ગાણિતિક મોડેલિંગ A2

A2.1 પ્રાસ્તાવિક

- એક પુખ્ત માનવશરીરમાં લોહીનું વહન કરતી ધમનીઓ અને શિરાઓની લંબાઈ લગભગ 1,50,000 કિમી હોય છે.
- માનવહૃદય શરીરમાં પ્રત્યેક 60 સેકન્ડે 5 થી 6 લિટર લોહીને વહેતું કરે છે.
- સૂર્યની સપાટીનું તાપમાન અંદાજે $6000°$ સે છે.

તમને ક્યારેય આશ્ચર્ય થયું છે કે, આપણા વૈજ્ઞાનિકો અને ગણિતશાસ્ત્રીઓએ ઉપર્યુક્ત પરિણામોનું અનુમાન કેવી રીતે કર્યું હશે ? તેમણે મૃત પુખ્ત માનવશરીરની બધી જ ધમનીઓ અને શિરાઓ બહાર કાઢીને તેમની લંબાઈ માપી હશે ? તે માનવશરીરનું બધું જ લોહી બહાર કાઢી અને આ પરિણામ પર પહોંચ્યા હશે ? સૂર્યની સપાટીનું તાપમાન જાણવા માટે તેમણે થરમોમિટર સાથે સૂર્યની સફર ખેડી હશે ? ચોક્કસપણે ના. તો આ પરિણામોના આંકડા તેમને કેવી રીતે મળ્યા ?

સંભવતઃ આનો જવાબ ગાણિતિક મોડેલિંગમાં રહેલો છે. તમે તેનો પરિચય ધોરણ IX માં કર્યો છે. તમને યાદ હશે કે ગાણિતિક મોડેલિંગ એ જીવનની વાસ્તવિક પરિસ્થિતિનું ગાણિતિક વર્ણન છે. અને તમે એ પણ જાણો છો કે, ગાણિતિક મોડેલિંગ ગાણિતિક મોડેલ બનાવવાની પદ્ધતિ છે અને આ આપણે મોડેલનો ઉપયોગ સમસ્યાનું વિશ્લેષણ કરવામાં અને તેને ઉકેલવામાં કરીએ છીએ.

આમ, ગાણિતિક મોડેલિંગમાં આપણે વાસ્તવિક દુનિયાને લગતી સમસ્યાઓ લઈશું અને તેનું રૂપાંતરણ તે સમસ્યાને સમકક્ષ ગાણિતિક સમસ્યામાં પરિવર્તિત કરીશું. ત્યાર બાદ આપણે ગાણિતિક સમસ્યાનો ઉકેલ મેળવી અને આ ઉકેલનું વાસ્તવિક દુનિયાને લગતી સમસ્યા માટે અર્થઘટન કરીશું. અહીં એ પણ જોવું અગત્યનું છે કે, આપણે મેળવેલ ઉકેલ મોડેલની યથાર્થતાની ચકાસણીના તબક્કે અર્થપૂર્ણ હોય. આગળ જેમાં ગાણિતિક મોડેલિંગની ખૂબ જ અગત્યતા હોય એવાં કેટલાંક ઉદાહરણો આપેલ છે :

(i) દુર્ગમ સ્થાન પર આવેલ નદીની પહોળાઈ તથા ઊંડાઈ શોધવી.

(ii) પૃથ્વી તથા અન્ય ગ્રહોના દ્રવ્યમાનનું અનુમાન કરવું.

(iii) પૃથ્વી તથા અન્ય ગ્રહો વચ્ચેના અંતરનું અનુમાન કરવું.

(iv) કોઈ એક દેશમાં ચોમાસાના આગમનની આગાહી કરવી.

(v) શૅરબજારના વલણની આગાહી કરવી.

(vi) વ્યક્તિના શરીરમાં રહેલા લોહીના જથ્થાનો અંદાજ લગાવવો.

(vii) કોઈ એક શહેરની 10 વર્ષ પછીની જનસંખ્યાનું અનુમાન કરવું.

(viii) ઝાડ પર રહેલાં પાંદડાંની સંખ્યાનો અંદાજ કાઢવો.

(ix) કોઈ એક શહેરના વાતાવરણમાં રહેલા અલગ-અલગ પ્રદૂષકોનો ppm એકમમાં અંદાજ લગાવવો.

(x) પ્રદૂષકોની પર્યાવરણ પર થતી અસરોના અંદાજ કાઢવા.

(xi) સૂર્યની સપાટીના તાપમાનનો અંદાજ મૂકવો.

આ પ્રકરણમાં આપણે ગાણિતિક મોડેલિંગની પ્રક્રિયાનું પુનરાવલોકન કરીશું અને આસપાસનાં કેટલાંક દુન્યવી ઉદાહરણો દ્વારા તેની સંકલ્પના સ્પષ્ટ કરીશું. વિભાગ A 2.2 માં મોડલ બનાવવાના વિવિધ તબક્કા દર્શાવીશું. વિભાગ A 2.3 માં આપણે વિવિધ ઉદાહરણોની ચર્ચા કરીશું. વિભાગ A 2.4 માં આપણે ગાણિતિક મોડેલિંગની ઉપયોગિતા સંબંધિત કારણો પર વિચાર કરીશું.

યાદ રાખો કે, અમારું ધ્યેય તમને ગણિત દુન્યવી સમસ્યાઓ ઉકેલવામાં કેવી રીતે સહાય કરે છે તે વિશે જાગૃત કરવાનું છે. તેમ છતાં પણ ગાણિતિક મોડેલિંગના મહત્ત્વને સચોટ રીતે સમજવા માટે તમને ગણિતનું થોડું વધારે જ્ઞાન હોય તે આવશ્યક છે. હવે પછીના વર્ગમાં તમને આને સંબંધિત કેટલાંક ઉદાહરણો જોવા મળશે.

A2.2 ગાણિતિક મોડેલિંગનાં સોપાનો

ધોરણ IX માં આપણે મોડેલિંગ વિશેનાં ઉદાહરણો વિશે વિચાર કર્યો હતો. આ ઉદાહરણોમાં તમને પ્રક્રિયા અને તેમાં સમાવિષ્ટ સોપાનો વિશે જાણકારી મળી હતી. ચાલો, હવે આપણે ગાણિતિક મોડેલિંગ સંબંધિત મુખ્ય સોપાનો પર ફરીથી વિચાર કરીએ.

સોપાન 1 (સમસ્યાની સમજણ) : વાસ્તવિક સમસ્યાને વ્યાખ્યાયિત કરો અને જો તમે સમૂહમાં કામ કરતા હો તો જેને તમે સમજવા માંગતા હો એવી સમસ્યા પર વિચાર કરો. કેટલીક ધારણાઓ કરીને તથા કેટલાંક પરિબળોને અવગણીને સફળતા મેળવી શકાય તે માટે સમસ્યાનું સરળીકરણ કરો.

ઉદાહરણ તરીકે, ધારો કે, આપણી સમસ્યા એક તળાવમાં રહેલી માછલીઓની સંખ્યાઓનો અંદાજ મેળવવાની છે. અહીં પ્રત્યેક માછલીને પકડી અને ત્યાર બાદ તેની ગણતરી કરવી શક્ય નથી. આવી સ્થિતિમાં, સંભવતઃ આપણે તળાવમાંથી માછલીઓનો નિયત નમૂનો લઈશું, તેની ગણતરી કરી અને તેના આધારે તેમની કુલ સંખ્યાનું અનુમાન કરીશું.

સોપાન 2 (ગાણિતિક વર્ણન અને સૂત્રીકરણ) : સમસ્યાના વિભિન્ન પાસાંઓનું વર્ણન ગાણિતિક શબ્દોમાં કરો. સમસ્યાનાં વિભિન્ન લક્ષણોને ગાણિતિક સ્વરૂપે દર્શાવવાની કેટલીક પદ્ધતિઓ નીચે પ્રમાણે છે :

- ચલને વ્યાખ્યાયિત કરો.
- સમીકરણ અથવા અસમતા લખો.
- માહિતી એકત્રિત કરો અને તેને કોષ્ટક સ્વરૂપે દર્શાવો.
- આલેખ દોરો.
- સંભાવનાઓની ગણતરી કરો.

ઉદાહરણ તરીકે, સોપાન 1માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે લીધેલા થોડાક નમૂનાના આધારે માછલીઓની કુલ સંખ્યાનો અંદાજ કેવી રીતે કરી શકાય ? આ માટે નિશ્ચિત નમૂના તરીકે લીધેલ દરેક માછલીને નિશાની કરી અને તળાવમાં રહેલી બીજી માછલીઓ સાથે તેમને છોડી દઈશું. થોડાક સમય બાદ આપણે ફરીથી માછલીઓનો એક નિશ્ચિત નમૂનો લઈશું અને આ નવા નમૂનામાં અગાઉ નિશાની કરેલી માછલીઓની સંખ્યા કેટલી છે તે જોઈશું. ત્યારબાદ ગુણોત્તર અને પ્રમાણનો ઉપયોગ કરીને આપણે તેમની કુલ સંખ્યાનો અંદાજ મેળવી શકીશું. ધારો કે, તળાવમાંથી આપણે 20 માછલીઓનો એક નમૂનો લઈએ છીએ અને દરેકને નિશાની કરી અને તળાવમાં બાકી રહેલ માછલીઓ સાથે ભળી જાય તે રીતે તે જ તળાવમાં છોડી દઈએ છીએ. ત્યારબાદ તળાવમાં રહેલા માછલીઓના મિશ્ર સમૂહમાંથી આપણે માછલીઓનો બીજો એક નમૂનો (ધારો કે, 50 માછલીઓ) લઈએ અને જોઈશું કે, આ નવા નમૂનામાં અગાઉથી નિશાની કરેલ કેટલી માછલીઓ આવેલ છે. આ પ્રમાણે આપણે માહિતી એકત્રિત કરીશું અને ત્યારબાદ તેનું વિશ્લેષણ કરીશું.

અહીં આપણે એવું માની લઈશું કે, નિશાની કરેલ દરેક માછલી એક સમાન રૂપે તળાવમાં બાકી રહેલ માછલીઓ સાથે ભળે છે અને આપણે જે નિશ્ચિત નમૂનો લઈએ છીએ તે માછલીઓના કુલ સમૂહનું સારું પ્રતિનિધિત્વ કરે છે.

સોપાન 3 (ગાણિતિક સમસ્યાનો ઉકેલ મેળવવો) : અહીં સોપાન 2 માં સરળ બનાવેલ ગાણિતિક સમસ્યાનો વિભિન્ન ગાણિતિક પ્રવિધિનો ઉપયોગ કરીને ઉકેલ મેળવવામાં આવે છે.

ઉદાહરણ તરીકે, ધારો કે, સોપાન 2 માં લીધેલા બીજા જથ્થામાં 5 માછલીઓ નિશાનીવાળી મળે છે. આમ, માછલીઓની કુલ સંખ્યામાંથી $\frac{5}{50}$ એટલે કે, $\frac{1}{10}$ માછલીઓ નિશાનીવાળી હશે. હવે જો આ મળેલ સંખ્યાને કુલ સંખ્યા સ્વરૂપે દર્શાવીએ, તો કુલ સંખ્યાનો $\frac{1}{10}$ ભાગ $= 20$

આમ, કુલ સંખ્યા $= 20 \times 10 = 200$ થાય.

સોપાન 4 (ઉકેલનું અર્થઘટન) : અગાઉના સોપાનમાં પ્રાપ્ત થયેલ ઉકેલને આપણે સોપાન 1 માં લીધેલ વાસ્તવિક જીવનસંબંધી સ્થિતિના સંદર્ભમાં લઈશું.

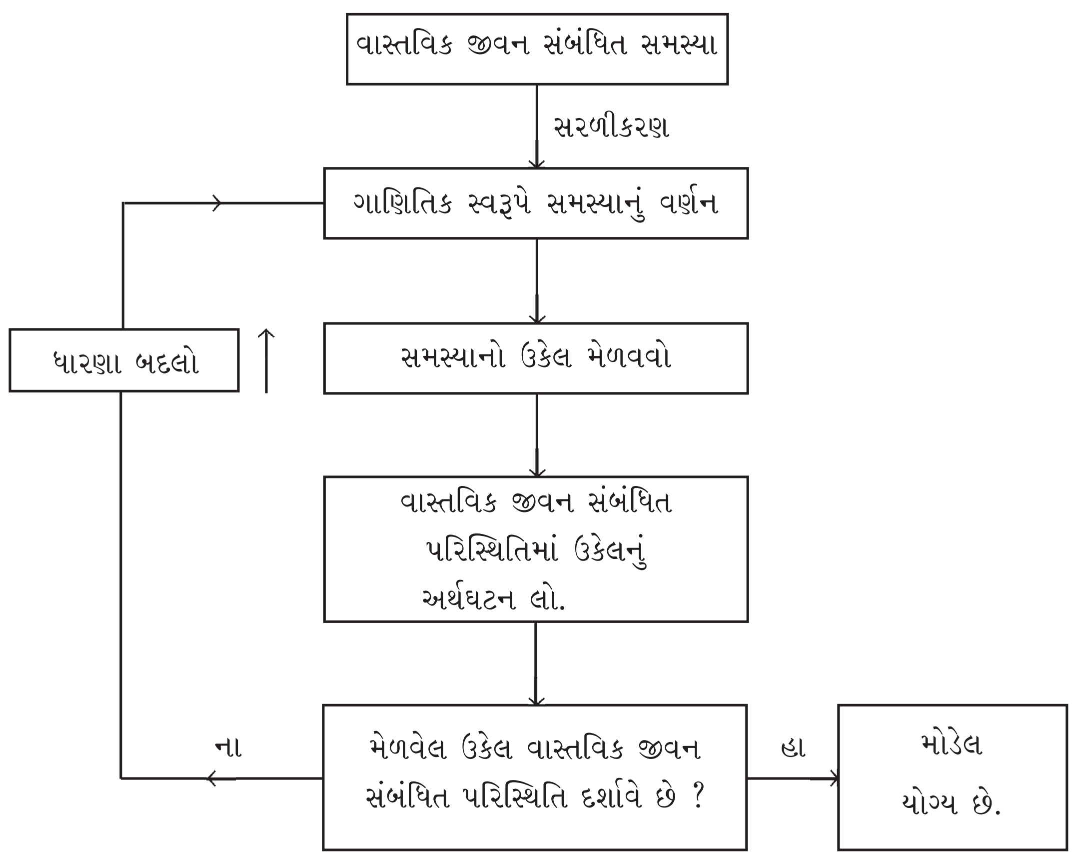
ઉદાહરણ તરીકે, સોપાન 3 ની સમસ્યાનો ઉકેલ મેળવતાં આપણને માછલીઓની કુલ સંખ્યા 200 મળી હતી.

સોપાન 5 (મોડેલની યથાર્થતા) : હવે આપણે મૂળ પરિસ્થિતિ પર પાછા ફરીએ અને જોઈએ કે, ગાણિતિક પ્રવિધિ દ્વારા મેળવેલ પરિણામ સાર્થક છે કે નહીં. જો સાર્થક હોય, તો આપણે જ્યાં સુધી કોઈ નવી માહિતી પ્રાપ્ત ન થાય અથવા તો યથાર્થતામાં કોઈ બદલાવ ન આવે ત્યાં સુધી આ મોડેલનો ઉપયોગ કરતા રહીશું.

કેટલીક વાર સમસ્યાનું ગાણિતિક વર્ણન કરતી વખતે સરળીકરણ માટે કરવામાં આવતી ધારણાઓના લીધે વાસ્તવિક સમસ્યાના આવશ્યક પાસાંઓથી આપણે વંચિત રહીએ છીએ. આ પરિસ્થિતિમાં મેળવેલ ઉકેલ વાસ્તવિકતાથી બહુ જ દૂર હોય છે અને વાસ્તવિક પરિસ્થિતિના સંદર્ભમાં તે અર્થપૂર્ણ હોતા નથી. જો આવું થાય, તો આપણે સોપાન 1 માં કરેલી ધારણાઓ પર ફરી વિચાર કરીશું. અને કદાચ જે પરિબળોને અગાઉ અવગણ્યા હતા તેમનો સમાવેશ કરીને વધુ વાસ્તવિક બનાવીશું.

ઉદાહરણ તરીકે, સોપાન 3 માં આપણને મળેલ માછલીઓની કુલ સંખ્યાનું અનુમાન એ તળાવમાં રહેલી માછલીઓની વાસ્તવિક સંખ્યા જેટલું ના પણ હોય. હવે આપણે સોપાન 2 અને 3 ની પ્રક્રિયાને એકથી વધારે વાર કરી અને મેળવેલ પરિણામોનો મધ્યક મેળવીશું અને જોઈશું કે તે દ્વારા ઉચિત પરિણામ મળે છે કે નહિ. આ રીતે તમને કુલ સંખ્યાની વધુ નજીકનો અંદાજ મળશે.

ગાણિતિક મોડેલિંગની પ્રક્રિયાને દર્શાવતી બીજી એક પદ્ધતિ આકૃતિ A 2.1માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ A 2.1

ઉકેલની સરળતા માટે મોડેલ બનાવનાર સરળીકરણ (ઉકેલ પ્રાપ્તિની સરળતા માટે) અને ચોકસાઈ બંનેની વચ્ચે સંતુલન જાળવી રાખે છે કે, જેથી કંઈ પ્રગતિ થઈ શકે તેટલા વાસ્તવિકતાથી પર્યાપ્ત રીતે નજીક હોય તેવી તે આશા રાખે છે. સર્વોત્તમ પરિણામ એ હશે, કે જેનાથી આગળ શું થવાનું છે તેની આગાહી કરી શકાય અથવા તો થોડીક

ચોકસાઈ સાથે પરિણામની આગાહી કરી શકાય. ધ્યાન રાખો કે, સમસ્યાના સરળીકરણ માટે ઉપયોગમાં લેવાયેલ વિભિન્ન ધારણાઓથી આપણને અલગ-અલગ મોડેલ મળી શકે છે. આમ કોઈ પણ મોડેલ પરિપૂર્ણ હોતું નથી. આમાંથી કેટલાક સારાં પણ હોય અને કેટલાંક ઉત્તમ પણ હોઈ શકે.

સ્વાધ્યાય A 2.1

1. નીચે દર્શાવેલ પરિસ્થિતિ પર વિચાર કરો.

તેરમી સદીના પ્રારંભમાં લિઓનાર્ડો ફિબોનાકીએ એક કૂટપ્રશ્ન રજુ કર્યો કે, જો તમારી પાસે સસલાની એક જોડ (એક નર અને એક માદા) હોય અને તે પ્રજનન કરે તો અમુક સમય પછી તમારી પાસે કેટલાં સસલાં હશે. ધારો કે, એક જોડ દર મહિને એક એક જોડ (એક નર અને એક માદા) ને જન્મ આપે છે અને તાજી જન્મેલી સસલાની જોડ જન્મના 2 મહિના બાદ પ્રથમ જોડને જન્મ આપી શકે છે. શરૂઆત અને પ્રથમ માસ ને બાદ કરતાં માસવાર સસલાંઓની જોડની સંખ્યા તે માસના અગાઉના બે માસમાં રહેલી જોડની સંખ્યાના સરવાળા બરાબર થાય છે.

માસ	સસલાંની જોડ
0	1
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8
6	13
7	21
8	34
9	55
10	89
11	144
12	233
13	377
14	610
15	987
16	1597

16 મહિના પછી તમારી પાસે લગભગ 1600 જોડ સસલાં હશે !

આ પરિસ્થિતિનું સ્પષ્ટ વિધાન કરો તથા ગાણિતિક મોડેલિંગનાં અલગ-અલગ સોપાનો વિશે સ્પષ્ટતા કરો.

A2.3 કેટલાંક ઉદાહરણો

હવે ગાણિતિક મોડેલિંગના કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 1 : (પાસાની એક જોડને ફેંકવી) : ધારો કે, તમારી શિક્ષિકા તમને અનુમાન કરવાની એક રમત માટે આહ્વાન આપે છે. આ રમતમાં તે પાસાની એક જોડ ફેંકશે. પાસાઓને ફેંકતાં પહેલાં તમારે તે બંને પાસા પર આવનાર સંખ્યાઓનો સરવાળો કેટલો હશે તેનું અનુમાન લગાવવાનું છે. દરેક સત્ય જવાબ માટે તમને બે ગુણ મળશે અને દરેક અસત્ય જવાબ માટે તમે બે ગુણ ગુમાવશો. તો આ રમત માટે કઈ સંખ્યાઓ ઉત્તમ અનુમાન હશે ?

ઉકેલ :

સોપાન 1 (સમસ્યાની સમજ) : અહીં તમારે કેટલીક એવી સંખ્યાઓ જાણવી પડશે કે જેની પાસાઓ પર આવવાની સંભાવના સૌથી વધારે હોય.

સોપાન 2 (ગાણિતિક વર્ણન) : ગાણિતિક સ્વરૂપમાં આ સમસ્યા પાસાઓ પર આવનાર સંખ્યાના અલગ-અલગ શક્ય સરવાળાઓની સંભાવના જાણવામાં પરિવર્તિત થાય છે.

નીચે દર્શાવેલ 36 સંખ્યા યુગ્મમાંથી કોઈ એક યાદચ્છિક વિકલ્પના રૂપમાં પસંદ કરી આપણે બહુ જ સરળ રીતે આ સ્થિતિને પ્રદર્શિત કરી શકીએ છીએ :

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

ઉપર્યુક્ત સંખ્યા-યુગ્મમાં દર્શાવેલ પ્રથમ સંખ્યા પ્રથમ પાસા પર આવેલ સંખ્યા છે અને બીજી સંખ્યા બીજા પાસા પર આવેલ સંખ્યા દર્શાવે છે.

સોપાન 3 (ગાણિતિક સમસ્યાનો ઉકેલ મેળવવો) : ઉપર્યુક્ત સંખ્યા-યુગ્મમાં આવેલા સંખ્યાઓના સરવાળા કરતાં આપણને સંભવિત સરવાળા તરીકે 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 અને 12 જેવી સંખ્યાઓ મળે છે. ઉપર્યુક્ત દરેક ઘટનાને સમસંભાવી માનીને આપણે દરેકની સંભાવના શોધવી પડશે.

તે આપણે નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવીશું :

સરવાળો	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
સંભાવના	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

તમે જોઈ શકો છો કે, સંખ્યાઓનો સરવાળો 7 આવવાની સંભાવના $\frac{1}{6}$ છે. તે સરવાળા તરીકે આવતી અન્ય સંખ્યાઓ કરતા સૌથી વધારે છે.

સોપાન 4 (ઉકેલનું અર્થઘટન) : સરવાળો 7 આવવાની સંભાવના સૌથી વધારે હોવાથી તમે સંખ્યા 7 નું અનુમાન વારંવાર કરી શકો છો.

સોપાન 5 (મોડેલની યથાર્થતા) : પાસાની એક જોડને ઘણી બધી વાર ઉછાળો અને તેનાં પરિણામો માટે એક સાપેક્ષ

આવૃત્તિ કોષ્ટક બનાવો. હવે સાપેક્ષ આવૃત્તિની સરખામણી તેને અનુરૂપ સંભાવનાઓ જોડે કરો. હવે જો આ પરિણામો એકબીજાની નજીક ના હોય તો શક્ય છે કે, પાસાઓની જોડ અસમતોલ છે. જે સંખ્યા પૂર્વગ્રહયુક્ત હોય તેવી માહિતી લઈએ.

હવે પછીના ઉદાહરણ માટે તમને થોડીક પૂર્વ ભૂમિકાની જરૂર પડશે.

જ્યારે રૂપિયાની જરૂર હોય, ત્યારે રૂપિયા ના હોવા એ ઘણા બધા લોકોનો સામાન્ય અનુભવ છે. આપણને હંમેશાં રૂપિયાની જરૂર પડે છે; પછી એ જીવન જરૂરિયાતની વસ્તુઓ ખરીદવા માટે હોય કે, સુખાકારી માટે. સ્કૂટર, રેફ્રિજરેટર, ટેલિવિઝન, કાર જેવી વસ્તુઓ ઓછી મૂડી સાથે પણ ગ્રાહક ખરીદી શકે તે માટે વેપારીઓ દ્વારા હપતા પદ્ધતિ જેવી યોજનાઓ અમલમાં મૂકવામાં આવે છે.

ઘણી વાર વસ્તુઓનું વેચાણ વધારવાના ભાગરૂપે ગ્રાહકોને આકર્ષવા માટે પણ વેપારી હપતાપદ્ધતિ જેવી યોજના મૂકે છે. હપતાપદ્ધતિમાં ગ્રાહકે વસ્તુ ખરીદતી વખતે વસ્તુની પૂરેપૂરી ખરીદકિંમત આપવી પડતી નથી. વસ્તુની ખરીદી વખતે ગ્રાહક વસ્તુની કુલ ખરીદ કિંમતનો અમુક ભાગ ચૂકવે છે અને બાકી રહેલ રકમ તે માસિક, ત્રિમાસિક, છ માસિક કે વાર્ષિક હપતારૂપે ચૂકવી શકે. હકીકતમાં હપતાપદ્ધતિમાં વેપારી પાછળથી ચૂકવવામાં આવનારી રકમ પર થોડુંક વ્યાજ પણ ગ્રાહક પાસેથી વસૂલ કરે છે. (તેને ***સ્થગિત ચૂકવણી (Defered payment)*** કહે છે).

હપતા પદ્ધતિને વધુ સારી રીતે સમજવા માટે તેને સંબંધિત ઉદાહરણ લેતાં પહેલાં આપણે તેની સંકલ્પના સંબંધિત વારંવાર ઉપયોગમાં લેવાતા શબ્દો સમજીએ.

વસ્તુની ખરીદી વખતે ગ્રાહક દ્વારા ચૂકવાતી વસ્તુની પૂરેપૂરી કિંમતને ***રોકડ કિંમત (Cash price)*** કહે છે. હપતાપદ્ધતિમાં ગ્રાહક દ્વારા મૂળ કિંમતના કોઈ એક અંશ જેટલી ચૂકવવામાં આવતી રકમને ***તત્કાળ ચૂકવણી (Down payment)*** કહે છે.

નોંધ : હપતાપદ્ધતિમાં ખરીદેલ વસ્તુની ખરીદીની બાકી રહેલ રકમની ચૂકવણી એક વર્ષની અંદર જ કરવાની હોય તો સ્થગિત ચૂકવણી પર સાદુ વ્યાજ વસૂલવામાં આવે છે.

> જૂના જમાનામાં ઉધાર લીધેલ ધન રાશિ પર વ્યાજ લેવું એક કુપ્રથા હતી અને આવું કરવું તે પ્રતિબંધિત પણ હતું. વ્યાજ વસૂલી સંબંધિત કાયદાથી બચવા માટે લોકો ઉધાર લેવા માટે કોઈ એક ચલણનો ઉપયોગ કરતાં અને તેની ચૂકવણી કોઈ બીજા ચલણમાં કરતાં અને વ્યાજ વિનિમયનો દર છુપાવતા હતા.

હવે, આ સંબંધિત ગાણિતિક મોડેલિંગની સમસ્યા પર વિચાર કરીએ.

ઉદાહરણ 2 : જૂહી એક સાઇકલ ખરીદવા ઈચ્છે છે. તે બજારમાં જાય છે, અને જુએ છે કે, જે સાઇકલ તેને પસંદ છે તેની કિંમત ₹ 1800 છે. જૂહી પાસે ફક્ત ₹ 600 જ છે. તેથી તે દુકાનદારને કહે છે કે, તે અત્યારે સાઇકલ ખરીદી શકે તેવી સ્થિતિમાં નથી. થોડીક ગણતરી બાદ દુકાનદાર નીચે પ્રમાણેની તૈયારી બતાવે છે : તે જૂહીને કહે છે કે, જો તે અત્યારે ₹ 600 રોકડા તત્કાળ ચૂકવણી પેટે અને બાકીની રકમ ₹ 610નો એક એવા બે માસિક હપતામાં ચૂકવે તો તે અત્યારે સાઇકલ ખરીદી શકે છે. જૂહી પાસે હવે બે વિકલ્પ છે, કાં તો એ હપતા પદ્ધતિ દ્વારા સાઇકલ ખરીદે અથવા તો તે રોકડેથી ખરીદવા માટે બેંકમાંથી વાર્ષિક 10 ટકાના સાદા વ્યાજે ઉપલબ્ધ ઋણ લે. કયો વિકલ્પ આર્થિક રીતે વધુ યોગ્ય હશે ?

ઉકેલ :

સોપાન 1 (સમસ્યાની સમજ) : અહીં જૂહી એ નક્કી કરવા માંગે છે કે, તેને દુકાનદાર દ્વારા આપવામાં આવેલ વિકલ્પ સ્વીકારવો કે નહિ. આ માટે બંને વિકલ્પ માટેના વ્યાજના દર જાણવા જરૂરી છે; એક કે જે હપતાપદ્ધતિમાં લાગુ પડશે અને બીજો કે જે બૅન્ક દ્વારા લગાવવામાં આવશે (તે 10 % છે).

સોપાન 2 (ગાણિતિક વર્ણન) : હપતાપદ્ધતિની યોજનાના સ્વીકાર કે અસ્વીકાર માટે, તેને દુકાનદાર દ્વારા લેવામાં આવનાર વ્યાજની સરખામણી બૅન્કના વ્યાજ સાથે કરવી પડશે. ધ્યાન આપો. અહીં વ્યાજની ચૂકવણી એક વર્ષની અંદર કરવાની હોવાથી સાદું વ્યાજ લાગુ પડશે.

આપણે જાણીએ છીએ કે સાઇકલની રોકડ કિંમત = ₹ 1800

અને હપતાપદ્ધતિમાં તત્કાળ ચૂકવણીની રકમ = ₹ 600

માટે, હપતાપદ્ધતિ દ્વારા જેની ચૂકવણી કરવાની છે તે શેષ-રકમ = ₹ (1800 – 600) = ₹ 1200

ધારો કે દુકાનદાર દ્વારા લેવાનાર વ્યાજનો વાર્ષિક દર r % છે.

પ્રત્યેક હપતાની રકમ = ₹ 610

હપતા દ્વારા ચૂકવાતી કુલ રકમ = ₹ 610 + ₹ 610 = ₹ 1220

હપતાપદ્ધતિમાં ચૂકવવામાં આવનાર કુલ વ્યાજ = ₹ 1220 – ₹ 1200 = ₹ 20 (1)

હવે, જૂહી ₹ 1200 પોતાની પાસે એક મહિના સુધી રાખે છે. માટે

પ્રથમ માસનું મુદ્દલ = ₹ 1200

દ્વિતીય માસનું મુદ્દલ = ₹ (1200 – 610) = ₹ 590

દ્વિતીય માસનું શેષમુદ્દલ ₹ 590 + વ્યાજ (₹ 20) = માસિક હપતો (₹ 610) = બીજો હપતો

આમ, એક માસ માટેનું કુલ મુદ્દલ = ₹ 1200 + ₹ 590 = ₹ 1790

તેથી, વ્યાજ $= \frac{1790 \times r \times 1}{100 \times 12}$ (2)

સોપાન 3 (સમસ્યાનો ઉકેલ મેળવવો) : પરિણામ (1) અને (2) પરથી,

$$\frac{1790 \times r \times 1}{100 \times 12} = 20$$

માટે $r = \frac{20 \times 1200}{1790} = 13.14$ (આશરે)

સોપાન 4 (ઉકેલનું અર્થઘટન) : હપતાપદ્ધતિમાં વ્યાજનો દર 13.14 % છે. બૅન્ક દ્વારા લાગવવામાં આવેલ વ્યાજનો દર 10 % છે.

આમ, સાઇકલ ખરીદવા માટે બૅન્કમાંથી ધન રાશિ લેવી જૂહી માટે આર્થિક રીતે વધુ યોગ્ય છે.

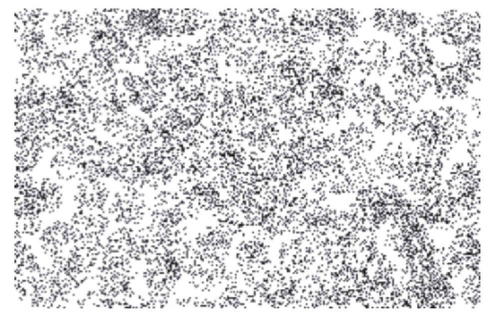
સોપાન 5 (મોડેલની યથાર્થતા) : આ સ્થિતિમાં આ સોપાનનું હવે કોઈ મહત્ત્વ નથી કારણ કે, અહીં સંખ્યાઓ નિશ્ચિત છે. તેમ છતાં પણ બૅન્કમાંથી લોન લેવા માટે કરવી પડતી ઔપચારિકતાઓ તથા તે માટે કરવા પડતા ખર્ચ જેવા કે, સ્ટેમ્પપેપર (દસ્તાવેજ માટેના કાગળ)ની કિંમત વગેરેના કારણે અસરકારક વ્યાજનો દર હપતાપદ્ધતિમાં લાગુ પડનાર વ્યાજના દર કરતાં વધી જાય છે. તેથી, તે પોતાનો વિચાર બદલી પણ શકે છે.

નોંધ : વ્યાજના દર અંગેનું મોડેલિંગ હજુ પણ તેની પ્રારંભિક અવસ્થામાં જ છે અને તેની માન્યતા નાણાકીય બજાર માટે હજુ પણ એક સમસ્યા જ છે અને જો હપતાની રકમ નક્કી કરવા માટે અલગ અલગ વ્યાજના દર લગાવવામાં આવેલ હોય તો તેની માન્યતા એક મહત્ત્વની સમસ્યા બની રહે છે.

સ્વાધ્યાય A 2.2

નીચે આપેલ સમસ્યાઓ માટે સમસ્યાનો ઉકેલ મેળવવા માટેના ગાણિતિક મોડેલિંગનાં વિભિન્ન સોપાનો દર્શાવો :

1. એક પક્ષીવિદ્ એક વિશાળ ક્ષેત્રમાં રહેલા પોપટની સંખ્યાનો અંદાજ મેળવવા માંગે છે. આ માટે તે કેટલાક પોપટ પકડવા માટે જાળ પાથરે છે અને 32 પોપટ પકડે છે. તેને તે કડી પહેરાવી છોડી મૂકે છે. તે પછીના અઠવાડિયે તે જાળ પાથરીને 40 પોપટ પકડે છે. તેમાંથી 8 પોપટ કડી પહેરેલા છે.
   (i) બીજી વાર પકડેલા પોપટમાંથી કેટલા ભાગના પોપટ કડી પહેરેલા હશે ?
   (ii) આ ક્ષેત્રમાં રહેલા પોપટની કુલ સંખ્યાનો અંદાજ મેળવો.



2. ધારો કે બાજુમાં આપેલ આકૃતિ એક જંગલની લીધેલી હવાઈ તસ્વીર દર્શાવે છે અને તેમાં રહેલું પ્રત્યેક ટપકું એક વૃક્ષનો નિર્દેશ કરે છે. અહીં તમારો ઉદ્દેશ, પર્યાવરણ સર્વેક્ષણના ભાગ રૂપે અહીં દર્શાવેલ ક્ષેત્રની જમીન પરનાં વૃક્ષની સંખ્યા શોધવાનો છે.

3. એક ટીવી ₹ 24,000 રોકડા આપીને ખરીદી શકાય છે અથવા તો ₹ 8000ની તત્કાળ ચૂકવણી કરી અને બાકીની રકમ ₹ 2800 નો એક એવા કુલ છ માસિક હપતા દ્વારા ચૂકવીને ખરીદી શકાય છે. અલી બજારમાં ટીવી ખરીદવા જાય છે. તેની પાસે ₹ 8000 છે. હવે તેની પાસે બે વિકલ્પ છે કાં તો એ હપતાપદ્ધતિ દ્વારા ટીવી ખરીદે અથવા તો નાણાકીય મંડળી પાસેથી લોન લઈ અને રોકડેથી ટીવી ખરીદે. મંડળી વાર્ષિક 18 ટકાના સાદા વ્યાજે લોન આપે છે, તો અલી માટે કયો વિકલ્પ યોગ્ય છે ?

A2.4 ગાણિતિક મોડેલિંગ કેમ મહત્ત્વનું છે ?

અહીં લીધેલાં ઉદાહરણોમાં આપણે જોયું કે, ગાણિતિક મોડેલિંગ એ વિવિધ વિદ્યાશાખાઓને લગતો વિષય છે. ગણિતશાસ્ત્રીઓ અને અન્ય ક્ષેત્રના તજ્જ્ઞો, પ્રવર્તમાન પેદાશની સુધારણા માટે, ઉત્તમ પ્રદેશ બનાવવા તથા પેદાશોના પ્રવાહનો અંદાજ મેળવવા માટે પોતાના જ્ઞાન અને અનુભવનો ઉપયોગ કરે છે.

આમ તો મોડેલિંગના મહત્ત્વ માટેના ઘણાં બધાં વિશેષ કારણો છે પરંતુ તેમાંના મોટા ભાગનાં કારણો નિમ્નલિખિત સાથે કોઈ ને કોઈ રીતે સંકળાયેલા છે.

- ***સમજદારી વધારવા માટે :*** *જો કોઈ એવું ગાણિતિક મોડેલ હોય કે જે વાસ્તવિક દુનિયાને સંબંધિત તંત્રના આવશ્યક વ્યવહારોને પ્રદર્શિત કરે તો આપણે મોડેલના વિશ્લેષણ દ્વારા વધુ સારી રીતે તે તંત્રને સમજી શકીએ છીએ. અને એ મોડેલના નિર્માણ વખતે આપણે જોઈશું કે, કયાં-કયાં પરિબળો તંત્ર માટે અતિમહત્ત્વના છે અને તંત્રનાં વિભિન્ન પાસાઓ કેવી રીતે એકબીજા સાથે સંકળાયેલા છે.*
- ***આગાહી અથવા અનુમાન અથવા નકલ કરવી :*** ઘણી વાર આપણે એ જાણવા માંગીએ છીએ કે, વાસ્તવિક દુનિયા સંબંધિત તંત્રનું ભવિષ્યમાં શું મહત્ત્વ હશે. પરંતુ, તંત્ર સાથે તેનો સીધો પ્રયોગ કરવો મોંઘો, અવ્યવહારુ અથવા અશક્ય હોય છે. ઉદાહરણ તરીકે હવામાનની આગાહીમાં,

માનવશરીરમાં ઔષધીય કાર્યક્ષમતાના અભ્યાસમાં, અણુમથક (ન્યુક્લિયર રીએક્ટર)ની સારામાં સારી રૂપરેખા તૈયાર કરવામાં, વગેરેમાં.

અનેક પ્રકારનાં સંગઠનોમાં પૂર્વાનુમાન ઘણું જ મહત્ત્વનું હોય છે કેમ કે નિર્ણાયક પ્રક્રિયાઓમાં ભવિષ્યમાં થનાર ઘટનાઓની આગાહીઓને સમાવિષ્ટ કરવામાં આવે છે. ઉદાહરણ તરીકે, વેચાણવિભાગમાં માંગ સંબંધિત વિશ્વસનીય પૂર્વાનુમાન વેચાણ અંગેની વ્યૂહરચનાના આયોજનમાં ઉપયોગી થાય છે.

સ્કૂલ બોર્ડને અલગ-અલગ જિલ્લાઓમાં શાળાએ જતાં બાળકોની સંખ્યાનું પૂર્વાનુમાન લગાવવું આવશ્યક છે, કારણ કે, તેનાથી એ નિર્ણય લઈ શકાય કે, ક્યાં અને ક્યારે નવી શાળા શરૂ કરવી પડશે ?

હંમેશાં, પૂર્વાનુમાન કરનારાઓ પૂર્વાનુમાન માટે ભૂતકાળની માહિતીઓનો ઉપયોગ કરે છે. સૌપ્રથમ તેઓ પૂર્વાનુમાનને વર્ણવતી ભાતની ઓળખ માટે માહિતીનું વિશ્લેષણ કરે છે. ત્યાર બાદ આ માહિતી અને પદ્ધતિનો ઉપયોગ ભવિષ્યમાં થનારા પૂર્વાનુમાનમાં કરી શકાય છે. આ આધારભૂત વ્યૂહરચનાનો ઉપયોગ મોટાભાગના પૂર્વાનુમાનોમાં કરવામાં આવે છે. જે લાક્ષણિકતા અહીં ઓળખવામાં આવેલ છે તે ભવિષ્યમાં પણ ચાલુ રહેશે તે એ ધારણા પર આધારિત છે.

- **અંદાજ :** ઘણી વાર, આપણને મોટા મૂલ્યનો અંદાજ લગાવવો પડે છે. તમે જંગલમાં રહેલાં વૃક્ષો, તળાવમાં રહેલી માછલીઓ વગેરેનાં ઉદાહરણ જોઈ ચૂક્યા છો. એક અન્ય ઉદાહરણ તરીકે, ચૂંટણી પહેલાં, ચૂંટણીમાં ભાગ લેનારા પક્ષો પોતાના પક્ષની ચૂંટણીમાં જીતવાની સંભાવનાનું પૂર્વાનુમાન કરવા માંગતા હોય છે. વિશેષરૂપે તે એ બાબતનું અનુમાન લગાવવા ઈચ્છે છે કે તેમના મત વિસ્તારમાંથી કેટલા લોકો તેમના પક્ષને મત આપશે. તેમના આ અનુમાનના આધારે તેઓ તેમના પ્રચારની વ્યૂહરચના નક્કી કરવા માંગતા હોય છે. ચૂંટણીમાં કયા પક્ષને કેટલી બેઠક મળશે તેના અનુમાન માટે ચૂંટણી સર્વેક્ષણ (Exit polls)નો વ્યાપક ઉપયોગ થતો હોય છે.

સ્વાધ્યાય A 2.3

1. છેલ્લાં પાંચ વર્ષની માહિતીના આધારે, આ વર્ષના અંતે ધોરણ 10 ની બોર્ડની પરીક્ષામાં તમારી શાળાના ગણિત વિષયના સરાસરી ગુણની ટકાવારીનું પૂર્વાનુમાન કરો.

A2.5 સારાંશ

આ પરિશિષ્ટમાં તમે નિમ્નલિખિત મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. ગાણિતિક મોડેલ એ વાસ્તવિક જીવનની પરિસ્થિતિનું ગાણિતિક વર્ણન છે. ગાણિતિક મોડેલિંગ એ ગાણિતિક મોડેલ રચવાની, તેને ઉકેલવાની અને વાસ્તવિક જીવનની સમસ્યાઓ સમજવામાં તેનો ઉપયોગ કરવાની પ્રક્રિયા છે.
2. મોડેલિંગમાં ઉપયોગી અલગ-અલગ સોપાનો આ પ્રમાણે છે : સમસ્યાની સમજ, ગાણિતિક મોડેલનું સૂત્રીકરણ, તેનો ઉકેલ, વાસ્તવિક જીવન સંદર્ભે તેનું અર્થઘટન અને છેલ્લે અત્યંત આવશ્યક મોડેલની યથાર્થતા.
3. કેટલાંક ગાણિતિક મોડેલનું નિર્માણ કર્યું.
4. ગાણિતિક મોડેલિંગની મહત્તા