F4J5G4

પ્રકરણ 4

દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણો

The principal use of the Analytic Art is to bring Mathematical Problems to Equations and to exhibit those Equations in the most simple terms that can be.

—Edmund Halley

4.1 પ્રાસ્તાવિક

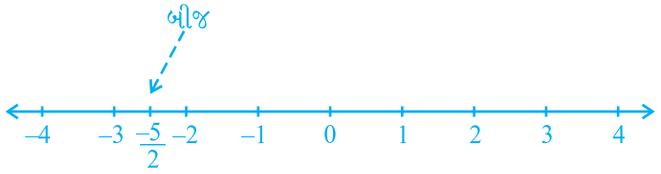
અગાઉના ધોરણોમાં તમે એક ચલ સુરેખ સમીકરણો વિશે જાણ્યું છે. તમે એક ચલ સુરેખ સમીકરણ લખી શકો ? તમે કહી શકો કે $x + 1 = 0$, $x + \sqrt{2} = 0$ અને $\sqrt{2}\,y + \sqrt{3} = 0$ એક ચલ સુરેખ સમીકરણોનાં ઉદાહરણો છે. તમે એ પણ જાણો છો કે આ પ્રકારનાં સમીકરણોને અનન્ય ઉકેલ હોય છે. તમને એ પણ યાદ હશે કે આવા ઉકેલ ને સંખ્યારેખા પર કેવી રીતે દર્શાવી શકાય. આ પ્રકરણમાં એક ચલ સુરેખ સમીકરણોના જ્ઞાનને ફરી યાદ કરીશું તથા તેને બે ચલ સુધી વિસ્તૃત કરીશું. તમે આવા પ્રશ્નો વિચારી શકોઃ શું એક દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણને ઉકેલ હોય ? જો હા, તો તે અનન્ય હોય? આવા પ્રશ્નોના જવાબ માટે તમે પ્રકરણ-3 માં જે સંકલ્પનાઓનો અભ્યાસ કર્યો છે તેનો પણ ઉપયોગ કરી શકશો.

4.2 સુરેખ સમીકરણો

ચાલો, આપણે અગાઉ શું શીખી ગયા છીએ તે યાદ કરીએ. તો નીચે આપેલ સમીકરણ વિચારીએ.

$$2x + 5 = 0$$

તેનો ઉકેલ, એટલે કે આ સમીકરણનું બીજ $-\frac{5}{2}$ છે. આ બીજને સંખ્યારેખા પર આકૃતિ 4.1 પ્રમાણે દર્શાવી શકાયઃ



આકૃતિ 4.1

સમીકરણને ઉકેલતી વખતે તમારે હંમેશાં નીચે દર્શાવેલ મુદ્દાઓ ધ્યાન પર લેવા જોઈએ.

(i) સમીકરણની બંને બાજુમાં સમાન સંખ્યા ઉમેરો(અથવા તેમાંથી બાદ કરો)

(ii) સમીકરણની બંને બાજુએ સમાન શૂન્યેતર સંખ્યા વડે ગુણાકાર કે ભાગાકાર કરો ત્યારે સુરેખ સમીકરણનો ઉકેલ બદલાતો નથી.

હવે આપણે નીચેની પરિસ્થિતિ વિચારીએ:

નાગપુર ખાતે ભારત અને શ્રીલંકા વચ્ચે રમાયેલ એક દિવસીય આંતરરાષ્ટ્રીય ક્રિકેટ મેચમાં બે ભારતીય બેટ્સમેને સાથે મળી 176 રન બનાવ્યા. આ માહિતીને સમીકરણના સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

અહીં, તમે જોઈ શકો છો કે બેમાંથી એકેય ખેલાડીના રન તમે જાણતા નથી અર્થાત્ અહીં બે અજ્ઞાત સંખ્યાઓ છે. આપણે તેમને દર્શાવવા માટે સંજ્ઞા x અને y નો ઉપયોગ કરીશું. આથી, જો એક બેટ્સમેને કરેલ રન x અને બીજા બેટ્સમેને કરેલ રન y હોય તો,

$$x + y = 176. \quad \text{માંગેલ સમીકરણ છે.}$$

આ દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણનું એક ઉદાહરણ છે. સામાન્ય રીતે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણમાં ચલને x અને y વડે દર્શાવવાની પ્રથા છે, પરંતુ બીજા મૂળાક્ષરો પણ ઉપયોગમાં લઈ શકાય. દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણોનાં કેટલાંક ઉદાહરણો નીચે આપેલ છે.

$$1.2s + 3t = 5,\ p + 4q = 7,\ \pi u + 5v = 9 \text{ અને } 3 = \sqrt{2}\,x - 7y.$$

જુઓ કે, આ સમીકરણોને તમે અનુક્રમે $1.2s + 3t - 5 = 0$, $p + 4q - 7 = 0$, $\pi u + 5v - 9 = 0$ અને $\sqrt{2}\,x - 7y - 3 = 0$ સ્વરૂપે પણ દર્શાવી શકો.

આથી, જે સમીકરણને $ax + by + c = 0$ સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય તેને દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ કહે છે, જ્યાં a, b અને c વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે તથા a અને b બંને એક સાથે શૂન્ય નથી.

આનો અર્થ એ થાય કે તમે આવાં અનેક સમીકરણો લખી શકો.

ઉદાહરણ 1 : નીચે દર્શાવેલ દરેક સમીકરણને $ax + by + c = 0$ સ્વરૂપે દર્શાવો અને દરેકમાં a, b અને c ની કિંમતો દર્શાવો :

(i) $2x + 3y = 4.37$ (ii) $x - 4 = \sqrt{3}\,y$ (iii) $4 = 5x - 3y$ (iv) $2x = y$

ઉકેલ : (i) $2x + 3y = 4.37$ સમીકરણને $2x + 3y - 4.37 = 0$ સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય. અહીં $a = 2$, $b = 3$ અને $c = -4.37$.

(ii) સમીકરણ $x - 4 = \sqrt{3}\,y$ ને $x - \sqrt{3}\,y - 4 = 0$ સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય. અહીં $a = 1$, $b = -\sqrt{3}$ અને $c = -4$.

(iii) સમીકરણ $4 = 5x - 3y$ ને $5x - 3y - 4 = 0$ સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય. અહીં $a = 5$, $b = -3$ અને $c = -4$.

તમે આ સમીકરણને $-5x + 3y + 4 = 0$ સ્વરૂપે પણ લખી શકાય તે બાબતમાં સંમત છો?આ કિસ્સામાં $a = -5$, $b = 3$ અને $c = 4$.

(iv) સમીકરણ $2x = y$ ને $2x - y + 0 = 0$ સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય. અહીં $a = 2$, $b = -1$ અને $c = 0$.

$ax + b = 0$ પ્રકારનાં સમીકરણો પણ દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણોનાં ઉદાહરણો છે, કારણ કે તેમને $ax + 0 \cdot y + b = 0$ સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય.

ઉદાહરણ તરીકે, $4 - 3x = 0$ ને $-3x + 0 \cdot y + 4 = 0$ સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય.

ઉદાહરણ 2 : નીચે દર્શાવેલ દરેક સમીકરણને દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ સ્વરૂપે દર્શાવો.

(i) $x = -5$ (ii) $y = 2$ (iii) $2x = 3$ (iv) $5y = 2$

ઉકેલ : (i) $x = -5$ ને $1 \cdot x + 0 \cdot y = -5$ અથવા $1 \cdot x + 0 \cdot y + 5 = 0$ તરીકે દર્શાવી શકાય.

(ii) $y = 2$ ને $0 \cdot x + 1 \cdot y = 2$ અથવા $0 \cdot x + 1 \cdot y - 2 = 0$ તરીકે દર્શાવી શકાય.

(iii) $2x = 3$ ને $2x + 0 \cdot y - 3 = 0$ તરીકે દર્શાવી શકાય.

(iv) $5y = 2$ ને $0 \cdot x + 5y - 2 = 0$ તરીકે દર્શાવી શકાય.

સ્વાધ્યાય 4.1

1. ''નોટબુકની કિંમત પેનની કિંમત કરતાં બમણી(બે ગણી) છે'' આ વિધાનને દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ સ્વરૂપે દર્શાવો.

(નોટબુકની કિંમત ₹ x તથા પેનની કિંમત ₹ y લો).

2. નીચે દર્શાવેલા દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણોને $ax + by + c = 0$ તરીકે દર્શાવો અને દરેક કિસ્સામાં a, b અને c ની કિંમત શોધો :

(i) $2x + 3y = 9.3\overline{5}$ (ii) $x - \frac{y}{5} - 10 = 0$ (iii) $-2x + 3y = 6$ (iv) $x = 3y$

(v) $2x = -5y$ (vi) $3x + 2 = 0$ (vii) $y - 2 = 0$ (viii) $5 = 2x$

4.3 સુરેખ સમીકરણનો ઉકેલ

તમે જોયું કે દરેક એકચલ સુરેખ સમીકરણને અનન્ય ઉકેલ હોય છે. દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણના ઉકેલ અંગે તમે શું કહી શકો? સમીકરણમાં બે ચલ હોવાથી ઉકેલમાં કિંમતોની જોડ મળે અને તેમાં x માટે એક કિંમત અને y માટે એક કિંમત મળે. આ કિંમતો આપેલા સમીકરણનું સમાધાન કરે. આપણે એક સમીકરણ $2x + 3y = 12$ નો વિચાર કરીએ અહીં, $x = 3$ અને $y = 2$ તેનો એક ઉકેલ છે કારણ કે $x = 3$ અને $y = 2$ ની કિંમત ઉપરના સમીકરણમાં મૂકતાં તમને,

$$2x + 3y = (2 \times 3) + (3 \times 2) = 12 \text{ મળશે.}$$

આ ઉકેલને ક્રમયુક્ત જોડ (3, 2) સ્વરૂપે લખી શકાય. તેમાં પ્રથમ x ની કિંમત અને તે પછી y ની કિંમત લખાય છે.

આ જ પ્રમાણે (0, 4) પણ ઉપરોક્ત સમીકરણનો ઉકેલ છે.

બીજી રીતે જોતાં (1, 4) એ $2x + 3y = 12$ નો ઉકેલ નથી કારણ કે $x = 1$ અને $y = 4$ મૂકતાં આપણને $2x + 3y = 14$ મળે અને 12 ન મળે (જમણી બાજુની કિંમત ન મળે). નોંધો કે (0, 4) એક ઉકેલ છે, પરંતુ (4, 0) ઉકેલ નથી.

$2x + 3y = 12$ માટે તમે ઓછામાં ઓછા બે ઉકેલ (3, 2) અને (0, 4) જોયા. તમે બીજા કોઈ ઉકેલ મેળવી શકો? શું તમે સંમત છો કે (6, 0) પણ એક અન્ય ઉકેલ છે? આ જ પ્રમાણે ચકાસો. હકીકતે આ પ્રમાણે આપણે ઘણા બધા ઉકેલો મેળવી શકીએ. $2x + 3y = 12$ માં તમારી પસંદગીની x ની કોઈ પણ કિંમત લો (જેમ કે $x = 2$) આથી સમીકરણ $4 + 3y = 12$ માં રૂપાંતરિત થશે. તે એક ચલ સુરેખ સમીકરણ છે. તેને ઉકેલતાં તમને $y = \frac{8}{3}$ મળશે. આથી $\left(2, \frac{8}{3}\right)$ એ $2x + 3y = 12$ નો અન્ય ઉકેલ છે. આ જ પ્રમાણે $x = -5$ પસંદ કરતાં સમીકરણ $-10 + 3y = 12$ મળશે. તે કિંમત $y = \frac{22}{3}$ આપશે. આથી $\left(-5, \frac{22}{3}\right)$ એ $2x + 3y = 12$ નો એક અન્ય ઉકેલ છે. આમ દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણના વિવિધ ઉકેલનો કોઈ અંત નથી. આમ, ***એક દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણને અનંત ઉકેલ હોય છે.***

ઉદાહરણ 3 : સમીકરણ $x + 2y = 6$ ના ચાર ભિન્ન ઉકેલ મેળવો.

ઉકેલ : $x = 2, y = 2$ ચકાસતાં તે ઉકેલ છે, કારણ કે $x = 2, y = 2$ માટે

$$x + 2y = 2 + 4 = 6$$

હવે $x = 0$ પસંદ કરીએ. x ની આ કિંમત મૂકવાથી આપેલ સમીકરણનું રૂપાંતર $2y = 6$ માં થઈ જશે. તેને અનન્ય ઉકેલ $y = 3$ હોય. આથી $x = 0, y = 3$ પણ $x + 2y = 6$ નો ઉકેલ થાય. આ જ પ્રમાણે $y = 0$ લેવાથી, આપેલ સમીકરણ $x = 6$ માં રૂપાંતરીત થશે. આથી $x = 6, y = 0$ પણ સમીકરણ $x + 2y = 6$ નો ઉકેલ થાય. અંતે, આપણે $y = 1$ લઈએ તો આપેલ સમીકરણ $x + 2 = 6$ માં રૂપાંતરીત થશે. તેનો ઉકેલ $x = 4$. થાય. આથી (4, 1) પણ આપેલ સમીકરણનો ઉકેલ થાય. આથી આપેલા સમીકરણના અનંત ઉકેલો પૈકીના ચાર ઉકેલ (2, 2), (0, 3), (6, 0) અને (4, 1) છે.

ટિપ્પણી : અહીં આપણે નોંધીએ કે $x = 0$ મૂકવાથી તેને સંગત y ની કિંમત મળશે. તેથી સમીકરણનો એક ઉકેલ મળશે. આ જ પ્રમાણે આપણે $y = 0$ મૂકીશું તો તેને અનુરૂપ x ની કિંમત મળશે.

ઉદાહરણ 4 : નીચે આપેલા પ્રત્યેક સમીકરણના બે ઉકેલ શોધો :

(i) $4x + 3y = 12$

(ii) $2x + 5y = 0$

(iii) $3y + 4 = 0$

ઉકેલ : (i) $x = 0$ લેતાં, આપણને $3y = 12$ મળે. તેથી $y = 4$ આમ, (0, 4) આપેલ સમીકરણનો એક ઉકેલ થાય. આ જ પ્રમાણે $y = 0$ લેવાથી આપણને $x = 3$ મળે. તેથી (3, 0) પણ ઉકેલ થાય.

(ii) $x = 0$ લેવાથી આપણને $5y = 0$ મળે જેથી $y = 0$ થાય. આમ (0, 0) આપેલ સમીકરણનો એક ઉકેલ થાય. હવે જો તમે $y = 0$ લેશો તો ફરીથી તમને (0, 0) ઉકેલ તરીકે મળશે. તે અગાઉનો ઉકેલ જ છે. બીજો ઉકેલ મેળવવા $x = 1$ લો. આથી તમે y ની અનુરૂપ કિંમત $-\frac{2}{5}$ ચકાસી શકશો. આથી $\left(1, -\frac{2}{5}\right)$ એ $2x + 5y = 0$ નો બીજો ઉકેલ છે.

(iii) સમીકરણ $3y + 4 = 0$ ને $0 \cdot x + 3y + 4 = 0$ સ્વરૂપે લખી શકાય. x ની કોઈપણ કિંમત માટે તમને $y = -\frac{4}{3}$ મળશે. આથી, બે ઉકેલો $\left(0, -\frac{4}{3}\right)$ અને $\left(1, -\frac{4}{3}\right)$ મળે.

સ્વાધ્યાય 4.2

1. નીચેના પૈકી કયો વિકલ્પ ખરો છે અને શા માટે ?

$y = 3x + 5$ ને

(i) અનન્ય ઉકેલ હોય. (ii) માત્ર બે ઉકેલ હોય. (iii) અનંત ઉકેલ હોય.

2. નીચેના પૈકી પ્રત્યેક સમીકરણના ચાર ઉકેલ લખો :

(i) $2x + y = 7$ (ii) $\pi x + y = 9$ (iii) $x = 4y$

3. નીચેનામાંથી કયા બિંદુઓ સમીકરણ $x - 2y = 4$ ના ઉકેલ છે અને કયાં બિંદુઓ ઉકેલ નથી તે ચકાસો :

(i) $(0, 2)$ (ii) $(2, 0)$ (iii) $(4, 0)$

(iv) $(\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ (v) $(1, 1)$

4. જો $x = 2, y = 1$ એ સમીકરણ $2x + 3y = k$ નો એક ઉકેલ હોય તો k ની કિંમત શોધો.

4.4 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના મુદ્દાઓ વિશે અભ્યાસ કર્યો.

1. સમીકરણ $ax + by + c = 0$ (જ્યાં a, b અને c વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે તથા a અને b એક સાથે શૂન્ય નથી.) ને દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ કહે છે.

2. દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણને અનંત ઉકેલ હોય છે.