Y9J8Q9

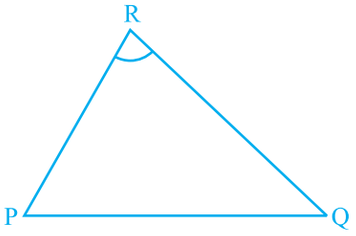
પ્રકરણ 9

વર્તુળ

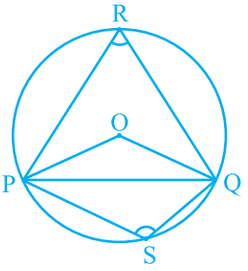
9.1 જીવાએ કોઈ બિંદુએ આંતરેલો ખૂણો

તમે અગાઉના ધોરણમાં વર્તુળ અને તેના ભાગો વિશે શીખી ગયા છો.

એક રેખાખંડ PQ લો અને PQ ને સમાવતી રેખા પર ન હોય તેવું બિંદુ R લો. PR અને QR જોડો. (જુઓ આકૃતિ 9.1). $\angle$ PRQ ને રેખાખંડ PQ એ બિંદુ R આગળ ***આંતરેલો ખૂણો*** *(Angle subtended at R)* કહે છે. આકૃતિ 9.2 ના ખૂણાઓ POQ, PRQ અને PSQ ને શું કહેવાય ? $\angle$ POQ એ જીવા PQએ કેન્દ્ર O આગળ આંતરેલો ખૂણો છે. $\angle$ PRQ અને $\angle$ PSQ એ PQ એ અનુક્રમે ગુરુચાપ પર આવેલા બિંદુ R અને લઘુચાપ પર આવેલા બિંદુ S આગળ આંતરેલા ખૂણા છે.

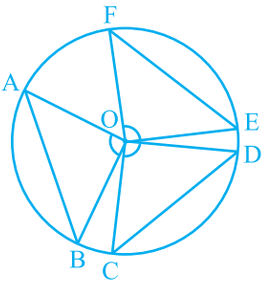


આકૃતિ 9.1



આકૃતિ 9.2

આપણે જીવાના માપ અને તેણે કેન્દ્ર આગળ આંતરેલા ખૂણા વચ્ચેના સંબંધનું પરીક્ષણ કરીએ. વર્તુળની જુદી જુદી જીવાઓ અને તેમણે કેન્દ્ર આગળ આંતરેલા ખૂણા દોરી તમે જોઈ શકશો કે જેટલી લાંબી જીવા હોય તેટલો મોટો ખૂણો કેન્દ્ર આગળ બને. તમે વર્તુળની બે સમાન જીવાઓ લો તો શું થશે ? કેન્દ્ર આગળ તેમણે આંતરેલા ખૂણા સમાન હશે કે નહિ ?

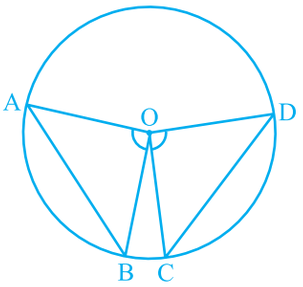


આકૃતિ 9.3

વર્તુળની બે કે તેથી વધુ સમાન જીવાઓ દોરી તેમણે વર્તુળના કેન્દ્ર આગળ આંતરેલા ખૂણાનાં માપ મેળવો. (જુઓ આકૃતિ 9.3). તમે જોઈ શકશો કે કેન્દ્ર આગળ તેમણે આંતરેલા ખૂણા સમાન છે. આપણે આ હકીકતની સાબિતી આપીએ.

પ્રમેય 9.1 : *વર્તુળની સમાન જીવાઓ, વર્તુળના કેન્દ્ર આગળ સમાન ખૂણા આંતરે છે.*

સાબિતી : O કેન્દ્રવાળા વર્તુળમાં તમને બે સમાન જીવાઓ AB અને CD આપેલી છે. (જુઓ આકૃતિ 9.4). તમારે $\angle AOB = \angle COD$ સાબિત કરવાનું છે.



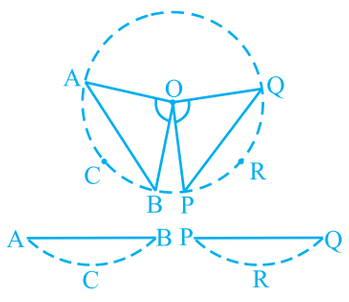
આકૃતિ 9.4

ત્રિકોણો AOB અને COD માં,

	$OA = OC$	(એક જ વર્તુળની ત્રિજ્યાઓ)
	$OB = OD$	(એક જ વર્તુળની ત્રિજ્યાઓ)
	$AB = CD$	(આપેલું છે.)
માટે,	$\Delta AOB \cong \Delta COD$	(એકરૂપતાની બાબાબા શરત)
તે પરથી	$\angle AOB = \angle COD$ મળે.	(એકરૂપ ત્રિકોણોનાં અનુરૂપ અંગો)

હવે, જો વર્તુળની બે જીવાઓ કેન્દ્ર આગળ સમાન ખૂણા આંતરે તો જીવાઓ વિશે તમે શું કહેશો ? તેઓ સમાન છે કે નહિ ? આપણે આગળની પ્રવૃત્તિ દ્વારા તેનું પરીક્ષણ કરીએ :

એક કાગળ લઈ તેના પર વર્તુળ દોરો. વર્તુળ કાપો જેથી તકતી જેવો આકાર મળે. બિંદુઓ A અને B વર્તુળ પર હોય તેવી રીતે કેન્દ્ર O આગળ એક ખૂણો AOB દોરો. કેન્દ્ર આગળ બીજો ખૂણો POQ $\angle AOB$ ના માપનો દોરો. તકતીને AB આગળ અને PQ આગળ કાપો. (જુઓ આકૃતિ 9.5). તમને વર્તુળના બે વૃત્તખંડ ACB અને PRQ મળશે. એકને બીજા પર ગોઠવો. તમે શું નિરીક્ષણ કર્યું ? તેઓ એકબીજાને આચ્છાદિત કરે છે એટલે કે તેઓ એકરૂપ છે. આથી $AB = PQ$.



આકૃતિ 9.5

જે તમે આ એક વિશિષ્ટ વિકલ્પ માટે જોયું, તે બીજા સમાન ખૂણાઓ માટે પણ ચકાસો. બધી જ જીવાઓ સમાન મળશે તે નીચેના પ્રમેય દ્વારા જોઈએ :

પ્રમેય 9.2 : *જો જીવાઓ વર્તુળના કેન્દ્ર આગળ સમાન ખૂણા આંતરે, તો તે જીવાઓ સમાન છે.*

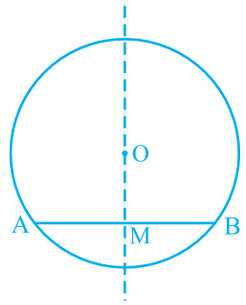
ઉપરનું પ્રમેય એ પ્રમેય 9.1 નું પ્રતીપ છે.

જો આકૃતિ 9.4 માં, તમે $\angle AOB = \angle COD$ લેશો, તો $\Delta AOB \cong \Delta COD$ થશે (શા માટે ?) તમે $AB = CD$ જોઈ શકો છો ?

સ્વાધ્યાય 9.1

1. યાદ કરો કે જો બે વર્તુળની ત્રિજ્યાઓ સમાન હોય, તો તે બે વર્તુળો સમાન છે. સાબિત કરો કે એકરૂપ વર્તુળોની સમાન જીવાઓ તેમનાં કેન્દ્ર આગળ સમાન ખૂણા આંતરે છે.
2. સાબિત કરો કે એકરૂપ વર્તુળોની જીવાઓ તેમનાં કેન્દ્ર આગળ સમાન ખૂણા આંતરે, તો તે જીવાઓ સમાન છે.

9.2 કેન્દ્રમાંથી જીવા પર દોરેલો લંબ



આકૃતિ 9.6

પ્રવૃત્તિ : એક કાગળ ઉપર વર્તુળ દોરો. તેનું કેન્દ્ર O લો. જીવા AB દોરો. હવે કાગળને O માંથી પસાર થતી રેખા આગળ એવી રીતે ગડીવાળો કે જેથી જીવાનો એક ભાગ એ બીજા ભાગ પર પડે. ધારો કે ગડી, AB ને M બિંદુમાં કાપે. આમ, $\angle OMA = \angle OMB = 90°$ અથવા OM એ AB પરનો લંબ છે. શું બિંદુ B એ A ની બરાબર ઉપર આવે ? (જુઓ આકૃતિ9.6). હા, તે આવે છે. આથી MA = MB.

OA અને OB ને જોડી અને કાટકોણ ત્રિકોણો OMA અને OMB ને એકરૂપ સાબિત કરી તમે તમારી જાતે તે સાબિત કરો. આ ઉદાહરણ એ નીચેના પરિણામનું વિશિષ્ટ દૃષ્ટાંત છે :

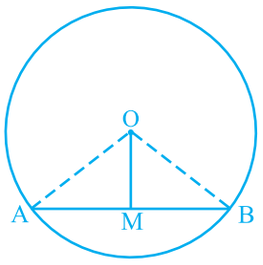
પ્રમેય 9.3 : *વર્તુળના કેન્દ્રમાંથી જીવા પર દોરેલો લંબ, જીવાને દુભાગે છે.*

આ પ્રમેયનું પ્રતીપ શું થશે?

આ લખતાં પહેલાં, આપણે સ્પષ્ટ થઈએ કે પ્રમેય 9.3 માં શું આપ્યું છે અને શું સાબિત થાય છે. વર્તુળના કેન્દ્રમાંથી જીવા પર લંબ દોરેલો છે તેમ આપ્યું છે અને તે જીવાને દુભાગે છે તેમ સાબિત કરવાનું છે. આ પ્રમાણે પ્રતીપમાં, 'જો વર્તુળના કેન્દ્રમાંથી દોરેલી રેખા જીવાને દુભાગે' તે આપેલ છે. અને 'રેખા, જીવાને લંબ છે' તેમ સાબિત કરવું છે આથી તેનું પ્રતીપ :

પ્રમેય 9.4 : *વર્તુળના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી રેખા જીવાને દુભાગે, તો તે રેખા જીવાને લંબ છે.*

આ સત્ય છે? કેટલાંક વિકલ્પો માટે પ્રયત્ન કરો અને જુઓ. તમને જોવા મળશે કે આ વિકલ્પો માટે તે સત્ય છે. નીચે આપેલ પ્રશ્ન ઉકેલીને જુઓ કે વ્યાપક રીતે તે સત્ય છે. તેના જુદા જુદા તબક્કાઓ લખીશું અને તમે તેનાં કારણો આપશો.



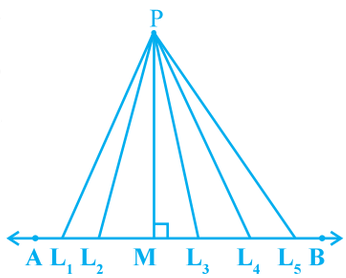
આકૃતિ 9.7

ધારો કે AB એ O કેન્દ્રવાળા વર્તુળની જીવા છે અને O ને AB ના મધ્યબિંદુ M સાથે જોડેલું છે. તમારે સાબિત કરવાનું છે કે $OM \perp AB$. OA અને OB જોડો. (જુઓ આકૃતિ 9.7).

ત્રિકોણો OAM અને OBM માં,

	OA = OB	(કેમ ?)
	AM = BM	(કેમ ?)
	OM = OM	(સામાન્ય)
માટે,	$\Delta OAM \cong \Delta OBM$	(શા માટે ?)
તે પરથી	$\angle OMA = \angle OMB = 90°$	(કેમ ?)

9.3 સમાન જીવાઓ અને તેમનું કેન્દ્રથી અંતર



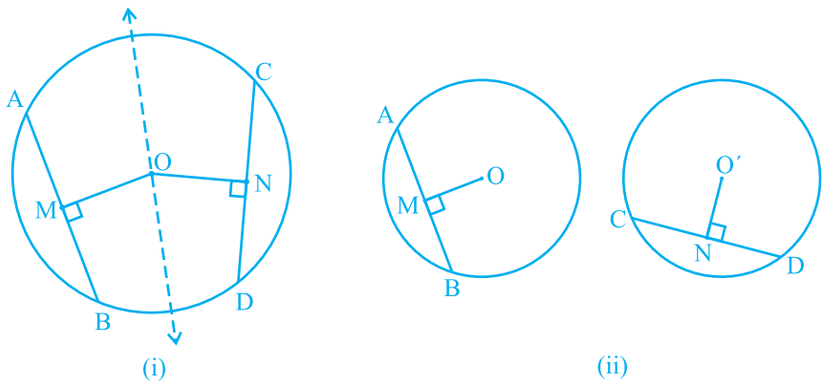
આકૃતિ 9.8

ધારો કે AB એક રેખા છે અને P રેખાની બહારનું એક બિંદુ છે. રેખા પર અનંત સંખ્યામાં બિંદુઓ હોવાથી, આ બિંદુઓને જો તમે P સાથે જોડશો, તો તમને અનંત સંખ્યામાં રેખાખંડો PL_1, PL_2, PM, PL_3, PL_4 વગેરે મળશે. આ બધામાંથી P થી ABનું અંતર કયું થશે ? તમે થોડી વાર વિચાર કરશો તો તમને જવાબ મળશે. આ બધા રેખાખંડોમાંથી આકૃતિ 9.8 માં P થી AB પરનો લંબ, PM એ નાનામાં નાનો થશે. ગણિતમાં, આપણે આ ઓછામાં ઓછી લંબાઈ PM ને P થી AB ના અંતર તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરીશું. આથી તમે કહી શકશો કે,

બિંદુથી રેખાના લંબઅંતરને બિંદુથી રેખાનું અંતર કહે છે.

નોંધીશું કે જો બિંદુ, રેખા પર આવેલું હોય, તો બિંદુથી રેખાનું અંતર શૂન્ય છે.

વર્તુળને અનંત જીવાઓ હોય છે. વર્તુળની જીવાઓ દોરતાં, તમે નિરીક્ષણ કરી શકશો કે ઓછી લંબાઈની જીવાઓ કરતાં વધારે લંબાઈની જીવાઓ કેન્દ્રની વધારે નજીક હોય છે. જુદી જુદી લંબાઈની વર્તુળની કેટલીક જીવાઓ દોરી તેમનું કેન્દ્રથી અંતર માપીને તમે આ હકીકતનું અવલોકન કરી શકશો. વર્તુળની લાંબામાં લાંબી જીવા કે જે વર્તુળનો વ્યાસ છે તેનું વર્તુળના કેન્દ્રથી અંતર કેટલું થશે? કેન્દ્ર તેના પર આવેલું હોવાથી, અંતર શૂન્ય થશે. જીવાની લંબાઈ અને તેનું કેન્દ્રથી અંતર આ બે વચ્ચેના કેટલાંક સંબંધો વિશે તમે કંઈક વિચારી શકો જો કોઈ સંબંધ હોય તો તે વિશે આપણે જોઈએ.

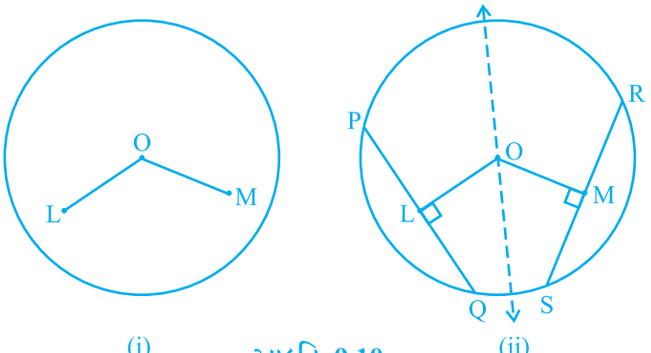


આકૃતિ 9.9

પ્રવૃત્તિ : કાગળ પર કોઈપણ ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ દોરો. તેની બે સમાન જીવાઓ AB અને CD દોરો અને કેન્દ્ર O માંથી તેમના પરના લંબ અનુક્રમે OM અને ON દોરો. આકૃતિની એવી રીતે ગડી કરો કે જેથી D એ B ઉપર પડે અને C એ A ઉપર પડે. [જુઓ આકૃતિ 9.9 (i)]. તમે નિરીક્ષણ કરશો કે O ગડી પર રહેશે અને N એ M ઉપર પડશે. આથી, OM = ON. કેન્દ્ર O અને O′ લઈ, એકરૂપ વર્તુળો દોરો. દરેકમાં એક-એક સમાન જીવા AB અને CD લઈ આ પ્રવૃત્તિનું પુનરાવર્તન કરો. તેમના પર લંબ OM અને O′N દોરો. [જુઓ આકૃતિ 9.9 (ii).] એક વર્તુળાકાર તક્તી કાપો અને તેને વર્તુળ પર એવી રીતે ગોઠવો કે જેથી AB એ CD ને બંધબેસતું થાય. તમે જોઈ શકશો કે O એ O′ પર આવે છે અને M એ N ની પર આવે છે. આ પ્રમાણે તમે નીચેના પ્રમેયની ચકાસણી કરી શકો:

પ્રમેય 9.5 : *વર્તુળ (અથવા એકરૂપ વર્તુળો)ની સમાન જીવાઓ વર્તુળના કેન્દ્ર (કેન્દ્રો)થી સમાન અંતરે આવેલી હોય છે.*

આ પ્રમેયનું પ્રતીપ સત્ય છે કે નહિ તે હવે જોઈશું. આ માટે O કેન્દ્રવાળું એક વર્તુળ દોરો. વર્તુળમાં રહે તે રીતે સમાન લંબાઈના બે રેખાખંડ OL અને OM દોરો. [જુઓ આકૃતિ 9.10 (i)]. પછી OL અને OM ને લંબ થાય તેવી વર્તુળની બે જીવાઓ અનુક્રમે PQ અને RS દોરો. [જુઓ આકૃતિ 9.10 (ii)]. PQ અને RS ની લંબાઈ માપો. શું આ ભિન્ન છે? ના, બંને સમાન છે. સમાન લંબાઈના વધારે રેખાખંડ અને તેમને લંબ જીવાઓ દોરી આ પ્રવૃત્તિનું પુનરાવર્તન કરો.



આકૃતિ 9.10

આ પ્રમેય 9.5 નું પ્રતીપ છે તેની સત્યાર્થતાની ખાતરી થાય છે અને તે નીચે દર્શાવેલ છે.

પ્રમેય 9.6 : *વર્તુળના કેન્દ્રથી સમાન અંતરે આવેલી જીવાઓ સમાન હોય છે.*

ઉપરના પરિણામની વધુ સમજૂતી માટે આપણે હવે એક ઉદાહરણ લઈએ.

ઉદાહરણ 1 : જો વર્તુળની પરસ્પર છેદતી બે જીવાઓ તેમના છેદબિંદુમાંથી પસાર થતા વ્યાસ સાથે સમાન ખૂણા બનાવે, તો સાબિત કરો કે તે જીવાઓ સમાન છે.

ઉકેલ : O કેન્દ્રવાળા વર્તુળની બે જીવાઓ AB અને CD એકબીજીને E બિંદુમાં છેદે છે. $\angle AEQ = \angle DEQ$ થાય તેવો E માંથી પસાર થતો વ્યાસ PQ છે (જુઓ આકૃતિ9.11). તમારે AB = CD સાબિત કરવાનું છે.

જીવાઓ AB અને CD પર અનુક્રમે લંબ OL અને OM દોરો. હવે,

$\angle LOE = 180° - 90° - \angle LEO$ (ત્રિકોણના ખૂણાઓના સરવાળાનો નિયમ)

$= 90° - \angle LEO$

$= 90° - \angle AEQ$

$= 90° - \angle DEQ$

$= 90° - \angle MEO \quad = \angle MOE$

ત્રિકોણો OLE અને OME માં,

$\angle LEO = \angle MEO$ (શા માટે ?)

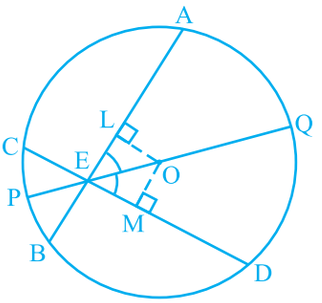
$\angle LOE = \angle MOE$ (ઉપર સાબિત કર્યું)

$EO = EO$ (સામાન્ય)

માટે, $\Delta OLE \cong \Delta OME$ (શા માટે ?)

તે પરથી $OL = OM$ (એકરૂપ ત્રિકોણના એકરૂપ અંગ)

આથી, $AB = CD$ (કેમ ?)



આકૃતિ 9.11

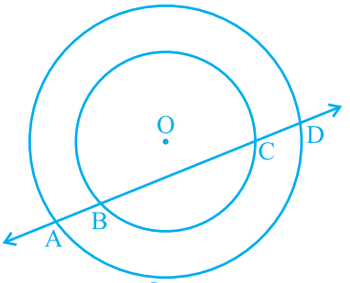
સ્વાધ્યાય 9.2

1. 5 સેમી અને 3 સેમી ત્રિજ્યાવાળાં બે વર્તુળો બે બિંદુમાં છેદે છે અને તેમના કેન્દ્ર વચ્ચેનું અંતર 4 સેમી છે. સામાન્ય જીવાની લંબાઈ શોધો.

2. જો વર્તુળની બે સમાન જીવાઓ વર્તુળની અંદર છેદે, તો બંને જીવા પર કપાતા અનુરૂપ ભાગ સમાન છે. તેમ સાબિત કરો.

3. જો વર્તુળની બે સમાન જીવાઓ વર્તુળની અંદર છેદે, તો સાબિત કરો કે છેદબિંદુને કેન્દ્ર સાથે જોડતી રેખા જીવાઓ સાથે સમાન ખૂણા બનાવે છે.

4. જો O કેન્દ્રવાળા બે સમકેન્દ્રી (*concentric*) વર્તુળો (સમાન કેન્દ્રવાળાં વર્તુળો)ને એક રેખા અનુક્રમે A, B, C અને Dમાં છેદે, તો સાબિત કરો કે AB = CD. (જુઓ આકૃતિ 9.12).



આકૃતિ 9.12

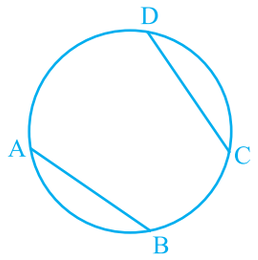
5. એક વિહારસ્થાનમાં 5 મી ત્રિજ્યાવાળા દોરેલા વર્તુળ પર રમત રમવા માટે ત્રણ છોકરીઓ રેશ્મા, સલમા અને મનદીપ ઊભાં છે. રેશ્મા દડાને સલમા તરફ ફેંકે છે. સલમા મનદીપ તરફ અને

મનદીપ રેશ્મા તરફ દડો ફેંકે છે. જો રેશ્મા અને સલમા વચ્ચેનું તથા સલમા અને મનદીપ વચ્ચેનું દરેક અંતર 6 મીટર હોય, તો રેશ્મા અને મનદીપ વચ્ચેનું અંતર કેટલું હશે?

6. એક વસાહતમાં 20મીટર ત્રિજ્યાવાળું એક વર્તુળાકાર વિહારસ્થાન આવેલું છે. ત્રણ છોકરાઓ અંકુર, સૈયદ અને ડેવિડ દરેકે પોતાના હાથમાં રમકડાનો ટેલિફોન એકબીજા સાથે વાત કરવા માટે રાખીને વર્તુળની સીમા પર સરખા અંતરે બેઠા છે. દરેકના ટેલિફોનની દોરીની લંબાઈ શોધો.

9.4 વર્તુળના ચાપે આંતરેલો ખૂણો

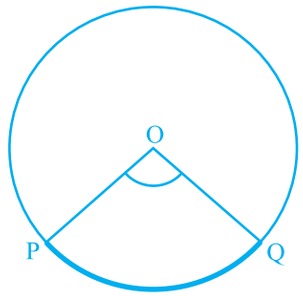
તમે જોયું કે વર્તુળના વ્યાસ સિવાયની જીવાનાં અંત્યબિંદુઓ વર્તુળનું બે ચાપમાં વિભાજન કરે છે—એક ગુરુચાપ અને બીજું લઘુચાપ. જો તમે બે સમાન જીવાઓ લો. તો તેમને સંગત ચાપનાં માપ વિશે શું કહેશો ? શું એક જીવાથી બનેલું ચાપ બીજી જીવાને અનુરૂપ બનેલા ચાપને સમાન હોય છે? હકીકતમાં, તેઓની લંબાઈ સમાન છે. જો એક ચાપને વાળ્યા અથવા વાંકું કર્યા વગર બીજા ચાપ પર મૂકવામાં આવે, તો તે બીજા પર સંપૂર્ણ રીતે આચ્છાદિત થાય છે.



આકૃતિ 9.13

વર્તુળમાંથી જીવા CD ને અનુરૂપ ચાપ કાપી અને તેને સમાન બીજી જીવા AB ને અનુરૂપ ચાપ પર ગોઠવીને આ હકીકતની ચકાસણી તમે કરી શકશો. તમે જોઈ શકશો કે ચાપ CD એ ચાપ AB પર સંપૂર્ણ આચ્છાદિત થાય છે. (જુઓ આકૃતિ 9.13). આ દર્શાવે છે કે સમાન જીવાઓ સમાન ચાપ બનાવે છે અને તેનું પ્રતીપ, સમાન ચાપ વર્તુળની સમાન જીવાઓ બનાવે છે. તમે તેને નીચે પ્રમાણે રજૂ કરી શકશો :

જો વર્તુળની બે જીવા સમાન હોય, તો તેમને અનુરૂપ ચાપ એકરૂપ છે અને તેનું પ્રતીપ, જો વર્તુળનાં બે ચાપ એકરૂપ હોય, તો તેમને અનુરૂપ જીવા સમાન છે.



આકૃતિ 9.14

વર્તુળના ચાપે વર્તુળના કેન્દ્ર આગળ આંતરેલા ખૂણાની વ્યાખ્યા એ તે ચાપની અનુરૂપ જીવાએ કેન્દ્ર આગળ આંતરેલા ખૂણા તરીકે લઈશું. જો લઘુચાપ કેન્દ્ર આગળ કોઈ ખૂણો આંતરે, તો ગુરુચાપ વિપરીત કોણ આંતરશે એમ અર્થ કરીશું. આથી આકૃતિ 9.14 માં લઘુચાપ PQ એ કેન્દ્ર O આગળ $\angle POQ$ આંતરે છે અને ગુરુચાપ PQ એ O આગળ આંતરેલો ખૂણો એ વિપરીતકોણ POQ છે.

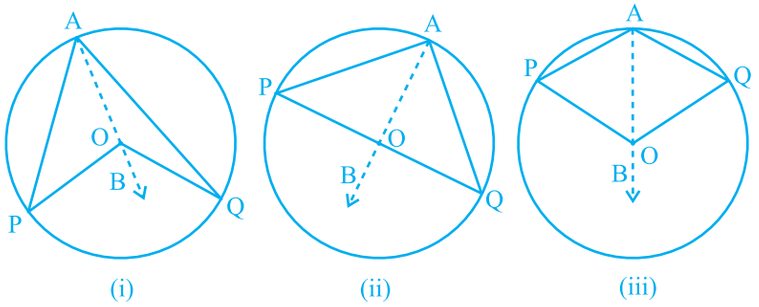
ઉપરના ગુણધર્મનું અવલોકન કરતાં અને પ્રમેય 9.1ના આધારે નીચેનું પરિણામ સત્ય છે :

વર્તુળનાં એકરૂપ ચાપ અથવા સમાન લંબાઈનાં ચાપ કેન્દ્ર આગળ સમાન ખૂણા આંતરે છે.

આથી, વર્તુળની જીવાએ કેન્દ્ર આગળ આંતરેલો ખૂણો અને તેને અનુરૂપ લઘુચાપે કેન્દ્ર આગળ આંતરેલો ખૂણો સમાન છે. નીચેનું પ્રમેય એ ચાપ દ્વારા વર્તુળના કેન્દ્ર આગળ આંતરેલા ખૂણા અને વર્તુળના કોઈપણ બિંદુએ આંતરેલા ખૂણા વચ્ચેનો સંબંધ આપે છે.

પ્રમેય 9.7 : *વર્તુળના ચાપે કેન્દ્ર આગળ આંતરેલો ખૂણો તે ચાપે વર્તુળના બાકીના ભાગ પરના કોઈપણ બિંદુ આગળ આંતરેલા ખૂણા કરતાં બમણો હોય છે.*

સાબિતી : વર્તુળનું ચાપ PQ એ કેન્દ્ર O આગળ ખૂણો POQ આંતરે છે અને વર્તુળના બાકીના ભાગ પરના બિંદુ A આગળ ખૂણો PAQ આંતરે છે તેમ આપ્યું છે. આપણે સાબિત કરવું છે કે $\angle POQ = 2 \angle PAQ$.



આકૃતિ 9.15

આકૃતિ 9.15 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ત્રણ વિકલ્પ લઈએ. (i) માં ચાપ PQ એ લઘુચાપ છે (ii) માં ચાપ PQ એ અર્ધવર્તુળ છે અને (iii) માં ચાપ PQ એ ગુરુચાપ છે.

આપણે AO ને B સુધી લંબાવીએ અને ત્યાંથી શરૂઆત કરીએ.

દરેક વિકલ્પમાં $\angle BOQ = \angle OAQ + \angle AQO$

કારણ કે ત્રિકોણનો બહિષ્કોણ એ ત્રિકોણના અંતઃસંમુખકોણના સરવાળા જેટલો હોય છે.

ΔOAQ માં,

$OA = OQ$ (વર્તુળની ત્રિજ્યાઓ)

માટે, $\angle OAQ = \angle OQA$ (પ્રમેય 7.2)

તે પરથી, $\angle BOQ = 2 \angle OAQ$ (1)

તે જ પ્રમાણે, $\angle BOP = 2 \angle OAP$ (2)

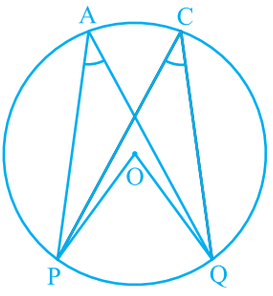
(1) અને (2) પરથી, $\angle BOP + \angle BOQ = 2(\angle OAP + \angle OAQ)$

$\therefore \angle POQ = 2 \angle PAQ.$ (3)

વિકલ્પ (iii) માટે, PQ એ ગુરુચાપ છે, (3) ને નીચે પ્રમાણે બદલીએ :

વિપરીતકોણ $POQ = 2 \angle PAQ$

નોંધ : ધારો કે આપણે ઉપરની આકૃતિમાં બિંદુઓ P અને Q ને જોડી જીવા PQ બનાવીએ, તો પછી $\angle PAQ$ ને વર્તુળના ભાગ (વૃત્તખંડ) PAQP માં બનેલો ખૂણો એમ કહીશું.



આકૃતિ 9.16

પ્રમેય 9.7 માં A એ વર્તુળના બાકી રહેતા ભાગ પરનું કોઈ પણ બિંદુ છે. આથી વર્તુળના બાકી રહેતા ભાગ પર બીજું કોઈ પણ બિંદુ C લેતાં (જુઓ આકૃતિ 9.16). તમને

$\angle POQ = 2 \angle PCQ = 2 \angle PAQ$ મળશે.

આથી, $\angle PCQ = \angle PAQ.$

આ નીચેનું પ્રમેય સાબિત કરે છે :

પ્રમેય 9.8 : *એક જ વૃત્તખંડમાં આવેલા ખૂણાઓ સમાન હોય છે.*

પ્રમેય 9.7ના વિકલ્પ (ii)ની ચર્ચા પુનઃ આપણે જુદી કરીએ. અહીં $\angle PAQ$ એ અર્ધવર્તુળ વૃત્તખંડમાં એક ખૂણો છે વળી,

$\angle PAQ = \frac{1}{2} \angle POQ = \frac{1}{2} \times 180° = 90°$. જો તમે અર્ધવર્તુળ પર બીજું કોઈ બિંદુ C લેશો, તો તમને પુનઃ

$$\angle PCQ = 90°$$ મળશે.

આથી, તમને વર્તુળનો એક બીજો ગુણધર્મ આ પ્રમાણે મળશે :

અર્ધવર્તુળમાંનો ખૂણો કાટકોણ હોય છે.

પ્રમેય 9.8 નું પ્રતીપ પણ સત્ય છે. તે નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય :

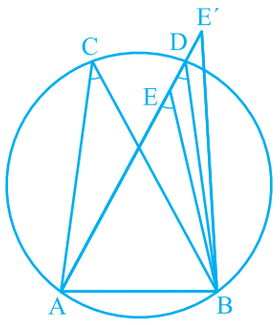
પ્રમેય 9.9 : જો બે બિંદુઓને જોડતો રેખાખંડ, એ રેખાખંડને સમાવતી રેખાની એક જ બાજુએ આવેલાં બીજાં બે બિંદુઓ આગળ સમાન ખૂણા આંતરે, તો ચારેય બિંદુઓ એક જ વર્તુળ પર આવેલાં છે. *(આ ચારેય બિંદુઓ* ***વૃત્તીય*** *(concyclic) બિંદુઓ કહેવાય.)*

આ પરિણામની સત્યાર્થતા તમે નીચે જોઈ શકશો :

આકૃતિ 9.17 માં, રેખાખંડ AB, બિંદુઓ C અને D આગળ સમાન ખૂણા આંતરે છે એટલે કે

$$\angle ACB = \angle ADB$$

બિંદુઓ A, B, C અને D એક જ વર્તુળ પર આવેલાં છે તે બતાવવા માટે આપણે A, C અને B માંથી પસાર થતું એક વર્તુળ દોરીએ. ધારો કે તે બિંદુ D માંથી પસાર થતું નથી. તો પછી તે AD ને અથવા (લંબાવેલી AD) ને કોઈક બિંદુ E (અથવા E′) માં છેદશે.



આકૃતિ 9.17

જો બિંદુઓ A, C, E અને B વર્તુળ પર આવેલાં હોય, તો

$$\angle ACB = \angle AEB$$ (શા માટે ?)

પરંતુ $\angle ACB = \angle ADB$ આપેલ છે.

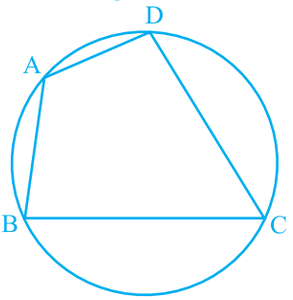
માટે, $\angle AEB = \angle ADB$

જો E એ D ઉપર હોય તો જ આ બને નહિ તો આ શક્ય નથી. (શા માટે ?)

તે જ પ્રમાણે E' પણ D ઉપર થશે.

9.5 ચક્રીય ચતુષ્કોણ

ચતુષ્કોણ ABCDનાં બધા શિરોબિંદુઓ જો એક જ વર્તુળ પર આવેલાં હોય તો ABCD ને ***ચક્રીય*** *(cyclic)* ચતુષ્કોણ કહે છે. (જુઓ આકૃતિ 9.18). આવા ચતુષ્કોણમાં તમને એક વિશિષ્ટ ગુણધર્મ જોવા મળશે. જુદી જુદી બાજુઓવાળા કેટલાક ચક્રીય ચતુષ્કોણ દોરો અને દરેકને ABCD નામ આપો. (ભિન્ન ત્રિજ્યાવાળાં કેટલાંક વર્તુળ દોરી અને તે દરેક પર ચાર બિંદુઓ લઈ આ પ્રક્રિયા કરવાથી તે શક્ય બનશે.) સામસામેના ખૂણાઓ માપો અને તમારાં અવલોકન નીચેના કોષ્ટકમાં લખો.



આકૃતિ 9.18

ચતુષ્કોણનો ક્રમાંક	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$	$\angle D$	$\angle A + \angle C$	$\angle B + \angle D$
1.						
2.						
3.						
4.						
5.						
6.						

આગળના કોષ્ટક પરથી તમે શું નિષ્કર્ષ કાઢશો ?

માપનની ક્ષતિને અવગણતાં, તમે મેળવી શકશો કે $\angle A + \angle C = 180°$ અને $\angle B + \angle D = 180°$. આ પરિણામથી નીચેની ચકાસણી થાય છે :

પ્રમેય 9.10 : *ચક્રીય ચતુષ્કોણના સામસામેના ખૂણાઓની પ્રત્યેક જોડના ખૂણાનો સરવાળો $180°$ થાય છે.*

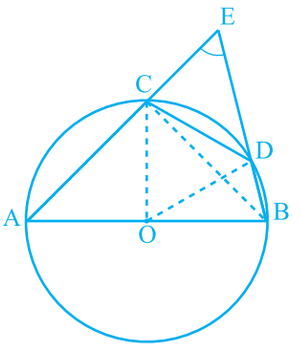
હકીકતમાં, આ પ્રમેયનું નીચે રજૂ કરેલ પ્રતીપ પણ સત્ય છે.

પ્રમેય 9.11 : *જો ચતુષ્કોણના સામસામેના ખૂણાઓની જોડના ખૂણાનો સરવાળો $180°$ હોય, તો તે ચતુષ્કોણ ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે.*

પ્રમેય 9.9 માં જે રીત બતાવી છે તે રીત અપનાવશો તો આ પ્રમેયની સાબિતી પણ તમને મળશે.

ઉદાહરણ 2 : આકૃતિ 9.19 માં, વર્તુળનો વ્યાસ AB છે. વર્તુળની ત્રિજ્યાના માપની બરાબર જીવા CD છે. AC અને BD ને લંબાવતાં તે બિંદુ E માં છેદે છે. સાબિત કરો કે $\angle AEB = 60°$

ઉકેલ : OC, OD અને BC જોડો.



આકૃતિ 9.19

ત્રિકોણ ODC સમબાજુ ત્રિકોણ છે. (શા માટે ?)

માટે, $\angle COD = 60°$

હવે, $\angle CBD = \frac{1}{2} \angle COD$ (પ્રમેય 9.7)

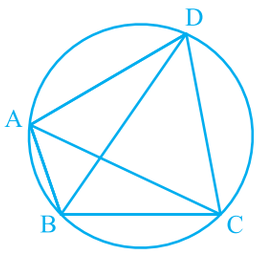
તે પરથી, $\angle CBD = 30°$ થાય.

ફરીથી, $\angle ACB = 90°$ (શા માટે?)

આથી, $\angle BCE = 180° - \angle ACB = 90°$

તે પરથી, $\angle CEB = 90° - 30° = 60°$, એટલે કે $\angle AEB = 60°$ થાય.

ઉદાહરણ 3 : આકૃતિ 9.20 માં, ABCD ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે અને AC તથા BD તેના વિકર્ણો છે. જો $\angle DBC = 55°$ અને $\angle BAC = 45°$, તો $\angle BCD$ શોધો.



આકૃતિ 9.20

ઉકેલ : $\angle CAD = \angle DBC = 55°$ (એક જ વૃત્તખંડના ખૂણાઓ)

આથી, $\angle DAB = \angle CAD + \angle BAC$

$= 55° + 45° = 100°$

પરંતુ, $\angle DAB + \angle BCD = 180°$ (ચક્રીય ચતુષ્કોણના સામસામેના ખૂણા)

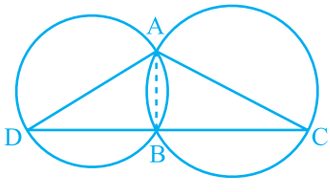
આથી, $\angle BCD = 180° - 100° = 80°$

ઉદાહરણ 4 : બે વર્તુળો બે બિંદુઓ A અને B માં છેદે છે. આ બે વર્તુળોના વ્યાસ AD અને AC છે. (જુઓ આકૃતિ 9.21). સાબિત કરો કે B એ રેખાખંડ DC પર આવેલું છે.

ઉકેલ : AB જોડો.

$\angle ABD = 90°$ (અર્ધવર્તુળમાંનો ખૂણો)

$\angle ABC = 90°$ (અર્ધવર્તુળમાંનો ખૂણો)



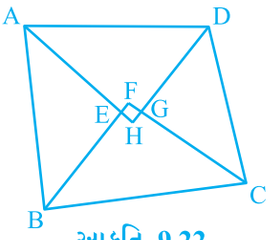
આકૃતિ 9.21

આથી, $\angle ABD + \angle ABC = 90° + 90° = 180°$

માટે, DBC એક રેખા છે એટલે કે રેખાખંડ DC પર B આવેલું છે.

ઉદાહરણ 5 : સાબિત કરો કે જો કોઈ પણ ચતુષ્કોણના અંદરના ખૂણાઓના દુભાજકો વડે ચતુષ્કોણ બને (શક્ય હોય,) તો તે ચક્રીય છે.

ઉકેલ : આકૃતિ 9.22 માં, ચતુષ્કોણ ABCD ના અંદરના ખૂણાઓ A, B, C અને D ના દુભાજકો અનુક્રમે AH, BF, CF અને DH છે. તે ચતુષ્કોણ EFGH રચે છે.



આકૃતિ 9.22

હવે, $\angle FEH = \angle AEB = 180° - \angle EAB - \angle EBA$ (કેમ ?)

$$= 180° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$$

અને $\angle FGH = \angle CGD = 180° - \angle GCD - \angle GDC$ (કેમ ?)

$$= 180° - \frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$$

આથી, $\angle FEH + \angle FGH = 180° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) + 180° - \frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$

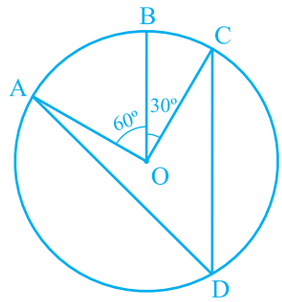
$$= 360° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D) = 360° - \frac{1}{2} \times 360°$$

$$= 360° - 180° = 180°$$

માટે, પ્રમેય 9.11 પરથી ચતુષ્કોણ EFGH ચક્રીય છે.

સ્વાધ્યાય 9.3

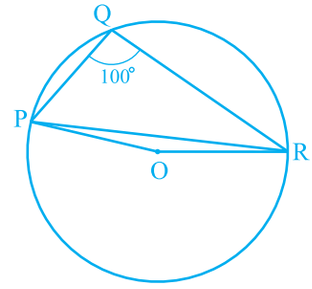
1. આકૃતિ 9.23 માં O કેન્દ્રવાળા વર્તુળ પર બિંદુઓ A, B અને C એવી રીતે આવેલાં છે કે જેથી $\angle BOC = 30°$ અને $\angle AOB = 60°$ થાય. જો ચાપ ABC સિવાયના વર્તુળ પર બિંદુ D હોય, તો $\angle ADC$ શોધો.



આકૃતિ 9.23

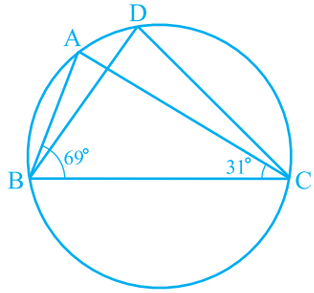
2. એક વર્તુળની જીવા અને તેની ત્રિજ્યા સમાન છે. આ જીવાએ લઘુચાપ પરના બિંદુ આગળ અને ગુરુચાપ પરના બિંદુ આગળ આંતરેલા ખૂણા શોધો.

3. આકૃતિ 9.24 માં, $\angle PQR = 100°$, જ્યાં P, Q અને R એ O કેન્દ્રવાળા વર્તુળ પરનાં બિંદુઓ છે. $\angle OPR$ શોધો.



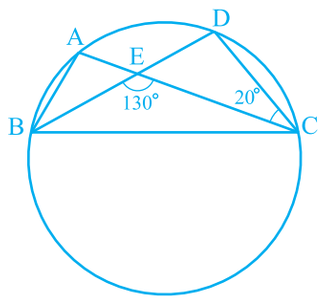
આકૃતિ 9.24

4. આકૃતિ 9.25 માં, $\angle ABC = 69°$, $\angle ACB = 31°$, છે, $\angle BDC$ શોધો.



આકૃતિ 9.25

5. આકૃતિ 9.26 માં, વર્તુળ પર ચાર બિંદુઓ A, B, C અને D આવેલાં છે. AC અને BD એ E બિંદુએ એવી રીતે છેદે છે કે જેથી $\angle$ BEC = 130° અને $\angle$ ECD = 20°. $\angle$ BAC શોધો.

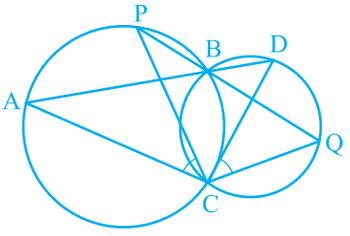


આકૃતિ 9.26

6. ચક્રીય ચતુષ્કોણ ABCD ના વિકર્ણો E બિંદુએ છેદે છે. જો $\angle$ DBC = 70°, $\angle$ BAC = 30°, તો $\angle$ BCD શોધો અને જો AB = BC, તો $\angle$ ECD શોધો.

7. જો ચક્રીય ચતુષ્કોણના વિકર્ણો એ ચતુષ્કોણનાં શિરોબિંદુઓમાંથી પસાર થતા વર્તુળના વ્યાસ હોય, તો સાબિત કરો કે તે લંબચોરસ છે.

8. જો સમલંબ ચતુષ્કોણની સમાંતર ન હોય તેવી બાજુઓ સમાન હોય, તો સાબિત કરો કે તે ચક્રીય છે.



આકૃતિ 9.27

9. બે વર્તુળો એકબીજાને બે બિંદુઓ B અને C માં છેદે છે. B માંથી પસાર થતા બે રેખાખંડ ABD અને PBQ વર્તુળોને અનુક્રમે A, D અને P, Q માં છેદે તે રીતે દોરેલા છે. (જુઓ આકૃતિ 9.27). સાબિત કરો કે $\angle$ ACP = $\angle$ QCD.

10. જો ત્રિકોણની બે બાજુઓ વ્યાસ થાય તેવી રીતે વર્તુળો દોરેલાં હોય, તો સાબિત કરો કે આ વર્તુળોનું એક છેદબિંદુ, ત્રિકોણની ત્રીજી બાજુ પર આવેલું છે.

11. કર્ણ AC હોય તેવા બે કાટકોણ ત્રિકોણ ABC અને ADC છે. સાબિત કરો કે $\angle$ CAD = $\angle$ CBD.

12. સાબિત કરો કે ચક્રીય સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ એ લંબચોરસ છે.

9.6 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં, તમે નીચેના મુદ્દાઓ શીખ્યાં :

1. વર્તુળ એ સમતલના નિશ્ચિત બિંદુથી સમાન અંતરે આવેલાં સમતલનાં તમામ બિંદુઓનો સમૂહ છે.

2. વર્તુળ (એકરૂપ વર્તુળો)ની સમાન જીવાઓ કેન્દ્ર આગળ સમાન ખૂણા આંતરે છે.

3. જો વર્તુળ(સમાન વર્તુળો)ની બે જીવાઓ કેન્દ્ર (અનુરૂપ કેન્દ્ર) આગળ સમાન ખૂણા આંતરે, તો તે જીવાઓ સમાન છે.

4. વર્તુળના કેન્દ્રમાંથી જીવા પરનો લંબ, જીવાને દુભાગે છે.

5. વર્તુળના કેન્દ્રમાંથી દોરેલી રેખા જીવાને દુભાગે, તો તે રેખા જીવાને લંબ છે.

6. વર્તુળ (એકરૂપ વર્તુળો)ની સમાન જીવાઓ કેન્દ્ર (અનુરૂપ કેન્દ્ર)થી સમાન અંતરે હોય છે.

7. વર્તુળ (એકરૂપ વર્તુળો)ના કેન્દ્ર (અનુરૂપ કેન્દ્ર)થી સમાન અંતરે આવેલી જીવાઓ સમાન હોય છે.

8. જો વર્તુળનાં બે ચાપ એકરૂપ હોય, તો તેમને સંગત જીવાઓ સમાન છે અને તેનું પ્રતીપ, જો વર્તુળની બે જીવાઓ સમાન હોય, તો તેમને સંગત (લઘુ, ગુરુ) ચાપ એકરૂપ છે.

9. વર્તુળનાં એકરૂપ ચાપ તેના કેન્દ્ર આગળ સમાન ખૂણા આંતરે છે.

10. વર્તુળના કેન્દ્ર આગળ ચાપે આંતરેલો ખૂણો એ તે ચાપે વર્તુળના બાકી રહેલા ભાગ પરના કોઈ પણ બિંદુ આગળ આંતરેલા ખૂણાથી બમણો છે.

11. વર્તુળના સમાન વૃત્તખંડના ખૂણા સમાન છે.

12. અર્ધવર્તુળમાંનો ખૂણો કાટકોણ છે.

13. જો બે બિંદુઓને જોડતો રેખાખંડ, આ રેખાખંડને સમાવતી રેખાની એક જ બાજુએ આવેલાં બીજાં બે બિંદુઓ આગળ સમાન ખૂણા આંતરે, તો તે ચારેય બિંદુઓ એક જ વર્તુળ પર આવેલાં છે.

14. ચક્રીય ચતુષ્કોણના સામસામેના ખૂણાઓનો સરવાળો 180° છે.

15. જો ચતુષ્કોણના સામસામેના ખૂણાઓનો સરવાળો 180° હોય, તો તે ચતુષ્કોણ ચક્રીય છે.