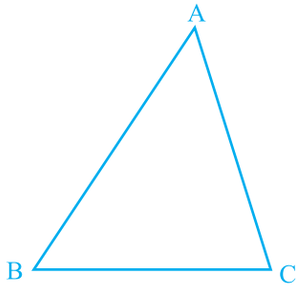
Z4C2R9

પ્રકરણ 7

ત્રિકોણ

7.1 પ્રાસ્તાવિક

તમે અગાઉનાં ધોરણોમાં ત્રિકોણ (Triangle) અને તેમના વિવિધ ગુણધર્મો વિશે અભ્યાસ કર્યો છે. તમે જાણો છો કે ત્રણ પરસ્પર છેદતી રેખાઓથી બનતી બંધ આકૃતિને ત્રિકોણ કહે છે ('Tri' 'ત્રિ' એટલે ત્રણ). ત્રિકોણને ત્રણ બાજુઓ, ત્રણ ખૂણાઓ અને ત્રણ શિરોબિંદુઓ હોય છે. ઉદાહરણ તરીકે ત્રિકોણ ABC ને ΔABC તરીકે દર્શાવી શકાય (જુઓ આકૃતિ 7.1). ΔABC ની ત્રણ બાજુઓ AB, BC, CA છે અને તેનાં ત્રણ શિરોબિંદુઓ A, B, C છે. તેના ત્રણ ખૂણા $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ છે. આ પ્રકરણમાં તમે ત્રિકોણની એકરૂપતા, એકરૂપતાની શરતો, ત્રિકોણના કેટલાક વધુ ગુણધર્મોનો વિસ્તૃત અભ્યાસ કરશો. અગાઉના ધોરણોમાં આમાંના મોટા ભાગના ગુણધર્મો તમે ચકાસ્યા છે. હવે આપણે તેમાંના કેટલાક ગુણધર્મોને સાબિત કરીશું.



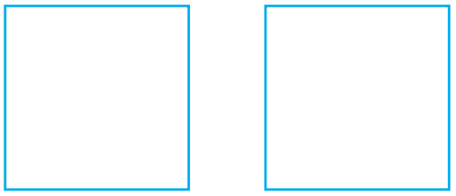
આકૃતિ 7.1

7.2 ત્રિકોણની એકરૂપતા

તમે એવું અવશ્ય જોયું હશે કે તમારા એક જ માપના બે ફોટાની નકલો સમાન છે. તે જ પ્રમાણે સમાન માપની બે બંગડીઓ, એક જ બૅન્ક દ્વારા આપવામાં આવતા ATM કાર્ડ પણ સમાન આકારના હોય છે. તમે યાદ કરી શકો કે એક જ વર્ષમાં બનેલા એક રૂપિયાના સિક્કાઓને એકબીજા પર ગોઠવતાં તે એકબીજા ઉપર બરાબર આવી જાય છે.

તમને યાદ છે કે આવી આકૃતિઓને શું કહેવાય? ખરેખર, આવી આકૃતિઓને એકરૂપ આકૃતિઓ કહેવાય.(એકરૂપ અર્થાત્ બધી રીતે સમાન અથવા જેમનાં માપ અને આકાર બંને સમાન હોય એવી આકૃતિઓ).

હવે, સમાન ત્રિજ્યાવાળાં બે વર્તુળ કાગળમાંથી કાપો અને એકબીજા પર ગોઠવો. તમે શું અવલોકન કર્યું? તેઓ એકબીજાની ઉપર સંપૂર્ણપણે બંધ બેસી જાય છે. આપણે તેમને એકરૂપ વર્તુળો કહીશું. સમાન બાજુઓ ધરાવતા એક ચોરસ પર બીજો ચોરસ મૂકી(જુઓ આકૃતિ 7.2) અથવા સમાન બાજુઓવાળા બે સમબાજુ ત્રિકોણને એકબીજા પર મૂકીને તમે જોઈ શકો છો કે, આ બંને ચોરસ તથા બંને સમબાજુ ત્રિકોણ એકબીજા સાથે એકરૂપ થશે. આ પ્રવૃત્તિનું પુનરાવર્તન કરો.



આકૃતિ 7.2

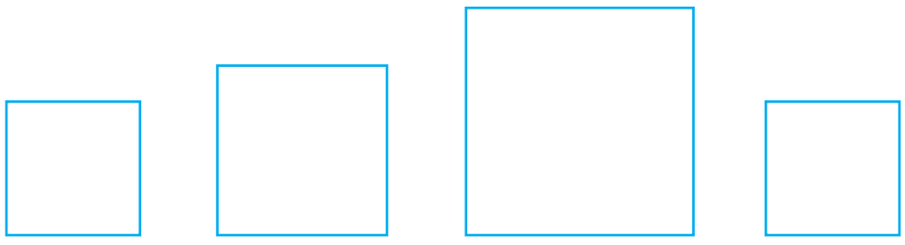
તમને થશે કે આપણે શા માટે એકરૂપતાનો અભ્યાસ કરીએ છીએ? તમે બધાએ ફ્રિજમાં રહેલ બરફની ટ્રે જોઈ હશે. તમે જોઈ શકો છો કે બરફ બનાવતાં ખાનાઓ એકરૂપ છે. આ ટ્રેમાં બરફ જમાવવા માટેનાં બીબાંઓની છાપ પણ એકરૂપ હશે.(બધા જ કદાચ લંબચોરસ વર્તુળ કે ત્રિકોણાકાર હશે.) આથી જ્યારે પણ સમાન વસ્તુઓનું નિર્માણ કરવાનું હોય ત્યારે તેમનાં બીબાં બનાવતી વખતે એકરૂપતાની સંકલ્પના ઉપયોગમાં લેવાય છે.

ક્યારેક તમારી પેનમાં નવી રીફિલ નાંખવામાં તમને મુશ્કેલી થતી હોય છે. આવું થવાનું કારણ એ છે કે નવી રીફિલ એ મૂળ રીફિલના કદ અને આકારની ન હોય. સ્પષ્ટપણે, જો બે રીફિલ સમાન કે એકરૂપ હોય, તો તે બંધબેસતી આવે જ.

આમ તમે રોજબરોજના જીવનમાં એકરૂપ વસ્તુઓનો ઉપયોગ કરતા હોય તેવાં અનેક ઉદાહરણો છે.

તમે એકરૂપ આકૃતિઓનાં વધુ ઉદાહરણો વિચારી શકો ?

હવે નીચેનામાંથી કઈ આકૃતિઓ 7.3 (i) માં આપેલ ચોરસને એકરૂપ નથી.

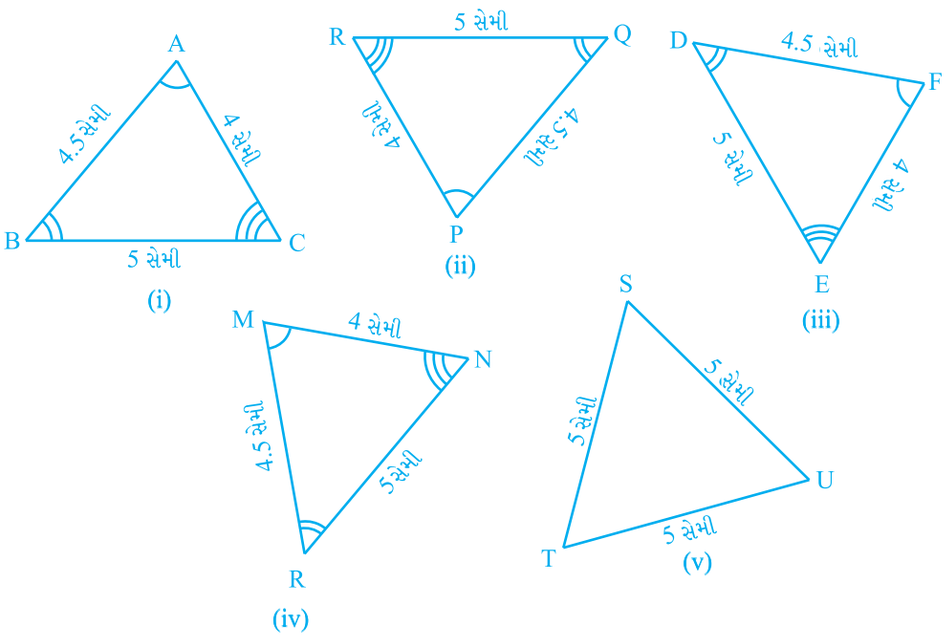


(i) (ii) (iii) (iv)

આકૃતિ 7.3

આકૃતિ 7.3 (ii) અને (iii) માં દર્શાવેલ મોટા ચોરસ સ્પષ્ટપણે આકૃતિ 7.3 (i) ને એકરૂપ નથી. પરંતુ આકૃતિ 7.3 (iv) વાળો ચોરસ એ આકૃતિ 7.3 (i) વાળા ચોરસને એકરૂપ છે. ચાલો આપણે બે ત્રિકોણની એકરૂપતાની ચર્ચા કરીએ. તમે જાણો જ છો કે જો એક ત્રિકોણની બાજુઓ અને ખૂણાઓ બીજા ત્રિકોણની અનુરૂપ બાજુઓ અને ખૂણાઓને સમાન હોય, તો બે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય.

હવે, આકૃતિ 7.4 માં આપેલ ત્રિકોણ પૈકી કયા ત્રિકોણ એ ΔABC ને એકરૂપ છે ?



આકૃતિ 7.4

આકૃતિ 7.4 માં(ii) થી (v) સુધીના દરેક ત્રિકોણ કાપો અને તેને પરિભ્રમણ આપી Δ ABC પર બંધબેસતા કરવા પ્રયત્ન કરો. તમે જોઈ શકશો કે આકૃતિ 7.4 ના ત્રિકોણો (ii), (iii) અને (iv) એ Δ ABC ને એકરૂપ છે, પરંતુ આકૃતિ 7.4 (v) માં રહેલ Δ TSU એ Δ ABC ને એકરૂપ નથી.

જો Δ PQR એ Δ ABC ને એકરૂપ હોય, તો આપણે Δ PQR ≅ Δ ABC લખીએ છીએ.

જ્યારે Δ PQR ≅ Δ ABC હોય ત્યારે Δ PQR ની બાજુઓ એ Δ ABC ની અનુરૂપ બાજુઓને સમાન રીતે બંધ બેસે અને ખૂણાઓ માટે પણ આમ જ બને.

આ પ્રમાણે PQ એ AB પર, QR એ BC પર અને RP એ CA પર બંધ બેસી જાય. ∠ P એ ∠ A પર, ∠ Q એ ∠ B પર અને ∠ R એ ∠ C પર બંધબેસતા આવી જાય. અહીં ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ વચ્ચે એક-એક સંગતતા છે. આ પ્રમાણે P ને સંગત A, Q ને સંગત B, R ને સંગત C લઈ શકાય અને આ પ્રમાણે તેને P ↔ A, Q ↔ B, R ↔ C લખી શકાય.

અહીં આપણે નોંધીએ કે, આ સંગતતા અનુસાર Δ PQR ≅ Δ ABC થાય, પરંતુ ΔQRP ≅ Δ ABC સત્ય નથી.

આ જ પ્રમાણે આકૃતિ7.4 (iii) માટે,

$$FD \leftrightarrow AB,\ DE \leftrightarrow BC,\ EF \leftrightarrow CA$$

અને $F \leftrightarrow A,\ D \leftrightarrow B,\ E \leftrightarrow C$

માટે, Δ FDE ≅ Δ ABC, પરંતુ Δ DEF ≅ Δ ABC પ્રમાણે લખવું સત્ય નથી.

આકૃતિ 7.4 (iv) નો ત્રિકોણ અને Δ ABC વચ્ચેની સંગતતા જણાવો.

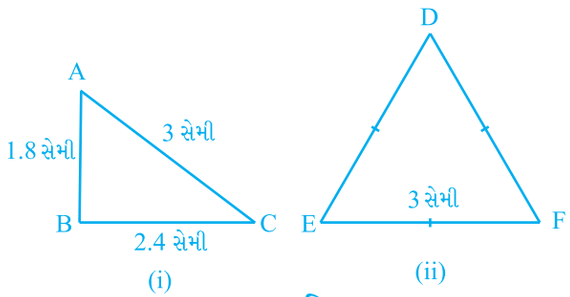
આથી, ત્રિકોણ વચ્ચેની સંગતતાને સંકેતમાં દર્શાવવા માટે ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ વચ્ચેની સંગતતા યોગ્ય રીતે દર્શાવવી જરૂરી છે.

જુઓ કે એકરૂપ ત્રિકોણનાં અનુરૂપ અંગો સમાન હોય છે. આને ટૂંકમાં '**CPCT**' (*corresponding parts of congruent triangles*) લખાય છે. અર્થાત્ એકરૂપ ત્રિકોણનાં અનુરૂપ અંગો.

7.3 ત્રિકોણની એકરૂપતા માટેની શરતો :

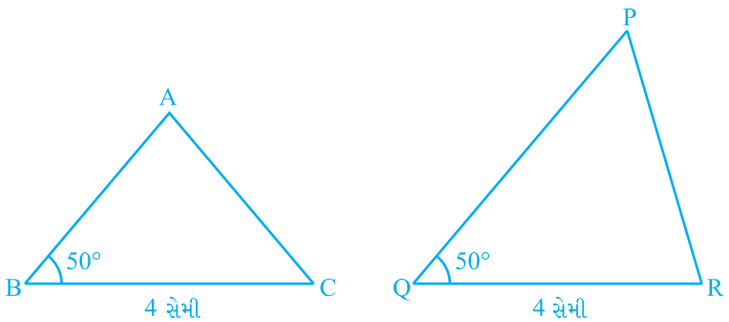
અગાઉના ધોરણમાં તમે ત્રિકોણની એકરૂપતાની ચાર શરતો શીખ્યા છો. ચાલો તેને પુનઃ યાદ કરીએ.

એક બાજુ 3 સેમી હોય તેવા બે ત્રિકોણ દોરો. શું આ ત્રિકોણ એકરૂપ છે ? અવલોકન કરો કે તે એકરૂપ નથી (જુઓ આકૃતિ 7.5).



આકૃતિ 7.5

હવે એવા બે ત્રિકોણ દોરો કે જેની એક બાજુ 4 સેમી અને એક ખૂણો 50° હોય. શું તે બંને એકરૂપ થશે ? (જુઓ આકૃતિ 7.6).



આકૃતિ 7.6

જુઓ કે ત્રિકોણ એકરૂપ નથી.

ત્રિકોણની કેટલીક વધુ જોડ સાથે આ પ્રવૃત્તિનું પુનરાવર્તન કરો.

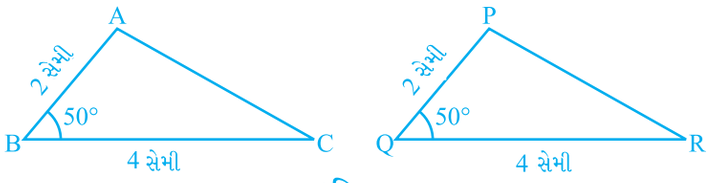
આમ, સમાન બાજુઓની એક જોડ અથવા સમાન બાજુઓની એક જોડ અને સમાન ખૂણાઓની એક જોડ એકરૂપ ત્રિકોણ બને તે માટે પર્યાપ્ત નથી.

સમાન ખૂણાની બાજુઓની બીજી જોડ લઈએ તો આ બીજી જોડ સમાન થશે ?

આકૃતિ 7.7 (પાના નં. 79) માં, BC = QR, $\angle B = \angle Q$ અને AB = PQ પણ છે. હવે, Δ ABC અને Δ PQR ની એકરૂપતા અંગે તમે શું કહેશો ?

અગાઉના ધોરણ પરથી યાદ કરો કે, આવા કિસ્સામાં બે ત્રિકોણ એકરૂપ થાય. આકૃતિ 7.7 પરથી Δ ABC અને Δ PQR નું પરીક્ષણ કરો.

ત્રિકોણની બીજી જોડ માટે આ પ્રવૃત્તિનું પુનરાવર્તન કરો. તમે જોયું કે ત્રિકોણની એકરૂપતા માટે બે બાજુઓ તથા અંતર્ગત ખૂણા સમાન હોય તે પૂરતું છે ? હા, તે પૂરતું છે.



આકૃતિ 7.7

ત્રિકોણની એકરૂપતાની આ પ્રથમ શરત છે.

પૂર્વધારણા 7.1 (*બાખૂબા એકરૂપતાની શરત*) **:** *જો બે ત્રિકોણ માટે એક ત્રિકોણની બે બાજુઓ અને અંતર્ગત ખૂણો બીજા ત્રિકોણની અનુરૂપ બાજુઓ અને અંતર્ગત ખૂણાને સમાન હોય, તો તે બે ત્રિકોણો એકરૂપ થાય.*

અગાઉનાં જાણીતાં પરિણામો પરથી આ પરિણામ સાબિત ન કરી શકાય અને માટે તે સત્ય છે એમ પૂર્વધારણા તરીકે સ્વીકારવામાં આવેલું છે. (જુઓ પરિશિષ્ટ 1).

ચાલો આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો લઈએ.

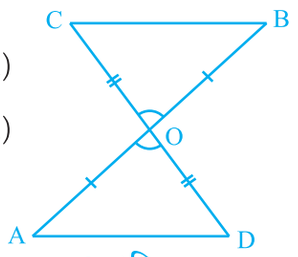
ઉદાહરણ 1 : આકૃતિ 7.8 માં OA = OB અને OD = OC તો દર્શાવો કે,

(i) Δ AOD $\cong$ Δ BOC અને (ii) AD || BC.

ઉકેલ : (i) Δ AOD અને Δ BOC માટે તમે જોઈ શકો છો કે,

OA = OB (પક્ષ)

OD = OC (પક્ષ)



આકૃતિ 7.8

વળી $\angle$ AOD અને $\angle$ BOC એ અભિકોણની જોડ બનાવે છે. આથી

$\angle$ AOD = $\angle$ BOC.

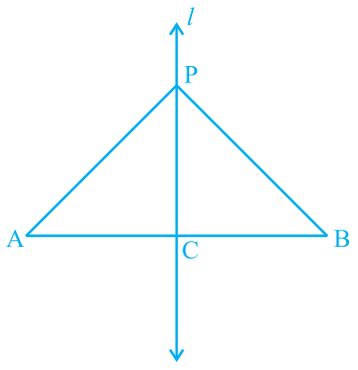
આમ, Δ AOD $\cong$ Δ BOC (એકરૂપતાની બાખૂબા શરત પરથી)

(ii) એકરૂપ ત્રિકોણો AOD અને BOC માં બીજાં અનુરૂપ અંગો પણ સમાન હોય.

આથી, $\angle$ OAD = $\angle$ OBC અને આ બંને ખૂણા રેખાખંડ AD અને BC ની છેદિકા AB ને સંગત યુગ્મકોણની જોડ રચે છે.

માટે, AD || BC.

ઉદાહરણ 2 : l એ રેખાખંડ AB નો લંબદ્વિભાજક છે. જો બિંદુ P રેખા l પર હોય, તો બતાવો કે P એ A અને B થી સમાન અંતરે આવેલું છે.



આકૃતિ 7.9

ઉકેલ : રેખા $l \perp$ AB અને તે બિંદુ C માંથી પસાર થાય છે અને C એ AB નું મધ્યબિંદુ છે. (જુઓ આકૃતિ 7.9).

Δ PCA અને Δ PCB ના સંદર્ભમાં તમારે PA = PB બતાવવું પડે.

આપણી પાસે AC = BC છે. (C એ AB નું મધ્યબિંદુ છે.)

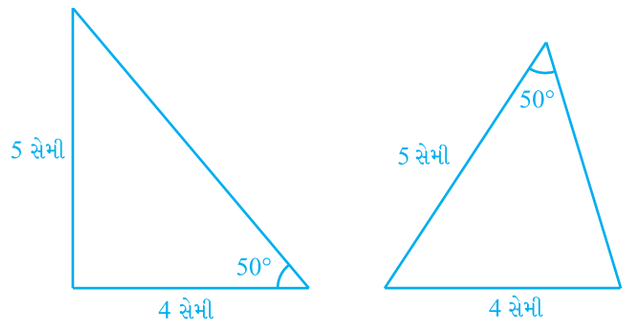
$\angle PCA = \angle PCB = 90°$ (પક્ષ)

$PC = PC$ (સામાન્ય બાજુ)

આથી, $\Delta PCA \cong \Delta PCB$ (બાખૂબા શરત)

$\therefore PA = PB$; કારણ કે એકરૂપ ત્રિકોણની અનુરૂપ બાજુઓ સમાન છે.

હવે આપણે જેની બાજુઓ 4 સેમી અને 5 સેમી તથા ખૂણાઓ પૈકીનો એક ખૂણો 50° હોય અને આ ખૂણો સમાન બાજુઓની વચ્ચે (અંતર્ગત ખૂણો) ન હોય એવા બે ત્રિકોણ રચીએ (જુઓ આકૃતિ 7.10). આ બંને ત્રિકોણ એકરૂપ થશે ?



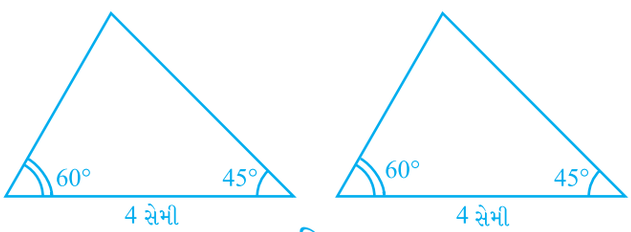
આકૃતિ 7.10

જુઓ કે આ બંને ત્રિકોણ એકરૂપ નથી.

ત્રિકોણની વધુ જોડ સાથે આ પ્રવૃત્તિનું પુનરાવર્તન કરો. તમે જોઈ શકશો કે ત્રિકોણના એકરૂપ થવા માટે સમાન ખૂણાઓ સમાન બાજુઓની બે જોડની અંતર્ગત હોવા ખૂબ જ જરૂરી છે.

આમ, બાખૂબા એકરૂપતાની શરત છે, પરંતુ ખૂબાબા કે બાબાખૂ નહિ.

ફરીથી, જેના ખૂણાઓ 60° અને 45° હોય તેવા બે ત્રિકોણ રચવા પ્રયત્ન કરો અને આ બંને ખૂણાની વચ્ચેની (અંતર્ગત) બાજુની લંબાઈ 4 સેમી છે. (જુઓ આકૃતિ 7.11).



આકૃતિ 7.11

આ બંને ત્રિકોણ કાપો અને એકબીજા પર ગોઠવો. તમે શું નિહાળો છો ? જુઓ કે એક ત્રિકોણ, બીજા ત્રિકોણ પર સંપૂર્ણપણે બંધ બેસી જાય છે. આમ, આ બંને ત્રિકોણ એકરૂપ થાય. આવા વધુ ત્રિકોણની જોડ સાથે આ પ્રવૃત્તિનું પુનરાવર્તન કરો.

તમે જોઈ શકો છો કે બે સમાન ખૂણાઓ અને અંતર્ગત બાજુ સમાન હોય એ શરત ત્રિકોણની એકરૂપતા માટે પર્યાપ્ત છે.

આ પરિણામ એકરૂપતાની શરત **ખૂણો-બાજુ-ખૂણો** થાય અને તેને **ખૂબાખૂ** શરત તરીકે લખી શકાય. અગાઉના ધોરણમાં તમે આ ગુણધર્મ ચકાસેલ છે. પરંતુ હવે આપણે તેને દર્શાવીશું અને પરિણામ સાબિત કરીશું.

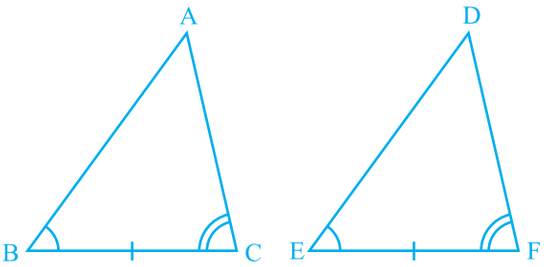
આ પરિણામ આપણે સાબિત કરી શકીશું. આથી તેને પ્રમેય કહેવાય. તે સાબિત કરવા માટે આપણે એકરૂપતાની બાખૂબા પૂર્વધારણાનો ઉપયોગ કરીશું.

પ્રમેય 7.1 (ખૂબાખૂ એકરૂપતાની શરત) : *જો એક ત્રિકોણના બે ખૂણા અને અંતર્ગત બાજુ અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણના અનુરૂપ ખૂણા અને અંતર્ગત બાજુને સમાન હોય, તો આ બે ત્રિકોણ એકરૂપ છે.*

સાબિતી : આપણને બે ત્રિકોણ ABC અને DEF આપેલ છે. તેમના માટે

$\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ અને $BC = EF$

આપણે $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ સાબિત કરવાનું છે.



આકૃતિ 7.12

આ બે ત્રિકોણની એકરૂપતા સાબિત કરવા માટે ત્રણ વિકલ્પો ઉદ્ભવે છે :

વિકલ્પ (i) : ધારો કે $AB = DE$ (જુઓ આકૃતિ 7.12).

હવે તમને શું જોવા મળે છે ? તમે કદાચ જોશો કે,

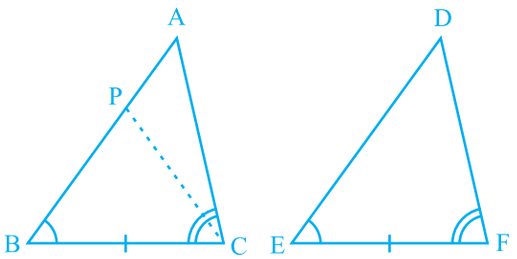
$AB = DE$ (ધારણા કરેલ છે)

$\angle B = \angle E$ (પક્ષ)

$BC = EF$ (પક્ષ)

માટે, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (બાખૂબા પૂર્વધારણા પરથી)

વિકલ્પ (ii) : ધારો કે $AB > DE$ છે. આથી આપણે AB પર P બિંદુ એવું લઈએ જેથી $PB = DE$ થાય. હવે ΔPBC તથા ΔDEF નો વિચાર કરીએ (જુઓ આકૃતિ 7.13).



આકૃતિ 7.13

હવે ΔPBC તથા ΔDEF માટે જુઓ,

$PB = DE$ (આપણે મેળવેલ છે)

$\angle B = \angle E$ (પક્ષ)

$BC = EF$ (પક્ષ)

આથી આપણે એકરૂપતાની બાખૂબા પૂર્વધારણા પરથી કહી શકીએ કે, $\Delta PBC \cong \Delta DEF$. ત્રિકોણ એકરૂપ હોવાથી તેના અનુરૂપ અંગો સમાન થશે.

આથી, $\angle PCB = \angle DFE$

પરંતુ, આપણને આપેલ છે કે, $\angle ACB = \angle DFE$

આથી, $\angle ACB = \angle PCB$

શું આ શક્ય છે ?

આ માત્ર ત્યારે જ શક્ય છે જ્યારે P એ A પર આવેલ હોય.

અથવા, BA = ED

આથી, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (બાખૂબા પૂર્વધારણા)

વિકલ્પ (iii) : જો AB < DE તો આપણે DE પર M બિંદુ એવું લઈએ કે ME = AB અને વિકલ્પ (ii)માં દર્શાવેલ દલીલોનું પુનરાવર્તન કરતાં, આપણે તારણ પર આવી શકીએ કે, AB = DE અને આથી, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

હવે ધારો કે બે ત્રિકોણની સંગતતા માટે ખૂણાની બે જોડ અને બાજુઓની એક જોડ સમાન હોય પરંતુ આ સમાન બાજુઓ એ સમાન ખૂણાઓની બે જોડની અંતર્ગત ન હોય તો શું આ બંને ત્રિકોણ એકરૂપ હોય ? તમે જોઈ શકશો કે તે બંને એકરૂપ છે. તમે તેનું કારણ શોધી શકો, શા માટે ?

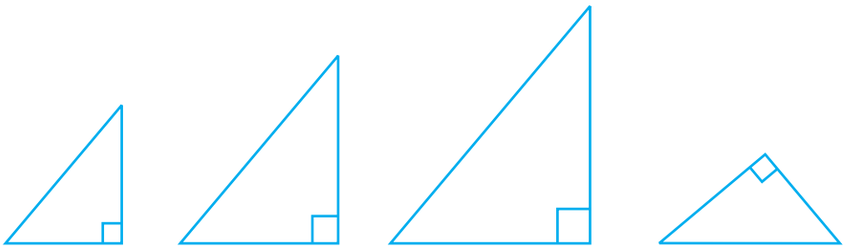
તમે જાણો છો કે ત્રિકોણના ત્રણ ખૂણાનાં માપનો સરવાળો 180° થાય. આથી જો ખૂણાની બે જોડ સમાન હોય, તો ત્રીજી જોડ પણ સમાન જ હોય. (180°– બે સમાન ખૂણાના માપનો સરવાળો).

આથી, જો ખૂણાની બે જોડ અને અનુરૂપ બાજુઓની એક જોડ સમાન હોય, તો તે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય. આને આપણે **ખૂખૂબા** એકરૂપતાની શરત કહી શકીએ.

હવે ચાલો નીચે દર્શાવેલ પ્રવૃત્તિઓ કરીએ :

જેના ખૂણા 40°, 50° અને 90° માપવાળા હોય તેવા ત્રિકોણ દોરો. આવા કેટલા ત્રિકોણ દોરી શકાય ?

હકીકતમાં તો જુદી જુદી લંબાઈની બાજુઓવાળા તમે ઘણાબધા ત્રિકોણ દોરી શકો. (જુઓ આકૃતિ 7.14.)



આકૃતિ 7.14

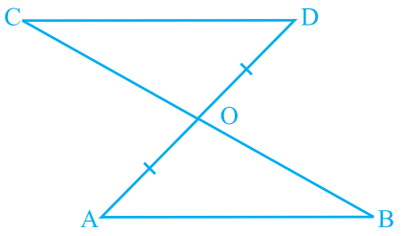
જુઓ, આ ત્રિકોણ એકબીજાને એકરૂપ હોય અથવા ન પણ હોય.

આમ, ત્રિકોણની એકરૂપતા માટે માત્ર ત્રણ ખૂણાઓ સમાન હોય તે પૂરતું નથી. માટે ત્રિકોણની એકરૂપતા માટે ત્રણ સમાન અંગો પૈકી એક અંગ બાજુ હોવી જ જોઈએ.

ચાલો કેટલાંક વધુ ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 3 : રેખાખંડ AB એ બીજા રેખાખંડ CD ને સમાંતર છે. O એ AD નું મધ્યબિંદુ છે.(જુઓ આકૃતિ 7.15) સાબિત કરો કે,

(i) $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ (ii) O એ BC નું પણ મધ્યબિંદુ થાય.



આકૃતિ 7.15

ઉકેલ : (i) Δ AOB અને Δ DOC માટે,

$\angle ABO = \angle DCO$

(AB || CD ની છેદિકા BC થી બનતા યુગ્મકોણો)

$\angle AOB = \angle DOC$ (અભિકોણો)

OA = OD (પક્ષ)

આથી, $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ (ખૂખૂબા શરત)

(ii) OB = OC (CPCT, એકરૂપ ત્રિકોણની અનુરૂપ બાજુઓ)

આથી, O એ BC નું પણ મધ્યબિંદુ છે.

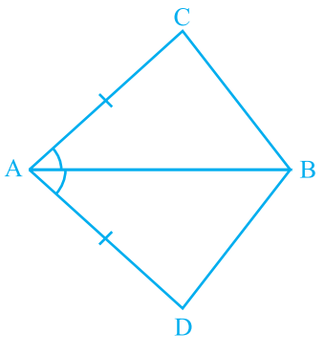
સ્વાધ્યાય 7.1

1. ચતુષ્કોણ ACBD માં,

AC = AD અને AB એ $\angle$ A નો દ્વિભાજક છે. (જુઓ આકૃતિ 7.16).

સાબિત કરો કે Δ ABC $\cong \Delta$ ABD,

BC અને BD વિશે તમે શું કહી શકો ?



આકૃતિ 7.16

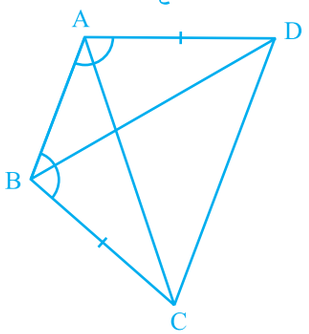
2. જેમાં AD = BC અને $\angle$ DAB = $\angle$ CBA હોય તેવો ચતુષ્કોણ ABCD છે.

(જુઓ આકૃતિ 7.17). સાબિત કરો કે,

(i) Δ ABD $\cong \Delta$ BAC

(ii) BD = AC

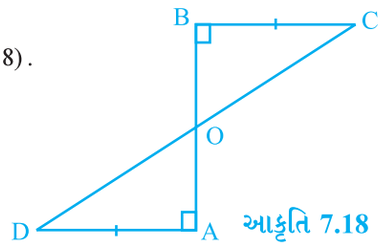
(iii) $\angle$ ABD = $\angle$ BAC.



આકૃતિ 7.17

3. AD અને BC એ રેખાખંડ AB પરના સમાન લંબ છે. (જુઓ આકૃતિ 7.18).

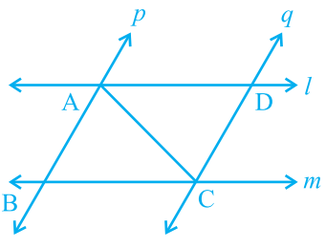
સાબિત કરો કે CD એ AB ને દુભાગે છે.



આકૃતિ 7.18

4. l અને m બે સમાંતર રેખાઓ છે. બીજી બે સમાંતર રેખાઓની જોડ p અને q ની રેખાઓ તેમને છેદે છે. (જુઓ આકૃતિ 7.19).

સાબિત કરો કે $\Delta ABC \cong \Delta CDA$.

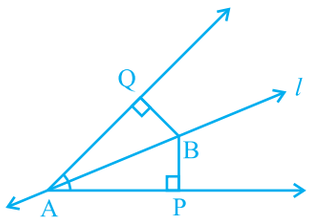


આકૃતિ 7.19

5. રેખા l એ $\angle A$ નો દ્વિભાજક છે અને B એ રેખા l પરનું કોઈ બિંદુ છે. BP અને BQ એ B માંથી $\angle A$ ની બાજુઓ પરના લંબ છે. (જુઓ આકૃતિ 7.20). સાબિત કરો કે,

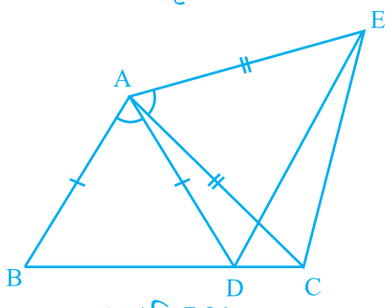
(i) $\Delta APB \cong \Delta AQB$

(ii) BP = BQ અથવા B એ $\angle A$ ની બાજુઓથી સમાન અંતરે આવેલ છે.



આકૃતિ 7.20

6. આકૃતિ 7.21 માં AC = AE, AB = AD અને $\angle BAD = \angle EAC$ તો સાબિત કરો કે, BC = DE.



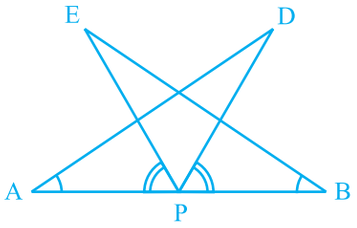
આકૃતિ 7.21

7. AB એક રેખાખંડ છે અને P તેનું મધ્યબિંદુ છે. $\angle BAD = \angle ABE$ અને $\angle EPA = \angle DPB$ થાય તેવાં બિંદુઓ D તથા E રેખા AB ની એક બાજુએ આવેલ છે. (જુઓ આકૃતિ 7.22).

સાબિત કરો કે,

(i) $\Delta DAP \cong \Delta EBP$

(ii) AD = BE



આકૃતિ 7.22

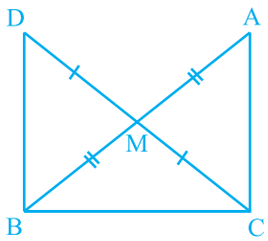
8. કાટકોણ ત્રિકોણ ABC માં $\angle C$ કાટખૂણો છે. M એ કર્ણ AB નું મધ્યબિંદુ છે. DM = CM થાય તે રીતે C ને M સાથે જોડી D સુધી લંબાવો. બિંદુઓ D અને B જોડો. (જુઓ આકૃતિ 7.23). સાબિત કરો કે,

(i) $\Delta AMC \cong \Delta BMD$

(ii) $\angle DBC$ કાટકોણ છે.

(iii) $\Delta DBC \cong \Delta ACB$

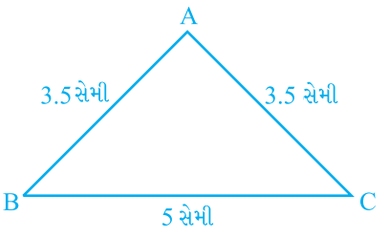
(iv) $CM = \frac{1}{2} AB$



આકૃતિ 7.23

7.4 ત્રિકોણના કેટલાક ગુણધર્મો

ઉપરના વિભાગમાં તમે ત્રિકોણની એકરૂપતાની બે શરતોનો અભ્યાસ કર્યો. હવે જેની બે બાજુઓ સમાન હોય તેવા ત્રિકોણના કેટલાક ગુણધર્મોનો અભ્યાસ કરવા માટે આપણે આ પરિણામોનો ઉપયોગ કરીએ.



આકૃતિ 7.24

નીચે દર્શાવેલ પ્રવૃત્તિ કરો :

જેની બે બાજુઓ સમાન હોય તેવા ત્રિકોણની રચના કરો. ધારો કે સમાન લંબાઈ 3.5 સેમી છે અને ત્રીજી બાજુ 5 સેમી છે. (જુઓ આકૃતિ 7.24.) આવી રચનાઓ તમે અગાઉના ધોરણમાં કરી છે. આવા ત્રિકોણને શું કહેવાય તે તમને યાદ છે? જે ત્રિકોણની બે બાજુઓ સમાન હોય તેને ***સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ*** *(Isosceles triangle)* કહે છે.

આકૃતિ 7.24 માં AB = AC છે. આથી Δ ABC સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે.

હવે, ∠ B અને ∠ C માપો. તમે શું અવલોકન કર્યું ?

જુદા જુદા માપવાળી બાજુઓ વાળા બીજા સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ લઈ આ પ્રવૃત્તિનું પુનરાવર્તન કરો.

તમે જોશો કે, આવા દરેક ત્રિકોણમાં સમાન બાજુઓની સામેના ખૂણા સમાન છે.

આ ખૂબ જ અગત્યનું અને કોઈ પણ સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ માટે ખરેખર સત્ય હોય તેવું પરિણામ છે. તેને નીચે પ્રમાણે સાબિત કરી શકાય :

પ્રમેય 7.2 : *સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણની બે સમાન બાજુઓની સામેના ખૂણાઓ સમાન હોય.*

આ પરિણામ અનેક રીતે સાબિત કરી શકાય. એમાંની એક સાબિતી અહીં આપેલ છે.

સાબિતી : આપેલ સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ ABC માં AB = AC છે અને આપણે ∠ B = ∠ C સાબિત કરવાનું છે.

∠ A નો દ્વિભાજક દોરો. ધારો કે તે BCને D બિંદુમાં છેદે છે. (જુઓ આકૃતિ 7.25.)

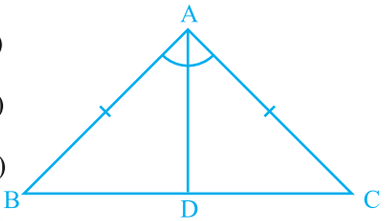
Δ BAD અને Δ CAD માં,

AB = AC (પક્ષ)

∠ BAD = ∠ CAD (રચના દ્વારા)

AD = AD (સામાન્ય બાજુ)

આથી, Δ BAD ≅ Δ CAD (બાખૂબા શરત પ્રમાણે)



આકૃતિ 7.25

આથી, એકરૂપ ત્રિકોણના અનુરૂપ ખૂણાઓ હોવાથી, ∠ ABD = ∠ ACD,

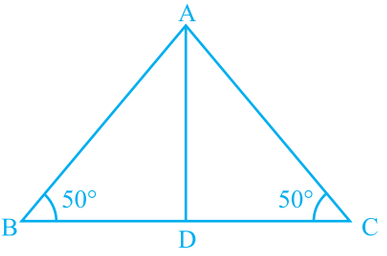
$\therefore$ ∠ B = ∠ C

શું આનું પ્રતીપ સાચું છે ? તે આ પ્રમાણે છે.

જો કોઈ ત્રિકોણના બે ખૂણાઓ સમાન હોય તો શું આપણે નિર્ણય કરી શકીએ કે તે ખૂણાઓની સામેની બાજુઓ પણ સમાન છે ?

નીચે દર્શાવેલ પ્રવૃત્તિ કરો :

કોઈ પણ લંબાઈની બાજુ BC ધરાવતા તથા $\angle B = \angle C = 50°$ હોય તેવા ΔABC ની રચના કરો. $\angle A$ નો BC ને D માં છેદતો દ્વિભાજક રચો. (જુઓ આકૃતિ 7.26.)



આકૃતિ 7.26

આ ત્રિકોણને કાગળના ટુકડા પરથી કાપો અને AD થી એવી રીતે વાળો કે જેથી શિરોબિંદુ C, શિરોબિંદુ B પર આવે.

તમે બાજુઓ AC અને AB માટે શું કહેશો ?

જુઓ કે AC અને AB સંપૂર્ણપણે એકબીજા પર બંધ બેસે છે.

આથી, $AC = AB$

વધુ કેટલાક ત્રિકોણ વડે આ પ્રવૃત્તિનું પુનરાવર્તન કરો.

દરેક વખતે તમે જોઈ શકશો કે સમાન ખૂણાની સામેની બાજુઓ સમાન છે.

આથી, આપણે નીચે પ્રમાણે કહી શકીએ.

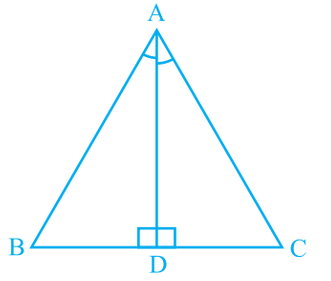
પ્રમેય 7.3 : *ત્રિકોણના સમાન ખૂણાની સામેની બાજુઓ સમાન હોય છે.*

આ પ્રમેય 7.2 નો પ્રતીપ છે.

આ પ્રમેયને તમે ખૂબાખૂ એકરૂપતાની શરત દ્વારા સાબિત કરી શકો.

ચાલો આ પરિણામોનો ઉપયોગ કરવા માટે આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો લઈએ.

ઉદાહરણ 4 : ΔABC માં, $\angle A$ નો દ્વિભાજક AD એ BC ને લંબ છે. (જુઓ આકૃતિ 7.27.) સાબિત કરો કે $AB = AC$ અને ΔABC સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે.



આકૃતિ 7.27

ઉકેલ : ΔABD અને ΔACD માં,

$\angle BAD = \angle CAD$ (પક્ષ)

$AD = AD$ (સામાન્ય બાજુ)

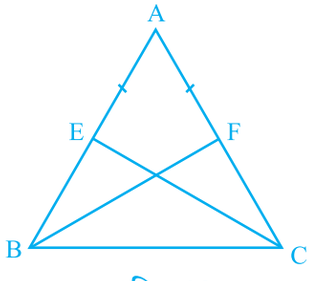
$\angle ADB = \angle ADC = 90°$ (પક્ષ)

આથી, $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (ખૂબાખૂ શરત)

આમ, $AB = AC$ (એકરૂપ ત્રિકોણની અનુરૂપ બાજુઓ)

તેથી, ΔABC એ સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે.

ઉદાહરણ 5 : ΔABC ની સમાન બાજુઓ AB અને AC નાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે E અને F છે. (જુઓ આકૃતિ 7.28.) સાબિત કરો કે $BF = CE$.



આકૃતિ 7.28

ઉકેલ : ΔABF અને ΔACE માં,

$AB = AC$ (પક્ષ)

$\angle A = \angle A$ (સામાન્ય ખૂણો)

AF = AE (સમાન બાજુઓના અર્ધભાગ)

આથી, $\Delta ABF \cong \Delta ACE$ (બાખૂબા શરત)

માટે, BF = CE (એકરૂપ ત્રિકોણની અનુરૂપ બાજુઓ)

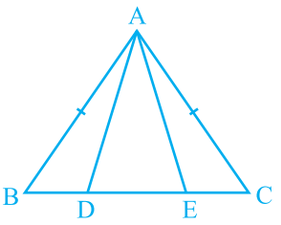
ઉદાહરણ 6 : સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ ABC માં AB = AC છે, BE = CD થાય તેવાં બિંદુઓ D અને E એ BC પર છે. (જુઓ આકૃતિ 7.29.) તો સાબિત કરો કે AD = AE.

ઉકેલ : ΔABD અને ΔACE માં,

AB = AC (પક્ષ) (1)

$\angle B = \angle C$ (સમાન બાજુઓની સામેના ખૂણા) (2)

વળી, BE = CD



આકૃતિ 7.29

માટે, BE – DE = CD – DE

આથી, BD = CE (3)

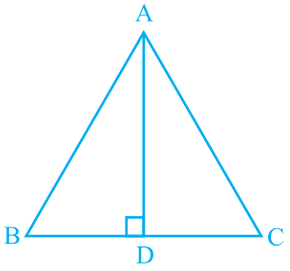
તેથી, $\Delta ABD \cong \Delta ACE$ (પરિણામ (1), (2), (3) અને બાખૂબા શરત પરથી)

આ પરથી AD = AE (એકરૂપ ત્રિકોણની અનુરૂપ બાજુઓ)

સ્વાધ્યાય 7.2

1. જેમાં AB=AC હોય તેવા સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ ABC માં $\angle B$ અને $\angle C$ ના દ્વિભાજકો એકબીજાને O માં છેદે છે. A અને O ને જોડો. સાબિત કરો કે,

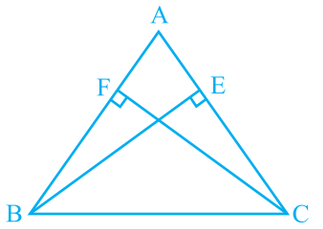
(i) OB = OC (ii) AO એ $\angle A$ નો દ્વિભાજક છે.



આકૃતિ 7.30

2. ΔABC માં AD એ BC નો લંબદ્વિભાજક છે (જુઓ આકૃતિ 7.30). સાબિત કરો કે AB = AC હોય તેવો ΔABC સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે.

3. ΔABC સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે. BE અને CF એ અનુક્રમે સમાન બાજુઓ AC અને AB પર વેધ છે. (જુઓ આકૃતિ 7.31.) સાબિત કરો કે આ વેધ સમાન છે.

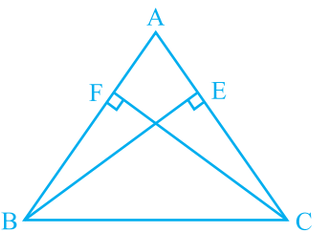


આકૃતિ 7.31

4. ΔABC ની બાજુઓ AC અને AB પરના બે વેધ BE અને CF સમાન છે. (જુઓ આકૃતિ 7.32.) સાબિત કરો કે,

(i) $\Delta ABE \cong \Delta ACF$

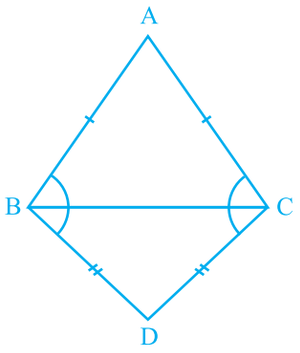
(ii) AB = AC, અર્થાત્ ABC એ સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે.



આકૃતિ 7.32

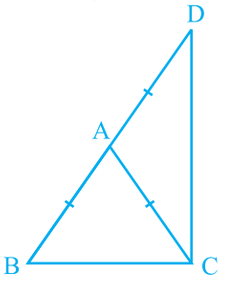
5. ABC અને DBC એ સમાન પાયા BC પર આવેલા બે સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે. (જુઓ આકૃતિ 7.33).

સાબિત કરો કે $\angle ABD = \angle ACD$.



આકૃતિ 7.33

6. જેમાં AB = AC હોય તેવો સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ ΔABC છે. AD = AB થાય તેવું બિંદુ D એ BA પર લો (જુઓ આકૃતિ 7.34). સાબિત કરો કે $\angle BCD$ કાટખૂણો છે.



આકૃતિ 7.34

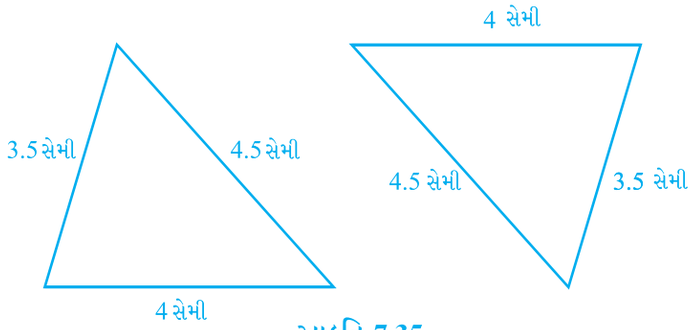
7. જેમાં $\angle A = 90°$ અને AB = AC હોય તેવો કાટકોણ ત્રિકોણ ABC છે, તો $\angle B$ અને $\angle C$ શોધો.

8. બતાવો કે સમબાજુ ત્રિકોણના બધા જ ખૂણાનાં માપ 60° હોય.

7.5 ત્રિકોણની એકરૂપતા માટેની કેટલીક વધુ શરતો

આ પ્રકરણમાં અગાઉ તમે એવું જોયું કે કોઈ એક ત્રિકોણના ત્રણેય ખૂણાઓ બીજા ત્રિકોણના ત્રણેય ખૂણાને સમાન હોય તે બે ત્રિકોણની એકરૂપતા માટે પર્યાપ્ત નથી. તમને જાણીને આશ્ચર્ય થશે કે કોઈ એક ત્રિકોણની ત્રણેય બાજુઓ બીજા ત્રિકોણની ત્રણેય બાજુઓને સમાન હોય, તો તે બે ત્રિકોણની એકરૂપતા માટે પર્યાપ્ત છે.

તમે આગળના ધોરણોમાં ચકાસ્યું છે કે આ પરિણામ સત્ય છે.



આકૃતિ 7.35

ખાત્રી કરવા માટે 4 સેમી, 3.5 સેમી અને 4.5 સેમી બાજુઓવાળા બે ત્રિકોણની રચના કરો. (જુઓ આકૃતિ 7.35.) આ ત્રિકોણને કાપી એકબીજા પર મૂકો. તમે શું અવલોકન કરો છો ? બંને ત્રિકોણ એકબીજા પર સંપૂર્ણપણે બંધબેસતા આવે છે. આથી જો સમાન બાજુઓ એકબીજા પર મૂકવામાં આવે તો આ ત્રિકોણ એકરૂપ છે.

બીજા વધુ ત્રિકોણ લઈ આ પ્રવૃત્તિનું પુનરાવર્તન કરો. આમ આપણે એકરૂપતા માટેનો એક બીજો નિયમ મેળવી શકીએ.

પ્રમેય 7.4 (બાબાબા એકરૂપતાની શરત) : *જો એક ત્રિકોણની ત્રણેય બાજુઓ બીજા ત્રિકોણની ત્રણેય બાજુઓને સમાન હોય તો આ બંને ત્રિકોણ એકરૂપ થાય.*

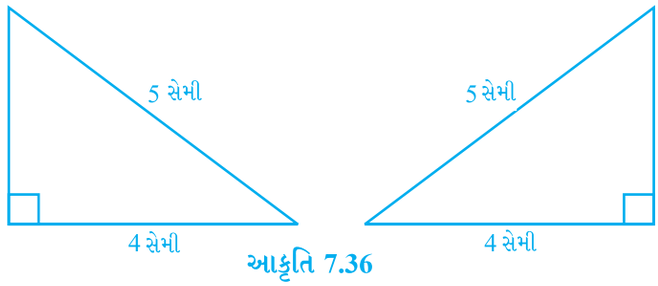
આ પ્રમેય યોગ્ય રચનાની મદદથી સાબિત કરી શકાય :

તમે એકરૂપતા માટેની બાખૂબા શરતમાં જોયું કે બે સમાન અનુરૂપ બાજુઓના અંતર્ગત ખૂણાઓ સમાન હોવા જોઈએ. જો તેમ ન હોય તો તે બે ત્રિકોણો એકરૂપ ન પણ થાય.

આ પ્રવૃત્તિ કરો :

જેમાં કર્ણનું માપ 5 સેમી અને એકબાજુનું માપ 4 સેમી હોય એવા બે કાટકોણ ત્રિકોણ રચો.

(જુઓ આકૃતિ 7.36.)



આકૃતિ 7.36

બંને ત્રિકોણને કાપી સમાન બાજુઓ એકબીજા પર રહે તેમ ગોઠવો. જરૂર પડે તો ત્રિકોણનું પરિભ્રમણ કરો. તમે શું અવલોકન કરો છો ?

બંને ત્રિકોણ એકબીજા પર સંપૂર્ણપણે બંધબેસે છે. આથી તેઓ એકરૂપ છે. બીજા કાટકોણ ત્રિકોણની જોડ લઈ આ પ્રવૃત્તિનું પુનરાવર્તન કરો. તમે શું અવલોકન કરો છો ?

તમે જોઈ શકશો કે જો બાજુની એક જોડ તથા કર્ણનાં માપ સમાન હોય, તો બે કાટકોણ ત્રિકોણ એકરૂપ થાય. તમે અગાઉના ધોરણમાં આ બાબત ચકાસી છે.

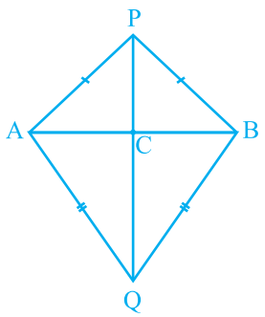
અહીં નોંધો કે આ કિસ્સામાં કાટખૂણા એ અંતર્ગત ખૂણા નથી. આથી તમે એકરૂપતાની નીચે દર્શાવેલ શરત પર આવશો.

પ્રમેય 7.5 (*કાકબા એકરૂપતાની શરત*) : *જો બે કાટકોણ ત્રિકોણમાં એક ત્રિકોણનો કર્ણ અને એક બાજુ બીજા ત્રિકોણના કર્ણ અને અનુરૂપ બાજુને સમાન હોય, તો આ બે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય.*

નોંધો કે કાકબા એટલે કાટખૂણો - કર્ણ - બાજુ.

ચાલો, હવે કેટલાંક ઉદાહરણો લઈએ.

ઉદાહરણ 7 : AB રેખાખંડ છે. P અને Q, AB ની એક-બીજાથી વિરૂદ્ધ બાજુએ આવેલ બિંદુઓ છે તથા બંને બિંદુઓ A અને B થી સમાન અંતરે આવેલાં છે. (જુઓ આકૃતિ 7.37.) સાબિત કરો કે રેખા PQ એ AB નો લંબદ્વિભાજક છે.



આકૃતિ 7.37

ઉકેલ : તમને PA = PB અને QA = QB આપેલ છે. (પક્ષ)

અને તમારે PQ ⊥ AB તથા PQ એ AB ને દુભાગે છે તે સાબિત કરવાનું છે.

ધારો કે PQ એ AB ને C માં છેદે છે.

આ આકૃતિમાં તમે બે એકરૂપ ત્રિકોણનો વિચાર કરી શકો છો ?

આપણે Δ PAQ અને Δ PBQ નો વિચાર કરતાં, આ ત્રિકોણોમાં,

AP = BP (પક્ષ)

AQ = BQ (પક્ષ)

PQ = PQ (સામાન્ય બાજુ)

આથી, Δ PAQ ≅ Δ PBQ (બાબાબા શરત)

માટે, ∠ APQ = ∠ BPQ (એકરૂપ ત્રિકોણના અનુરૂપ ખૂણા)

હવે આપણે, Δ PAC અને Δ PBC માટે વિચારીએ.

તમારી પાસે : AP = BP (પક્ષ)

∠ APC = ∠ BPC (ઉપર આપણે ∠ APQ = ∠ BPQ સાબિત કર્યું)

PC = PC (સામાન્ય બાજુ)

આથી, Δ PAC ≅ Δ PBC (બાખૂબા શરત)

માટે, AC = BC (એકરૂપ ત્રિકોણની અનુરૂપ બાજુઓ) (1)

અને ∠ ACP = ∠ BCP (એકરૂપ ત્રિકોણના અનુરૂપ ખૂણા)

પરંતુ, ∠ ACP + ∠ BCP = 180° (રૈખિક જોડના ખૂણા)

આથી, 2∠ ACP = 180°

અથવા, ∠ ACP = 90° (2)

પરિણામ (1) અને (2) પરથી સરળતાથી કહી શકાય કે PQ એ AB નો લંબદ્વિભાજક છે.

[અહીં નોંધો કે Δ PAQ અને Δ PBQ, એકરૂપ સાબિત કર્યા સિવાય તમે Δ PAC ≅ Δ PBC દર્શાવી શકશો નહીં.

AP = BP (પક્ષ)

PC = PC (સામાન્ય બાજુ)

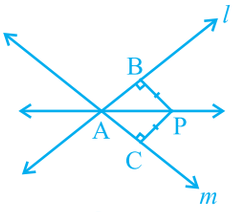
અને ∠ PAC = ∠ PBC (Δ APB ની સમાન બાજુઓની સામેના ખૂણાઓ)

હોવા છતાં Δ PAC ≅ Δ PBC દર્શાવી શકશો નહિ. કારણ કે આ પરિણામ બાબાખૂ શરત દર્શાવે છે. જે હંમેશાં સાચું કે માન્ય નથી. વળી અહીં, સમાન બાજુઓની જોડની વચ્ચે અંતર્ગત ખૂણા સમાન નથી.]

ચાલો આપણે વધુ ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ 8 : પરસ્પર A બિંદુએ છેદતી બે રેખાઓ l અને m થી સમાન અંતરે બિંદુ P આવેલ છે. (જુઓ આકૃતિ 7.38). સાબિત કરો કે રેખા AP તેમની વચ્ચેના ખૂણાને દુભાગે છે.

ઉકેલ : તમને આપેલ છે કે રેખાઓ l અને m એકબીજાને A બિંદુએ છેદે છે.



આકૃતિ 7.38

$PB \perp l$, $PC \perp m$.

PB = PC આપેલ છે.

તમારે $\angle PAB = \angle PAC$ સાબિત કરવાનું છે.

ચાલો ΔPAB અને ΔPAC વિશે વિચારીએ.

આ બંને ત્રિકોણમાં, PB = PC (પક્ષ)

$\angle PBA = \angle PCA = 90°$ (પક્ષ)

PA = PA (સામાન્ય બાજુ)

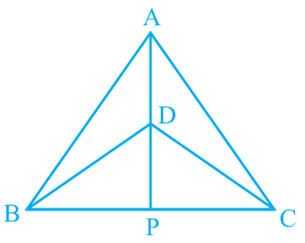
આથી, $\Delta PAB \cong \Delta PAC$ (કાકબા શરત)

આથી, $\angle PAB = \angle PAC$ (એકરૂપ ત્રિકોણોના અનુરૂપ ખૂણાઓ)

આપણે નોંધીએ કે આ પરિણામ સ્વાધ્યાય 7.1 ના દાખલા નં. 5 નું પ્રતીપ છે.

સ્વાધ્યાય 7.3

1. ΔABC અને ΔDBC સમાન પાયા BC પર આવેલા બે સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે અને શિરોબિંદુઓ A અને D એ BC ની એક જ બાજુએ આવેલ છે (જુઓ આકૃતિ 7.39). જો AD ને લંબાવતાં, તે BC ને P બિંદુમાં છેદે તો સાબિત કરો કે,



આકૃતિ 7.39

(i) $\Delta ABD \cong \Delta ACD$

(ii) $\Delta ABP \cong \Delta ACP$

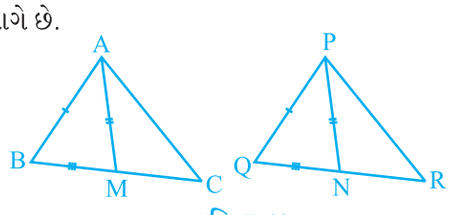
(iii) AP એ $\angle A$ તથા $\angle D$ ને દુભાગે છે.

(iv) AP એ BC નો લંબદ્વિભાજક છે.

2. જેમાં AB = AC હોય તેવા ΔABCનો વેધ AD છે. તો સાબિત કરો કે,

(i) AD એ BC ને દુભાગે છે. (ii) AD એ $\angle A$ ને દુભાગે છે.

3. ΔABC ની બે બાજુઓ AB અને BC તથા મધ્યગા AM એ ΔPQR ની અનુરૂપ બાજુઓ PQ અને QR તથા મધ્યગા PN ને સમાન છે. (જુઓ આકૃતિ 7.40). તો સાબિત કરો કે,



આકૃતિ 7.40

(i) $\Delta ABM \cong \Delta PQN$ (ii) $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

4. ત્રિકોણ ABC માં BE અને CF બે સમાન વેધ છે, તો એકરૂપતા માટેની કાકબાની શરતનો ઉપયોગ કરી સાબિત કરો કે ABC સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે.

5. જેમાં AB = AC હોય તેવો સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ ABC છે. AP $\perp$ BC દોરી $\angle$ B = $\angle$ C દર્શાવો.

7.6 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં તમે નીચેના મુદ્દાઓ શીખ્યા છો :

1. જો બે આકૃતિના આકાર અને કદ સમાન હોય, તો તે આકૃતિઓ એકરૂપ કહેવાય.

2. સમાન ત્રિજ્યા ધરાવતાં બે વર્તુળ એકરૂપ કહેવાય.

3. સમાન બાજુ ધરાવતાં બે ચોરસ એકરૂપ કહેવાય.

4. જો સંગતતા A $\leftrightarrow$ P, B $\leftrightarrow$ Q અને C $\leftrightarrow$ R સાથે બે ત્રિકોણો ABC અને PQR એકરૂપ હોય, તો તેને સંકેતમાં $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ વડે દર્શાવાય.

5. જો એક ત્રિકોણની બે બાજુઓ અને અંતર્ગત ખૂણો બીજા ત્રિકોણની બે બાજુઓ અને અંતર્ગત ખૂણાને સમાન હોય, તો બંને ત્રિકોણ એકરૂપ થાય. (એકરૂપતાની બાખૂબા શરત)

6. જો એક ત્રિકોણના બે ખૂણાઓ અને અંતર્ગત બાજુ બીજા ત્રિકોણના બે ખૂણા અને અંતર્ગત બાજુને સમાન હોય, તો આ બંને ત્રિકોણ એકરૂપ થાય. (એકરૂપતાની ખૂબાખૂ શરત)

7. જો એક ત્રિકોણના બે ખૂણાઓ અને એક બાજુ બીજા ત્રિકોણના બે ખૂણાઓ અને અનુરૂપ બાજુને સમાન હોય, તો તે બંને ત્રિકોણ એકરૂપ થાય. (એકરૂપતાની ખૂખૂબા શરત)

8. ત્રિકોણની સમાન બાજુઓની સામેના ખૂણાઓ સમાન હોય.

9. ત્રિકોણના સમાન ખૂણાઓની સામેની બાજુઓ સમાન હોય.

10. સમબાજુ ત્રિકોણનો દરેક ખૂણો 60° નો હોય છે.

11. જો એક ત્રિકોણની ત્રણેય બાજુઓ બીજા ત્રિકોણની ત્રણેય બાજુઓને સમાન હોય, તો તે બંને ત્રિકોણ એકરૂપ હોય. (એકરૂપતાની બાબાબા શરત)

12. જો બે કાટકોણ ત્રિકોણમાં એક ત્રિકોણનો કર્ણ અને એક બાજુ બીજા ત્રિકોણના કર્ણ અને એક બાજુને સમાન હોય, તો તે બંને ત્રિકોણ એકરૂપ હોય.(એકરૂપતાની કાકબા શરત)