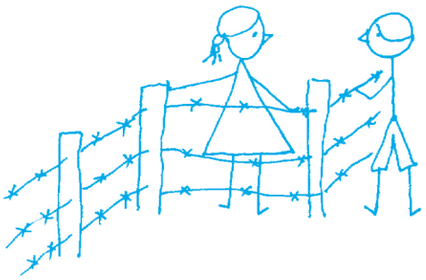
પરિશિષ્ટ 1

ગણિતમાં સાબિતીઓ

A1.1 પ્રાસ્તાવિક

ધારો કે તમારા પરિવાર પાસે જમીનનો એક પ્લોટ છે. પરંતુ તેની કોઈપણ બાજુએ કોઈ વાડ બનાવેલી નથી. એક દિવસ તમારા પડોશીએ તેની જમીનની ચારેય બાજુ વાડ બનાવવાનો નિર્ણય લીધો. જ્યારે પડોશીએ વાડ બનાવી લીધી ત્યારે તમને ખ્યાલ આવ્યો કે વાડની અંદર તમારી જમીનનો કેટલોક ભાગ ચાલ્યો ગયો છે. તમે તમારા પડોશી પાસે કેવી રીતે સાબિત કરશો કે તેણે તમારી જમીનના કેટલાક ભાગ પર કબજો કરવાનો પ્રયત્ન કર્યો છે ? આ બાબતે તમારું પહેલું કામ સીમાના વિવાદને હલ કરવા માટે ગામના વડીલોની મદદ લેવાનું છે. પરંતુ માની લો આ બાબતમાં વડીલોના મત જુદા જુદા છે. કેટલાક વડીલો તમારા પડોશીની વાતને સાચી માને છે અને કેટલાક વડીલો તમારી વાતને સાચી માને છે. ત્યારે આવી પરિસ્થિતિમાં તમે શું કરશો ? આ બાબતે તમારી પાસે માત્ર એક જ વિકલ્પ રહે છે કે તમારી જમીનના પ્લોટની હદ પર તમારો દાવો રાખવા માટે તમે એવો રસ્તો શોધી કાઢો કે જે બધાને સ્વીકાર્ય હોય. ઉદાહરણ તરીકે તમારા દાવાને સાચો સાબિત કરવા માટે અને તમારા પડોશીના દાવાને ખોટો સાબિત કરવા માટે જરૂર લાગે તો તમે અદાલતમાં સરકાર દ્વારા માન્ય તમારા ગામના સર્વેક્ષણના નકશાનો ઉપયોગ કરી શકો.



ચાલો હવે આપણે વધુ એક પરિસ્થિતિ માટે વિચાર કરીએ. ધારો કે તમારી માતાએ ઑગષ્ટ 2005 નું ઘરનું વીજળીનું બિલ ભરી દીધેલ છે. પરંતુ સપ્ટેમ્બર 2005 ના બિલમાં એ દર્શાવેલ છે કે ઑગષ્ટનું વીજળી બિલ ભરવામાં આવેલ નથી. વીજળી

વિભાગ દ્વારા કરવામાં આવેલ આ દાવાને તમે કઈ રીતે ખોટો સાબિત કરશો ? તેના માટે તમારે ભરેલા બીલની પહોંચ રજૂ કરવી પડશે. તે એ સાબિત કરી દેશે કે ઑગષ્ટ મહિનાનું બિલ ભરાઈ ગયેલ છે.

આપણા રોજિંદા જીવનમાં આપણું વિધાન કે દાવો સત્ય છે કે અસત્ય તે સાબિત કરવાની જરૂર પડે છે. જોકે કેટલાંક વિધાનો આપણે સાબિત કરવાની ચિંતા કર્યા વગર પણ સ્વીકારીએ છીએ. પરંતુ ગણિતમાં આપણે માત્ર ગાણિતિક તર્ક અનુસાર સત્ય કે અસત્ય પુરવાર કરેલાં વિધાનોને જ સ્વીકારીએ છીએ(કેટલીક પૂર્વધારણાઓ સિવાય).

વાસ્તવમાં ગણિતમાં સાબિતીઓનું અસ્તિત્વ હજારો વર્ષોથી રહેલ છે અને તે ગણિતની કોઈ પણ શાખામાં કેન્દ્રસ્થાને હોય છે. એવું માનવામાં આવે છે કે પહેલી જાણીતી સાબિતી ગ્રીસના એક તત્ત્વચિંતક અને ગણિતશાસ્ત્રી *Thales* દ્વારા આપવામાં આવેલ હતી. આમ તો મેસોપોટામિયા, ઈજિપ્ત, ચીન અને ભારત જેવી અનેક પ્રાચીન સંસ્કૃતિઓમાં ગણિત કેન્દ્રસ્થાને હતું. જે પ્રકારે આજે આપણે સાબિતીઓનો ઉપયોગ કરીએ છીએ તે રીતે તેમણે એ સાબિતીનો ઉપયોગ કરેલ હોય એ બાબતનું કોઈ સ્પષ્ટ પ્રમાણ મળતું નથી.

આ પ્રકરણમાં આપણે જોઈશું કે વિધાન શું છે, ગણિતમાં કેવી રીતે તર્ક કરવામાં આવે છે અને એક ગાણિતિક સાબિતીમાં કયા કયા પુરાવા સમાવિષ્ટ છે.

A1.2 ગાણિતિક રીતે સ્વીકાર્ય વિધાનો

આ વિભાગમાં આપણે ગાણિતિક રીતે સ્વીકાર્ય વિધાનના અર્થની વ્યાખ્યા કરવાનો પ્રયત્ન કરીશું. વિધાન એ એક એવું વાક્ય છે કે જે આદેશાત્મક અથવા ઉદ્‌ગાર વાક્ય નથી. નિશંકપણે વિધાન એ પ્રશ્ન નથી. ઉદાહરણ તરીકે ''તમારા વાળનો રંગ કયો છે ?'' આ એક વિધાન નથી. આ એક પ્રશ્ન છે. ''મહેરબાની કરીને જાઓ અને મારા માટે થોડું પાણી લઈ આવો'' આ એક આદેશ અથવા વિનંતી છે, પરંતુ વિધાન નથી. ''કેટલો અદ્‌ભુત સૂર્યાસ્ત છે!'' આ એક ઉદ્‌ગારવાચક નિર્દેશ છે, આ વિધાન નથી. છતાં ''તમારા વાળનો રંગ કાળો છે:'' આ એક વિધાન છે.

સામાન્ય રીતે વિધાન નીચે આપેલા પ્રકારોમાંથી એક હોઈ શકે છે :

- હંમેશાં સત્ય
- હંમેશાં અસત્ય
- અસ્પષ્ટ

અહીં ''અસ્પષ્ટ'' શબ્દની સમજ આપવી જરૂરી છે. બે સ્થિતિઓને લીધે વિધાન અસ્પષ્ટ બને છે. પહેલી સ્થિતિ એ છે કે ''આપણે એ નિર્ણય ન લઈ શકીએ કે વિધાન હંમેશાં સત્ય છે કે અસત્ય છે.'' ઉદાહરણ તરીકે ''કાલે ગુરુવાર છે'' અસ્પષ્ટ છે, કારણ કે એવો સંદર્ભ નથી આપ્યો કે જેના આધારે એ નિર્ણય લઈ શકીએ કે વિધાન સત્ય છે કે અસત્ય.

અસ્પષ્ટતાની બીજી સ્થિતિ ત્યારે ઊભી થાય છે જ્યારે વિધાન વ્યક્તિલક્ષી હોય છે. એટલે કે કેટલીક વ્યક્તિઓ માટે તે સત્ય હોય અને અન્ય વ્યક્તિ માટે અસત્ય હોય છે. ઉદાહરણ તરીકે ''કૂતરાઓ બુદ્ધિમાન હોય છે'' અસ્પષ્ટ વિધાન છે. કારણ કે કેટલાક લોકો તેને સત્ય માને છે અને કેટલાક તેને અસત્ય માને છે.

ઉદાહરણ 1 : નક્કી કરો કે આગળ આપેલાં વિધાનોમાંથી કયાં કયાં વિધાન હંમેશાં સત્ય છે, હંમેશાં અસત્ય છે અથવા અસ્પષ્ટ છે. તમારા જવાબોનું કારણ સાથે સમર્થન કરો.

(i) એક અઠવાડિયામાં આઠ દિવસ હોય છે.

(ii) અહીં વરસાદ થઈ રહ્યો છે.

(iii) સૂર્યાસ્ત પશ્ચિમ દિશામાં થાય છે.

(iv) ગૌરી એક દયાળુ છોકરી છે.

(v) બે અયુગ્મ પૂર્ણાંકોનો ગુણાકાર યુગ્મ થાય છે.

(vi) બે યુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગુણાકાર યુગ્મ થાય છે.

ઉકેલ :

(i) વિધાન હંમેશાં અસત્ય છે, કારણ કે એક અઠવાડિયામાં સાત દિવસ હોય છે.

(ii) આ વિધાન અસ્પષ્ટ છે, કારણ કે તે સ્પષ્ટ નથી કે 'અહીં' ક્યાં છે.

(iii) આ વિધાન હંમેશાં સત્ય છે. આપણે ક્યાંય પણ રહીએ, સૂર્યાસ્ત પશ્ચિમમાં જ થાય છે.

(iv) વિધાન અસ્પષ્ટ છે, કારણ કે વ્યક્તિલક્ષી છે. કેટલાક લોકો માટે ગૌરી દયાળુ હોઈ શકે અને અન્ય માટે નહિ.

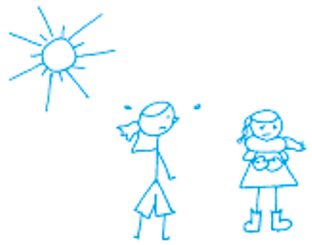
(v) વિધાન હંમેશા અસત્ય છે. બે અયુગ્મ પૂર્ણાંકોનો ગુણાકાર હંમેશાં અયુગ્મ હોય છે.

(vi) આ વિધાન હંમેશાં સત્ય છે.

આમ છતાં આ વિધાન સત્ય છે તેને સમર્થન આપવા માટે આપણે કંઈક વધુ કરવાની જરૂરિયાત છે. તેને વિકલ્પ A1.4 માં સાબિત કરવામાં આવશે.

પહેલાં કહ્યું છે તે પ્રમાણે આપણે દૈનિક જીવનમાં વિધાનની સત્યાર્થતા પ્રત્યે વધુ કાળજી લેતાં રહેતા નથી. ઉદાહરણ તરીકે ધારો કે તમારી મિત્ર તમને એ કહે છે કે કેરલના મનંતાવડીમાં જુલાઈ મહિનામાં દરરોજ વરસાદ થાય છે. પૂર્ણ વિશ્વાસ સાથે તમે તેના આ વિધાનને સત્ય માની લેશો. અલબત તે શક્ય છે કે જુલાઈના મહિનામાં એક કે બે દિવસ વરસાદ ન પણ થયો હોય અને જો તમે વકીલ ન હો તો, તમે તેની સાથે દલીલ કરશો નહિ !

એક અન્ય ઉદાહરણરૂપે જેને આપણે વારંવાર એકબીજા સાથે પ્રયોગમાં લેતા હોઈએ એવાં કેટલાંક વિધાનો લો, જેમકે ''આજે બહુ ગરમી છે.'' આપણે એવાં વિધાનોને સરળતાથી સ્વીકારી લઈએ છીએ, કારણ કે આપણે સંદર્ભ જાણીએ છીએ. અલબત આ વિધાન અસ્પષ્ટ છે : ''આજે બહુ ગરમી છે''નો અર્થ જુદા જુદા લોકો માટે જુદો જુદો હોઈ શકે છે. કારણ કે કુમાઉના વ્યક્તિ માટે જે મોસમ ગરમ હશે એ ચેન્નાઈના વ્યક્તિ માટે ગરમ ન પણ હોઈ શકે.



પરંતુ ગાણિતિક વિધાન અસ્પષ્ટ ન હોઈ શકે. જે વિધાન કાં તો સત્ય હોય અથવા અસત્ય હોય તે વિધાન જ ગણિતમાં સ્વીકાર્ય અથવા માન્ય છે. જે વિધાન હંમેશા સત્ય હોય તેને આપણે સત્ય વિધાન કહીશું, નહીં તો તેને અસત્ય વિધાન કહીશું.

ઉદાહરણ તરીકે $5 + 2 = 7$ હંમેશાં સત્ય છે. આથી '$5 + 2 = 7$' એક સત્ય વિધાન છે. $5 + 3 = 7$ અસત્ય વિધાન છે.

ઉદાહરણ 2 : નિશ્ચિત કરો કે નીચે આપેલ વિધાન સત્ય છે કે અસત્ય :

(i) ત્રિકોણના ત્રણ ખૂણાઓનો સરવાળો $180°$ હોય છે.

(ii) 1 થી મોટી પ્રત્યેક અયુગ્મ સંખ્યા અવિભાજ્ય હોય છે.

(iii) કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે $4x + x = 5x$ હોય છે.

(iv) પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે $2x > x$ થાય.

(v) પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે $x^2 \geq x$ થાય.

(vi) જો એક ચતુષ્કોણની તમામ બાજુઓ સમાન હોય, તો તે એક ચોરસ હોય છે.

ઉકેલ :

(i) આ વિધાન સત્ય છે. તેની સાબિતી પાના નં. 159 પર પ્રમેય A1.1 માં આપી છે.

(ii) આ વિધાન અસત્ય છે. ઉદાહરણ તરીકે 9 એ અવિભાજ્ય સંખ્યા નથી.

(iii) આ વિધાન સત્ય છે.

(iv) આ વિધાન અસત્ય છે. ઉદાહરણ તરીકે $2 \times (-1) = -2$ અને -2 એ -1 થી મોટી સંખ્યા નથી.

(v) આ વિધાન અસત્ય છે ઉદાહરણ તરીકે $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, અને $\frac{1}{4}$ એ $\frac{1}{2}$ થી મોટી સંખ્યા નથી.

(vi) આ વિધાન અસત્ય છે. કારણ કે સમબાજુ ચતુષ્કોણની બાજુઓ સમાન હોય છે. પરંતુ એ જરૂરી નથી કે તે એક ચોરસ હોય.

એક વાત તરફ તમે ચોક્કસ ધ્યાન આપ્યું હશે કે ગણિત અનુસાર વિધાન સત્ય નથી તે સ્થાપિત કરવા માટે આપણે એવું એક ઉદાહરણ અથવા એવી પરિસ્થિતિ બતાવવી પડે જ્યાં તે સત્ય ન બને. આથી (ii) માં 9 એ અવિભાજ્ય સંખ્યા નથી, એ એક એવું ઉદાહરણ છે કે વિધાન ''1 થી મોટી પ્રત્યેક અયુગ્મ સંખ્યા અવિભાજ્ય હોય છે.'' તે સત્ય નથી. આ પ્રકારના જે વિધાનને અનુકૂળ ન હોય તેવા ઉદાહરણને પ્રતિઉદાહરણ કહે છે. આપણે વિભાગ A1.5 માં પ્રતિઉદાહરણો પર વિગતથી ચર્ચા કરીશું.

એ વિગત તરફ પણ તમે ચોક્કસ ધ્યાન આપ્યું હશે કે જો કે વિધાન (iv), (v) અને (vi) અસત્ય છે. છતાં પણ તેના પર કેટલીક શરત લગાવીને તેને સત્ય બનાવી શકાય છે.

ઉદાહરણ 3 : નીચે આપેલ વિધાનોને ઉચિત શરતો સાથે એવી રીતે ફરી લખો કે જેથી તે સત્ય વિધાન બને.

(i) પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે $2x > x$ થાય.

(ii) પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે $x^2 \geq x$ થાય.

(iii) જો તમે કોઈ એક સંખ્યાને તે જ સંખ્યા વડે ભાગો તો તમને હંમેશાં 1 મળે.

(iv) વર્તુળના એક બિંદુ પર તેની જીવાએ આંતરેલ ખૂણો $90°$ નો હોય છે.

(v) જો એક ચતુષ્કોણની તમામ બાજુઓ સમાન હોય તો તે ચોરસ હોય છે.

ઉકેલ :

(i) જો $x > 0$ હોય તો $2x > x$ થાય.

(ii) જો $x \leq 0$ હોય અથવા $x \geq 1$ હોય તો $x^2 \geq x$ થાય.

(iii) જો શૂન્યેતર સંખ્યાને તે જ સંખ્યા વડે ભાગીએ તો આપણને હંમેશાં 1 મળે.

(iv) વર્તુળના એક બિંદુ પર તેના વ્યાસ દ્વારા આંતરાયેલ ખૂણો $90°$ નો હોય છે.

(v) જો એક ચતુષ્કોણની તમામ બાજુઓ અને તમામ ખૂણાઓ સમાન હોય તો તે એક ચોરસ થાય.

સ્વાધ્યાય A1.1

1. નીચે આપેલાં વિધાન હંમેશાં સત્ય છે, હંમેશાં અસત્ય છે કે અસ્પષ્ટ છે તે નક્કી કરો.. કારણ સાથે જવાબ જણાવો.

(i) એક વર્ષમાં 13 મહિના હોય છે.

(ii) દિવાળી શુક્રવારના દિવસે આવે છે.

(iii) મગાદીમાં તાપમાન $26°$ C છે.

(iv) પૃથ્વીને એક ચંદ્ર છે.

(v) કૂતરાઓ ઉડી શકે છે.

(vi) ફેબ્રુઆરીમાં માત્ર 28 દિવસ હોય છે.

2. નીચે આપેલાં વિધાન સત્ય છે કે અસત્ય, તે કારણ સાથે જણાવો.

(i) ચતુષ્કોણના ખૂણાઓનો સરવાળો $350°$ હોય છે.

(ii) કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે $x^2 \geq 0$ છે.

(iii) સમબાજુ ચતુષ્કોણ એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હોય છે.

(iv) બે યુગ્મ સંખ્યાઓનો સરવાળો યુગ્મ થાય છે.

(v) બે અયુગ્મ સંખ્યાઓનો સરવાળો અયુગ્મ થાય છે.

3. ઉચિત શરતો લગાવીને નીચેનાં વિધાનોને એવી રીતે લખો કે વિધાન સત્ય બની જાય.

(i) તમામ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ અયુગ્મ હોય છે.

(ii) એક વાસ્તવિક સંખ્યાના બે ગણા હંમેશાં એક યુગ્મ સંખ્યા હોય છે.

(iii) કોઈ પણ x માટે $3x + 1 > 4$ થાય.

(iv) કોઈ પણ x માટે $x^3 \geq 0$ થાય.

(v) પ્રત્યેક ત્રિકોણમાં મધ્યગા કોણદ્વિભાજક પણ હોય છે.

A1.3 આનુમાનિક તર્ક

એક સ્પષ્ટ વિધાનની યથાર્થતા સ્થાપિત કરવામાં મુખ્ય તર્કસંગત સાધન આનુમાનિક તર્ક છે.

આવો આનુમાનિક તર્કને સમજવા માટે આપણે એક કોયડાને ઉકેલવાથી શરૂઆત કરીએ.

ધારો કે તમને ચાર કાર્ડ આપવામાં આવ્યા છે. પ્રત્યેક કાર્ડની એક બાજુમાં એક મૂળાક્ષર છાપેલ છે અને બીજી બાજું પૂર્ણાંક સંખ્યા છે.



ધારો કે તમને કહેવામાં આવે છે કે કાર્ડ નીચે આપેલા નિયમનું પાલન કરે છે.

''જો કાર્ડની એક બાજુ યુગ્મ સંખ્યા હોય તો બીજી બાજુ એક સ્વર હોય છે.''

નિયમની સત્યતાની ચકાસણી કરવા માટે ઓછામાં ઓછા કેટલા કાર્ડને ઉલટાવવાની જરૂરિયાત પડશે ?

હા, એ વિકલ્પ તો તમારી પાસે છે જ કે તમે દરેક કાર્ડને ઉલટાવી શકો છો અને ચકાસણી કરી શકો છો. પરંતુ શું તમે **ઓછામાં ઓછી સંખ્યામાં** કાર્ડને ઉલટાવીને આપેલ વિધાનની ચકાસણી કરી શકશો ?

ધ્યાનાકર્ષક મુદ્દો છે કે જે કાર્ડની એક બાજુ યુગ્મ સંખ્યા છે હોય, તો તેની બીજી બાજુ એક સ્વર છે. આ વિધાનમાં એ કહ્યું નથી કે જે કાર્ડની એક બાજુ સ્વર છે, તેની બીજી બાજુ એક યુગ્મ સંખ્યા હોય જ. એવું બની પણ શકે અથવા ન પણ બની શકે. નિયમમાં એ પણ કહેલ નથી કે જે કાર્ડની એક બાજુ અયુગ્મ સંખ્યા હોય, તો તેની બીજી બાજુ વ્યંજન જ હોવો જોઈએ. એવું બની પણ શકે અથવા ન પણ બની શકે.

આથી શું આપણે 'A' એ ઉલટાવવાની જરૂરિયાત છે ? ના ! બીજી બાજુ યુગ્મ સંખ્યા હોય કે અયુગ્મ સંખ્યા ત્યારે પણ નિયમ લાગુ પડે છે.

'5' ના સંબંધમાં તમે શું કરશો ? અહીં પણ આપણે કાર્ડ ઉલટાવવાની જરૂર નથી. કારણ કે નિયમ બીજી બાજુ સ્વર હોય કે વ્યંજન ત્યારે પણ લાગું પડે છે.

પરંતુ V અને 6 વાળા કાર્ડને ઉલટાવવાની જરૂરિયાત છે. જો V ની બીજી બાજુએ એક યુગ્મ સંખ્યા હોય તો નિયમ ભંગ થઈ જાય છે. તે જ પ્રકારે જો 6 ની બીજી બાજુ વ્યંજન હોય તો પણ નિયમ ભંગ થઈ જાય છે.

આ કોયડાને ઉકેલવા માટે આપણે જે પ્રકારે તર્કનો ઉપયોગ કર્યો છે. તેને આનુમાનિક તર્ક કહેવાય છે. આને ''આનુમાનિક'' એટલા માટે કહેવાય છે, કારણ કે તર્કનો ઉપયોગ કરીને પહેલાં તારવેલ અથવા સ્થાપિત કરેલા વિધાન પરથી આપણે એક પરિણામ અથવા વિધાન પ્રાપ્ત કરી શકીએ છીએ. ઉદાહરણ માટે ઉપરના કોયડામાં અનુમાન કરેલા તર્કની હારમાળા પરથી આપણે એ મેળવ્યું કે માત્ર, V અને 6 ને જ ઉલટાવવાની જરૂર છે.

આનુમાનિક તર્કની સહાયતાથી આપણે એ તારણ પણ કાઢી શકીએ કે અમુક ચોક્કસ વિધાન સત્ય છે, કારણ કે જેને સત્ય માનવામાં આવ્યું છે એવા એક ખૂબ જ વ્યાપક વિધાનનો તે એક વિશિષ્ટ કિસ્સો છે. ઉદાહરણ તરીકે જ્યારે એકવાર આપણે એ સાબિત કરી લઈએ કે અયુગ્મ સંખ્યાઓનો ગુણાકાર હંમેશાં અયુગ્મ જ થાય છે. ત્યારે આપણે તરત જ એ તારણ કાઢી શકીએ કે 70001 × 134563 અયુગ્મ થશે. કારણ કે 70001 અને 134563 બંને સંખ્યાઓ જ અયુગ્મ છે.

સદીઓથી આનુમાનિક તર્ક માનવચિંતનનું એક અંગ રહ્યું છે અને તેનો પ્રયોગ આપણા દૈનિક જીવનમાં થતો રહે છે. ઉદાહરણ તરીકે માની લો કે આ વિધાન ''જ્યારે આગળના દિવસનું મહત્તમ તાપમાન 28° C થી વધુ હોય માત્ર ત્યારે જ સોલારિસ ફૂલ ખીલે છે'' અને ''15 સપ્ટેમ્બર, 2005 ના દિવસે કાલ્પનિક ખીણમાં સોલારિસ ખીલ્યું હતું'' ત્યારે આનુમાનિક તર્કનો પ્રયોગ કરીને આપણે એ તારણ કાઢી શકીએ કે કાલ્પનિક ખીણમાં 14 સપ્ટેમ્બર 2005 ના રોજ મહત્તમ તાપમાન 28° C થી વધુ હતું.

આપણી કમનસીબી એ છે કે, આપણે દૈનિક જીવનમાં હંમેશાં સત્ય તર્કનો ઉપયોગ કરતાં નથી! હંમેશાં આપણે પહેલાં અસત્ય તર્કના આધારે અનેક તારણ કાઢી લઈએ છીએ. ઉદાહરણ તરીકે જો તમારા મિત્ર એક દિવસ તમને જોઈને હસે નહિ તો તમે એ તારણ કાઢી લો છો કે તે તમારાથી નારાજ છે. અલબત્ત આ પણ બની શકે કે ''જો તેના માથામાં ખૂબ દુખાવો હોય તો તે તમને જોઈને હસ્યા ન હોય'' તમે રોજબરોજ જે તારણ કાઢો છો તે તારણ માન્ય તર્ક પર આધારિત છે કે ખામીયુક્ત તર્ક પર તે શા માટે ચકાસતા નથી ?

સ્વાધ્યાય A1.2

1. આનુમાનિક તર્ક પરથી નીચે આપેલા પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

(i) મનુષ્ય સસ્તન છે. તમામ સસ્તન પૃષ્ઠવંશી હોય છે. આ બે વિધાનોના આધારે તમે મનુષ્યના સંબંધમાં શું તારણ કાઢી શકો છો ?

(ii) એન્થની એક વાળ કાપનાર છે. દિનેશે તેના વાળ કપાવ્યા છે. શું તમે એ તારણ કાઢી શકો કે એન્થનીએ દિનેશના વાળ કાપ્યા છે ?

(iii) મંગળવાસીને લાલ જીભ છે. ગુલગ એક મંગળવાસી છે. આ બે વિધાનોના આધારે તમે ગુલગના વિશે તારણ કાઢી શકો ?

(iv) જો કોઈ દિવસ ચાર કલાકથી વધુ સમય સુધી વરસાદ થાય, તો બીજા દિવસે ગટરોની સફાઈ કરવી પડે છે. આજે છ કલાક સુધી વરસાદ થયો છે. કાલે ગટરની સ્થિતિ શું હશે ? આ વિશે તમે શું તારણ કાઢી શકો છો ?



(v) બાજુના કાર્ટૂનમાં આપેલ ગાયે કરેલા તર્કમાં શું વિરોધાભાસ છે ?

2. તમને ફરીથી ચાર કાર્ડ આપેલ છે. દરેક કાર્ડની એક બાજુ એક સંખ્યા અને બીજી બાજુ અક્ષર છાપેલ છે. નીચે આપેલા નિયમ લાગુ પડે છે કે નહિ તેની ચકાસણી કરવા માટે કયાં બે કાર્ડ એવાં છે જેને ઉલટાવવાની જરૂરિયાત છે ?

''જો કાર્ડની એક બાજુ એક વ્યંજન છે તો તેની બીજી બાજુ એક અયુગ્મ સંખ્યા છે.''



A1.4 પ્રમેય, અનુમાન અને પૂર્વધારણા

અત્યાર સુધી આપણે કેટલાંક વિધાનોની ચર્ચા કરી છે અને જોયું છે કે, આ વિધાનોની માન્યતાની-ચકાસણી કેવી રીતે કરવામાં આવે છે.

આ વિભાગમાં જે ત્રણ જુદા-જુદા પ્રકારનાં વિધાનોથી ગણિતનું નિર્માણ થયું છે એ પ્રમેય, અનુમાન અને પૂર્વધારણા અને તેમની વચ્ચેનો તફાવત સમજવા વિશે તમે અભ્યાસ કરશો.

તમે પહેલાં પણ અનેક પ્રમેયો શીખી ગયા છો. આ પ્રમેય શું છે ? જેની સત્યાર્થતા પુરવાર (સાબિત) કરી દેવામાં આવી છે એવાં ગાણિતિક વિધાનોને પ્રમેય કહે છે. ઉદાહરણ તરીકે આગળ આપેલ વિધાન પ્રમેય છે તે તમે વિભાગ A1.5 માં જોશો.

પ્રમેય A1.1 : *ત્રિકોણના અંત:કોણોનો સરવાળો 180° હોય છે.*

પ્રમેય A1.2 : *બે યુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગુણાકાર યુગ્મ હોય છે.*

પ્રમેય A1.3 : *કોઈ પણ ત્રણ ક્રમિક યુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગુણાકાર 16 વડે વિભાજ્ય હોય છે.*

આપણે ગાણિતિક સમજ અને અનુભવ એટલે કે ગાણિતિક અંત:સ્ફુરણાના આધારે સત્ય માનીએ છીએ એવું વિધાન ગાણિતિક અટકળ કહેવાય છે. ગાણિતિક અટકળ સત્ય પણ હોય કે અસત્ય પણ હોય, જો આપણે તેને સાબિત કરી શકીએ તો તે એક પ્રમેય બની જાય છે. ગણિતજ્ઞો ભાત નિહાળી તે પરથી ચતુર ગાણિતિક કલ્પના કરી ગાણિતિક અટકળ કરે છે. ચાલો આપણે કેટલાંક સ્વરૂપ લઈએ અને જોઈએ કે આપણે તેમનો કેવી રીતે બુદ્ધિપૂર્વક ઉપયોગ કરી શકીએ છીએ.

ઉદાહરણ 4 : કોઈ પણ ત્રણ ક્રમિક સંખ્યાઓ લો અને તેને ઉમેરો, જેમકે,

$2 + 4 + 6 = 12, 4 + 6 + 8 = 18, 6 + 8 + 10 = 24, 8 + 10 + 12 = 30, 20 + 22 + 24 = 66.$

શું તમે આ સરવાળાઓનાં પરિણામોથી કોઈ સ્વરૂપનું અનુમાન લગાવી શકો છો ? તેના વિશે તમે શું અનુમાન લગાવી શકો છો ?

ઉકેલ : એક અનુમાન આ હોઈ શકે છે.

(i) ત્રણ ક્રમિક યુગ્મ સંખ્યાઓનો સરવાળો યુગ્મ હોય છે.

અન્ય અનુમાન એ પણ હોઈ શકે છે :

(ii) ત્રણ ક્રમિક યુગ્મ સંખ્યાઓનો સરવાળો 6 થી વિભાજ્ય હોય છે.

ઉદાહરણ 5 : સંખ્યાઓનું નીચે પ્રમાણે સ્વરૂપ લો. તેને પાસ્કલ ત્રિકોણ કહેવામાં આવે છે.

હરોળ																								સંખ્યાઓનો સરવાળો
1											1													1
2										1		1												2
3									1		2		1											4
4								1		3		3		1										8
5							1		4		6		4		1									16
6						1		5		10		10		5		1								32
7								:						:										:
8								:						:										:

7 મી અને 8 મી હરોળની સંખ્યાઓના સરવાળા માટે તમે શું અનુમાન આપી શકો છો ? હરોળ 21 ની સંખ્યાઓ માટે તમે શું કહેશો ? શું તમે આ તરાહ જોઈ ? હરોળ n ની સંખ્યાઓના સરવાળાના સૂત્ર માટે અનુમાન કરો.

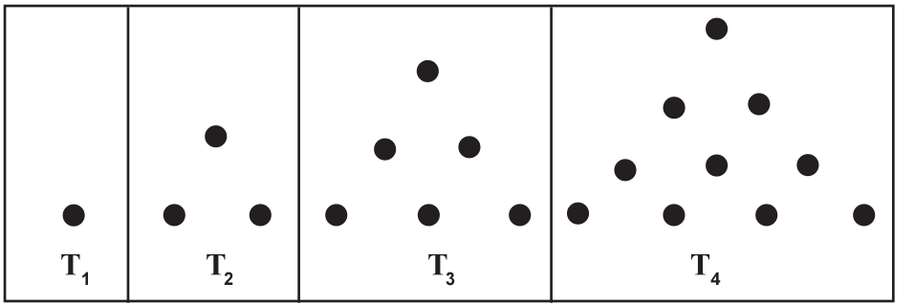
ઉકેલ : 7 મી હરોળની સંખ્યાઓનો સરવાળો $= 2 \times 32 = 64 = 2^6$ છે.

8 મી હરોળની સંખ્યાઓનો સરવાળો $= 2 \times 64 = 128 = 2^7$ છે.

21 મી હરોળની સંખ્યાઓનો સરવાળો $= 2^{20}$ છે.

હરોળ n ની સંખ્યાઓનો સરવાળો = 2^{n-1} છે.

ઉદાહરણ 6 : નીચે જણાવેલ ત્રિકોણીય સંખ્યાઓ T_n લો :

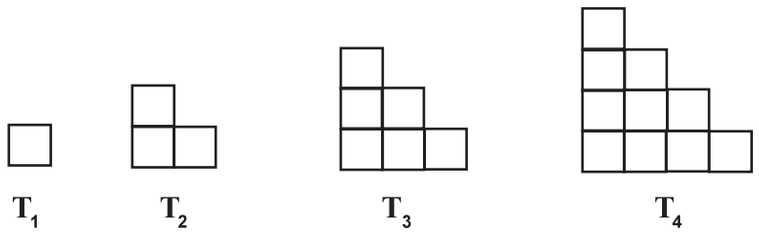


આકૃતિ A1.1

અહીં ટપકાંઓની એવી રીતે ગોઠવણી કરેલ છે કે જેનાથી એક ત્રિકોણ બને છે. અહીં $T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 6$, $T_4 = 10$ વગેરે. શું તમે અનુમાન લગાવી શકો કે T_5 શું છે ? T_6 વિશે તમે શું કહી શકો ? T_n ના વિશે તમે શું કહી શકો છો ?

T_n નું એક અનુમાન આપો.

જો તમે તેને નીચે દર્શાવેલ રીત વડે ફરી દોરો તો તમને મદદ (સરળતા) મળી શકે છે :



આકૃતિ A1.2

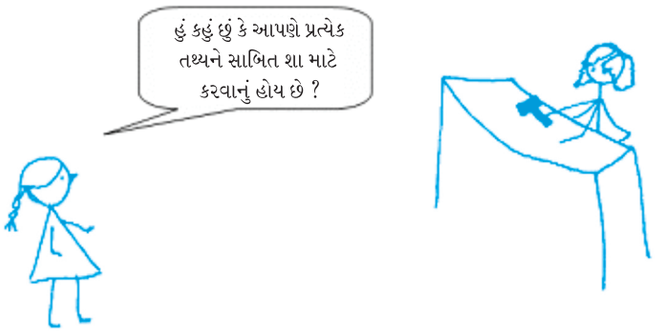
ઉકેલ : $T_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 = \frac{5 \times 6}{2}$

$T_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 = \frac{6 \times 7}{2}$

$T_n = \frac{n \times (n+1)}{2}$

ગાણિતિક અટકળ માટે એક અનુકૂળ ઉદાહરણ હજી પણ મુક્ત છે. (એટલે કે હજી સુધી સાબિત કરવામાં આવ્યું નથી કે તે સત્ય છે કે અસત્ય) આ ગાણિતિક અટકળ ગણિતશાસ્ત્રી ***Christian Goldbach*** (1690 – 1764)ના નામે રાખવામાં આવી છે. ***Goldbach***ની અટકળનું વિધાન એ છે કે "4 થી મોટા પ્રત્યેક યુગ્મ પૂર્ણાંકને બે અયુગ્મ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓના સરવાળાના રૂપમાં વ્યક્ત કરી શકાય છે." જો તમે આ સાબિત કરી શકશો કે આ પરિણામ સત્ય છે કે અસત્ય તો તમે પ્રસિદ્ધ થઈ જશો.

એ જોઈને તમને ચોક્કસ આશ્ચર્ય થયું હશે કે શું ગણિતમાં તમારી સામે જે કંઈ પણ આવે છે તેને સાબિત કરવું જરૂરી છે અને જો નહિ તો શા માટે નહિ ?



વાસ્તવિકતા તો એ છે કે ગણિતના દરેક ક્ષેત્ર કેટલાંક વિધાનો પર આધારિત હોય છે. તેમને આપણે સત્ય માની લઈએ છીએ અને તેમને સાબિત કરતા નથી. જેને આપણે સાબિતી વગર સત્ય માની લઈએ છીએ તે ''સ્વયં સત્ય છે''. આ વિધાનોને ''સ્વયં સિદ્ધ સત્ય'' કહે છે. પ્રકરણ-5 માં તમે યુક્લિડના સ્વંય સિદ્ધ સત્ય અને પૂર્વધારણાઓનો અભ્યાસ કરી ગયા છો.(આજકાલ સ્વયં સિદ્ધ સત્યો અને પૂર્વધારણાઓ વચ્ચે કોઈ ભેદ રાખવામાં આવતો નથી.) ઉદાહરણ તરીકે યુક્લિડની પહેલી પૂર્વધારણા છે :

કોઈ એક બિંદુથી અન્ય કોઈ બિંદુ સુધી એક સીધી રેખા દોરી શકાય છે અને

તેની ત્રીજી પૂર્વધારણા છે : કોઈ કેન્દ્ર અને કોઈપણ ત્રિજ્યા લઈને એક વર્તુળ દોરી શકાય છે.

આ વિધાનો સંપૂર્ણ સત્ય જોવા મળે છે અને યુક્લિડે તેમને સાચાં માની લીધાં હતાં. શા માટે ?

તેમણે તેને સત્ય એટલા માટે માની લીધાં કે આપણે દરેક હકીકતને સાબિત કરી શકતા નથી અને આપણે કયાંક ને ક્યાંકથી શરૂઆત તો કરવી જ પડે છે. તેના માટે આપણે જેને સત્ય માની લઈએ એવાં કેટલાંક વિધાનોની જરૂરિયાત હોય છે અને ફરી આ સ્વયં સિદ્ધ સત્યો પર આધારિત રહીને આપણે આપણા જ્ઞાનનું નિર્માણ કરી શકીએ છીએ.

તમને એ જાણીને આશ્ચર્ય થઈ શકે છે કે તો પછી આપણે આ બધાં વિધાનોનો સ્વીકાર કેમ નથી કરી લેતાં. તેનાં અનેક કારણ છે. ઘણી વાર આપણી અંતઃસ્ફુરણા ખોટી સાબિત થઈ શકે છે; ચિત્ર કે નમૂનાનું માળખું આપણને દગો દઈ શકે છે અને ફરી આપણી સામે માત્ર એક જ વિકલ્પ બચે છે કે આપેલ હકીકતોને સત્ય સાબિત કરીએ.

ઉદાહરણ તરીકે આપણામાંથી અનેક વ્યક્તિ એ વિશ્વાસ કરે છે કે જો એક સંખ્યાને અન્ય સંખ્યાથી ગુણીએ તો પ્રાપ્ત પરિણામ બંને સંખ્યાઓથી મોટું હશે. પરંતુ આપણે એ જાણીએ છીએ કે એ હંમેશાં સત્ય નથી હોતું.

ઉદાહરણ તરીકે $5 \times 0.2 = 1$ છે. આ પરિણામ 5 થી નાનું છે.

હવે તમે નીચે આપેલ આકૃતિ A1.3 જુઓ. કયો રેખાખંડ વધુ લાંબો છે.

AB કે CD ?



ઉદાહરણ A1.3

AB ની લંબાઈ ટૂંકી દેખાવા છતાં પણ બંનેની લંબાઈ સમાન છે.

તમને નવાઈ લાગશે સ્વયંસિદ્ધ સત્યો આપણી અંત:સ્ફુરણાના આધારે પસંદ કરાયા છે અને તે સ્વયં પુરાવા રૂપ દૃષ્ટિમાન થાય છે માટે, આપણે તેમને સત્ય માનીએ છીએ. જો કે, તે શક્ય છે કે પાછળથી એવું પરિણામ મેળવી શકાય કે કોઈ ચોક્કસ સ્વયંસિદ્ધ સત્ય એ સત્ય નથી ! આવી શક્યતા સામે શું રક્ષણ છે? આપણે નીચેનાં સોપાનો લઈએ :

(i) સ્વયંસિદ્ધ સત્યોને ખૂબ જ ન્યૂનતમ રાખવાં. ઉદાહરણ તરીકે માત્ર સ્વયંસિદ્ધ સત્યો અને યુક્લિડની પાંચ પૂર્વધારણાઓને આધારે આપણે સેંકડો પ્રમેય તારવી શકીએ છીએ.

(ii) સુનિશ્ચિત કરો કે સ્વયંસિદ્ધ સત્યો સુસંગત છે.

જો આપણે એક સ્વયંસિદ્ધ સત્યનો ઉપયોગ બીજું સ્વયંસિદ્ધ સત્ય ખરું નથી તે બતાવવા માટે કરી શકીએ તો આપણે કહી શકીએ કે સ્વયંસિદ્ધ સત્યનો સમૂહ વિસંગત છે. ઉદાહરણ તરીકે, નીચેનાં બે વિધાનોનો વિચાર કરો. આપણે સાબિત કરીશું કે તેઓ સુસંગત નથી.

વિધાન 1: કોઈ પૂર્ણ સંખ્યા તેની ક્રમિક સંખ્યાને સમાન નથી.

વિધાન 2: પૂર્ણ સંખ્યાને શૂન્ય વડે ભાગતાં પૂર્ણ સંખ્યા મળે.

(**યાદ રાખો : શૂન્ય વડે ભાગાકાર અવ્યાખ્યાયિત છે.** પરંતુ ક્ષણિક એવું માનીએ કે તે શક્ય છે અને જોઈએ કે શું થાય છે.) વિધાન 2, પરથી આપણે $\frac{1}{0} = a$, મેળવીએ, જ્યાં a કોઈ પૂર્ણ સંખ્યા છે, અને તે દર્શાવે છે કે $1 = 0$. પરંતુ આ વિધાન 1 ને અસત્ય ઠેરવે છે. તે દર્શાવે છે કે કોઈ પૂર્ણ સંખ્યા તેની ક્રમિક સંખ્યાને સમાન નથી.

(iii) અસત્ય હોય તેવું સ્વયંસિદ્ધ સત્ય, વહેલું કે મોડું એક વિરોધાભાસમાં પરિણમે છે. *જ્યારે આપણે એક એવું વિધાન મેળવીએ જેનાં બંને પરિણામો એટલે કે વિધાન અને પ્રતિવિધાન સત્ય હોય, ત્યારે એક વિરોધાભાસ મળે છે.* ઉપરનાં વિધાન 1 અને વિધાન 2 નો વિચાર કરો.

વિધાન 1 પરથી આપણે $2 \neq 1$ પરિણામ તારવી શકીએ.

હવે $x^2 - x^2$ નો વિચાર કરો. આપણે તેના અવયવ નીચે દર્શાવેલ બે જુદી જુદી રીતે મેળવીશું :

(i) $x^2 - x^2 = x(x - x)$ અને

(ii) $x^2 - x^2 = (x + x)(x - x)$

આથી, $x(x - x) = (x + x)(x - x)$.

વિધાન 2 પરથી આપણે બંને બાજુએથી $(x - x)$ દૂર કરીએ.

આપણને $x = 2x$ મળશે તે $2 = 1$ માં રૂપાંતરિત થાય.

તેથી બંને વિધાન $2 \neq 1$ અને તેનું પ્રતીપ $2 = 1$ બંને સત્ય છે. આ વિરોધાભાસ છે. આ વિરોધાભાસ ઊભું થવાનું કારણ એ છે કે કોઈ પૂર્ણ સંખ્યાને શૂન્ય વડે ભાગતા પૂર્ણ સંખ્યા મળે તે સ્વયંસિદ્ધ સત્ય ખોટું છે.

આથી, જે વિધાનોને આપણે સ્વયંસિદ્ધ સત્ય તરીકે પસંદ કરીએ છીએ તેમાં ખૂબ જ વિચાર અને સૂઝની જરૂર છે. આપણે ખાતરી કરવી જોઈએ કે તે વિધાનો વિસંગતતાઓ કે તાર્કિક વિરોધાભાસ તરફ દોરી જતા ન હોવા જોઈએ. વધુમાં, સ્વયંસિદ્ધ સત્યોની પસંદગી જ જાતે ક્યારેક નવી શોધ તરફ દોરી જાય છે. પ્રકરણ 5 પરથી તમે યુક્લિડની પાંચમી

પૂર્વધારણા અને બિનયુક્લિડિયન ભૂમિતિની શોધથી પરિચિત છો જ. તમે જોયું કે ગણિતશાસ્ત્રીઓ એવું માને છે કે પાંચમી પૂર્વધારણાને પૂર્વધારણા કહેવાની જરૂર નથી અને હકીકતમાં એ જેને ચાર પૂર્વધારણાઓની મદદથી સાબિત કરી શકાય એવું પ્રમેય છે. આશ્ચર્યજનક રીતે આ પ્રયત્નો બિનયુક્લિડિયન ભૂમિતિની શોધ તરફ દોરી જાય છે.

આપણે પ્રમેય, સ્વયંસિદ્ધ સત્ય અને અટકળ વચ્ચેના તફાવતને યાદ કરીને આ વિભાગને સમાપ્ત કરીએ. સ્વયંસિદ્ધ સત્ય એવું વિધાન છે જેને સાબિતી વગર સત્ય ધારી લેવામાં આવે છે. અટકળ એ એવું ગાણિતિક વિધાન છે જેની સત્યાર્થતા કે અસત્યાર્થતા હજુ પ્રસ્થાપિત થયેલ નથી અને પ્રમેય એ એવું ગાણિતિક વિધાન છે જેનું સત્ય તાર્કિક રીતે પ્રસ્થાપિત કરેલું છે.

સ્વાધ્યાય A1.3

1. કોઈ પણ ત્રણ ક્રમિક યુગ્મ સંખ્યાઓ લો અને તેના ગુણાકાર શોધો. ઉદાહરણ તરીકે $2 \times 4 \times 6 = 48$, $4 \times 6 \times 8 = 192$ અને આ જ પ્રમાણે આગળ વધો. આ ગુણાકાર માટે ત્રણ ગાણિતિક અટકળો કરો.

2. પાસ્કલ ત્રિકોણ બનાવો.

હરોળ 1 : 1 $= 11^0$

હરોળ 2 : 1 1 $= 11^1$

હરોળ 3 : 1 2 1 $= 11^2$

હરોળ: 4 અને હરોળ 5 માટે ગાણિતિક અટકળ કરો. શું તમારી ગાણિતિક અટકળ યોગ્ય છે? તમારી અટકળ હરોળ : 6 માટે પણ સાચી છે ?

3. ચાલો ફરીથી ત્રિકોણીય સંખ્યાઓ જુઓ. (જુઓ આકૃતિ A1.2) ક્રમિક બે ત્રિકોણીય સંખ્યાઓ ઉમેરો. ઉદાહરણ તરીકે $T_1 + T_2 = 4, T_2 + T_3 = 9, T_3 + T_4 = 16$.

તો $T_4 + T_5$ વિશે શું કહી શકાય ? $T_{n-1} + T_n$ માટેની ગાણિતિક અટકળ કરો.

4. નીચે દર્શાવેલ તરાહ જુઓ :

$1^2 = 1$

$11^2 = 121$

$111^2 = 12321$

$1111^2 = 1234321$

$11111^2 = 123454321$

નીચે દર્શાવેલ દરેક માટે ગાણિતિક અટકળ કરીએ :

$111111^2 =$

$1111111^2 =$

ચકાસો કે તમારી ગાણિતિક અટકળ સાચી છે.

5. આ પુસ્તકમાં ઉપયોગમાં લેવાયેલ પાંચ સ્વયંસિદ્ધ સત્યોની (પૂર્વધારણાઓ) યાદી બનાવો.

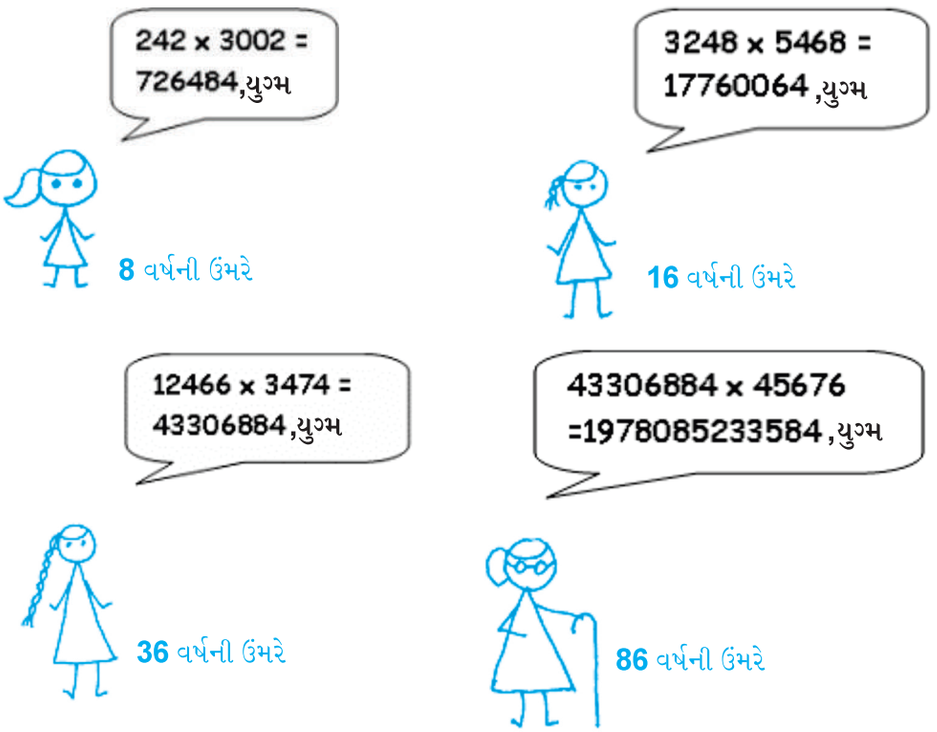
A1.5 ગાણિતિક સાબિતી શું છે ?

ચાલો હવે આપણે સાબિતીનાં વિવિધ પાસાઓ જોઈએ. આપણે ચકાસણી અને સાબિતી વચ્ચેના તફાવતની સમજ સાથે પ્રારંભ કરીએ. ગણિતમાં સાબિતીનો અભ્યાસ કર્યો. એ પહેલાં મુખ્યત્વે તમને વિધાન ચકાસવાનું કહેવામાં આવતું હતું.

ઉદાહરણ તરીકે તમને બે યુગ્મ સંખ્યાઓનો ગુણાકાર યુગ્મ સંખ્યા હોય તેવા ઉદાહરણને ચકાસવાનું કહેવામાં આવે અને તમે બે યાદચ્છિક યુગ્મ સંખ્યાઓ જેમકે 24 અને 2006 લો અને ચકાસો કે $24 \times 2006 = 48144$ પણ યુગ્મ છે. તમે કદાચ બીજા ઘણાં બધાં ઉદાહરણો લઈ શકો.

વળી, તમને એક પ્રવૃત્તિરૂપે વર્ગમાં વિવિધ ત્રિકોણો દોરવાનું અને તેના અંદરના ખૂણાઓનો સરવાળો કરવાનું પૂછી શકાય. માપની ભૂલને અવગણી એ તો તમો જોઈ શકો કે ત્રિકોણના અંતઃકોણોનો સરવાળો $180°$ થાય છે.

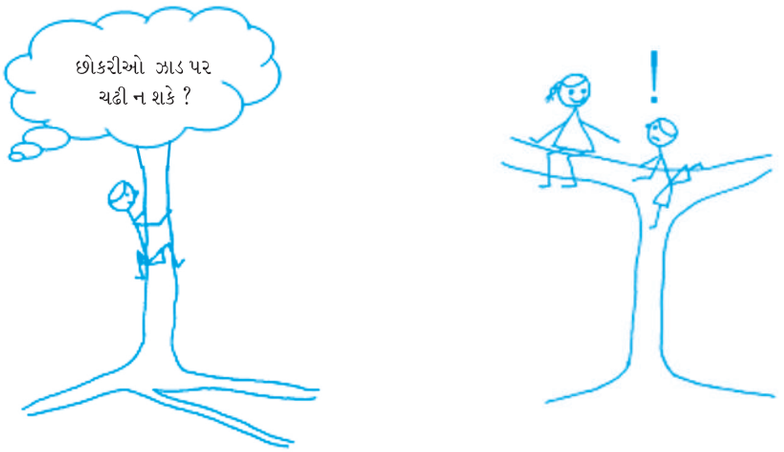
આ પદ્ધતિમાં શું ખામી છે? ચકાસવાની પ્રક્રિયામાં કેટલીક સમસ્યાઓ છે. તમે કોઈ વિધાન કરો અને તે સત્ય છે તેમ માનો તો તમો ચોકકસપણે એવું ન કહી શકો કે તે વિધાન બધા કિસ્સામાં સત્ય છે. ઉદાહરણ તરીકે યુગ્મ સંખ્યાઓની કેટલીક જોડનો ગુણાકાર યુગ્મ સંખ્યા જ હોય. તમે જાતે બધી જ શક્ય યુગ્મ સંખ્યાઓની જોડના ગુણાકાર ચકાસી ન શકો. જો તમે તેવું કરો તો ચિત્રમાં દર્શાવેલી છોકરીની માફક, તમારી બાકીની જિંદગીમાં શક્ય બધી જ યુગ્મ સંખ્યાઓની જોડના ગુણાકાર કર્યા કરો. આ જ પ્રમાણે હજુ સુધી કેટલાક ત્રિકોણ એવા હોઈ શકે, કે જેમના અંતઃકોણોનો સરવાળો 180° જેટલો નથી. આપણે શક્ય બધા જ ત્રિકોણના આંતરિક ખૂણાઓ માપી શકતા નથી.



વધુમાં ચકાસણી ઘણી વાર ગેરમાર્ગે દોરનાર બની શકે છે. ઉદાહરણ તરીકે તમો પાસ્કલના ત્રિકોણ આધારિત અગાઉની ચકાસણીના આધારે $11^5 = 15101051$ મેળવવા કદાચ પ્રેરાઈ શકો. (સ્વાધ્યાય A1.3 નો દાખલા નં.2) પરંતુ હકીકતમાં $11^5 = 161051$ થાય.

આથી, કેટલાક કિસ્સાઓમાં ચકાસણી આધારિત ન હોય તેવા બીજા અભિગમની તમારે જરૂર પડે. અહીં બીજા અભિગમનું નામ છે વિધાન સાબિત કરવું. સંપૂર્ણપણે તાર્કિક દલીલો આધારિત જે પ્રક્રિયા ગાણિતિક વિધાનની સત્યાર્થતા પુરવાર કરે છે તેને ગાણિતિક સાબિતી કહે છે.

વિભાગ A1.2 ના ઉદાહરણ 2 માં તમે જોયું કે ગાણિતિક વિધાન અસત્ય છે તે પ્રસ્થાપિત કરવા માટે એક જ પ્રતિઉદાહરણ સર્જવું પૂરતું છે. આથી કોઈ ગાણિતિક-વિધાનની યથાર્થતા પ્રસ્થાપિત કરવા માટે હજારો કિસ્સાઓની જરૂર નથી; માત્ર એક પ્રતિઉદાહરણ તેને અમાન્ય વિધાન કરવા માટે પૂરતું જ છે. (જેમ કે તે દર્શાવવા માટે કે કંઈક અસત્ય છે.)



કોઈ ગાણિતિક વિધાન અસત્ય છે. તેમ બતાવવા માટે પ્રતિઉદાહરણ શોધવું પર્યાપ્ત છે.

આમ, $7 + 5 = 12$ એ બે અયુગ્મ સંખ્યાઓનો સરવાળો અયુગ્મ હોય તેનું પ્રતિઉદાહરણ છે.

(i) પ્રમેય સાબિત કરવા માટે આપણી પાસે કેવી રીતે આગળ વધવું. તેનો આછેરો ખ્યાલ હોવો જોઈએ.

(ii) પ્રમેયમાં અગાઉથી જ અપાયેલ માહિતી સ્પષ્ટ પણે સમજવી અને ઉપયોગમાં લેવી.

ઉદાહરણ તરીકે, પ્રમેય A1.2 દર્શાવે છે કે બે યુગ્મ સંખ્યાઓનો ગુણાકાર યુગ્મ હોય. આપણને બે યુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ આપેલી છે. આથી, આપણે તેના ગુણધર્મોનો ઉપયોગ કરી શકીએ. અવયવ પ્રમેયમાં (પ્રકરણ 2) તમને બહુપદી $p(x)$ આપેલી હતી અને $p(a) = 0$ એવું કહેવામાં આવ્યું હતું. $(x – a)$ એ $p(x)$નો એક અવયવ છે તે બતાવવા તમારે તેનો ઉપયોગ કરવો પડે. તેવી જ રીતે અવયવ પ્રમેયના પ્રતીપ માટે $(x – a)$ એ $p(x)$નો અવયવ છે તેવું આપેલું છે અને તમારે આ ઉત્કલ્પનાનો ઉપયોગ કરી $p(a) = 0$ સાબિત કરવાનું છે.

તમે પ્રમેય સાબિત કરવાની પ્રક્રિયામાં રચનાનો પણ ઉપયોગ કરી શકો છો. ઉદાહરણ તરીકે, ત્રિકોણના ખૂણાઓનો સરવાળો $180°$ સાબિત કરવા માટે, આપણે કોઈ એક બાજુને સમાંતર રેખા તે બાજુની સામેનાં શિરોબિંદુમાંથી પસાર થતી હોય તેવી દોરીએ અને સમાંતર રેખાઓના ગુણધર્મોનો ઉપયોગ કરીએ છીએ.

(iii) સાબિતી એ ગાણિતિક વિધાનોની ક્રમિક હારમાળાથી બનેલી હોય છે. સાબિતીનું પ્રત્યેક વિધાન સાબિતીના અગાઉના વિધાન અથવા અગાઉ સાબિત કરેલ પ્રમેય અથવા પૂર્વધારણા કે આપણી ઉત્કલ્પના પરથી તાર્કિક રીતે અનુમાનિત કરેલ હોય છે.

(iv) ગાણિતિક રીતે સત્ય વિધાનોની હારમાળા આપણે શું સાબિત કરવા ઈચ્છીએ છીએ કે શું પ્રમેયનો દાવો છે તેને તાર્કિક રીતે સાચા ક્રમમાં સમાપન તરફ દોરી જાય છે.

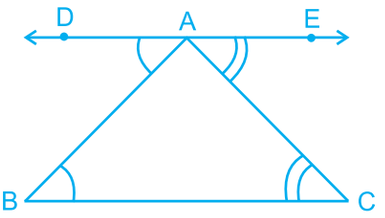
આ ઘટકો સમજવા માટે આપણે પ્રમેય A1.1 અને તેની સાબિતીનું પૃથક્કરણ કરીએ. તમે પ્રકરણ 6 માં આ પ્રમેયનો અભ્યાસ કરી ચૂકયાં છો. પરંતુ સૌપ્રથમ, ભૂમિતિમાં સાબિતી પર કેટલીક ટિપ્પણી કરીએ. આપણે મોટે ભાગે પ્રમેય સાબિત કરવા માટે આકૃતિઓનો સહારો લેતા હોઈએ છીએ અને તે ખૂબ જ અગત્યનું છે. જો કે સાબિતીના દરેક વિધાન માત્ર તર્કનો ઉપયોગ કરી પ્રસ્થાપિત કરવામાં આવેલા હોય છે. વારંવાર આપણે વિદ્યાર્થીઓને એવું કહેતા સાંભળીએ છીએ કે ''આપેલા બે ખૂણાઓ સમાન છે. કારણ કે ચિત્રમાં તે સમાન લાગે છે. ''અથવા'' તે ખૂણો 90^0 જ હોવો જોઈએ કારણ કે બે રેખાઓ એકબીજીને લંબ હોય તેવું દેખાય છે.'' તમે જે જુઓ છો તેનાથી છેતરાવાથી બચો. (આકૃતિ A1.3 યાદ કરો.)

આથી હવે આપણે પ્રમેય A1.1 જોઈએ.

પ્રમેય A1.1 : ત્રિકોણોના અંતઃકોણોનો સરવાળો 180° થાય.

સાબિતી : ત્રિકોણ ABC નો વિચાર કરો. (જુઓ આકૃતિ A1.4).

આપણે $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180°$ સાબિત કરવાનું છે. (1)



આકૃતિ A1.4

A માંથી પસાર થતી અને BC ને સમાંતર રેખા DE રચો. (2)

DE એ BC ને સમાંતર છે અને AB તેની છેદિકા છે.

આથી, $\angle DAB$ અને $\angle ABC$ એ યુગ્મકોણો છે. માટે પ્રકરણ 6 ના પ્રમેય 6.2 અનુસાર તેઓ સમાન છે એટલે કે

$\angle DAB = \angle ABC$ (3)

આ જ પ્રમાણે $\angle CAE = \angle ACB$ (4)

માટે $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = \angle DAB + \angle BAC + \angle CAE$ (5)

પરંતુ $\angle DAB + \angle BAC + \angle CAE = 180°$, કારણ કે તેઓ સરળકોણ બનાવે છે. (6)

તેથી, $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = 180°$. ■ (7)

હવે, આપણે સાબિતીના દરેક સોપાન પર ટિપ્પણી કરીએ.

સોપાન 1 : આપણું પ્રમેય ત્રિકોણના ગુણધર્મો આધારિત છે. આથી આપણે ત્રિકોણથી શરૂઆત કરીએ.

સોપાન 2 : આ ચાવી રૂપ વિચાર છે કે પ્રમેય સાબિત કરવા માટે સાહજિક કૂદકો કે કેવી રીતે આગળ વધવું તેની સમજ

હોવી જરૂરી છે. ભૌમિતિક સાબિતીઓમાં રચનાની આવશ્યકતા હોઈ શકે.

સોપાન 3 અને 4 : DE એ BC ને સમાંતર છે(રચના) એ સત્યનો ઉપયોગ કરી અને બે સમાંતર રેખાની છેદિકાથી બનતા યુગ્મકોણ સમાન હોય છે તેવા પહેલા સાબિત કરેલા પ્રમેય 6.2 પરથી આપણે $\angle DAE = \angle ABC$ અને $\angle CAE = \angle ACB$ મેળવીને સમાપન કરીએ છીએ.

સોપાન 5 : અહીં આપણે યુક્લિડના સ્વયંસિદ્ધ સત્યનો ઉપયોગ કરીએ. (જુઓ પ્રકરણ 5.) એ દર્શાવે છે કે "જો સમાનમાં સમાનને ઉમેરીએ તો કુલ સમાન થાય" આ રીતે સમજાવી શકાય.

$\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = \angle DAB + \angle BAC + \angle CAE$

આમ, ત્રિકોણના અંત:કોણોનો સરવાળો એ સીધી રેખા પર મળતા ખૂણાઓના સરવાળાને સમાન થાય છે.

સોપાન 6: અહીં આપણે પ્રકરણ 6 ની રૈખિક જોડનું સ્વયંસિદ્ધ સત્ય ઉપયોગ લીધેલું છે. તે દર્શાવે છે કે સીધી રેખા પરના ખૂણાઓનો સરવાળો $180°$ થાય. આ પરથી દર્શાવી શકાય $\angle DAB + \angle BAC + \angle CAE = 180°$.

સોપાન 7 : આપણે યુક્લિડના સ્વયંસિદ્ધ સત્યનો ઉપયોગ કરીએ. તે દર્શાવે છે કે "જે બાબતો સમાન હોય તે એકબીજાને સમાન હોય" પરથી કહી શકાય કે $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = \angle DAB + \angle BAC + \angle CAE = 180°$.
સોપાન 7 એ પ્રમેય દ્વારા રજૂ થતું વિધાન આપણે સાબિત કર્યું એવો દાવો છે. હવે આપણે પ્રમેય A1.2 અને A1.3 નું પૃથક્કરણ કર્યા વગર સાબિત કરીશું.

પ્રમેય A1.2 : બે પ્રાકૃતિક યુગ્મ સંખ્યાઓનો ગુણાકાર યુગ્મ હોય છે.

સાબિતી : ધારો કે x અને y કોઈપણ બે પ્રાકૃતિક યુગ્મ સંખ્યાઓ છે.

આપણે xy એ યુગ્મ છે તે સાબિત કરવા માંગીએ છીએ.

x અને y યુગ્મ હોવાથી તે 2 વડે વિભાજ્ય છે અને તેથી કોઈ પ્રાકૃતિક સંખ્યા m માટે $x = 2m$ અને કોઈ પ્રાકૃતિક સંખ્યા n માટે $y = 2n$ તરીકે દર્શાવી શકાય.

પરિણામે $xy = 4\,mn$ અહીં $4\,mn$ એ 2 વડે વિભાજ્ય છે. આથી xy પણ 2 વડે વિભાજ્ય થાય.

માટે, xy એ યુગ્મ સંખ્યા છે. ■

પ્રમેય A1.3 : ત્રણ ક્રમિક પ્રાકૃતિક યુગ્મ સંખ્યાઓનો ગુણાકાર 16 વડે વિભાજ્ય હોય.

ઉદાહરણ : કોઈ પણ ત્રણ ક્રમિક યુગ્મ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ (કોઈ પ્રાકૃતિક સંખ્યા n માટે) $2n$, $2n + 2$ અને $2n + 4$ સ્વરૂપે હોય આપણે એવું સાબિત કરવું છે કે તેનો ગુણાકાર $2n(2n + 2)(2n + 4)$ એ 16 વડે વિભાજ્ય હોય.

હવે, $2n(2n + 2)(2n + 4) = 2n \times 2(n + 1) \times 2(n + 2)$

$= 2 \times 2 \times 2n(n + 1)(n + 2) = 8n(n + 1)(n + 2)$.

હવે, આપણી પાસે બે વિકલ્પ છે. n એ કાં તો અયુગ્મ અથવા યુગ્મ સંખ્યા છે. ચાલો આપણે દરેક વિકલ્પ ચકાસીએ. ધારો કે n એ યુગ્મ છે તો કોઈ પ્રાકૃતિક સંખ્યા m માટે $n = 2m$ લખી શકીએ.

અને ત્યાર બાદ $2n(2n + 2)(2n + 4) = 8n(n + 1)(n + 2) = 16m(2m + 1)(2m + 2)$.

માટે $2n(2n + 2)(2n + 4)$ એ 16 વડે વિભાજ્ય છે.

હવે, ધારો કે n એ અયુગ્મ સંખ્યા છે. માટે $n + 1$ એ યુગ્મ સંખ્યા થાય અને આપણે કોઈ પ્રાકૃતિક સંખ્યા r માટે $n + 1 = 2r$ લઈ શકીએ.

હવે આપણી પાસે : $2n(2n + 2)(2n + 4) = 8n(n + 1)(n + 2)$

$$= 8(2r - 1) \times 2r \times (2r + 1)$$

$$= 16r(2r - 1)(2r + 1)$$

માટે, $2n(2n + 2)(2n + 4)$ એ 16 વડે વિભાજ્ય થાય.

માટે, બંને કિસ્સાઓમાં આપણે દર્શાવ્યું કે ત્રણ ક્રમિક પ્રાકૃતિક યુગ્મ સંખ્યાઓનો ગુણાકાર 16 વડે વિભાજ્ય છે. ■

ગણિતશાસ્ત્રીઓ કેવી રીતે પરિણામ મેળવે અને કેવી રીતે પરંપરાગત કઠિન સાબિતીઓ લખાય છે તેની વચ્ચેના તફાવતની કેટલીક નોંધ સાથે આપણે આ પ્રકરણનું સમાપન કરીએ. અગાઉ દર્શાવ્યું એ પ્રમાણે પ્રત્યેક સાબિતીમાં મુખ્ય એક સાહજિક વિચાર (ક્યારેક એક કરતાં વધુ) હોય છે. ગણિતશાસ્ત્રીઓ જે રીતે વિચારે છે અને પરિણામો તારવે છે તેમાં અંતઃપ્રેરણા કેન્દ્રમાં હોય છે. ગણિતશાસ્ત્રી ભાગ્યે જ કોઈ પ્રમેયની સાબિતી અસ્પષ્ટ આપે છે.

ગણિતશાસ્ત્રીઓ ખરો ઉકેલ કે સાબિતી આપતાં પહેલાં મોટે ભાગે વિવિધ માર્ગે વિચાર કરે અને તર્ક લગાવે અને ઉદાહરણો દ્વારા પ્રયોગ કરે છે. યોગ્ય સાબિતી મેળવવા માટે રચનાત્મક તબક્કો આવ્યા બાદ બધી દલીલોની સંખ્યા ઘટાડી શકાય છે.

અહીં ભારતના મહાન ગણિતશાસ્ત્રી રામાનુજનનો વિચાર કરવો જોઈએ. તેમણે ઉચ્ચ કક્ષાની અંતઃપ્રેરણા દ્વારા ઘણાંબધાં વિધાનો તારવ્યાં હતાં. તે સાચાં હોવાનો તેમણે દાવો કર્યો હતો. તેમાંનાં ઘણાં બધાં સત્ય પુરવાર થયાં અને તે પ્રસિદ્ધ પ્રમેયો છે. જોકે આજે પણ વિશ્વના ગણિતશાસ્ત્રીઓ તેમના દાવા (ધારણાઓ)ને સાબિત કરવા (કે નકારવા) સંઘર્ષ કરી રહ્યા છે.



શ્રીનિવાસ રામાનુજન
(1887–1920)
આકૃતિ A1.5

સ્વાધ્યાય A1.4

1. નીચે દર્શાવેલાં વિધાનો માટે પ્રતિઉદાહરણ આપીને ચકાસો :

(i) જો બે ત્રિકોણોના અનુરૂપ ખૂણાઓ સમાન હોય, તો આ ત્રિકોણો એકરૂપ હોય.

(ii) બધી જ બાજુઓ સમાન હોય તેવો ચતુષ્કોણ એક ચોરસ હોય.

(iii) બધા જ ખૂણાઓ સમાન હોય તેવો ચતુષ્કોણ એક ચોરસ હોય.

(iv) પૂર્ણાંકો a અને b માટે, $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$

(v) બધી જ પૂર્ણ સંખ્યાઓ n માટે $2n^2 + 11$ એ અવિભાજ્ય છે.

(vi) બધા જ ધન પૂર્ણાંકો n માટે $n^2 - n + 41$ એ અવિભાજ્ય છે.

2. તમારી મનપસંદ સાબિતી લો અને વિભાગ A1.5 માં આપેલ ક્રમિક પગલાઓમાં પૃથક્કરણ કરી દરેક સોપાનની ચર્ચા કરો. (શું આપ્યું છે. શું સાબિત કરવાનું છે. કયાં પ્રમેય અને સ્વયંસિદ્ધ સત્ય વપરાય છે અને બીજું બધું.)

3. સાબિત કરો કે બે અયુગ્મ સંખ્યાઓનો સરવાળો યુગ્મ સંખ્યા થાય.

4. સાબિત કરો કે બે અયુગ્મ સંખ્યાઓનો ગુણાકાર અયુગ્મ સંખ્યા થાય.

5. સાબિત કરો કે ત્રણ ક્રમિક યુગ્મ સંખ્યાઓનો સરવાળો 6 વડે વિભાજ્ય હોય.

6. સાબિત કરો કે $y = 2x$ સમીકરણવાળી રેખા પર અનંત બિંદુઓ આવેલાં છે.

(**સૂચન :** પૂર્ણાંક n માટે બિંદુ $(n, 2n)$ નો વિચાર કરો.)

7. તમારો મિત્ર તમને એક સંખ્યા ધારવાનું કહે છે અને તેના પર વિવિધ પ્રક્રિયા કરવાનું કહે છે અને બાદમાં મૂળ સંખ્યા જાણ્યા વગર, તમને આ પ્રક્રિયા કઈ સંખ્યા સાથે પૂર્ણ થાય છે તે જણાવવાનું કહે છે.

(i) એક સંખ્યા પસંદ કરો. તેના બે ગણા કરો. તેમાં નવ ઉમેરો. તેમાં તમારી મૂળ સંખ્યા ઉમેરો. તેને ત્રણ વડે ભાગો. તેમાં ચાર ઉમેરો. તેમાંથી મૂળ સંખ્યા બાદ કરો. તમારું પરિણામ 7 છે.

(ii) ત્રણ આંકડાની એક સંખ્યા લખો. (ઉદાહરણ તરીકે 425). આ જ ક્રમમાં પુનરાવર્તન કરી 6 અંકની સંખ્યા બનાવો (425425). તમારી નવી સંખ્યા 7, 11 અને 13 વડે વિભાજ્ય હશે.

A1.6 સારાંશ

આ પરિશિષ્ટમાં તમે નીચેના મુદ્દાઓ શીખી ગયાં :

1. ગણિતમાં હંમેશા સત્ય કે અસત્ય હોય તેવું વિધાન સ્વીકાર્ય છે.

2. ગાણિતિક વિધાન અસત્ય છે તે દર્શાવવા માટે તેનું પ્રતિઉદાહરણ શોધીએ તે પર્યાપ્ત છે.

3. જે સાબિતી વગર સત્ય છે તેમ ધારવામાં આવે છે એવાં વિધાનો સ્વયંસિદ્ધ સત્યો છે.

4. જેને આપણી ગાણિતિક અંતઃપ્રેરણાના આધારે સત્ય માનીએ છીએ એવું વિધાન અટકળ છે, પરંતુ તે આપણે હજુ સાબિત કરવાનું છે.

5. જેની સત્યાર્થતા પ્રસ્થાપિત (સાબિત) થઈ છે તેવા ગાણિતિક વિધાનને પ્રમેય કહે છે.

6. ગાણિતિક વિધાનોને સાબિત કરવાનું મુખ્ય તાર્કિક સાધન એ આનુમાનિક તર્ક છે.

7. સાબિતી એ ક્રમિક ગાણિતિક વિધાનોની શ્રૃંખલા છે. સાબિતીનું પ્રત્યેક વિધાન સાબિતીના અગાઉના વિધાન અથવા અગાઉ સાબિત કરેલ પ્રમેય અથવા પૂર્વધારણા કે આપણી ઉત્કલ્પના પરથી તાર્કિક રીતે આનુમાનિક કરેલ હોય છે.