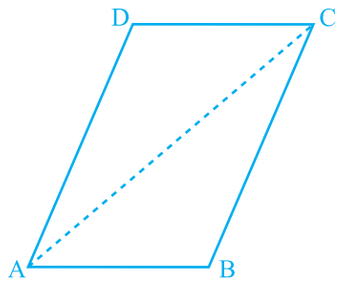
L1A9I6

પ્રકરણ 8

ચતુષ્કોણ

8.1 સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના ગુણધર્મો :

અગાઉના ધોરણમાં આપણે ચતુષ્કોણ અને તેમના પ્રકાર વિશે અભ્યાસ કર્યો. ચતુષ્કોણને ચાર બાજુઓ, ચાર ખૂણા અને ચાર શિરોબિંદુઓ હોય છે. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની સામસામેની બાજુઓની બંને જોડ સમાંતર હોય છે.



આકૃતિ 8.1

ચાલો આપણે પ્રવૃત્તિ કરીએ. એક કાગળના ટુકડામાંથી બનાવેલ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણને વિકર્ણમાંથી કાપીએ. (જુઓ આકૃતિ 8.1.) આપણને બે ત્રિકોણ મળશે. આ ત્રિકોણો વિશે તમે શું કહી શકશો ?

એક ત્રિકોણને બીજા ત્રિકોણ ઉપર મૂકો. જરૂરિયાત જણાય તો એક વખત ફેરવો. તમે શું નિરીક્ષણ કરો છો ?

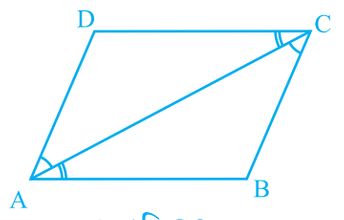
જુઓ કે બંને ત્રિકોણ એકબીજાને એકરૂપ છે.

બીજા કેટલાક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ માટે આ પ્રવૃત્તિનું પુનરાવર્તન કરો. દરેક વખતે અનુભવાશે કે પ્રત્યેક વિકર્ણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણને બે એકરૂપ ત્રિકોણમાં વિભાજિત કરે છે.

હવે આપણે આ પરિણામ સાબિત કરીએ.

પ્રમેય 8.1 : *સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો કોઈપણ વિકર્ણ તેનું બે એકરૂપ ત્રિકોણમાં વિભાજન કરે છે.*

સાબિતી : ધારો કે ABCD સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે અને AC તેનો વિકર્ણ છે (જુઓ આકૃતિ 8.2). અવલોકન કરો કે વિકર્ણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD ને બે ત્રિકોણ Δ ABC અને Δ CDA માં વિભાજિત કરે છે. આપણે આ ત્રિકોણો એકરૂપ છે તેમ સાબિત કરીશું.



આકૃતિ 8.2

Δ ABC અને Δ CDA માં નોંધો કે BC || AD અને AC તેમની છેદિકા છે.

આથી, $\angle BCA = \angle DAC$ (યુગ્મકોણોની જોડ)

તથા, AB || DC અને AC છેદિકા છે.

તેથી, $\angle BAC = \angle DCA$ (યુગ્મકોણોની જોડ)

અને $AC = CA$ (સામાન્ય બાજુ)

આથી, $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (ખૂબાખૂ નિયમ)

અથવા વિકર્ણ AC સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD ને બે એકરૂપ ત્રિકોણો ABC અને CDA માં વિભાજીત કરે છે.

હવે, સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD ની સામસામેની બાજુઓ માપો. તમે શું અવલોકન કરો છો ? તમને $AB = DC$ અને $AD = BC$ મળશે.

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો આ બીજો ગુણધર્મ નીચે દર્શાવેલ છે:

પ્રમેય 8.2 : *સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં સામસામેની બાજુઓ સમાન હોય છે.*

તમે સાબિત કર્યું છે કે વિકર્ણ એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણને બે એકરૂપ ત્રિકોણોમાં વિભાજીત કરે છે.

આથી તમે અનુરૂપ ભાગ એટલે કે અનુરૂપ બાજુઓ વિશે શું કહી શકશો ? તેઓ સમાન છે.

આથી, $AB = DC$ અને $AD = BC$

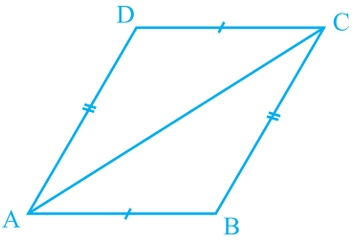
હવે આ પરિણામનું પ્રતીપ શું છે ? તમને જ્ઞાત છે કે પ્રમેયમાં આપેલ શરતને આપણે તેના પ્રતિપ્રમેયમાં સાબિત કરવાની હોય છે અને પ્રમેયમાં જે સાબિત કરવાનું છે તે પ્રતિપ્રમેયનાં વિધાનમાં શરત તરીકે આપેલું હોય છે. આમ, પ્રમેય 8.2 ને નીચે પ્રમાણે રજૂ કરી શકાય :

જો ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હોય, તો સામસામેની બાજુઓની પ્રત્યેક જોડ સમાન છે. આથી તેનું પ્રતિપ્રમેય :

પ્રમેય 8.3 : *જો કોઈ ચતુષ્કોણની સામસામેની બાજુઓની પ્રત્યેક જોડની બાજુઓ સમાન હોય, તો તે ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.*

તમે કારણ આપી શકશો કે આ શા માટે ?

ધારો કે ચતુષ્કોણ ABCD ની બાજુઓ AB અને CD સમાન છે તથા $AD = BC$ (જુઓ આકૃતિ 8.3). વિકર્ણ AC દોરો.



આકૃતિ 8.3

સ્પષ્ટ છે કે, $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (શા માટે ?)

આથી, $\angle BAC = \angle DCA$

અને $\angle BCA = \angle DAC$ (શા માટે ?)

હવે તમે કહી શકશો કે ABCD સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે ? શા માટે ?

તમે હમણાં જ જોયું કે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં સામસામેની બાજુઓની પ્રત્યેક જોડની બાજુઓ સમાન છે તથા તેનું પ્રતીપ જો ચતુષ્કોણની સામસામેની પ્રત્યેક જોડની બાજુઓ સમાન હોય, તો તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે. આપણે આવું જ પરિણામ સામસામેના ખૂણાઓની પ્રત્યેક જોડ માટે તારવી શકીએ ?

કેટલાક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણો દોરી તેમના ખૂણા માપો. તમે શું અવલોકન કરો છો ?

સામસામેના ખૂણાઓની પ્રત્યેક જોડના ખૂણા સમાન છે.

કેટલાક વધારે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ લઈ આ પરિણામ ફરી ચકાસી જોઈએ. આપણે એક અન્ય પરિણામ પર આવી પહોંચીશું. તે નીચે આપેલ છે :

પ્રમેય 8.4 : *સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં સામસામેના ખૂણા સમાન છે.*

હવે, આ પરિણામનું પ્રતીપ પણ સત્ય છે ? હા, સત્ય છે. ચતુષ્કોણના ખૂણાના સરવાળાનો ગુણધર્મ અને સમાંતરબાજુઓને છેદિકા વડે છેદવાથી મળતાં પરિણામોનો ઉપયોગ કરીને, આપણે જોઈ શકીએ કે પ્રતિપ્રમેય પણ સત્ય છે. આથી, આપણને નીચેનું પરિણામ મળશે :

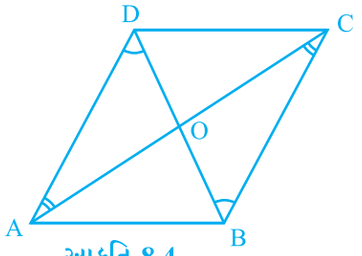
પ્રમેય 8.5 : *જો ચતુષ્કોણના સામસામેના ખૂણાઓની પ્રત્યેક જોડના ખૂણા સમાન હોય, તો તે ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.*

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો હજુ એક બીજો પણ ગુણધર્મ છે. આપણે તેનો અભ્યાસ કરીએ. એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD દોરો અને O બિંદુએ છેદતાં તેના બંને વિકર્ણ દોરો. (જુઓ આકૃતિ 8.4.)

OA, OB, OC અને OD ની લંબાઈ માપો.

તમે શું નિરીક્ષણ કરો છો ? તમે નિરીક્ષણ કરશો કે OA = OC અને OB = OD અથવા બંને વિકર્ણનું મધ્યબિંદુ O છે. આ પ્રક્રિયાને સમજવા કેટલાક વધારે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ લઈ આ પ્રવૃત્તિનું પુનરાવર્તન કરો. તમે જોશો કે દરેક વખતે આપણને બંને વિકર્ણનું મધ્યબિંદુ O જ મળશે.

આથી, આપણને નીચેનું પ્રમેય મળશે :



આકૃતિ 8.4

પ્રમેય 8.6 : *સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો પરસ્પર દુભાગે છે.*

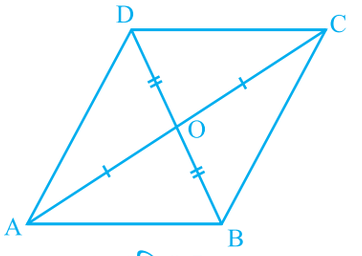
હવે, જો ચતુષ્કોણના વિકર્ણો પરસ્પર દુભાગે તો શું થશે ? શું તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હશે ? ખરેખર, આ સત્ય છે.

આ પરિણામ એ પ્રમેય 8.6 ના પરિણામનું પ્રતીપ છે. તે આગળ પ્રમાણે છે :

પ્રમેય 8.7 : *જો કોઈ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો એકબીજાને દુભાગે, તો તે ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.*

આ પરિણામને સાબિત કરવા આપણે નીચે પ્રમાણે દલીલ કરી શકીએ:

આકૃતિ 8.5 માં OA = OC અને OB = OD આપ્યું છે.



આકૃતિ 8.5

આથી, $\Delta AOB \cong \Delta COD$ (શા માટે ?)

માટે $\angle ABO = \angle CDO$ (શા માટે ?)

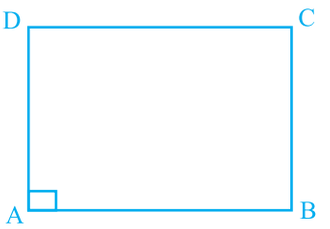
આ પરથી, AB || CD મળે.

તે જ પ્રમાણે, BC || AD

માટે ABCD સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

હવે, આપણે કેટલાંક ઉદાહરણ લઈએ.

ઉદાહરણ 1 : બતાવો કે લંબચોરસનો દરેક ખૂણો કાટખૂણો છે.



આકૃતિ 8.6

ઉકેલ : યાદ કરો, લંબચોરસ શું છે ?

લંબચોરસ એ જેનો એક ખૂણો કાટખૂણો હોય એવો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

ધારો કે $\angle A = 90°$ હોય તેવો એક લંબચોરસ ABCD છે.

આપણે સાબિત કરીશું કે, $\angle B = \angle C = \angle D = 90°$

AD || BC છે અને AB તેની એક છેદિકા છે. (જુઓ આકૃતિ 8.6.)

આથી, $\angle A + \angle B = 180°$ (છેદિકાની એક જ બાજુના અંતઃકોણો)

પરંતુ, $\angle A = 90°$

આથી, $\angle B = 180° - \angle A = 180° - 90° = 90°$

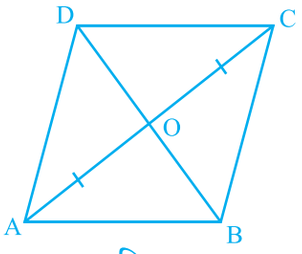
વળી, $\angle C = \angle A$ અને $\angle D = \angle B$ (સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના સામસામેના ખૂણાઓ)

આથી, $\angle C = 90°$ અને $\angle D = 90°$.

માટે, લંબચોરસનો પ્રત્યેક ખૂણો કાટખૂણો છે.

ઉદાહરણ 2 : સમબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો એકબીજાને લંબ છે, તેમ બતાવો.

ઉકેલ : ABCD સમબાજુ ચતુષ્કોણ લો. (જુઓ આકૃતિ 8.7.)



આકૃતિ 8.7

તમે જાણો છો કે, AB = BC = CD = DA (શા માટે ?)

હવે, Δ AOD અને Δ COD માં,

OA = OC (સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો પરસ્પર દુભાગે છે.)

OD = OD (સામાન્ય બાજુ)

AD = CD

માટે, Δ AOD ≅ Δ COD (બાબાબા સંગતતાનો નિયમ)

માટે, $\angle AOD = \angle COD$ (એકરૂપ ત્રિકોણના એકરૂપ ભાગ)

પરંતુ, $\angle AOD + \angle COD = 180°$ (રૈખિક જોડના ખૂણા)

આથી, $2\angle AOD = 180°$

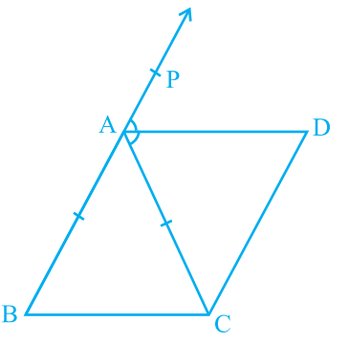
અથવા, $\angle AOD = 90°$

આથી, સમબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો પરસ્પર લંબ છે.

ઉદાહરણ 3 : સમદ્વિભુજ ત્રિકોણ ABC માં AB = AC છે. AD બહિષ્કોણ PAC નો દ્વિભાજક છે અને CD || AB (જુઓ આકૃતિ 8.8.) સાબિત કરો કે,

(i) $\angle DAC = \angle BCA$ અને (ii) ABCD એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

ઉકેલ : (i) સમદ્વિભુજ ΔABC માં $AB = AC$ છે (પક્ષ)



આકૃતિ 8.8

માટે, $\angle ABC = \angle ACB$ (સમાન બાજુની સામેના ખૂણા)

વળી, $\angle PAC = \angle ABC + \angle ACB$ (ત્રિકોણનો બહિષ્કોણ)

$\therefore \angle PAC = 2\angle ACB$ (1)

હવે, AD એ $\angle PAC$ નો દ્વિભાજક છે.

માટે, $\angle PAC = 2\angle DAC$ (2)

માટે, $2\angle DAC = 2\angle ACB$ [(1) અને (2) પરથી]

$\therefore \angle DAC = \angle BCA$

(ii) રેખાખંડ BC અને AD ની છેદિકા AC ના છેદવાથી બનતી યુગ્મકોણની જોડના ખૂણા સમાન છે.

આથી, $BC \parallel AD$

વળી, $BA \parallel CD$ (પક્ષ)

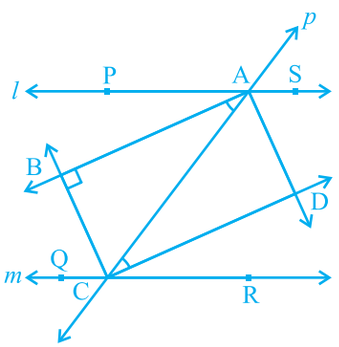
હવે, ચતુષ્કોણ ABCD ની સામસામેની બાજુઓની બંને જોડની રેખાઓ સમાંતર છે. આથી, ABCD સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

ઉદાહરણ 4 : બે સમાંતર રેખાઓ l અને m ની છેદિકા રેખા p છે. (જુઓ આકૃતિ 8.9.) બતાવો કે અંતઃકોણોના દુભાજકથી બનતો ચતુષ્કોણ લંબચોરસ છે.

ઉકેલ : $PS \parallel QR$ છે અને છેદિકા p તેમને અનુક્રમે A અને C માં છેદે છે.

$\angle PAC$ અને $\angle ACQ$ ના દુભાજકો B માં છેદે છે અને $\angle ACR$ અને $\angle SAC$ ના દુભાજકો D માં છેદે છે.

આપણે બતાવવાનું છે કે ચતુષ્કોણ ABCD લંબચોરસ છે.



આકૃતિ 8.9

હવે, $\angle PAC = \angle ACR$ ($l \parallel m$ ની છેદિકા p થી બનતા યુગ્મકોણ)

માટે, $\frac{1}{2}\angle PAC = \frac{1}{2}\angle ACR$

અર્થાત્, $\angle BAC = \angle ACD$

આ તો રેખાઓ AB અને DC ની છેદિકા AC થી બનતા યુગ્મકોણોની જોડ છે

અને તેઓ સમાન પણ છે.

$AB \parallel DC$

તે જ પ્રમાણે, $BC \parallel AD$ ($\angle ACB$ અને $\angle CAD$ લેતાં)

માટે, ચતુષ્કોણ ABCD એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

વળી, $\angle PAC + \angle CAS = 180°$ (રૈખિક જોડના ખૂણા)

માટે, $\frac{1}{2} \angle PAC + \frac{1}{2} \angle CAS = \frac{1}{2} \times 180° = 90°$

$\therefore \angle BAC + \angle CAD = 90°$

$\therefore \angle BAD = 90°$

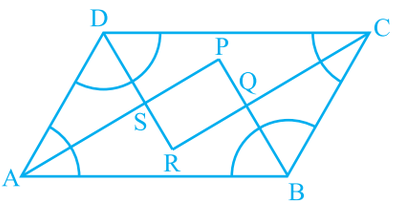
આથી, ABCD સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે તથા તેનો એક ખૂણો 90° છે.

માટે ABCD લંબચોરસ છે.

ઉદાહરણ 5 : બતાવો કે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના ખૂણાઓના દુભાજકો લંબચોરસ રચે છે.

ઉકેલ : ધારો કે P, Q, R અને S એ અનુક્રમે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD ના ખૂણાઓ $\angle A$ અને $\angle B$, $\angle B$ અને $\angle C$, $\angle C$ અને $\angle D$ તથા $\angle D$ અને $\angle A$ ના દુભાજકોનાં છેદબિંદુઓ છે. (જુઓ આકૃતિ 8.10.)

Δ ASDમાં તમે શું નિરીક્ષણ કરો છો ?



આકૃતિ 8.10

$\angle D$ નો દુભાજક DS અને $\angle A$ નો દુભાજક AS હોવાથી,

$$\angle DAS + \angle ADS = \frac{1}{2} \angle A + \frac{1}{2} \angle D$$

$$= \frac{1}{2} (\angle A + \angle D)$$

$$= \frac{1}{2} \times 180° \quad (\angle A \text{ અને } \angle D \text{ છેદિકાની એક બાજુના અંતઃકોણો છે.})$$

$$= 90°$$

વળી, $\angle DAS + \angle ADS + \angle DSA = 180°$ (ત્રિકોણના ખૂણાઓના સરવાળાનો ગુણધર્મ)

માટે, $90° + \angle DSA = 180°$

$\therefore \angle DSA = 90°$

આથી, $\angle PSR = 90°$ ($\angle DSA$ નો અભિકોણ)

તે જ પ્રમાણે આપણે $\angle APB = 90°$ અને $\angle SPQ = 90°$ બતાવી શકીએ. ($\angle DSA$ માટે બતાવ્યું તે પ્રમાણે)

તથા તે જ પ્રમાણે, $\angle PQR = 90°$ અને $\angle SRQ = 90°$.

$\therefore$ ચતુષ્કોણ PQRSના બધા જ ખૂણાઓ કાટખૂણા છે.

શું તે લંબચોરસ છે તેવો નિર્ણય આપણે લઈ શકીએ ? ચાલો આપણે ચકાસીએ. આપણે બતાવ્યું છે કે $\angle PSR = \angle PQR = 90°$ અને $\angle SPQ = \angle SRQ = 90°$. આથી, સામસામેના ખૂણાઓની બંને જોડ સમાન છે.

માટે, PQRS એ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે અને તેનો એક ખૂણો (ખરેખર તો બધા જ ખૂણાઓ) 90° નો છે અને તેથી PQRS લંબચોરસ છે.

સ્વાધ્યાય 8.1

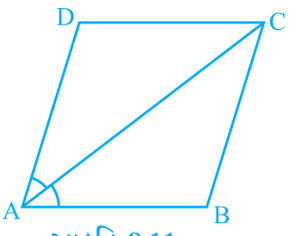
1. જો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો સમાન હોય, તો દર્શાવો કે તે લંબચોરસ છે.

2. સાબિત કરો કે, ચોરસના વિકર્ણો સમાન છે અને તે એકબીજાને કાટખૂણે દુભાગે છે.

3. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD નો વિકર્ણ AC એ $\angle A$ ને દુભાગે છે (જુઓ આકૃતિ 8.11). સાબિત કરો કે,

   (i) તે $\angle C$ ને પણ દુભાગે છે.

   (ii) ABCD સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે.



આકૃતિ 8.11

4. લંબચોરસ ABCD માં વિકર્ણ AC એ $\angle A$ તેમજ $\angle C$ ને દુભાગે છે. સાબિત કરો કે, (i) ABCD ચોરસ છે. (ii) વિકર્ણ BD એ $\angle B$ તેમજ $\angle D$ ને દુભાગે છે.

5. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD માં વિકર્ણ BD પર બે બિંદુઓ P અને Q એવાં લીધાં છે કે જેથી DP = BQ થાય. (જુઓ આકૃતિ 8.12.) સાબિત કરો કે,

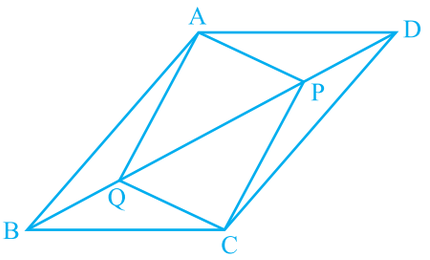
   (i) $\Delta APD \cong \Delta CQB$

   (ii) $AP = CQ$

   (iii) $\Delta AQB \cong \Delta CPD$

   (iv) $AQ = CP$

   (v) APCQ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

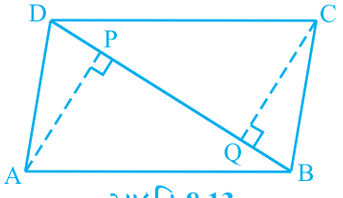


આકૃતિ 8.12

6. ABCD સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે અને શિરોબિંદુઓ A અને C માંથી વિકર્ણ BD પર લંબ અનુક્રમે AP અને CQ દોરેલ છે. (જુઓ આકૃતિ 8.13.) સાબિત કરો કે,

   (i) $\Delta APB \cong \Delta CQD$

   (ii) $AP = CQ$

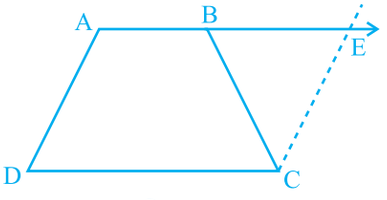


આકૃતિ 8.13

7. સમલંબ ચતુષ્કોણ ABCD માં AB || CD અને AD = BC (જુઓ આકૃતિ 8.14). સાબિત કરો કે,

   (i) $\angle A = \angle B$ (ii) $\angle C = \angle D$

   (iii) $\Delta ABC \cong \Delta BAD$ (iv) વિકર્ણ AC = વિકર્ણ BD



આકૃતિ 8.14

[**સૂચના :** AB ને લંબાવો અને C માંથી DA ને સમાંતર તથા AB ને E માં છેદતી એક રેખા દોરો.]

8.2 મધ્યબિંદુ પ્રમેય

તમે ત્રિકોણ તેમજ ચતુષ્કોણના ઘણા ગુણધર્મોનો અભ્યાસ કર્યો. હવે આપણે ત્રિકોણની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુ, સંબંધી એક અન્ય પરિણામનો અભ્યાસ કરીએ. નીચેની પ્રવૃત્તિ કરો :

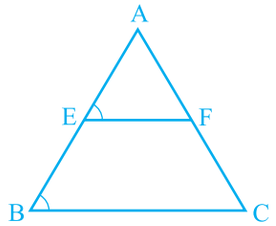
એક ત્રિકોણ દોરી તેની બે બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને E અને F નામ આપીએ. E અને F ને જોડીએ.

(જુઓ આકૃતિ 8.15).

EF અને BC માપો. $\angle$ AEF અને $\angle$ ABC માપો.

તમે શું નિરીક્ષણ કરો છો ? તમને

$EF = \frac{1}{2}$ BC અને $\angle$ AEF = $\angle$ ABC મળશે.



આકૃતિ 8.15

તેથી, EF || BC

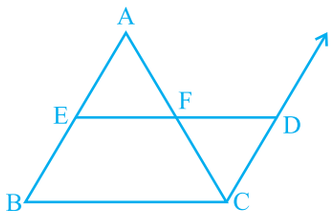
આ પ્રવૃત્તિનું કેટલાક વધારે ત્રિકોણ લઈ પુનરાવર્તન કરીએ.

આથી, તમને નીચેનું પ્રમેય મળશે :

પ્રમેય 8.8 : *ત્રિકોણની બે બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને જોડતો રેખાખંડ, ત્રીજી બાજુને સમાંતર છે.*

તમે નીચેની ચાવીનો ઉપયોગ કરીને આ પ્રમેય સાબિત કરી શકશો.

આકૃતિ 8.16 નું નિરીક્ષણ કરો. તેમાં AB અને AC નાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે E અને F છે તથા CD || BA.



આકૃતિ 8.16

Δ AEF $\cong$ Δ CDF (ખૂબાખૂ નિયમ)

આથી, EF = DF અને BE = AE = DC (શા માટે ?)

માટે, BCDE સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે. (શા માટે ?)

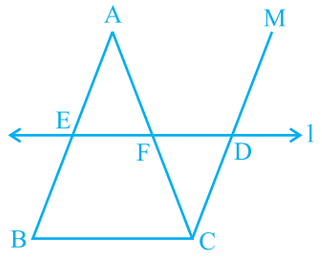
તે પરથી EF || BC મળે.

આ કિસ્સામાં આપણે $EF = \frac{1}{2}$ ED = $\frac{1}{2}$ BC પણ નોંધીશું.

શું તમે પ્રમેય 8.8 નું પ્રતીપ રજૂ કરી શકશો ? પ્રતીપ સત્ય છે ?

તમે જોઈ શકશો કે ઉપરના પ્રમેયનું પ્રતીપ પણ સત્ય છે. તેને નીચે પ્રમાણે રજૂ કરી શકાય :

પ્રમેય 8.9 : *ત્રિકોણની એક બાજુના મધ્યબિંદુમાંથી બીજી બાજુને સમાંતર દોરેલી રેખા ત્રીજી બાજુને દુભાગે છે.*



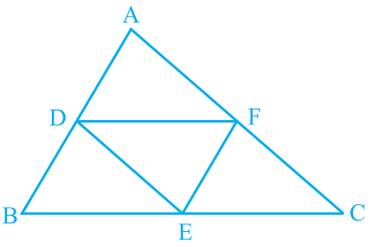
આકૃતિ 8.17

આકૃતિ 8.17 માં જુઓ કે AB નું મધ્યબિંદુ E છે. E માંથી પસાર થતી રેખા *l* એ BC ને સમાંતર છે અને CM || BA.

Δ AEF અને Δ CDF ની એકરૂપતાનો ઉપયોગ કરી AF = CF સાબિત કરો.

ઉદાહરણ 6 : Δ ABC માં, બાજુઓ AB, BC અને CA નાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે D, E અને F છે. (જુઓ આકૃતિ 8.18.) D, E અને F ને જોડતાં, Δ ABC નું ચાર એકરૂપ ત્રિકોણોમાં વિભાજન થાય છે તેમ બતાવો.

ઉકેલ : બાજુઓ AB અને BC નાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે D અને E હોવાથી, પ્રમેય 8.8 ના ઉપયોગથી DE || AC મળે.



આકૃતિ 8.18

તે જ પ્રમાણે, DF ||BC અને EF || AB

માટે ADEF, BDFE અને DFCE બધા જ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

હવે, સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ BDFE નો વિકર્ણ DE છે.

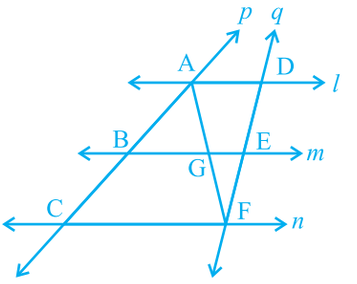
માટે, $\Delta BDE \cong \Delta FED$

તે જ પ્રમાણે $\Delta DAF \cong \Delta FED$

અને $\Delta EFC \cong \Delta FED$

આથી, ચારેય ત્રિકોણો એકરૂપ છે.

ઉદાહરણ 7 : સમાંતર રેખાઓ l, m અને n ને છેદિકાઓ p અને q એવી રીતે છેદે છે કે, l, m અને n રેખાઓ, રેખા p પર સમાન અંતઃખંડો AB અને BC કાપે છે. (જુઓ આકૃતિ 8.19.) સાબિત કરો કે l, m અને n રેખા q પર પણ સમાન અંતઃખંડો DE અને EF કાપે છે.



આકૃતિ 8.19

ઉકેલ : AB = BC આપ્યું છે અને આપણે DE = EF સાબિત કરવું છે.

ચાલો, આપણે A ને F સાથે જોડીએ જેથી રેખા AF, m ને G માં છેદે.

સમલંબ ચતુષ્કોણ ACFD એ બે ત્રિકોણો Δ ACF અને Δ AFD માં વિભાજિત થાય છે,

Δ ACF માં, AC નું મધ્યબિંદુ B છે તેમ આપેલ છે (AB = BC)

અને BG || CF ($m \parallel n$ હોવાથી)

માટે G એ AF નું મધ્યબિંદુ થશે. (પ્રમેય 8.9 નો ઉપયોગ કરતાં)

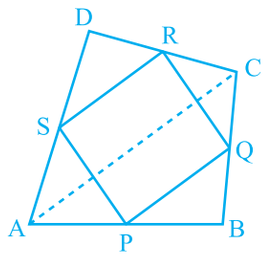
Δ AFD માં, AF નું મધ્યબિંદુ G હોવાથી, આપણે આ જ દલીલનો ઉપયોગ કરી GE || AD બતાવી શકીએ અને પ્રમેય 8.9 પરથી કહી શકીએ કે, E એ DF નું મધ્યબિંદુ છે.

એટલે કે, DE = EF.

બીજી રીતે કહીએ તો, રેખાઓ l, m અને n એ રેખા q પર પણ સમાન અંતઃખંડ કાપે છે.

સ્વાધ્યાય 8.2

1. ચતુષ્કોણ ABCD ની બાજુઓ AB, BC, CD અને DA નાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે P, Q, R અને S છે. (જુઓ આકૃતિ 8.20.) AC તેનો વિકર્ણ છે. સાબિત કરો કે,



આકૃતિ 8.20

(i) SR || AC અને $SR = \frac{1}{2} AC$

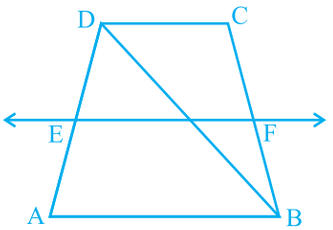
(ii) PQ = SR

(iii) PQRS સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

2. ABCD સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે અને P, Q, R અને S એ અનુક્રમે બાજુઓ AB, BC, CD અને DA નાં મધ્યબિંદુઓ છે. સાબિત કરો કે ચતુષ્કોણ PQRS એ લંબચોરસ છે.

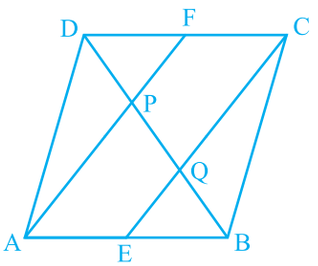
3. ABCD લંબચોરસ છે અને તેની બાજુઓ AB, BC, CD અને DA નાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે P, Q, R અને S છે. સાબિત કરો કે ચતુષ્કોણ PQRS એ સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

4. સમલંબ ચતુષ્કોણ ABCD માં AB || DC, BD વિકર્ણ છે અને AD નું મધ્યબિંદુ E છે. E માંથી AB ને સમાંતર અને BC ને F માં છેદતી એક રેખા દોરી છે. (જુઓ આકૃતિ 8.21.) F એ BC નું મધ્યબિંદુ છે તેમ બતાવો.



આકૃતિ 8.21

5. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD માં બાજુઓ AB અને CD નાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે E અને F છે. (જુઓ આકૃતિ 8.22.) સાબિત કરો કે રેખાખંડ AF અને EC વિકર્ણ BD નું ત્રણ સમાન ભાગમાં વિભાજન કરે છે.



આકૃતિ 8.22

6. Δ ABC માં $\angle$C કાટકોણ છે. કર્ણ AB ના મધ્યબિંદુ M માંથી પસાર થતી અને BC ને સમાંતર રેખા AC ને D માં છેદે છે. સાબિત કરો કે

(i) D એ AC નું મધ્યબિંદુ છે. (ii) $MD \perp AC$

(iii) $CM = MA = \frac{1}{2}AB$

8.3 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં તમે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો :

1. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો વિકર્ણ તેને બે એકરૂપ ત્રિકોણમાં વિભાજિત કરે છે.
2. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં,
   (i) સામસામેની બાજુઓ સમાન હોય છે. (ii) સામસામેના ખૂણાઓ સમાન છે.
   (iii) વિકર્ણો એકબીજાને દુભાગે છે.
3. ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને જોડતો રેખાખંડ એ ત્રીજી બાજુને સમાંતર છે અને તેનાથી અડધો છે.
4. ત્રિકોણની એક બાજુના મધ્યબિંદુમાંથી પસાર થતી અને બીજી બાજુને સમાંતર રેખા ત્રીજી બાજુને દુભાગે છે.

વાચકને નોંધ:

- લંબચોરસના વિકર્ણો પરસ્પર દુભાગે છે અને સમાન છે અને તેનું પ્રતીપ પણ સત્ય છે.
- સમબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો પરસ્પર કાટખૂણે દુભાગે છે અને તેનું પ્રતીપ પણ સત્ય છે.
- ચોરસના વિકર્ણો પરસ્પર કાટખૂણે દુભાગે છે અને સમાન છે અને તેનું પ્રતીપ પણ સત્ય છે.