H7C8B7

પ્રકરણ 10

હેરોનનું સૂત્ર

10.1 ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ - હેરોનના સૂત્ર પરથી

આપણે જાણીએ છીએ કે જ્યારે ત્રિકોણની ઊંચાઈ (વેધ) આપેલી હોય ત્યારે ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2} \times$ પાયો $\times$ ઊંચાઈ (વેધ)

હવે ધારો કે વિષમબાજુ ત્રિકોણની બાજુઓની લંબાઈ આપણે જાણીએ છીએ. પરંતુ વેધ જ્ઞાત નથી. તો પણ તમે તેનું ક્ષેત્રફળ શોધી શકો? દાખલા તરીકે એક ત્રિકોણાકાર બગીચાની બાજુઓ 40 મી, 32 મી અને 24 મી છે. તેનું ક્ષેત્રફળ કેવી રીતે શોધવું ? જો સૂત્રનો ઉપયોગ કરવો હોય તો ચોક્કસપણે તમારે તેના વેધની ગણતરી કરવી પડે. પરંતુ તેના વેધ શોધવાની ચાવી આપણી પાસે નથી. તે શોધવાનો પ્રયત્ન કરો. જો તમે આ કરવા સક્ષમ ન હો તો, આ પછીનો વિભાગ જુઓ.

Heron was born in about 10AD possibly in Alexandria in Egypt. He worked in applied mathematics. His works on mathematical and physical subjects are so numerous and varied that he is considered to be an encyclopedic writer in these fields. His geometrical works deal largely with problems on mensuration written in three books. Book I deals with the area of squares, rectangles, triangles, trapezoids (trapezia), various other specialised quadrilaterals, the regular polygons, circles, surfaces of cylinders, cones, spheres etc. In this book, Heron has derived the famous formula for the area of a triangle in terms of its three sides.



Heron (10 C.E. – 75 C.E.)

આકૃતિ 10.1

ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધવા હેરોને આપેલ સૂત્રને ઘણી વખત ***હેરોનનું સૂત્ર*** *(Heron's formula)* પણ કહેવાય છે. તે નીચે મુજબ દર્શાવાય છે :

ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (I)

અહીં, a, b અને c ત્રિકોણની બાજુઓ અને s = ***અર્ધપરિમિતિ*** અર્થાત્ $s = \frac{a+b+c}{2}$,

જ્યાં સહેલાઈથી વેધનું માપ ના શોધી શકાતું હોય તેવા ત્રિકોણ માટે આ સૂત્ર ઉપયોગી છે. ચાલો આપણે આ સૂત્રનો ઉપયોગ ઉપર દર્શાવેલ ત્રિકોણાકાર બગીચા ABC નું ક્ષેત્રફળ શોધવા કરીએ. (જુઓ આકૃતિ 10.2).

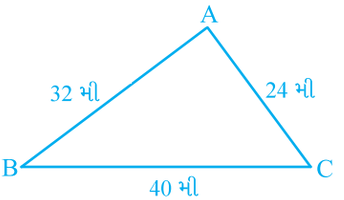
આપણે, $a = 40$ મી, $b = 24$ મી, $c = 32$ મી લઈએ.

આથી, આપણી પાસે $s = \frac{40+24+32}{2}$ મી $= 48$ મી

$s - a = (48 - 40)$ મી $= 8$ મી

$s - b = (48 - 24)$ મી $= 24$ મી

$s - c = (48 - 32)$ મી $= 16$ મી



આકૃતિ 10.2

આથી, બગીચા ABC નું ક્ષેત્રફળ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{48 \times 8 \times 24 \times 16}$ મી$^2 = 384$ મી^{2}

આપણે જોઈએ કે, $32^2 + 24^2 = 1024 + 576 = 1600 = 40^2$. આથી, બગીચાની બાજુઓ કાટકોણ ત્રિકોણ બનાવે છે. સૌથી મોટી બાજુ અર્થાત્, કર્ણ BC = 40 મી અને બાજુઓ AB અને AC વચ્ચેનો ખૂણો 90° નો થાય.

આપણે ચકાસી શકીએ કે બગીચાનું ક્ષેત્રફળ એ $\frac{1}{2} \times 32 \times 24$ મી$^2 = 384$ મી^{2} થાય.

આ રીતે મળતું ક્ષેત્રફળ હેરોનના સૂત્રથી મળતા ક્ષેત્રફળ જેટલું જ છે.

હવે, હેરોનના સૂત્રથી તમે આગળ જેની ચર્ચા કરેલ છે તે ત્રિકોણનાં ક્ષેત્રફળ ચકાસો. દાખલા તરીકે,

(i) જેની પ્રત્યેક બાજુ 10 સેમી હોય તેવો ત્રિકોણ સમબાજુ ત્રિકોણ.

(ii) જેની બે સમાન બાજુ 5 સેમી અને ત્રીજી અસમાન બાજુ 8 સેમી હોય તેવો સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ.

તમે જોઈ શકો છો કે,

(i) માટે, $s = \frac{10+10+10}{2}$ સેમી $= 15$ સેમી

ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ $= \sqrt{15(15-10)(15-10)(15-10)}$ સેમી^{2}

$= \sqrt{15 \times 5 \times 5 \times 5}$ સેમી$^2 = 25\sqrt{3}$ સેમી^{2}

(ii) માટે, $s = \frac{8+5+5}{2}$ સેમી $= 9$ સેમી

ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ $= \sqrt{9(9-8)(9-5)(9-5)}$ સેમી^{2} $= \sqrt{9 \times 1 \times 4 \times 4}$ સેમી$^2 = 12$ સેમી^{2}

ચાલો હવે, કેટલાંક વધુ ઉદાહરણો ગણીએ :

ઉદાહરણ 1 : એક ત્રિકોણની પરિમિતિ 32 સેમી અને બે બાજુ 8 સેમી અને 11 સેમી હોય, તો તેનું ક્ષેત્રફળ શોધો. (જુઓ આકૃતિ 10.3).

ઉકેલ : અહીં, આપણી પાસે ત્રિકોણની પરિમિતિ = 32 સેમી, $a = 8$ સેમી અને $b = 11$ સેમી,

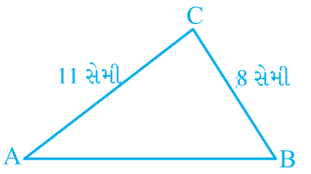
ત્રીજી બાજુ $c = 32$ સેમી $- (8 + 11)$ સેમી $= 13$ સેમી,

અહીં, $2s = 32$, અર્થાત્ $s = 16$ સેમી,

$s - a = (16 - 8)$ સેમી $= 8$ સેમી,

$s - b = (16 - 11)$ સેમી $= 5$ સેમી,

$s - c = (16 - 13)$ સેમી $= 3$ સેમી,



આકૃતિ 10.3

આથી, ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

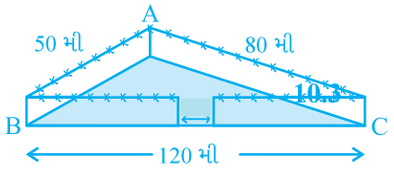
$= \sqrt{16 \times 8 \times 5 \times 3}$ સેમી^{2} $= 8\sqrt{30}$ સેમી^{2}

ઉદાહરણ 2 : એક ત્રિકોણાકાર બગીચા ABCની બાજુઓ 120 મી, 80 મી અને 50 મી છે. (જુઓ આકૃતિ 10.4). *ધનિયા* માળીએ બધી જ તરફ તારની વાડ બાંધવાની છે અને અંદર તરફ ઘાસ વાવવાનું છે. તેને કેટલા ક્ષેત્રફળમાં વાવણી કરવાની રહેશે ? તે એક બાજુએ 3 મીટર પહોળી જગા દરવાજા માટે છોડે છે, તો તેની ફરતે કાંટાળી વાડ કરવા માટે ₹ 20 પ્રતિ મીટરના ભાવે થતો ખર્ચ શોધો.

ઉકેલ : બગીચાનું ક્ષેત્રફળ શોધવા,

$2s = 50$ મી $+ 80$ મી $+ 120$ મી $= 250$ મી

અર્થાત્ $s = 125$ મી



આકૃતિ 10.4

હવે, $s - a = (125 - 120)$ મી $= 5$ મી

$s - b = (125 - 80)$ મી $= 45$ મી

$s - c = (125 - 50)$ મી $= 75$ મી

આથી બગીચાનું ક્ષેત્રફળ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{125 \times 5 \times 45 \times 75}$ મી^{2}

$= 375\sqrt{15}$ મી^{2}

વળી બગીચાની પરિમિતિ $=$ AB + BC + CA $= 250$ મી

આથી, વાડ બનાવવા માટે જરૂરી લંબાઈ $= 250$ મી $- 3$ મી (દરવાજા માટે છોડેલ) $= 247$ મી અને આથી, વાડ માટે થતો ખર્ચ $=$ ₹ 20×247 $=$ ₹ 4940

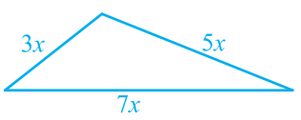
ઉદાહરણ 3 : એક ત્રિકોણાકાર જમીનના ટુકડાની બાજુઓની લંબાઈ 3 : 5 : 7 ના પ્રમાણમાં છે અને તેની પરિમિતિ 300 મી છે. તેનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે બાજુઓ (મીટરમાં) $3x$, $5x$ અને $7x$ છે. (જુઓ આકૃતિ 10.5)

આથી, આપણે જાણીએ છીએ કે $3x + 5x + 7x = 300$ (ત્રિકોણની પરિમિતિ)

માટે, $15x = 300$, અર્થાત્ $x = 20$.

આથી, ત્રિકોણની બાજુઓ 3×20 મી, 5×20 મી અને 7×20 મી થાય.



આકૃતિ 10.5

અર્થાત્, 60 મી, 100 મી અને 140 મી થાય.

તમે ક્ષેત્રફળ શોધી શકો ? [હેરોનના સૂત્ર પરથી]

અહીં, $s = \dfrac{60 + 100 + 140}{2}$ મી $= 150$ મી

અને આથી, ક્ષેત્રફળ $= \sqrt{150(150-60)(150-100)(150-140)}$ મી^{2}

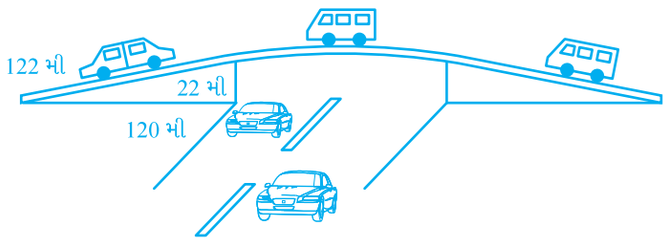
$= \sqrt{150 \times 90 \times 50 \times 10}$ મી^{2}

$= 1500\sqrt{3}$ મી^{2}

સ્વાધ્યાય 10.1

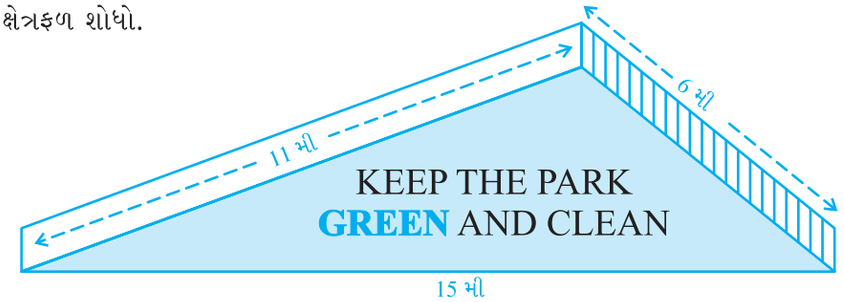
1. જેની બાજુની લંબાઈ 'a' હોય તેવા સમબાજુ ત્રિકોણ આકારના ટ્રાફિક સિગ્નલના પાટિયામાં 'SCHOOL AHEAD' એમ લખેલ છે. તો આ પાટિયાનું ક્ષેત્રફળ હેરોનના સૂત્ર પરથી મેળવો. જો તેની પરિમિતિ 180 સેમી હોય, તો તેનું ક્ષેત્રફળ કેટલું થાય ?

2. એક ફ્લાય ઓવરની ત્રિકોણાકાર દિવાલોનો ઉપયોગ જાહેરાત માટે કરવામાં આવે છે. આ દિવાલોની બાજુઓ 122 મી, 22 મી અને 120 મી છે. (જુઓ આકૃતિ 10.6). જાહેરાત પ્રતિવર્ષ ₹ 5000 પ્રતિ મી^{2} ના દરે કમાણી કરી આપે છે. એક કંપની તે દીવાલોમાંની એક 3 મહિના માટે ભાડે રાખે છે, તો તેણે કેટલું ભાડું ચૂકવવું પડે ?



આકૃતિ 10.6

3. બગીચામાં એક લપસણી છે. તેની એક બાજુની દીવાલ કોઈક રંગથી રંગી તેના પર "KEEP THE PARK GREEN AND CLEAN" એવો સંદેશ લખેલ છે. (જુઓ આકૃતિ 10.7.) જો દીવાલની બાજુઓ 15 મી, 11 મી અને 6 મીની હોય, તો રંગેલ દીવાલનું ક્ષેત્રફળ શોધો.



આકૃતિ 10.7

4. જો ત્રિકોણની પરિમિતિ 42 સેમી અને બે બાજુઓ 18 સેમી તથા 10 સેમીની હોય, તો તેનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

5. ત્રિકોણની બાજુઓ 12 : 17 : 25 ના પ્રમાણમાં હોય અને તેની પરિમિતિ 540 સેમી હોય, તો તેનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

6. સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણની પરિમિતિ 30 સેમી અને સમાન બાજુઓ પૈકી પ્રત્યેકની લંબાઈ 12 સેમી છે, તો ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

10.2 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં તમે શીખ્યા કે, જે ત્રિકોણની બાજુઓ a, b અને c હોય તેવા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધવા માટેનું હેરોનનું સૂત્ર

ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ છે.

જ્યાં, $s = \dfrac{a+b+c}{2}$