U1L4K9

પ્રકરણ 6

રેખાઓ અને ખૂણાઓ

6.1 પ્રાસ્તાવિક

તમે આગળના પ્રકરણ 5માં શીખી ગયાં કે એક રેખા દોરવા માટે ઓછામાં ઓછાં બે ભિન્ન બિંદુઓ જોઈએ. તમે અગાઉ કેટલીક પૂર્વધારણાઓનો અભ્યાસ કરી ગયાં અને તેની મદદથી કેટલાંક વિધાનો સાબિત કર્યાં. આ પ્રકરણમાં તમે બે રેખાઓ પરસ્પર એકબીજીને છેદે તેથી બનતા ખૂણાઓના ગુણધર્મો વિશે અભ્યાસ કરશો. તદ્ઉપરાંત આ ગુણધર્મોનો ઉપયોગ કરીને કેટલાંક વિધાનોને આનુમાનિક તર્ક દ્વારા સાબિત કરશો. (જુઓ પરિશિષ્ટ 1.) તમે અગાઉના ધોરણમાં વિવિધ પ્રવૃત્તિ દ્વારા આ વિધાનોની ચકાસણી કરી ગયા છો.

તમારા રોજિંદા જીવનમાં સમતલ સપાટીની ધાર વચ્ચે જુદા જુદા પ્રકારના ખૂણાઓ બનતા જુઓ છો. સમતલ સપાટીનો ઉપયોગ કરીને આ પ્રકારના નમૂના બનાવવા માટે તમને ખૂણાઓનું સંપૂર્ણ જ્ઞાન હોવું જોઈએ. ઉદાહરણ તરીકે માનો કે તમે શાળાના કોઈ પ્રદર્શનમાં વાંસની લાકડીઓનો ઉપયોગ કરીને ઝૂંપડીનો નમૂનો બનાવવા માંગો છો. વિચારો કે તમે તે કેવી રીતે બનાવશો ? તેના માટે તમે કેટલીક લાકડીઓ એકબીજીને સમાંતર અને કેટલીક લાકડીઓ ત્રાંસી ગોઠવશો. જ્યારે શિલ્પીએ એક બહુમાળી મકાનનો નકશો દોરવો હોય તો તેણે ભિન્ન ખૂણાઓ પર પરસ્પર છેદતી રેખાઓ અને સમાંતર રેખાઓ દોરવી પડશે. શું તમે માનો છો કે આ રેખાઓ અને ખૂણાઓના ગુણધર્મોના જ્ઞાન વગર તે ઇમારતનો નકશો બનાવી શકશે ?

વિજ્ઞાનમાં તમે કિરણોની રેખાકૃતિ દોરીને પ્રકાશના ગુણધર્મોનો અભ્યાસ કરો છો. ઉદાહરણ તરીકે જ્યારે પ્રકાશ એક માધ્યમમાંથી બીજા માધ્યમમાં જાય ત્યારે થતાં પ્રકાશના વક્રીભવનનો અભ્યાસ કરવા તમે પરસ્પર છેદતી અને સમાંતર

રેખાઓના ગુણધર્મોનો ઉપયોગ કરો છો. જ્યારે બે કે તેથી વધુ બળ એક જ પદાર્થ પર લાગે ત્યારે તમે જે આકૃતિ દોરો છો, તેમાં પદાર્થ પર બળોની પરિણામી અસરના અભ્યાસ માટે બળોને દિશાયુક્ત રેખાખંડો દ્વારા દર્શાવો છો. તે સમયે તમારે કિરણો (અથવા રેખાખંડો) એકબીજાને સમાંતર હોય કે પરસ્પર એકબીજાને છેદે ત્યારે બનતા ખૂણાઓ વચ્ચે શો સંબંધ છે તે જાણવું જરૂરી છે. ટાવરની ઊંચાઈ કે દીવાદાંડીથી વહાણનું અંતર શોધવા માટે સમક્ષિતિજ કિરણ અને દૃષ્ટિકિરણ વચ્ચે બનતા ખૂણા વિશે જાણવું જરૂરી છે. જેમાં રેખાઓ અને ખૂણાઓનો ઉપયોગ થતો હોય એવાં બીજાં ઘણાં ઉદાહરણો આપી શકાય. હવે પછીના ભૂમિતિનાં પ્રકરણોમાં વધુમાં વધુ ઉપયોગી નવા ગુણધર્મો તારવવા તમે રેખાઓ અને ખૂણાઓના આ ગુણધર્મોનો ઉપયોગ કરશો.

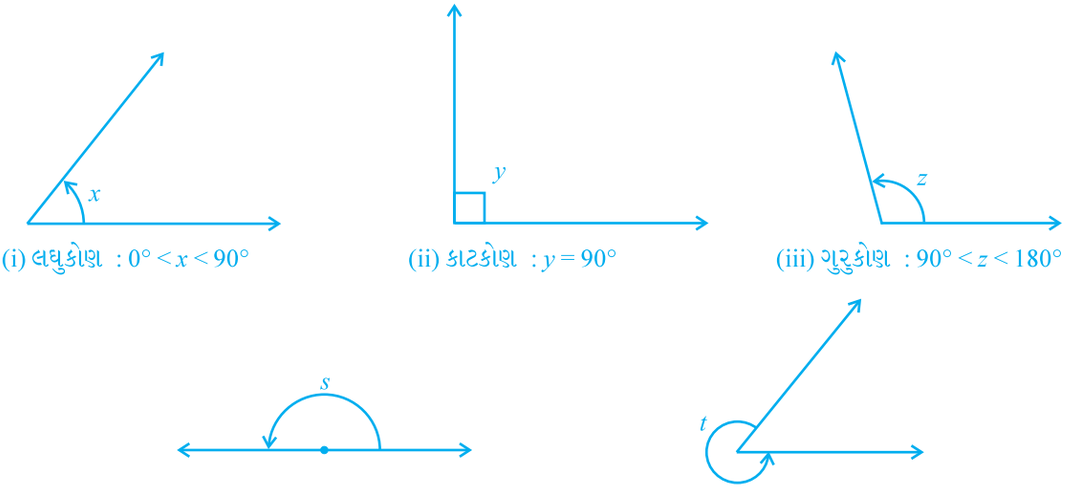
તો ચાલો તમે પહેલાં જેનો અગાઉના ધોરણમાં અભ્યાસ કરી ગયાં છો તે રેખાઓ અને ખૂણા સંબંધિત કેટલાંક પદો તથા વ્યાખ્યાઓનું પુનરાવર્તન કરી લઈએ.

6.2 મૂળભૂત પદો તથા વ્યાખ્યાઓ

યાદ રાખો કે બે અંત્યબિંદુઓવાળા રેખાના ભાગને *રેખાખંડ* કહેવાય. એક જ અંત્યબિંદુ ધરાવતા રેખાના ભાગને કિરણ કહેવાય છે. યાદ રાખો કે રેખાખંડ AB ને $\overline{AB}$ અને તેની લંબાઈને AB વડે દર્શાવાય છે. કિરણ AB ને $\overrightarrow{AB}$ તથા રેખાને $\overleftrightarrow{AB}$ વડે દર્શાવાય છે. છતાં પણ આપણે આ સંકેતોનો ઉપયોગ કરીશું નહિ અને રેખાખંડ AB, કિરણ AB, રેખાખંડ AB ની લંબાઈ અને રેખા AB ને એકના એક જ સંકેત AB વડે દર્શાવીશું. તમને તેનો અર્થ સંદર્ભથી સ્પષ્ટ થઈ જશે. ક્યારેક રેખાઓને દર્શાવવા અંગ્રેજી મૂળાક્ષરો *l*, *m*, *n* વગેરેનો ઉપયોગ કરીશું.

જો ત્રણ કે ત્રણથી વધારે બિંદુઓ એક જ રેખા પર આવેલા હોય, તો તે બિંદુઓને સમરેખ બિંદુઓ કહેવાય છે. અન્યથા તે અસમરેખ બિંદુઓ કહેવાય છે.

યાદ રાખો કે જ્યારે બે કિરણો એક સામાન્ય અંત્યબિંદુમાંથી ઉદ્ભવે ત્યારે *ખૂણો* બને છે. અહીં ખૂણો બનાવતાં કિરણોને ખૂણાની ***બાજુઓ*** કહેવામાં આવે છે અને સામાન્ય અંત્યબિંદુને ખૂણાનું ***શિરોબિંદુ*** કહે છે. તમે અગાઉના ધોરણમાં વિવિધ પ્રકારના ખૂણાઓ જેમકે **લઘુકોણ** (*acute angle*), **ગુરુકોણ** (*obtuse angle*), **કાટકોણ** (*right angle*), **સરળકોણ** (*straight angle*) અને **વિપરીત કોણ** (*reflex angle*) વિશે શીખી ગયાં છો. (જુઓ આકૃતિ 6.1).

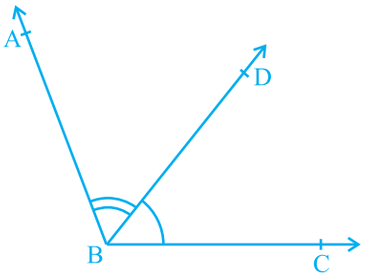


(i) લઘુકોણ : $0° < x < 90°$ (ii) કાટકોણ : $y = 90°$ (iii) ગુરુકોણ : $90° < z < 180°$

(iv) સરળકોણ : $s = 180°$ (v) વિપરીત કોણ : $180° < t < 360°$

આકૃતિ 6.1 ખૂણાના પ્રકારો

લઘુકોણનું માપ 0° થી 90° ની વચ્ચે હોય છે. **કાટકોણ**નું માપ બરાબર 90° હોય. 90° કરતાં વધારે અને 180° કરતાં ઓછા માપના ખૂણાને **ગુરુકોણ** કહે છે. યાદ રાખો કે ***સરળકોણ*** 180° ના માપનો હોય છે અને 180° કરતાં વધારે અને 360° કરતાં ઓછા માપના ખૂણાને ***વિપરીત કોણ*** કહે છે. વળી, જે બે ખૂણાઓના માપનો સરવાળો 90° થાય છે તે ખૂણાઓને એકબીજાના ***કોટિકોણ*** *(complementary angles)* કહે છે અને જે બે ખૂણાઓના માપનો સરવાળો 180° થાય છે તે ખૂણાઓને એકબીજાના ***પૂરક કોણ*** *(supplementary angles)* કહે છે.



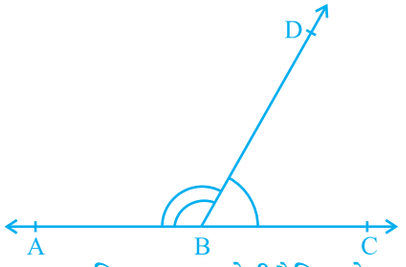
આકૃતિ 6.2 આસન્ન કોણ

અગાઉના ધોરણમાં તમે ***આસન્નકોણ*** *(adjacent angles)* વિશે શીખી ગયા છો. (જુઓ આકૃતિ 6.2). જો બે ખૂણાઓનું શિરોબિંદુ એક જ હોય, એક ભુજ સામાન્ય હોય અને સામાન્ય ન હોય તેવા ભુજ એ સામાન્ય ભુજની જુદી જુદી બાજુએ હોય તેવા બે ખૂણાઓને આસન્નકોણ કહેવાય.

આકૃતિ 6.2 માં ∠ ABD અને ∠ DBC આસન્ન કોણ છે. કિરણ BD તેમનો સામાન્ય ભુજ છે. બિંદુ B એ સામાન્ય શિરોબિંદુ છે અને કિરણ BA અને કિરણ BC સામાન્ય ન હોય તેવા ભુજ છે. વળી જ્યારે બે ખૂણાઓ આસન્ન ખૂણાઓ હોય, ત્યારે તેમના માપનો સરવાળો હંમેશાં સામાન્ય ન હોય તેવા ભુજથી બનતા ખૂણાના માપ જેટલો હોય છે. તેથી, આપણે લખી શકીએ કે,

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$$

તમે એ પણ નોંધ લો કે ∠ ABC અને ∠ ABD આસન્ન ખૂણાઓ નથી. શા માટે ? કારણ કે તેમના સામાન્ય ન હોય તે ભુજ કિરણ BD અને કિરણ BC એ સામાન્ય ભુજ BA ની એક જ બાજુએ આવેલા છે.

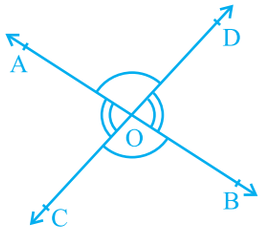


આકૃતિ 6.3 ખૂણાઓની રૈખિક જોડ

જો આકૃતિ 6.2 માં સામાન્ય ન હોય તેવા ભુજ BA અને BC એક રેખા બનાવે તો તેમની આકૃતિ 6.3 જેવી દેખાશે. ત્યારે ∠ ABD અને ∠ DBC એ ***ખૂણાઓની રૈખિક જોડ*** *(linear pair of angles)* કહેવાય છે.

તમે એ પણ જાણો છો કે બે રેખાઓ AB અને CD એકબીજીને પરસ્પર O બિંદુમાં છેદે તો ***અભિકોણો*** *(vertically opposite angles)*ની બે જોડ બને છે (આકૃતિ 6.4). તેમાંથી એક જોડ ∠ AOD અને ∠ BOC છે.

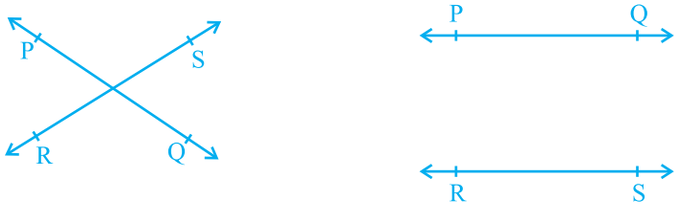
શું તમે બીજી જોડ શોધી શકશો ?



આકૃતિ 6.4 અભિકોણની જોડ

6.3 પરસ્પર છેદતી અને પરસ્પર ન છેદતી રેખાઓ

એક કાગળ પર બે ભિન્ન રેખાઓ PQ અને RS દોરો. તમે જોશો કે આ રેખાઓને બે પ્રકારે દોરી શકાય છે. તે આકૃતિ 6.5(i) અને આકૃતિ 6.5(ii) માં દર્શાવેલ છે.



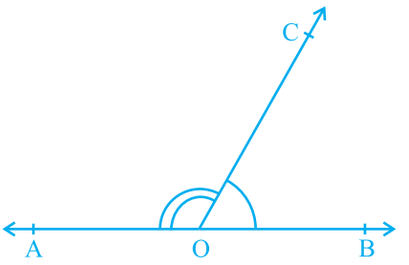
(i) છેદતી રેખાઓ (ii) છેદતી ન હોય તેવી (સમાંતર) રેખાઓ

આકૃતિ 6.5 બે રેખાઓને દોરવાના ભિન્ન પ્રકાર

રેખાની એ કલ્પનાને પણ યાદ કરો કે તે બંને છેડેથી અનંત સુધી વિસ્તરેલ હોય છે. રેખાઓ PQ અને RS આકૃતિ 6.5(i)માં છેદતી રેખાઓ છે અને આકૃતિ 6.5(ii)માં બંને રેખાઓ સમાંતર છે. ધ્યાન રાખો કે આ બંને સમાંતર રેખાઓનાં ભિન્ન બિંદુઓ પર તેના સામાન્ય લંબની લંબાઈઓ સમાન રહેશે. આ સમાન લંબાઈ બંને **સમાંતર રેખાઓની વચ્ચેનું અંતર** *(distance between parallel lines)* કહેવાય છે.

6.4 ખૂણાઓની જોડ

વિભાગ 6.2 માં તમે ખૂણાઓની કેટલીક જોડ જેમકે કોટિકોણ, પૂરકકોણ, આસન્નકોણ, ખૂણાની રૈખિક જોડ વગેરેની વ્યાખ્યાઓ વિશે શીખી ગયાં છો. શું તમે આ ખૂણાઓ વચ્ચેના કોઈ સંબંધ વિશે વિચારી શકો છો ? હવે, કોઈ કિરણ કોઈ રેખાને છેદે તો બનતા ખૂણાઓના સંબંધ પર વિચાર કરીએ. આ પરિસ્થિતિ આકૃતિ 6.6 માં દર્શાવેલ છે. રેખાને AB અને કિરણને OC કહો. બિંદુ O પર બનતા ખૂણા કયા છે ? એ ∠AOC, ∠BOC અને ∠AOB છે.



આકૃતિ 6.6 ખૂણાઓની રૈખિક જોડ

શું આપણે ∠AOC + ∠BOC = ∠AOB લખી શકીએ છીએ? હા! (શા માટે? વિભાગ 6.2 માં આપેલ આસન્ન ખૂણાઓ જુઓ.) (1)

∠AOB નું માપ શું છે ? તે 180° છે. (શા માટે?) (2)

શું (1) અને (2) પરથી તમે કહી શકો કે, ∠AOC + ∠BOC = 180° છે? હા! (શા માટે?)

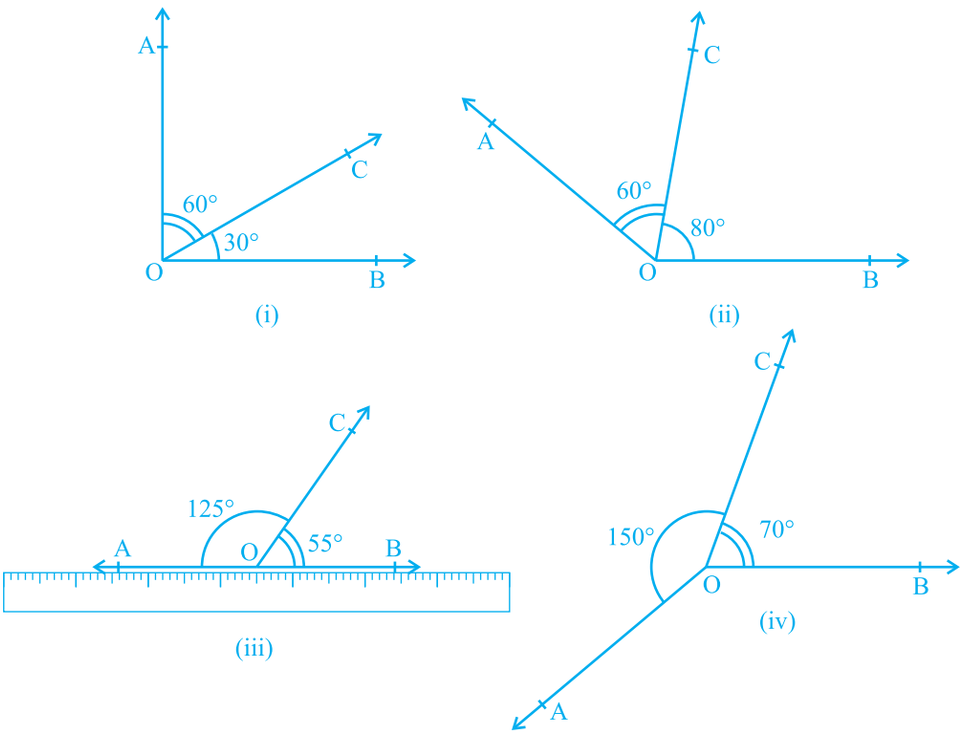
ઉપરની ચર્ચાના આધારે આપણે નીચેની પૂર્વધારણા લખી શકીએ છીએ :

પૂર્વધારણા 6.1 : *જે કિરણનું માત્ર ઉદ્ભવબિંદુ જ રેખા પર હોય તેવા કિરણ અને રેખાથી બનતાં બંને ખૂણાઓનો સરવાળો 180° થાય છે.*

યાદ કરીએ કે જ્યારે બે આસન્નકોણોનો સરવાળો 180° થાય ત્યારે તે *ખૂણાઓની એક રૈખિક જોડ* બનાવે છે. પૂર્વધારણા 6.1 માં એ આપેલ છે કે એક કિરણ એક રેખાને છેદે છે. આ પરથી આપણે તારણ કાઢ્યું કે આ પ્રકારે બનેલા બંને આસન્ન ખૂણાઓનો સરવાળો 180° થાય છે. શું આપણે પૂર્વધારણા 6.1નું પ્રતીપ લખી શકીએ ? એટલે કે પૂર્વધારણા 6.1ના 'તારણ'ને પક્ષ છે તેમ માનીએ અને જે પક્ષ 'આપેલ છે' તેને તારણ માનીએ. આથી, તે નીચે પ્રમાણે બને છે :

(A) જો બે આસન્નકોણોનો સરવાળો 180° હોય, તો સામાન્ય કિરણ એક રેખા પર આવેલ છે.(અર્થાત્ અસામાન્ય બાજુઓ એક જ રેખામાં છે.)

હવે આપણે જોઈએ કે પૂર્વધારણા 6.1 અને વિધાન (A) એકબીજાથી વિરુધ્ધ છે. આપણે તેમાંના પ્રત્યેકને બીજાનું ***પ્રતીપ****(converse)* કહીશું. આપણે એ નથી જાણતા કે વિધાન (A) સત્ય છે કે નહિ. ચાલો તેની તપાસ કરીએ. આકૃતિ 6.7માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે જુદાં જુદાં માપના આસન્નકોણ દોરો. દરેક વિકલ્પમાં અસામાન્ય બાજુઓ પૈકી કોઈપણ એક તરફ સીધી પટ્ટી રાખો. શું બીજી અસામાન્ય બાજુ માપપટ્ટીની તરફ રહેશે?



આકૃતિ 6.7 જુદાં જુદાં માપના આસન્નકોણો

તમે જોશો કે માત્ર આકૃતિ 6.7(iii)માં જ સામાન્ય બાજુઓ ન હોય તેવી બાજુઓ સીધી પટ્ટીને સમાંતર છે, એટલે કે A, O અને B એક જ રેખા પર આવેલાં છે અને કિરણ OC આ રેખા પર આવેલ છે. સાથે એ પણ જુઓ કે $\angle AOC + \angle COB = 125° + 55° = 180°$ છે. આ પરથી તમે તારણ કાઢી શકો કે વિધાન (A) સત્ય છે. આથી, તમે તેને પૂર્વધારણા રૂપે નીચે પ્રમાણે લખી શકો છો:

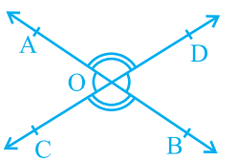
પૂર્વધારણા 6.2 : *જો બે આસન્નકોણોનો સરવાળો 180° હોય, તો તેની સામાન્ય ન હોય તેવી બાજુઓ એક રેખા બનાવે છે.*

સ્પષ્ટ કારણોસર, ઉપરની બંને પૂર્વધારણાઓ એકત્રિત કરતાં તેમને સંયુક્ત રૂપે *રૈખિક જોડની પૂર્વધારણા* કહે છે.

આવો હવે જ્યારે બે રેખાઓ છેદતી હોય એવી પરિસ્થિતિ ચકાસીએ.

અગાઉના ધોરણમાંથી તમને યાદ હશે કે બે રેખાઓ પરસ્પર છેદતી હોય તો અભિકોણ સમાન હોય છે. ચાલો તે પરિણામને સાબિત કરીએ. સાબિતીમાં રહેલ સોપાન માટે પરિશિષ્ટ 1 જુઓ અને નીચે આપેલ સાબિતીને સમજતી વખતે તેમને ધ્યાનમાં રાખો :

પ્રમેય 6.1 : *પરસ્પર છેદતી બે રેખાથી બનતા અભિકોણ સમાન હોય છે.*



આકૃતિ 6.8 અભિકોણ

સાબિતી : ઉપરના વિધાનમાં એ આપેલ છે કે બે રેખાઓ પરસ્પર છેદે છે. આથી માનો કે બે રેખાઓ AB અને CD પરસ્પર O બિંદુમાં છેદે છે તે આકૃતિ 6.8 માં દર્શાવેલ છે. આનાથી આપણને અભિકોણની નીચેની બે જોડી મળે છે :

(i) $\angle$ AOC અને $\angle$ BOD (ii) $\angle$ AOD અને $\angle$ BOC.

આપણે સાબિત કરવું છે કે $\angle$ AOC = $\angle$ BOD અને $\angle$ AOD = $\angle$ BOC છે.

હવે, કિરણ OA રેખા CD પર આવેલ છે.

આથી, $\angle AOC + \angle AOD = 180°$ (રૈખિક જોડની પૂર્વધારણા) (1)

શું આપણે $\angle AOD + \angle BOD = 180°$ સાબિત કરી શકીશું ? હા ! (કેમ ?) (2)

(1) અને (2) પરથી આપણે લખી શકીએ કે,

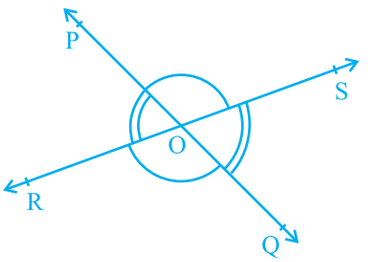
$$\angle AOC + \angle AOD = \angle AOD + \angle BOD$$

આના પરથી તારણ મળે છે કે $\angle AOC = \angle BOD$ (વિભાગ 5.2, સ્વયંસિદ્ધ સત્ય 3 જુઓ.)

તે જ રીતે આપણે સાબિત કરી શકીએ કે $\angle AOD = \angle BOC$

આવો, હવે રૈખિક જોડની પૂર્વધારણા અને પ્રમેય 6.1 પર આધારિત કેટલાંક ઉદાહરણ ઉકેલીએ.

ઉદાહરણ 1 : આકૃતિ 6.9 માં રેખા PQ અને રેખા RS એકબીજીને બિંદુ O માં છેદે છે. જો $\angle POR : \angle ROQ = 5 : 7$ હોય, તો તમામ ખૂણાઓ શોધો.



આકૃતિ 6.9

ઉકેલ : $\angle POR + \angle ROQ = 180°$ (ખૂણાની રૈખિક જોડ)

પરંતુ $\angle POR : \angle ROQ = 5 : 7$ (પક્ષ)

તેથી $\angle POR = \frac{5}{12} \times 180° = 75°$

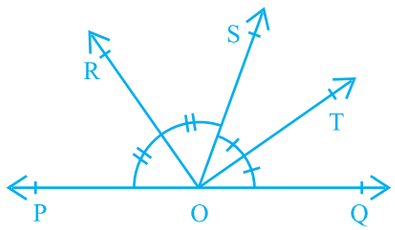
તે જ રીતે, $\angle ROQ = \frac{7}{12} \times 180° = 105°$

હવે, $\angle POS = \angle ROQ = 105°$ (અભિકોણ)

અને $\angle SOQ = \angle POR = 75°$ (અભિકોણ)

ઉદાહરણ 2 : આકૃતિ 6.10 માં, કિરણ OS રેખા POQ પર છે. કિરણ OR અને કિરણ OT એ અનુક્રમે $\angle POS$ અને $\angle SOQ$ ના કોણદ્વિભાજક છે. જો $\angle POS = x$, તો $\angle ROT$ શોધો.

ઉકેલ : કિરણ OS રેખા POQ પર છે.



આકૃતિ 6.10

તેથી, $\angle POS + \angle SOQ = 180°$

પરંતુ, $\angle POS = x$

તેથી, $x + \angle SOQ = 180°$

માટે, $\angle SOQ = 180° - x$

હવે કિરણ OR એ $\angle POS$ નો દ્વિભાજક છે. તેથી,

$$\angle ROS = \frac{1}{2} \times \angle POS$$

$$= \frac{1}{2} \times x = \frac{x}{2}$$

તે જ રીતે $\angle SOT = \frac{1}{2} \times \angle SOQ$

$= \frac{1}{2} \times (180° - x)$

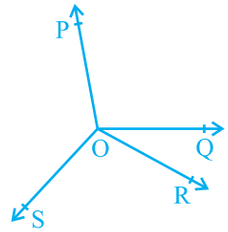
$= 90° - \frac{x}{2}$

હવે, $\angle ROT = \angle ROS + \angle SOT$

$= \frac{x}{2} + 90° - \frac{x}{2}$

$= 90°$

ઉદાહરણ 3 : આકૃતિ 6.11માં OP, OQ, OR અને OS ચાર કિરણ છે. તો સાબિત કરો કે $\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360°$.

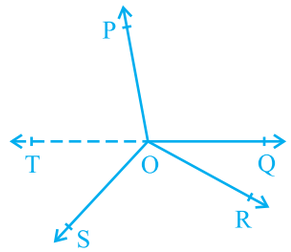


આકૃતિ 6.11

ઉકેલ : આકૃતિ 6.11 માં તમારે કોઈ એક કિરણ OP, OQ, OR અથવા OS ના પાછળના બિંદુ તરફ કિરણ દોરવું જરૂરી છે. ચાલો કિરણ OQ ને પાછળના બિંદુ T તરફ લંબાવીએ. તેથી TOQ રેખા છે. (જુઓ આકૃતિ 6.12.)

હવે કિરણ OP રેખા TOQ પર છે.

તેથી, $\angle TOP + \angle POQ = 180°$ (રૈખિક જોડની પૂર્વધારણા) (1)



આકૃતિ 6.12

તે જ રીતે કિરણ OS એ રેખા TOQ પર છે.

તેથી, $\angle TOS + \angle SOQ = 180°$ (2)

પણ $\angle SOQ = \angle SOR + \angle QOR$

તેથી, (2) પરથી

$\angle TOS + \angle SOR + \angle QOR = 180°$ બનશે. (3)

હવે (1) અને (3) નો સરવાળો કરતાં, આપણને નીચેનું પરિણામ મળશે.

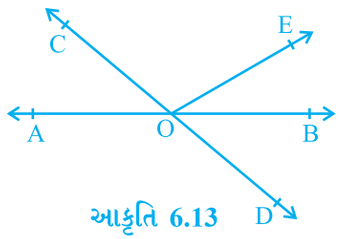
$\angle TOP + \angle POQ + \angle TOS + \angle SOR + \angle QOR = 360°$ (4)

પરંતુ $\angle TOP + \angle TOS = \angle POS$

તેથી, (4) પરથી $\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360°$ મળશે.

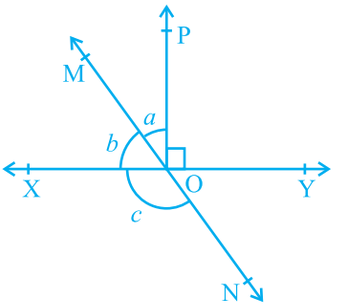
સ્વાધ્યાય 6.1

1. આકૃતિ 6.13માં રેખા AB અને CD, O માં છેદે છે. જો $\angle AOC + \angle BOE = 70°$ અને $\angle BOD = 40°$, તો $\angle BOE$ અને વિપરીત $\angle COE$ મેળવો.



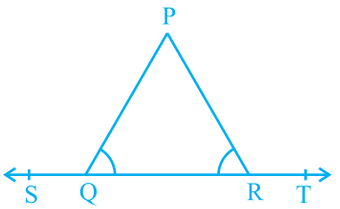
આકૃતિ 6.13

2. આકૃતિ 6.14 માં, રેખા XY અને MN, O માં છેદે છે. જો $\angle$ POY = 90° અને $a : b = 2 : 3$, તો c શોધો.



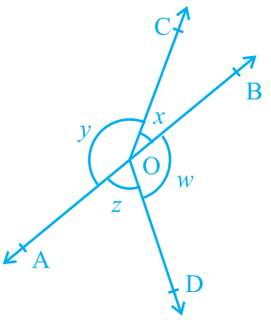
આકૃતિ 6.14

3. આકૃતિ 6.15 માં, $\angle$ PQR = $\angle$ PRQ, તો સાબિત કરો કે $\angle$ PQS = $\angle$ PRT.



આકૃતિ 6.15

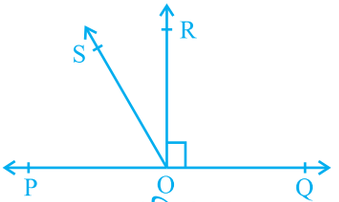
4. આકૃતિ 6.16 માં, જો $x + y = w + z$ હોય, તો સાબિત કરો કે AOB રેખા છે.



આકૃતિ 6.16

5. આકૃતિ 6.17 માં POQ રેખા છે. કિરણ OR રેખા PQ ને લંબ છે. કિરણ OP અને OR વચ્ચે અન્ય એક કિરણ OS આવેલ છે. સાબિત કરો કે,

$\angle ROS = \frac{1}{2} (\angle QOS - \angle POS)$.



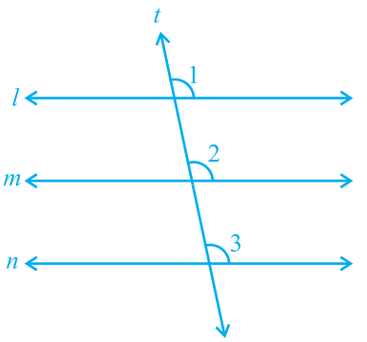
આકૃતિ 6.17

6. $\angle$ XYZ = 64° આપેલ છે અને XY ને બિંદુ P સુધી લંબાવેલ છે. આપેલ સૂચના પરથી આકૃતિ દોરો. જો કિરણ YQ, $\angle$ ZYP નો દ્વિભાજક હોય, તો $\angle$ XYQ અને વિપરીત $\angle$ QYP નું માપ શોધો.

6.5 એક જ રેખાને સમાંતર રેખાઓ

જો બે રેખાઓ એક જ રેખાને સમાંતર હોય તો શું એ પરસ્પર સમાંતર હશે ? ચાલો તેનું પરીક્ષણ કરીએ. આકૃતિ 6.18 જુઓ. તેમાં $m \parallel l$ છે અને $n \parallel l$ છે. ચાલો રેખા l, m અને n માટે એક છેદિકા t દોરો.

એ આપેલ છે કે $m \parallel l$ છે અને $n \parallel l$ છે.



આકૃતિ 6.18

આથી, $\angle 1 = \angle 2$ અને $\angle 1 = \angle 3$ (અનુકોણો)

આમ, $\angle 2 = \angle 3$ (શા માટે ?)

પરંતુ $\angle 2$ અને $\angle 3$ અનુકોણ છે અને સમાન છે.

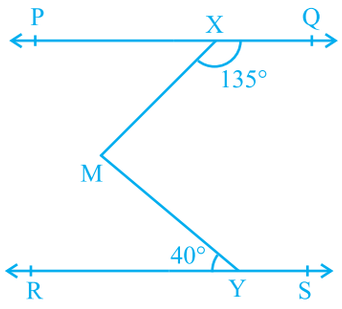
આથી તમે કહી શકો કે રેખા $m \parallel$ રેખા n

આ પરિણામને એક પ્રમેયના રૂપમાં નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય :

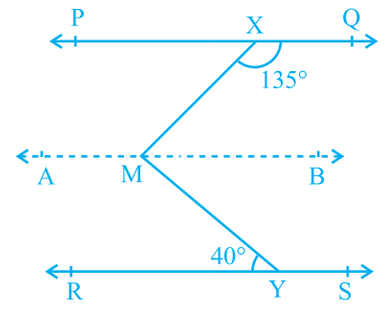
પ્રમેય 6.2 : *જે રેખાઓ એક જ રેખાને સમાંતર હોય તે પરસ્પર સમાંતર હોય છે.*

નોંધ : ઉપરના ગુણધર્મને બેથી વધુ રેખાઓ માટે પણ વ્યાપક બનાવી શકાય છે. ચાલો, હવે સમાંતર રેખાઓને સંબંધિત કેટલાક પ્રશ્નો ઉકેલીએ.

ઉદાહરણ 4 : આકૃતિ 6.19 માં જો PQ ∥ RS, $\angle$ MXQ = 135° અને $\angle$ MYR = 40°, છે તો $\angle$ XMY મેળવો.



આકૃતિ 6.19



આકૃતિ 6.20

ઉકેલ : આકૃતિ 6.20 માં બતાવ્યા મુજબ અહીં આપણે M માંથી પસાર થતી અને રેખા PQ ને સમાંતર એક રેખા AB દોરીએ. હવે, AB ∥ PQ અને PQ ∥ RS છે.

આથી, AB ∥ RS (કેમ ?)

હવે, $\angle$ QXM + $\angle$ XMB = 180° (AB ∥ PQ, છેદિકા XM ની એક જ બાજુના અંતઃકોણ)

પરંતુ $\angle$ QXM = 135°

આથી, 135° + $\angle$ XMB = 180°

આમ, $\angle$ XMB = 45° (1)

હવે, $\angle$ BMY = $\angle$ MYR (AB ∥ RS, યુગ્મકોણ)

આથી $\angle$ BMY = 40° (2)

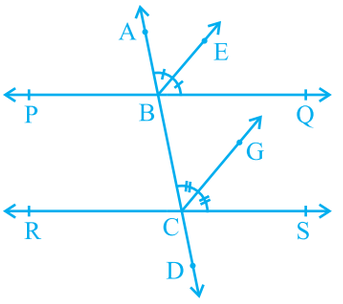
(1) અને (2) નો સરવાળો કરતાં,

$\angle$ XMB + $\angle$ BMY = 45° + 40° મળે.

આથી, $\angle$ XMY = 85°

ઉદાહરણ 5 : જો એક છેદિકા બે રેખાઓને એ રીતે છેદે કે અનુકોણની એક જોડના દ્વિભાજક પરસ્પર સમાંતર હોય તો સાબિત કરો કે બંને રેખાઓ પણ પરસ્પર સમાંતર હોય છે.

ઉકેલ : આકૃતિ 6.21 માં એક છેદિકા AD એ રેખાઓ PQ અને RS ને અનુક્રમે બિંદુઓ B અને C માં છેદે છે. કિરણ BE એ $\angle$ ABQનો દ્વિભાજક છે અને કિરણ CG એ $\angle$ BCS નો દ્વિભાજક છે તથા BE || CG છે.



આકૃતિ 6.21

આપણે સાબિત કરવું છે કે PQ || RS છે.

આપેલ છે કે કિરણ BE એ $\angle$ ABQ નો દ્વિભાજક છે.

આથી, $\angle ABE = \frac{1}{2} \angle ABQ$ (1)

આ જ પ્રમાણે કિરણ CG એ $\angle$ BCS નો દ્વિભાજક છે.

આથી, $\angle BCG = \frac{1}{2} \angle BCS$ (2)

પરંતુ BE || CG છે અને AD જ તેમની છેદિકા છે.

આથી, $\angle ABE = \angle BCG$ (અનુકોણ પૂર્વધારણા) (3)

(3) માં (1) અને (2) ની કિંમત મૂકતાં

આપણને આ પરિણામ પ્રાપ્ત થશે.

$$\frac{1}{2} \angle ABQ = \frac{1}{2} \angle BCS$$

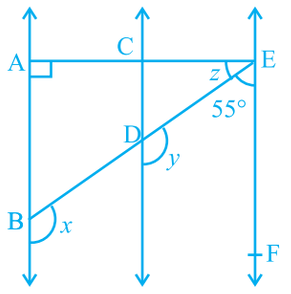
આથી, $\angle ABQ = \angle BCS$

પરંતુ આ છેદિકા AD દ્વારા રેખાઓ PQ અને RS સાથે બનતા અનુકોણ છે અને તે સમાન છે.

આથી, PQ || RS (અનુકોણની પૂર્વધારણાનું પ્રતિપ)

ઉદાહરણ 6 : આકૃતિ 6.22 માં AB || CD અને CD || EF અને EA $\perp$ AB છે.

જો $\angle$ BEF = 55° હોય, તો x, y અને z નાં મૂલ્ય શોધો.



આકૃતિ 6.22

ઉકેલ : $y + 55° = 180°$ (છેદિકા ED ની એક જ બાજુના અંતઃકોણ)

આથી, $y = 180° - 55° = 125°$

વળી $x = y$ (AB || CD, અનુકોણની જોડ)

માટે $x = 125°$

આથી હવે, AB || CD અને CD || EF છે તેથી AB || EF થાય.

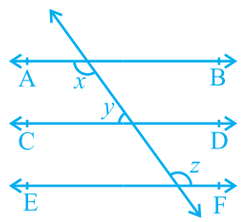
આથી, $\angle EAB + \angle FEA = 180°$ (છેદિકા EA ની એક જ તરફના અંતઃકોણ)

$\therefore 90° + z + 55° = 180°$

$\therefore z = 35°$

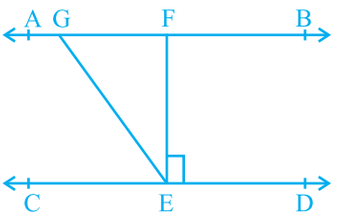
સ્વાધ્યાય 6.2

1. આકૃતિ 6.23 માં જો AB || CD, CD || EF અને $y : z = 3 : 7$ હોય, તો x નું મૂલ્ય શોધો.



આકૃતિ 6.23

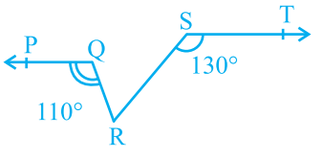
2. આકૃતિ 6.24 માં જો AB || CD, EF ⊥ CD અને ∠GED = 126° છે, તો ∠AGE, ∠GEF અને ∠FGE મેળવો.



આકૃતિ 6.24

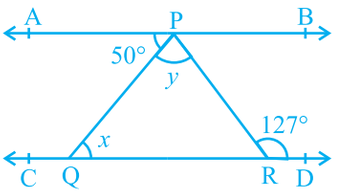
3. આકૃતિ 6.25માં જો PQ || ST, ∠PQR=110° અને ∠RST=130°, તો ∠QRS મેળવો.

[**સૂચન :** બિંદુ R માંથી પસાર થતી ST ને સમાંતર એક રેખા દોરો.]



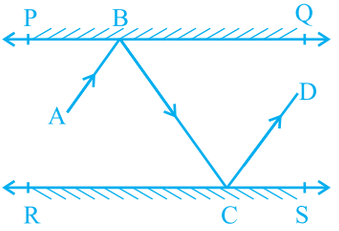
આકૃતિ 6.25

4. આકૃતિ 6.26માં જો AB || CD, ∠APQ = 50° અને ∠PRD = 127° છે તો x અને y મેળવો.



આકૃતિ 6.26

5. આકૃતિ 6.27 માં PQ અને RS બે અરીસા છે. તે બંને એકબીજાને સમાંતર રાખેલા છે. એક આપાતકિરણ AB અરીસા PQ ને B પર અથડાય છે અને પરાવર્તિત કિરણ માર્ગ BC પર ચાલીને અરીસા RS ને C પર અથડાય છે તથા ફરી કિરણ CD પર પરાવર્તિત થઈ જાય છે. સાબિત કરો કે AB || CD છે.



આકૃતિ 6.27

6.6 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. જો એક કિરણ એક રેખા પર આવેલ હોય તો તેમનાથી બનતા બંને આસન્નકોણનો સરવાળો 180° થાય છે અને તેનું પ્રતીપ આસન્નકોણોનો સરવાળો 180° હોય તો તેની સામાન્ય ન હોય તેવી બાજુઓ એક રેખા બનાવે છે. આ ગુણધર્મને રૈખિક જોડની પૂર્વધારણા કહે છે.

2. પરસ્પર છેદતી બે રેખાથી બનતા અભિકોણ સમાન હોય છે.

3. જે રેખાઓ આપેલી રેખાને સમાંતર હોય તે પરસ્પર સમાંતર હોય છે.