D1R2L1

પ્રકરણ 11

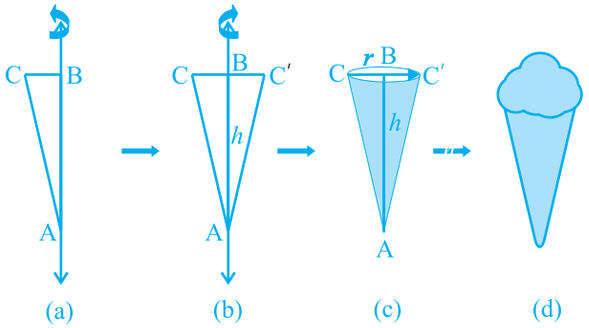
પૃષ્ઠફળ અને ઘનફળ

11.1 લંબવૃત્તીય શંકુનું પૃષ્ઠફળ

અગાઉના ધોરણમાં આપણે સમઘન, લંબઘન અને નળાકારના પૃષ્ઠફળ વિશે અભ્યાસ કર્યો છે. હવે આપણે શંકુના પૃષ્ઠફળનો અભ્યાસ કરીશું.

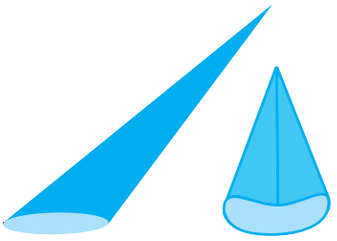
આપણે અત્યાર સુધી એકરૂપ આકૃતિઓની થપ્પી બનાવીને નક્કર પદાર્થ બનાવ્યા. આવી આકૃતિઓને *પ્રિઝમ (ત્રિપાર્શ્વ) (prism)* કહેવાય છે. હવે પ્રિઝમ ના હોય તેવા બીજા પ્રકારના નક્કર પદાર્થનો વિચાર કરીએ. (આ પ્રકારના નક્કર પદાર્થોને *પિરામિડ* કહેવાય.) ચાલો આપણે જોઈએ કે તે કેવી રીતે બનાવવા.

પ્રવૃત્તિ : B આગળ કાટખૂણો હોય તેવો ત્રિકોણ ABC કાપો. ત્રિકોણની કોઈ એક લંબ બાજુ (ધારો કે) AB પર લાંબી ઘટ્ટ દોરી ચોંટાડો.[જુઓ આકૃતિ 11.1(a)]. દોરીને ત્રિકોણની બાજુ પર બંને બાજુથી પકડી અને ત્રિકોણને દોરીની આસપાસ ઘણી વખત ઘુમાવો. શું બને છે? તમે ત્રિકોણને દોરીની આસપાસ ફેરવતાં બનતાં આકારને ઓળખી શકશો? [આકૃતિ 11.1 (b)]. તે તમને તમે જેમાં આઇસક્રીમ ખાધો હોય તેવા આકારની યાદ અપાવે છે? [જુઓ આકૃતિ 11.1 (c) અને (d)].



આકૃતિ 11.1

આને ***લંબવૃત્તીય શંકુ*** (*Right circular cone*) કહેવાય. આકૃતિ 11.1 (c) એ A શિરોબિંદુવાળો લંબવૃત્તીય શંકુ છે. AB ને ઊંચાઈ, BC ને ત્રિજ્યા અને AC ને શંકુની ત્રાંસી ઊંચાઈ (તિર્યક ઊંચાઈ) કહેવાય. અહીં આપણે B ને શંકુના વર્તુળાકાર પાયાનું કેન્દ્ર કહીશું. આપણે શંકુની ઊંચાઈ, ત્રિજ્યા અને ત્રાંસી ઊંચાઈને અનુક્રમે h, r અને l વડે દર્શાવીશું. ફરી એક વખત કયા શંકુને લંબવૃત્તીય શંકુ ન કહેવાય તે જોઈએ. હવે મુદ્દા પર આવ્યા ! (જુઓ આકૃતિ 11.2).

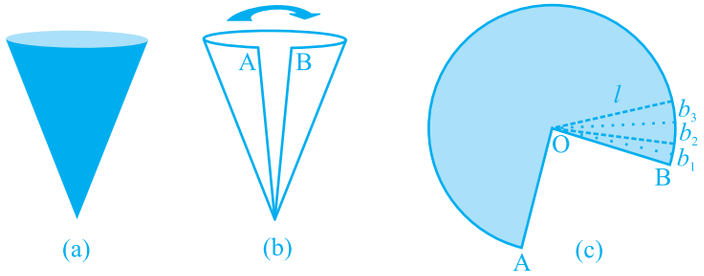


આકૃતિ 11.2

આ આકૃતિઓ લંબવૃત્તીય શંકુ નથી, કારણ કે (a)માં શિરોબિંદુને પાયાના કેન્દ્ર સાથે જોડતી રેખા, પાયા સાથે કાટખૂણો બનાવતી નથી અને (b)માં પાયો વર્તુળાકાર નથી. આપણે નળાકારની જેમ માત્ર લંબવૃત્તીય શંકુનો જ અભ્યાસ કરવાના હોવાથી 'શંકુ'નો અર્થ 'લંબવૃત્તીય શંકુ' ગણીશું.

પ્રવૃત્તિ : (i) કાગળમાંથી વ્યવસ્થિત રીતે જેમાં સીધી બાજુ પર ઉપરાઉપરી કાગળ લગાવેલ ન હોય તેવો શંકુ ધારથી કાપો અને તેને શંકુની વક્રસપાટીનો કાગળ પર બનતો આકાર જોઈ શકાય તેવી રીતે ખોલી કાઢો. (તમે જ્યાંથી શંકુને કાપો છો તે શંકુની ત્રાંસી ઊંચાઈ છે. તેને l વડે દર્શાવાય છે). તે વર્તુળાકાર કેકના ભાગ જેવો દેખાય છે.

(ii) A અને B ચિહ્નવાળા અણીવાળા ભાગને જો તમે એકબીજા પાસે લાવો તો, તમે જોઈ શકશો કે, આકૃતિ 11.3 (c) માં દર્શાવેલ વર્તુળાકાર ભાગ શંકુનો વર્તુળાકાર પાયો બનશે.



આકૃતિ 11.3

(iii) જો આકૃતિ 11.3 (c)માં દર્શાવેલ કાગળને બિંદુ O માંથી પસાર થતી રેખાઓ દ્વારા બનતાં સેંકડો નાના ટુકડામાં કાપવામાં આવે તો દરેક કપાતો ટુકડો, એ લગભગ નાનો ત્રિકોણ હશે અને તેની ઊંચાઈ શંકુની ત્રાંસી(*slant*) ઊંચાઈ l જેટલી હશે.

(iv) હવે, દરેક ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ = $\frac{1}{2}$ × દરેક ત્રિકોણના પાયાની લંબાઈ × l

આથી, પૂરા કાગળનું ક્ષેત્રફળ = બધા જ ત્રિકોણનાં ક્ષેત્રફળનો સરવાળો

$$= \frac{1}{2}b_1l + \frac{1}{2}b_2l + \frac{1}{2}b_3l + \cdots$$

$$= \frac{1}{2}l\,(b_1 + b_2 + b_3 + \cdots)$$

$$= \frac{1}{2} \times l \times \text{આકૃતિ 11.3 (c) ની વક્રસપાટીની પૂર્ણ લંબાઈ}$$

(કેમ કે $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$ આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે વક્રસપાટીનો ભાગ બનાવે છે.)

પરંતુ, આકૃતિનો વક્રભાગ શંકુના પાયાની પરિમિતિ બનાવે છે અને તે શંકુના પાયાના પરિઘ $= 2\pi r$ જેટલો છે. અહીં r શંકુના પાયાની ત્રિજ્યા છે.

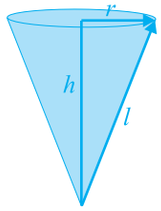
આથી, **શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2} \times l \times 2\pi r = \pi rl$**

અહીં, પાયાની ત્રિજ્યા r અને ત્રાંસી ઊંચાઈ l છે.

નોંધો કે, પાયથાગોરસનું પ્રમેય લગાડતાં $l^2 = r^2 + h^2$ (આકૃતિ 11.4 માં જોઈ શકાય.)

અહીં, h શંકુની ઊંચાઈ છે.

આથી, $l = \sqrt{r^2 + h^2}$



આકૃતિ 11.4

હવે, જો શંકુનો પાયો બંધ હોય, તો r ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળાકાર કાગળની પણ જરૂર પડે, તેનું ક્ષેત્રફળ πr^2 થાય.

આથી, **શંકુનું કુલ પૃષ્ઠફળ $= \pi rl + \pi r^2 = \pi r(l + r)$**

ઉદાહરણ 1 : જેની ત્રાંસી ઊંચાઈ 10 સેમી અને પાયાની ત્રિજ્યા 7 સેમી હોય તેવા લંબવૃત્તીય શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= \pi rl$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 10 \text{ સેમી}^2 = 220 \text{ સેમી}^2$$

ઉદાહરણ 2 : શંકુની ઊંચાઈ 16 સેમી અને પાયાની ત્રિજ્યા 12 સેમી છે. તેની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ અને કુલ પૃષ્ઠફળ શોધો. ($\pi = 3.14$ લો.)

ઉકેલ : અહીં, $h = 16$ સેમી અને $r = 12$ સેમી

આથી, $l^2 = h^2 + r^2$, પરથી

$l = \sqrt{16^2 + 12^2}$ સેમી $= 20$ સેમી

આથી, વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= \pi rl$

$= 3.14 \times 12 \times 20 \text{ સેમી}^2$

$= 753.6 \text{ સેમી}^2$

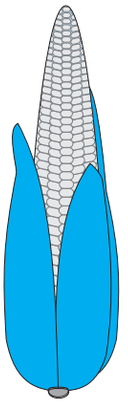
વળી, કુલ પૃષ્ઠફળ $= \pi rl + \pi r^2$

$= (753.6 + 3.14 \times 12 \times 12) \text{ સેમી}^2$

$= (753.6 + 452.16) \text{ સેમી}^2$

$= 1205.76 \text{ સેમી}^2$

ઉદાહરણ 3 : મકાઈના ડોડાનો આકાર લગભગ શંકુ જેવો હોય છે. (જુઓ આકૃતિ 11.5.) તેના સૌથી પહોળા ભાગની ત્રિજ્યા 2.1 સેમી અને લંબાઈ (ઊંચાઈ) 20 સેમી છે. જો ડોડાની પ્રત્યેક 1 સેમી^{2} સપાટી પર આશરે 4 મકાઈના દાણા હોય, તો આખા ડોડા પર કુલ કેટલા દાણા હશે, તે શોધો.



આકૃતિ 11.5

ઉકેલ : મકાઈના દાણા માત્ર ડોડાની વક્રસપાટી પર જ હોવાથી, કુલ મકાઈના દાણા શોધવા આપણે તેની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધીશું. આ પ્રશ્નમાં, આપણને મકાઈના ડોડાની ઊંચાઈ આપેલ હોવાથી તેની ત્રાંસી ઊંચાઈ શોધીશું.

અહીં, $l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{(2.1)^2 + 20^2}$ સેમી $= \sqrt{404.41}$ સેમી $= 20.11$ સેમી

આથી, મકાઈના ડોડાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

$= \pi rl = \frac{22}{7} \times 2.1 \times 20.11$ સેમી$^2 = 132.726$ સેમી$^2 = 132.73$ સેમી^{2} (લગભગ)

1 સેમી^{2} ડોડાની વક્રસપાટી પર દાણાની સંખ્યા = 4

આથી, આખા ડોડા પર દાણાની સંખ્યા = $132.73 \times 4 = 530.92 = 531$ (લગભગ)

આથી, મકાઈના ડોડા પર આશરે 531 મકાઈના દાણા હશે.

સ્વાધ્યાય 11.1

જ્યાં ઉલ્લેખ ન કરેલ હોય ત્યાં $\pi = \frac{22}{7}$ લો.

1. શંકુના પાયાનો વ્યાસ 10.5 સેમી અને તેની ત્રાંસી ઊંચાઈ 10 સેમી છે. તેની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
2. જેની ત્રાંસી ઊંચાઈ 21 મી અને પાયાનો વ્યાસ 24 મી હોય તેવા શંકુનું કુલ પૃષ્ઠફળ શોધો.
3. શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ 308 સેમી^{2} અને તેની ત્રાંસી ઊંચાઈ 14 સેમી છે. આ શંકુની (i) પાયાની ત્રિજ્યા અને (ii) કુલ સપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
4. શંકુ આકારનો તંબુ 10 મી ઊંચો છે અને તેના પાયાની ત્રિજ્યા 24 મી છે. તો,

   (i) તંબુની ત્રાંસી ઊંચાઈ શોધો.

   (ii) 1 મી^{2} ના ₹ 70 લેખે તંબુ બનાવવા માટે વપરાતા કાપડનો કુલ ખર્ચ શોધો.
5. જેની ઊંચાઈ 8મી અને પાયાની ત્રિજ્યા 6 મી હોય તેવા શંકુ આકારના તંબુ બનાવવા માટે 3 મી પહોળી કેટલી તાડપત્રીની જરૂર પડે? માની લો કે સિલાઈના માપ અને કાપકૂપમાં થતા બગાડમાં લગભગ 20 સેમી જેટલી વધારાની તાડપત્રી વપરાય છે. ($\pi = 3.14$ લો.)
6. શંકુ આકારના મકબરાની ત્રાંસી ઊંચાઈ અને પાયાનો વ્યાસ અનુક્રમે 25 મી અને 14 મી છે. તેની વક્રસપાટી પર 100 મી^{2} ના ₹ 210 લેખે ચૂનો કરવાનો ખર્ચ શોધો.

7. એક જોકર (વિદૂષક)ની ટોપી લંબવૃત્તીય શંકુ આકારની છે, તેના પાયાની ત્રિજ્યા 7 સેમી અને ઊંચાઈ 24 સેમી છે. આવી 10 ટોપી બનાવવા વપરાતા કાગળનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

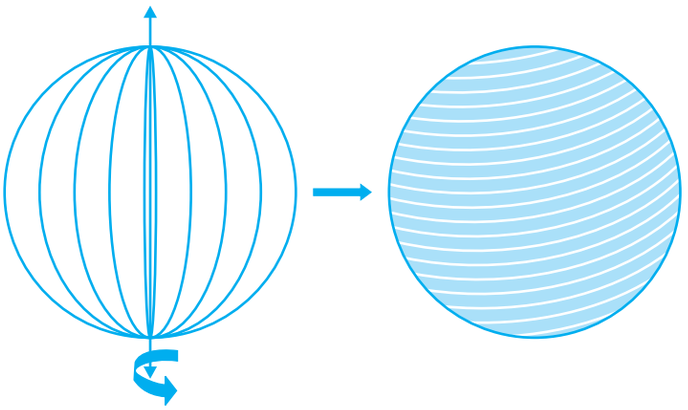
8. એક બસ સ્ટૉપને રોડના બાકીના ભાગથી જુદો પાડવા ફરી ઉપયોગમાં લઈ શકાય તેવા કાર્ડબૉર્ડથી 50 પોલા શંકુ બનાવ્યા છે. પ્રત્યેક શંકુનો પાયાનો વ્યાસ 40 સેમી અને ઊંચાઈ 1 મી છે. જો પ્રત્યેક શંકુના બહારના ભાગને રંગવાનો ખર્ચ 1 મી^{2} ના ₹ 12 લેખે આવે તો બધા જ શંકુ રંગવાનો કુલ ખર્ચ શોધો.

($\pi = 3.14$ અને $\sqrt{1.04} = 1.02$ લો.)

11.2 ગોલકનું પૃષ્ઠફળ

ગોલક (*sphere*) શું છે ? શું તે વર્તુળ જેવું જ છે ? શું તમે વર્તુળને કાગળ પર દોરી શકો છો ? હા, તમે કરી શકો. સમતલના નિશ્ચિત બિંદુ (વર્તુળનું કેન્દ્ર)થી સમાન અંતરે (ત્રિજ્યા) આવેલાં સમતલ પરનાં બિંદુઓના સમૂહથી રચાતી બંધ આકૃતિને વર્તુળ કહે છે. હવે વર્તુળાકાર તક્તીના વ્યાસ આસપાસ દોરી વીંટાળી અને જે રીતે આગળના વિભાગમાં ત્રિકોણને ઘુમાવેલ, તેમ ઘુમાવવામાં આવે તો એક નવો નક્કર પદાર્થ બને તે તમે જોઈ શકશો. (આકૃતિ 11.6) તે શું દર્શાવે છે? એક દડો? હા, તેને ગોલક કહેવાય.

જ્યારે વર્તુળને ગોળ ઘુમાવીએ ત્યારે બનતા વર્તુળના કેન્દ્રનું શું થાય તેની તમે કલ્પના કરી શકો? અલબત, તે ગોલકનું કેન્દ્ર બને. આમ, અવકાશમાં નિશ્ચિત બિંદુથી નિશ્ચિત અંતરે આવેલ બિંદુઓથી બનતી ત્રિપરિમાણીય ઘન આકૃતિને *ગોલક* કહે છે. નિશ્ચિત બિંદુને ગોલકનું કેન્દ્ર અને નિશ્ચિત અંતરને તેની *ત્રિજ્યા* કહે છે.



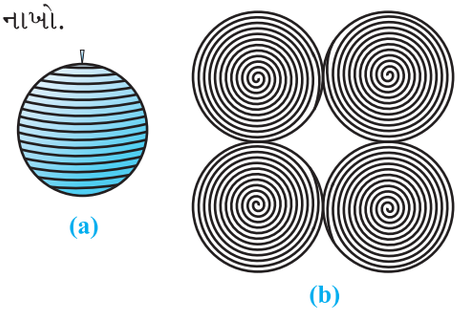
આકૃતિ 11.6

નોંધ : ગોલક એ દડાની વક્રસપાટી જેવું છે. જેની વક્રસપાટી ગોલક હોય એવા ઘન પદાર્થ માટે ઘન ગોલક શબ્દનો ઉપયોગ થાય.

પ્રવૃત્તિ : શું તમે ભમરડાથી રમ્યા છો કે કોઈને તેનાથી રમતા જોયા છે? તમે જાણતા જ હશો કે તેની આસપાસ દોરી કેમ વીંટાળાય છે. હવે, એક રબરનો દડો લઈ તેમાં ખીલી ખોસીએ. ખીલીનો આધાર લઈ દડાની આસપાસ દોરી વીંટાળીએ. જ્યારે 'સંપૂર્ણ' દડો ભરાઈ જાય ત્યારે દોરીને તેની જગાએ રાખવા માટે ટાંકણીનો ઉપયોગ કરીએ. જ્યાં સુધી આખો જ દડો દોરીથી ઢંકાઈ ત્યાં સુધી દોરી બાંધવાનું ચાલુ રાખો. [જુઓ આકૃતિ 11.7 (a).] દોરીના શરૂઆત અને અંત્યબિંદુ પર નિશાની કરી, દડાની વક્રસપાટી પરની દોરીને હળવેથી કાઢી નાખો.

હવે, તમારા શિક્ષકને આસાનીથી તે ત્રિજ્યા શોધી શકાય તે માટે દડાના વ્યાસના માપન માટે મદદ કરવા કહો. એક કાગળ પર દડાની ત્રિજ્યા જેટલી ત્રિજ્યાવાળાં ચાર વર્તુળ દોરો. હવે દડાને વીંટાળેલ દોરીથી એક પછી એક વર્તુળ ભરવાનું શરૂ કરો.

[જુઓ આકૃતિ 11.7 (b).]



(a) (b)

આકૃતિ 11.7

આ બધું કરતાં તમને શું મળ્યું ?

ગોલકની વક્રસપાટી ઢાંકવા વપરાયેલ દોરી ગોલક જેટલી જ ત્રિજ્યાવાળાં ચાર વર્તુળોનો પ્રદેશ ઢાંકવા માટે વપરાય છે. આથી આનો અર્થ શું કરીશું? આ દર્શાવે છે કે r ત્રિજ્યાવાળા ગોલકનું પૃષ્ઠફળ

= ચાર વખત r ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ = $4 \times (\pi r^2)$

આમ, **ગોલકની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ = $4 \pi r^2$**

r ગોલકની ત્રિજ્યા છે.



આકૃતિ 11.8

તમે ગોલકનાં કેટલાં પૃષ્ઠ જોઈ શકો છો ? માત્ર એક જ, તે વક્રાકાર છે.

હવે, એક નક્કર ગોલક લઈ તેને બરાબર વચ્ચેથી કાપીએ. ગોલકનું શું થાય છે?

હા, તે બે સમાન ભાગમાં વહેંચાય છે. (જુઓ આકૃતિ 11.8 .) પ્રત્યેક અડધા ભાગને શું કહેવાય? તેને ***અર્ધગોલક*** (*hemisphere*) કહેવાય. (કેમ કે *hemi* શબ્દનો અર્થ અર્ધ થાય છે.)

અને તેની વક્રસપાટીનું શું ? તેને કેટલાં પૃષ્ઠ હશે? બે! એક વક્ર અને બીજો સપાટ (પાયો).

અર્ધગોલકની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ ગોલકના ક્ષેત્રફળ કરતાં અડધું થશે તે $4\pi r^2$ ના $\frac{1}{2}$ ભાગનું હશે.

આથી, **અર્ધગોલકની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ = $2\pi r^2$**

અહીં, અર્ધગોલક જેનો એક ભાગ હોય તેવા ગોલકની ત્રિજ્યા r છે.

હવે, અર્ધગોલકનાં બંને પૃષ્ઠો લેતાં, તેનું કુલ પૃષ્ઠફળ $2\pi r^2 + \pi r^2$ થાય.

આમ, **અર્ધગોલકની કુલ સપાટીનું પૃષ્ઠફળ = $3\pi r^2$**

ઉદાહરણ 4 : 7 સેમી ત્રિજ્યાવાળાં ગોલકની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : 7 સેમી ત્રિજ્યાવાળાં ગોલકની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7$ સેમી^{2} = 616 સેમી^{2}

ઉદાહરણ 5 : 21 સેમી ત્રિજ્યાવાળાં અર્ધગોલકની (i) વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ (ii) કુલ સપાટીનું પૃષ્ઠફળ શોધો.

ઉકેલ : 21 સેમી ત્રિજ્યાવાળાં અર્ધગોલકની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ = $2\pi r^2 = 2 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$ સેમી^{2} = 2772 સેમી^{2}

(ii) અર્ધગોલકનું કુલ પૃષ્ઠફળ $3\pi r^2 = 3 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$ સેમી^{2} = 4158 સેમી^{2}

ઉદાહરણ 6 : સર્કસમાં કામ કરતો મોટરસાઇકલ-સવાર 7 મી વ્યાસવાળા પોલા ગોલકમાં પ્રદર્શન કરે છે. મોટરસાઇકલ-સવારને ચલાવવા મળતી જગ્યાનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : ગોલકનો વ્યાસ = 7 મી. આથી, તેની ત્રિજ્યા 3.5 મી થાય. આથી, મોટરસાઇકલ-સવારને ચલાવવા મળતી જગ્યા

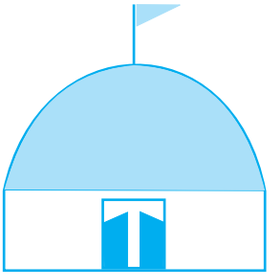
= ગોલકની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

$= 4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5$ મી^{2}

= 154 મી^{2}

ઉદાહરણ 7 : એક મકાનના અર્ધગોળાકાર ઘુમ્મટને રંગ કરવાનો છે. (જુઓ આકૃતિ 11.9.) જો અર્ધગોળાકાર ઘુમ્મટનો પરિઘ 17.6 મી હોય, તો તેને 100 સેમી^{2} ના ₹ 5 લેખે રંગવાનો ખર્ચ શોધો.

ઉકેલ : અહી, આપણે માત્ર ઘુમ્મટની વક્રસપાટી પર રંગ કરવો છે. તેથી આપણે અર્ધગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધીશું.



આકૃતિ 11.9

હવે, ઘુમ્મટનો પરિઘ = 17.6 મી

તેથી, $17.6 = 2\pi r$

તેથી, ઘુમ્મટની ત્રિજ્યા $= 17.6 \times \frac{7}{2 \times 22}$ મી $= 2.8$ મી

ઘુમ્મટની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= 2\pi r^2$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 2.8 \times 2.8$ મી^{2}

$= 49.28$ મી^{2}

હવે, 100 સેમી^{2} રંગવાનો ખર્ચ ₹ 5.

તો, 1 મી^{2} રંગવાનો ખર્ચ ₹ 500.

આખા અર્ધગોળાકાર ઘુમ્મટને રંગવાનો ખર્ચ = ₹ 500×49.28

= ₹ 24,640

સ્વાધ્યાય 11.2

જ્યાં ઉલ્લેખ ન કર્યો હોય, ત્યાં $\pi = \frac{22}{7}$ લો.

1. આપેલ ત્રિજ્યા પરથી ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો :

(i) 10.5 સેમી (ii) 5.6 સેમી (iii) 14 સેમી

2. આપેલ વ્યાસ પરથી ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો :

(i) 14 સેમી (ii) 21 સેમી (iii) 3.5 મી

3. 10 સેમી ત્રિજ્યાવાળા અર્ધગોળાનું કુલ પૃષ્ઠફળ શોધો. ($\pi = 3.14$ લો.)

4. એક ગોળાકાર ફુગ્ગામાં હવા ભરવાથી તેની ત્રિજ્યા 7 સેમીથી વધીને 14 સેમી થાય છે. આ બંને પરિસ્થિતિમાં ગોળાકાર ફુગ્ગાની વક્રસપાટીનાં ક્ષેત્રફળનો ગુણોત્તર શોધો.

5. તાંબાના અર્ધગોળાકાર વાટકાની અંદરનો વ્યાસ 10.5 સેમી છે. તેની અંદરની સપાટીને 100 સેમી^{2} ના ₹ 16 લેખે કલાઇ કરવાનો ખર્ચ કેટલો થાય?

6. જો ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ 154 સેમી^{2} હોય, તો તેની ત્રિજ્યા શોધો.

7. જો ચંદ્રનો વ્યાસ પૃથ્વીના વ્યાસના આશરે ચોથા ભાગ જેટલો હોય, તો તેમની વક્રસપાટીઓનાં ક્ષેત્રફળનો ગુણોત્તર શોધો.

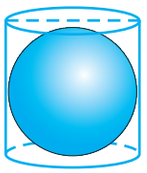
8. સ્ટીલના અર્ધગોળાકાર વાટકાની જાડાઈ 0.25 સેમી છે. જો વાટકાની અંદરની સપાટીની ત્રિજ્યા 5 સેમી હોય, તો વાટકાની બહારની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

9. એક લંબવૃત્તીય નળાકારમાં બંધબેસે તે રીતે r ત્રિજ્યાવાળો એક ગોળો મૂકેલ છે. (જુઓ આકૃતિ11.10.) તો,

(i) ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

(ii) નળાકારની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

(iii) (i) અને (ii) માં મળતાં ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર શોધો.

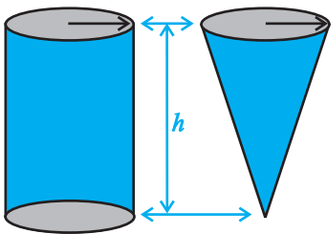


આકૃતિ 11.10

11.3 લંબવૃત્તીય શંકુનું ઘનફળ

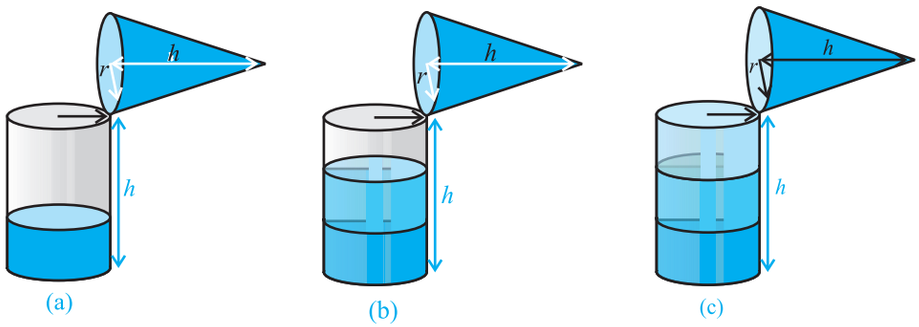
અગાઉના ધોરણમાં આપણે સમઘન, લંબઘન અને નળાકારના ઘનફળનો અભ્યાસ કર્યો.

તમે આકૃતિ 11.11 માં જોઈ શકો છો કે લંબવૃત્તીય નળાકાર અને લંબવૃત્તીય શંકુના પાયાની ત્રિજ્યા સમાન છે અને તેમની ઊંચાઈ પણ સમાન છે.



આકૃતિ 11.11

પ્રવૃત્તિ : સમાન પાયાની ત્રિજ્યા અને સમાન ઊંચાઈ ધરાવતા પોલા નળાકાર અને પોલા શંકુ બનાવવાનો પ્રયત્ન કરો. (જુઓ આકૃતિ 11.11.) આપણે આના ઉપયોગથી એક પ્રયોગ કરીશું. તેના દ્વારા આપણે લંબવૃત્તીય શંકુનું ઘનફળ શું થાય તે પ્રાયોગિક રીતે જોઈ શકીશું.



આકૃતિ 11.12

ચાલો આપણે શરૂઆત કરીએ.

આપણે પહેલા શંકુને રેતીથી છલોછલ ભરી દઈશું. ત્યાર બાદ તેને નળાકાર પાત્રમાં પૂરેપૂરો ખાલી કરીશું. આપણે જોઈશું કે તે રેતીથી નળાકાર પાત્ર થોડાક ભાગ સુધી જ ભરાશે. [જુઓ આકૃતિ 11.12(a).]

હવે, ફરી શંકુને રેતીથી છલોછલ ભરી અને નળાકારમાં ખાલી કરો. આપણે જોઈ શકીશું કે નળાકાર હજી પણ પૂરો ભરાયો નથી. [જુઓ આકૃતિ 11.12(b).]

હવે, જયારે શંકુને ત્રીજી વખત રેતીથી ભરી નળાકારમાં ખાલી કરતાં જોઈશું કે નળાકાર રેતીથી છલોછલ ભરાઈ જશે. [જુઓ આકૃતિ 11.12(c).]

આ પરથી આપણે તારવી શકીએ કે, પાયાની ત્રિજ્યા સમાન હોય અને ઊંચાઈ સમાન હોય તેવા નળાકાર અને શંકુ માટે, ત્રણ વખત શંકુનું ઘનફળ એ નળાકારના ઘનફળ જેટલું થાય. તેનો અર્થ એવો થાય કે, શંકુનું ઘનફળ એ નળાકારના ઘનફળના ત્રીજા ભાગ જેટલું થાય.

આમ, પાયાની ત્રિજ્યા r અને ઊંચાઈ h વાળા

$$\text{શંકુનું ઘનફળ} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

ઉદાહરણ 8 : એક શંકુની ઊંચાઈ અને ત્રાંસી ઊંચાઈ અનુક્રમે 21 સેમી અને 28 સેમી હોય, તો તેનું ઘનફળ શોધો.

ઉકેલ : $l^2 = r^2 + h^2$ પરથી,

$$r = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{28^2 - 21^2} \text{ સેમી} = 7\sqrt{7} \text{ સેમી}$$

શંકુનું ઘનફળ $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7\sqrt{7} \times 7\sqrt{7} \times 21$ સેમી^{3} $= 7546$ સેમી^{3}

ઉદાહરણ 9 : મોનીકા પાસે 551 મી^{2} ક્ષેત્રફળવાળો કૅનવાસનો ટુકડો છે. તે ટુકડાનો ઉપયોગ 7 મી પાયાની ત્રિજ્યાવાળો શંકુ આકારનો તંબુ બનાવવા માટે કરે છે. ટાંકા લેવામાં અને કાપવામાં 1 મી^{2} જેટલું કૅનવાસ બગડે છે. તે તંબુનું ઘનફળ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, કૅનવાસ વપરાય તેનું ક્ષેત્રફળ = 551 મી^{2} અને બગાડમાં જતા કૅનવાસનું, ક્ષેત્રફળ 1 મી^{2} છે. તેથી તંબુ બનાવવા માટે મળતા કૅનવાસનું ક્ષેત્રફળ $(551 - 1)$ મી^{2} = 550 મી^{2}.

તેથી, તંબુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ = 550 મી^{2} અને જરૂરી તંબુના પાયાની ત્રિજ્યા = 7 મી

અહી, નોંધીશું કે તંબુને ફક્ત વક્રસપાટી છે, (તંબુના પાયાના ભાગમાં કૅનવાસ નથી !)

તંબુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ = 550 મી^{2}

$$\therefore \quad \pi rl = 550$$

$$\therefore \quad \frac{22}{7} \times 7 \times l = 550$$

$$\therefore \quad l = \frac{550}{22} \text{ મી} = 25 \text{ મી}$$

હવે, $l^2 = r^2 + h^2$

$$h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} \text{ મી} = \sqrt{625 - 49} \text{ મી} = \sqrt{576} \text{ મી} = 24 \text{ મી}$$

આથી, શંકુ આકારના તંબુનું ઘનફળ $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 24$ મી^{3} $= 1232$ મી^{3}

સ્વાધ્યાય 11.3

જ્યાં ઉલ્લેખ ન કર્યો હોય, ત્યાં $\pi = \frac{22}{7}$ લો.

1. નીચેના લંબવૃત્તીય શંકુનું ઘનફળ શોધો :
   (i) ત્રિજ્યા 6 સેમી, ઊંચાઈ 7 સેમી (ii) ત્રિજ્યા 3.5 સેમી, ઊંચાઈ 12 સેમી
2. નીચેના શંકુ આકારના વાસણની ક્ષમતા લિટરમાં શોધો :
   (i) ત્રિજ્યા 7 સેમી, ત્રાંસી ઊંચાઈ 25 સેમી (ii) ઊંચાઈ 12 સેમી, ત્રાંસી ઊંચાઈ 13 સેમી
3. એક શંકુની ઊંચાઈ 15 સેમી છે. જો તેનું ઘનફળ 1570 સેમી^{3} હોય, તો તેના પાયાની ત્રિજ્યા શોધો. ($\pi = 3.14$ લો.)

4. એક લંબવૃત્તીય શંકુનું ઘનફળ 48 π સેમી^{3} છે. તેની ઊંચાઈ 9 સેમી હોય, તો તેના પાયાનો વ્યાસ શોધો.

5. એક શંકુ આકારના ખાડાના ઉપરના ભાગનો વ્યાસ 3.5 મી અને ઊંડાઈ 12 મી છે. તેની ક્ષમતા (કિલોલિટરમાં) કેટલી થાય ?

6. લંબવૃત્તીય શંકુનું ઘનફળ 9856 સેમી^{3} છે. તેના પાયાનો વ્યાસ 28 સેમી છે. તો,
   (i) શંકુની ઊંચાઈ (ii) શંકુની ત્રાંસી ઊંચાઈ અને (iii) શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

7. કાટકોણ ત્રિકોણ ABC ની બાજુનાં માપ 5 સેમી, 12 સેમી અને 13 સેમી છે. જો તેને 12 સેમી લંબાઈવાળી બાજુની આસપાસ પરિભ્રમણ કરવામાં આવે, તો તેથી બનતા શંકુનું ઘનફળ શોધો.

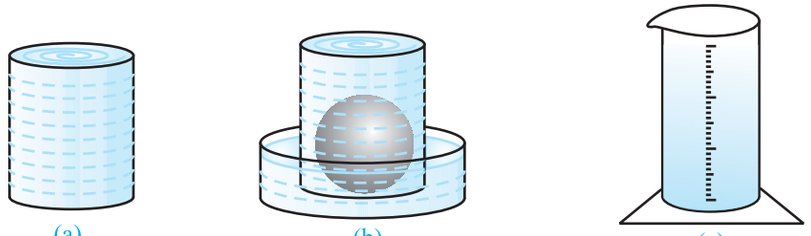
8. ઉપરનાં પ્રશ્ન 7 માં આપેલ ત્રિકોણ ABC નું 5 સેમી લંબાઈવાળી બાજુની આસપાસ પરિભ્રમણ કરવામાં આવે છે, તો આ રીતે બનતા ઘનનું ઘનફળ શોધો તથા પ્રશ્ન 7 અને 8 માં બનતા શંકુના ઘનફળનો ગુણોત્તર શોધો.

9. એક શંકુ આકારના ઘઉંના ઢગલાના પાયાનો વ્યાસ 10.5 મી અને ઊંચાઈ 3 મી છે. તેનું ઘનફળ શોધો. આ ઢગલાને વરસાદથી બચાવવા કેનવાસથી ઢાંકવામાં આવે છે, તો આ માટે જરૂરી કેનવાસનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

11.4 ગોળાનું ઘનફળ

હવે, આપણે ગોળાનું ઘનફળ કેવી રીતે માપવું તે જોઈએ. પહેલા બે કે ત્રણ જુદી જુદી ત્રિજ્યાવાળા ગોળા લો અને એક એવું મોટું પાત્ર લો કે જેમાં આ દરેક ગોળાઓ એકીસાથે સમાઈ જાય. હવે એક એવું મોટું જળપાત્ર લો કે જેમાં તમે ઉપરોક્ત પાત્રને મૂકી શકો. પછી, પાત્રને પૂરેપુરું પાણીથી ભરી દો. [આકૃતિ. 11.13(a).]

હવે કાળજીપૂર્વક એક ગોળાને પાણી ભરેલ પાત્રમાં મૂકો. આથી થોડું પાણી જળપાત્રમાં ઊભરાઈને આવશે. [આકૃતિ 11.13(b).] આ જળપાત્રમાં આવેલા પાણીને એક અંકિત નળાકારમાં કાળજીપૂર્વક લો અને તે પાણીનું કદ માપો, [આકૃતિ 11.13(c)]. ધારો કે પાણી ભરેલા પાત્રમાં મૂકેલ ગોળાની ત્રિજ્યા r છે. (તમે ગોળની ત્રિજ્યા તેનો વ્યાસ માપીને શોધી શકો.) ત્યાર બાદ $\frac{4}{3}\pi r^3$નું મૂલ્ય મેળવો. શું આ મૂલ્ય અંકિત નળાકારમાં રહેલા પાણીનાં કદ જેટલું છે?



(a) (b) (c)

આકૃતિ 11.13

ઉપર્યુક્ત પ્રક્રિયા બીજા કદના ગોળા માટે ફરીથી કરો. ગોળાની ત્રિજ્યા R માપો અને $\frac{4}{3}\pi R^3$ની કિંમત શોધો. ફરી એક વખત આ કિંમત ગોળા દ્વારા વિસ્થાપિત કરેલા લગભગ પાણીના કદ (ઉભરાયેલા પાણીના કદ) જેટલી લગભગ થશે. આ શું દર્શાવે છે? આપણને ખબર છે કે ગોળાનું કદ, ગોળા દ્વારા વિસ્થાપિત પાણીના કદ જેટલું છે. આ પ્રયોગનું પુનરાવર્તન જુદી જુદી ત્રિજ્યાના ગોળા વાપરી કરતાં આ જ પરિણામ મળે છે. એટલે કે ગોળાનું કદ $\frac{4}{3}\pi$ × ત્રિજ્યાના ઘન જેટલું થાય છે. આ પરથી,

ગોળાનું ઘનફળ $= \frac{4}{3}\pi r^3$

r ગોળાની ત્રિજ્યા છે. ભવિષ્યમાં તમે ઉપરના વર્ગોમાં આ સૂત્ર સાબિત પણ કરી શકશો. પણ આ તબક્કે આપણે તેને સ્વીકારીને ચાલીશું.

હવે અર્ધગોળો ગોળાનો અડધો ભાગ છે. તો વિચારો કે અર્ધગોળાનું ઘનફળ કેટલું થાય?

હા, તે $\frac{4}{3}\pi r^3$ નો $\frac{1}{2}$ એટલે કે $\frac{2}{3}\pi r^3$ છે.

તેથી, **અર્ધગોળાનું ઘનફળ $= \frac{2}{3}\pi r^3$**

અહીં, r અર્ધગોળાની ત્રિજ્યા છે. હવે આપણે આ સૂત્રનો ઉપયોગ દર્શાવતાં કેટલાંક ઉદાહરણો લઈશું.

ઉદાહરણ 10 : 11.2 સેમી ત્રિજ્યાવાળા ગોળાનું ઘનફળ શોધો.

ઉકેલ : ગોળાનું ઘનફળ $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 11.2 \times 11.2 \times 11.2$ સેમી^{3}

$= 5887.32$ સેમી^{3}

ઉદાહરણ 11 : ગોળાફેંકમાં વપરાતા ધાતુના ગોળાની ત્રિજ્યા 4.9 સેમી છે. જો વપરાયેલ ધાતુની ઘનતા 7.8 ગ્રામ/સેમી^{3}, હોય તો તેનું દળ શોધો.

ઉકેલ : ગોળાફેંકમાં વપરાતો ગોળો ધાતુનો નક્કર ગોળો હોવાથી, તેનું દળ એ તેના ઘનફળ અને ઘનતાનો ગુણાકાર થશે. તેથી આપણે ગોળાનું ઘનફળ શોધવું પડશે.

હવે, ગોળાનું ઘનફળ $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 4.9 \times 4.9 \times 4.9$ સેમી^{3}

$= 493$ સેમી^{3} (આશરે)

વળી, 1 સેમી^{3} ધાતુની ઘનતા 7.8 ગ્રામ હોવાથી,

ગોળાનું દળ $= 7.8 \times 493$ ગ્રામ $= 3845.44$ ગ્રામ $= 3.85$ કિગ્રા (આશરે)

ઉદાહરણ 12 : એક અર્ધગોળાકાર વાસણની ત્રિજ્યા 3.5 સેમી છે, તો તેમાં સમાઈ શકતા પાણીનું ઘનફળ શોધો.

ઉકેલ : અર્ધગોળાકાર વાસણમાં સમાઈ શકતા પાણીનું ઘનફળ $= \frac{2}{3}\pi r^3$

$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \times 3.5$ સેમી$^3 = 89.8$ સેમી^{3}

સ્વાધ્યાય 11.4

જ્યાં ઉલ્લેખ ન કર્યો હોય, ત્યાં $\pi = \frac{22}{7}$ લો.

1. આપેલ ત્રિજ્યા પરથી ગોળાનું ઘનફળ શોધો :

(i) 7 સેમી (ii) 0.63 મી

2. આપેલ વ્યાસવાળા નક્કર ગોળા દ્વારા વિસ્થાપિત થતા પાણીનું કદ શોધો.

   (i) 28 સેમી (ii) 0.21 મી

3. એક ધાતુના ગોળાનો વ્યાસ 4.2 સેમી છે. જો તેના દ્રવ્યની ઘનતા 8.9 ગ્રામ/સેમી^{3} હોય, તો તેનું દળ શોધો.

4. જો ચંદ્રનો વ્યાસ આશરે પૃથ્વીના વ્યાસના ચોથા ભાગ જેટલો હોય, તો પૃથ્વીના ઘનફળ અને ચંદ્રના ઘનફળનો ગુણોત્તર શોધો.

5. 10.5 સેમી વ્યાસવાળા અર્ધગોળાકાર પાત્રમાં કેટલા લિટર દૂધ સમાવી શકાય?

6. એક અર્ધગોળાકાર ટાંકી 1 સેમી જાડા લોખંડના પતરામાંથી બનાવેલી છે. જો તેની અંદરની ત્રિજ્યા 1 મી હોય, તો આ ટાંકી બનાવવા વપરાયેલા લોખંડનું ઘનફળ શોધો.

7. એક ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ 154 સેમી^{2} હોય, તો તેનું ઘનફળ શોધો.

8. એક મકાનનો ઘુમ્મટ અર્ધગોળાકાર છે. તેની અંદરની બાજુએ ચૂનો લગાવવાનો ખર્ચ ₹ 4989.60 થાય છે. જો ચૂનો લગાવવાનો ખર્ચ 1 મી^{2} ના ₹ 20 હોય, તો

   (i) ઘુમ્મટની અંદરની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ અને

   (ii) ઘુમ્મટની અંદર રહેલી હવાનું ઘનફળ શોધો.

9. જેની ત્રિજ્યા r અને વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ S હોય, તેવા 27 લોખંડના ગોળાને ઓગાળી તેમાંથી જેની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ S' હોય તેવો એક લોખંડનો ગોળો બનાવવામાં આવે છે. તો

   (i) નવા ગોળાની ત્રિજ્યા r' અને (ii) S અને S' ગુણોત્તર શોધો.

10. એક ગોળાકાર દવાની કેપ્સુલનો વ્યાસ 3.5 મિમી છે. તો આ કેપ્સુલને સંપૂર્ણ રીતે ભરવા કેટલી દવાની (મિમી^{3}) જરૂર પડશે ?

11.5 સારાંશ

તમે આ પ્રકરણમાં નીચેના મુદ્દાઓ શીખ્યા :

1. લંબવૃત્તીય શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= \pi rl$
2. લંબવૃત્તીય શંકુનું કુલ પૃષ્ઠફળ $= \pi rl + \pi r^2$, i.e., $\pi r (l + r)$
3. r ત્રિજ્યાવાળા ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= 4 \pi r^2$
4. અર્ધગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= 2\pi r^2$
5. અર્ધગોળાની સપાટીનું કુલ ક્ષેત્રફળ $= 3\pi r^2$
6. શંકુનું ઘનફળ $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$
7. r ત્રિજ્યાવાળા ગોળાનું ઘનફળ $= \frac{4}{3}\pi r^3$
8. અર્ધગોળાનું ઘનફળ $= \frac{2}{3}\pi r^3$

[અહીં, મૂળાક્ષરો l, h, r તેમના પ્રચલિત અર્થમાં વાપરવામાં આવ્યા છે. તેનું અર્થઘટન સંદર્ભ પ્રમાણે કરવું.]