પરસેવો વળે.

(ii) જો શાલિની ભૂખી હોય, તો તેના પેટમાં બિલાડાં બોલતાં હોય.

(iii) જો જસવંતને શિષ્યવૃત્તિ મળે, તો તે ડિગ્રી મેળવી શકે.

(iv) જો વનસ્પતિને ફૂલો હોય, તો તે જીવંત છે.

(v) જો કોઈ પ્રાણી બિલાડી હોય, તો તેને પૂંછડી હોય.

2. નીચેનાં વિધાનોનાં પ્રતીપ લખો. ઉપરાંત દરેક કિસ્સામાં, તેનું પ્રતીપ સત્ય છે કે અસત્ય છે તે નક્કી કરો.

(i) જો ત્રિકોણ ABC સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ હોય, તો તેના આધાર પરના ખૂણા સમાન હોય.

(ii) જો કોઈ પૂર્ણાંક અયુગ્મ હોય, તો તેનો વર્ગ અયુગ્મ પૂર્ણાંક છે.

(iii) જો $x^2 = 1$ હોય, તો $x = 1$

(iv) જો ABCD સમાંતર બાજુ ચતુષ્કોણ હોય, તો AC અને BD એકબીજાને દુભાગે છે.

(v) જો a, b અને c પૂર્ણ સંખ્યાઓ હોય, તો $a + (b + c) = (a + b) + c$

(vi) જો x અને y બે અયુગ્મ સંખ્યાઓ હોય, તો $x + y$ યુગ્મ સંખ્યા છે.

(vii) જો કોઈ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનાં શિરોબિંદુઓ વર્તુળ પર હોય, તો તે લંબચોરસ છે.

A1.7 વિરોધાભાસથી સાબિતી

અત્યાર સુધીનાં આપણાં બધાં ઉદાહરણોમાં આપણે પરિણામોની સત્યાર્થતા પ્રસ્થાપિત કરવા માટે પ્રત્યક્ષ દલીલોનો ઉપયોગ કર્યો હતો. હવે આપણે પરોક્ષ દલીલો કરીશું, વિશિષ્ટ રીતે ગણિતમાં 'વિરોધાભાસથી સાબિતી' તરીકે ઓળખાતું ખૂબ જ શક્તિશાળી એવું સાધન છે. આપણે આ રીતનો પ્રકરણ 1માં કેટલીક સંખ્યાઓને સંમેય પ્રસ્થાપિત કરવા અને બીજા પ્રકરણોમાં કેટલાક પ્રમેયોમાં પણ ઉપયોગ કર્યો છે. અહીં, આપણે બીજાં કેટલાંક વધારે ઉદાહરણો આ સંકલ્પના દર્શાવવા લઈશું.

શરૂઆત કરતાં પહેલાં, આપણે વિરોધાભાસ શું છે તે સમજીએ. ગણિતમાં, જ્યારે વિધાન p એવું મળે કે p સત્ય હોય અને તેનું નિષેધ $\sim p$ પણ સત્ય હોય, ત્યારે વિરોધાભાસ ઉદ્ભવે.

ઉદાહરણ તરીકે,

$p : x = \frac{a}{b}$, a અને b પરસ્પર અવિભાજ્ય છે.

q : a અને b બંને 2 વડે નિઃશેષ વિભાજ્ય છે.

જો આપણે એવું ધારીએ કે, p સત્ય છે અને q સત્ય છે તેવું સાબિત કરી શકીએ, તો આપણે વિરોધાભાસ પર આવીએ છીએ. કારણ કે, q સૂચિત કરે છે કે, p નું નિષેધ સત્ય છે. તમને યાદ હશે કે, જ્યારે $\sqrt{2}$ અસંમેય છે સાબિત કરવાનો પ્રયત્ન કરીએ છીએ, ત્યારે આ જ બન્યું હતું. (જુઓ પ્રકરણ 1)

વિરોધાભાસથી સાબિતી કેવી રીતે મળે છે ?

આપણે આ એક ચોક્કસ ઉદાહરણથી સમજીએ.

ધારો કે, આપણને નીચે પ્રમાણે આપેલ છે :

બધી સ્ત્રીઓ મૃત્યુને અધીન છે.

A સ્ત્રી છે. સાબિત કરો કે, A મૃત્યુને અધીન છે.

આ એક અત્યંત સરળ ઉદાહરણ છે. ચાલો આપણે જોઈએ કે, તેને વિરોધાભાસથી કેમ સાબિત કરી શકાય.

- ચાલો, આપણે ધારીએ કે, વિધાન p ની સત્યાર્થતા પ્રસ્થાપિત કરવા માગીએ છીએ. (અહીં, આપણે સાબિત કરવા માંગીએ છીએ કે, A મૃત્યુને અધીન છે તે સત્ય છે).

- તેથી, આપણે વિધાન સત્ય નથી એવું ધારીને શરૂઆત કરીશું. એટલે કે, આપણે ધારીશું કે p નું નિષેધ સત્ય છે. (એટલે કે, A મૃત્યુને અધીન નથી).
- પછી આપણે p ના નિષેધની સત્યાર્થતા પર આધારિત તાર્કિક તારણોની હારમાળા આગળ લઈ જવાની પ્રક્રિયા કરીશું. (કારણ કે, A મૃત્યુને અધીન નથી એ આપેલા વિધાન 'બધી સ્ત્રીઓ મૃત્યુને અધીન છે.' નું પ્રતિ ઉદાહરણ છે. તેથી, તે અસત્ય છે કે, બધી સ્ત્રીઓ, મૃત્યુને અધીન છે).
- જો આ વિરોધાભાસ તરફ દોરતું હોય, તો આપણી અસત્ય ધારણા કે, p સત્ય નથી ના કારણે વિરોધાભાસ ઉદ્ભવે છે. (આપણને વિરોધાભાસ મળે છે, કારણ કે, આપણે બધી સ્ત્રીઓ મૃત્યુને અધીન છે' અને તેનું નિષેધ એ જ સાથે 'બધી સ્ત્રીઓ મૃત્યુને અધીન નથી' એ સત્ય હોવાથી વિરોધાભાસ મળે છે; કારણ કે આપણે ધાર્યું છે કે, A મૃત્યુને અધીન નથી).
- તેથી આપણી ધારણા અસત્ય છે. એટલે કે, p સત્ય થવું જોઈએ. (તેથી, A મૃત્યુને અધીન છે).

ચાલો આપણે ગણિતનાં ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 15 : શૂન્યેતર સંમેય સંખ્યા અને કોઈ પણ અસંમેય સંખ્યાનો ગુણાકાર અસંમેય છે તેમ સાબિત કરો.

ઉકેલ :

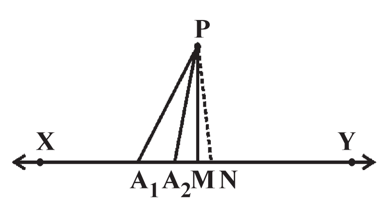
વિધાનો	પૃથક્કરણ/નોંધ
આપણે વિરોધાભાસથી સાબિતીનો ઉપયોગ કરીશું. ધારો કે, r શૂન્યેતર સંમેય સંખ્યા છે અને x અસંમેય સંખ્યા છે. ધારો કે, $r = \frac{m}{n}$ જ્યાં m અને n પૂર્ણાંકો છે અને $m \neq 0, n \neq 0$. આપણે એ સાબિત કરવું છે કે rx અસંમેય છે.	
ધારો કે, rx સંમેય છે.	અહીં, આપણે સાબિત કરવા જરૂરી વિધાનનું નિષેધ ધાર્યું છે.
તેથી, પૂર્ણાંક p, શૂન્યેતર પૂર્ણાંક q માટે $rx = \frac{p}{q}$	આગળના વિધાન અને સંમેય સંખ્યાની વ્યાખ્યા અનુસાર
$rx = \frac{p}{q}$, $q \neq 0$ ની પુનઃરચના કરીએ અને $r = \frac{m}{n}$ નો ઉપયોગ કરીએ, $x = \frac{p}{rq} = \frac{np}{mq}$ મળે. np અને mq પૂર્ણાંકો છે અને $mq \neq 0$. તેથી x સંમેય સંખ્યા છે.	પૂર્ણાંકોના ગુણધર્મો અને સંમેય સંખ્યાની વ્યાખ્યા પરથી.
આ એક વિરોધાભાસ છે, કારણ કે, આપણે સિદ્ધ કર્યું કે x સંમેય છે. પરંતુ પક્ષ પ્રમાણે x અસંમેય છે.	આપણે આ જ વિરોધાભાસ તો શોધતા હતા.
rx સંમેય છે એવી અસત્ય ધારણાના કારણે આ વિરોધાભાસ ઉદ્ભવ્યો. આથી rx અસંમેય છે.	તાર્કિક તારણ

હવે, આપણે ઉદાહરણ 11 સાબિત કરીશું. પરંતુ આ વખતે વિરોધાભાસથી સાબિતીનો ઉપયોગ કરીશું. સાબિતી આગળ આપેલી છે.

વિધાનો	પૃથક્કરણ/નોંધ
આપણે એવું ધારીએ કે, વિધાન સત્ય નથી.	આગળ જોયું તેમ, વિરોધાભાસથી સાબિતીનો આ શરૂઆતનો મુદ્દો છે.
તેથી, આપણે ધારીએ કે, પૂર્ણાંક સંખ્યા n માટે $6n + 1$ કે $6n + 5$ સ્વરૂપમાં ન હોય એવી અવિભાજ્ય સંખ્યા $p > 3$ મળે.	પરિણામમાંના વિધાનનું આ નિષેધ છે.
6 વડે ભાગાકાર માટે યુક્લિડ ભાગ પ્રવિધિ અને p એ $6n + 1$ કે $6n + 5$ સ્વરૂપમાં નથી એ હકીકતનો ઉપયોગ કરીને $p = 6n$ કે $6n + 2$ કે $6n + 3$ કે $6n + 4$ મળે. ($p > 3$ અવિભાજ્ય હોવાથી $n > 1$)	અગાઉ સાબિત કરેલા પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં
તેથી, p એ કાં તો 2 અથવા 3 વડે વિભાજ્ય બને.	તાર્કિક તારણ
તેથી, p અવિભાજ્ય નથી. (નોંધ : $p > 3$ હોવાથી $p = 2$ અથવા 3 નથી.)	તાર્કિક તારણ
આપણી પૂર્વધારણા p અવિભાજ્ય છે. તેનો આ વિરોધાભાસ છે.	આપણને આની જ જરૂર છે.
અહીં, વિરોધાભાસ મળે છે, કારણ કે, આપણે ધાર્યું છે કે એવો અવિભાજ્ય $p > 3$ અસ્તિત્વ ધરાવે જે $6n + 1$ કે $6n + 5$ સ્વરૂપમાં ન હોય.	
તેથી, 3 કરતાં મોટી પ્રત્યેક અવિભાજ્ય સંખ્યા $6n + 1$ કે $6n + 5$ સ્વરૂપમાં હોય.	આપણે તારણ મેળવ્યું.

નોંધ : ઉપર તમે સાબિતીનું ઉદાહરણ દર્શાવ્યું, હજુય ફરીથી પરિણામ સાબિત કરવા માટે બીજી કેટલીક રીતો છે.

પ્રમેય A 1.2 : આપેલા બિંદુમાંથી પસાર ન થતી હોય તેવી રેખા પરનાં બિંદુઓને આપેલ બિંદુ સાથે જોડતા તમામ રેખાખંડોમાં તે બિંદુમાંથી રેખા પરનો લંબરેખાખંડ સૌથી નાનો હોય છે.



આકૃતિ A 1.5

વિધાનો	પૃથક્કરણ/નોંધ
ધારો કે XY આપેલી રેખા છે. P એ રેખા XY પર ન હોય તેવું બિંદુ છે અને PM, PA_1, PA_2, ... વગેરે P માંથી રેખા XY પરનાં બિંદુઓ સુધી દોરેલા રેખાખંડો છે. તેમાં PM સૌથી નાનો છે. (જુઓ આકૃતિ A 1.5.)	આપણે એવું સાબિત કરવું છે કે, PM, PA_1, PA_2, ... વગેરે માંથી XY ને લંબ સૌથી નાનો છે. આપણે આ રેખાખંડો લઈને શરૂ કરીશું.
ધારો કે PM એ XY ને લંબ નથી.	વિરોધાભાસથી સાબિત કરવા માટે વિધાનનું આ નિષેધ છે.
XY પર લંબ PN દોરો. તે આકૃતિ A 1.5માં તૂટક રેખાથી દર્શાવેલ છે.	આપણે આપણું પરિણામ સાબિત કરવા રચનાની અવારનવાર જરૂર પડશે.

PN એ આપેલા બધા રેખાખંડો PM, PA_1, PA_2, ... વગેરેમાં સૌથી નાનો છે. એટલે કે, PN < PM	કાટકોણ ત્રિકોણની બાજુ કર્ણથી નાની હોય છે અને સંખ્યાઓનો જાણીતો ગુણધર્મ
આપણી પૂર્વધારણા કે PM એ બધા રેખાખંડોમાં સૌથી નાનો છે તેનો વિરોધાભાસ મળે છે.	ચોક્કસપણે આપણે આની જ તો જરૂર છે.
તેથી, રેખાખંડ PM એ XY ને લંબ છે.	આપણે તારણ મેળવ્યું.

સ્વાધ્યાય A 1.6

1. ધારો કે, $a + b = c + d$, અને $a < c$, વિરોધાભાસથી સાબિતીનો ઉપયોગ કરી દર્શાવો કે, $b > d$
2. જો r સંમેય સંખ્યા હોય અને x અસંમેય સંખ્યા હોય, તો વિરોધાભાસથી સાબિતીનો ઉપયોગ કરી દર્શાવો કે, $r + x$ અસંમેય સંખ્યા છે.
3. વિરોધાભાસથી સાબિતીનો ઉપયોગ કરીને સાબિત કરો કે, જો કોઈ પૂર્ણાંક a માટે, a^2 યુગ્મ હોય, તો a પણ યુગ્મ છે.

   [**સૂચન :** a યુગ્મ નથી એમ ધારો. તેથી, તે કોઈ પૂર્ણાંક n માટે a^2 એ $2n + 1$ સ્વરૂપમાં છે અને આગળ વધો].
4. વિરોધાભાસથી સાબિતીનો ઉપયોગ કરીને સાબિત કરો કે, જો કોઈ પૂર્ણાંક a માટે, a^2, 3 વડે વિભાજ્ય હોય, તો a એ, 3 વડે વિભાજ્ય હોય.
5. વિરોધાભાસથી સાબિતીનો ઉપયોગ કરીને બતાવો કે, n ની કોઈ પણ કિંમત માટે 6^n નો અંતિમ અંક શૂન્ય ન હોય.
6. વિરોધાભાસથી સાબિત કરો કે, સમતલની કોઈપણ બે ભિન્ન રેખાઓ એક કરતાં વધારે બિંદુમાં છેદે નહીં.

A1.8 સારાંશ

આ પરિશિષ્ટમાં, તમે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. સાબિતીના અલગ અલગ ઘટકો અને ધોરણ IX માં શીખેલી સંબંધિત સંકલ્પનાઓ.
2. વિધાનનું નિષેધ
3. વિધાનનું પ્રતીપ
4. વિરોધાભાસથી સાબિતી

■