अध्याय-1 पूर्णांक की समझ

1.1 भूमिका

हम पूर्ण संख्याओं एवं पूर्णांकों से परिचित हैं । इस अध्याय में पूर्णांकों, उनके गुणों एवं संक्रियाओं के बारे में और अधिक चर्चा करेंगे पर इससे पहले हम पूर्ण संख्या एवं पूर्णांकों की पुनरावृत्ति कर लेंगे ।

1.2 पुनरावलोकन

पिछली कक्षा में हमने सीखा:

(i) यदि मूसिला से एक पहाड़ की ऊँचाई 560 मीटर है और कुएँ की गहराई 65 मीटर तो पहाड़ की ऊँचाई का + 560 मीटर तथा कुएँ की ऊँचाई (गहराई) को – 65 मीटर द्वारा व्यक्त किया जा सकता है। क्योंकि यदि ऊँचाई को धनपूर्णांक से व्यक्त करते हैं तो गहराई को ऋण पूर्णांक से व्यक्त करेंगे।

(ii) लाभ को धन पूर्णांक से तथा हानि को ऋण पूर्णांक से प्रकट कर सकते हैं।

(iii) '0' से ऊपर के ताप को धनात्मक तथा '0' से नीचे के ताप को ऋणात्मक रूप में व्यक्त करते हैं।

यहाँ विभिन्न राशियों की सूची दी गई है, जिन्हें धन पूर्णांकों से दर्शाते हैं, तो इनके विपरीत कौन-सी राशियाँ होंगी जिन्हें ऋण पूर्णांकों में व्यक्त कर सकते हैं?

क्र.सं.	धन पूर्णांकों में व्यक्त होनेवाली राशियाँ	ऋण पूर्णांकों में व्यक्त होनेवाली राशियाँ
1.	समुद्र तल से ऊँचाई	
2.	आबादी में वृद्धि	
3.	औसत से अधिक वर्षा	

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

4.	0°C से ऊपर का ताप	
5.	किसी स्थान से दायीं ओर की दूरी	
6.	लाभ	
7.	मूल्य वृद्धि	
8.	जमा धन	
9.	औसत से अधिक उपज	

हम जानते हैं—

... –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4 ..... आदि पूर्णांक हैं जिनमें 1, 2, 3, 4, 5, ... आदि धन पूर्णांक हैं तथा –1, –2, –3, –4, –5, ... आदि ऋण पूर्णांक हैं।

1. '0' (शून्य) न तो धन पूर्णांक है न ऋण पूर्णांक है।
2. '0' के बाद की संख्याएँ बढ़ते क्रम में है।
3. '0' के पूर्व की संख्याएँ घटते क्रम में है।
4. संख्या–रेखा पर बाएँ से दाएँ की संख्याएँ बड़ी होती है।
5. संख्या–रेखा पर दाएँ से बाएँ की संख्याएँ छोटी होती है।
6. शून्य प्रत्येक ऋणात्मक पूर्णांक से बड़ा तथा प्रत्येक धनात्मक पूर्णांक से छोटा होता है।
7. धनात्मक पूर्णांकों में यदि $a > b$ तो ऋणात्मक पूर्णांकों में $-a < -b$ जैसे $8 > 4$ तो $-8 < -4$
8. किसी पूर्णांक के विपरीत चिह्न के पूर्णांक को उसका **योगात्मक प्रतिलोम** या **योज्य प्रतिलोम (Additive inverse)** कहते हैं, जैसे 5 का योगात्मक प्रतिलोम –5 है तथा –8 का योज्य प्रतिलोम 8 है। दो योगात्मक प्रतिलोमों का योग शून्य होता है। जैसे– $5 + (-5) = 0$, $-5 + 5 = 0$; इस आधार पर यदि दो पूर्णांकों का योग शून्य होता है तो वे एक दूसरे का योगात्मक प्रतिलोम कहलाते हैं।

स्वयं करके देखिए

पूर्णांक	8	–5	–12	15	–20	16	18
योज्य प्रतिलोम	–8	+5					
योग	(8)–(–8)=0	(–5)+(–5)=0					

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

हम अपनी पिछली कक्षा में पूर्णांकों के योग एवं व्यवकलन के बारे में अध्ययन कर चुके हैं कि किसी संख्या रेखा पर जब हम–

(i) एक धनात्मक पूर्णांक को जोड़ते हैं, तो दाईं ओर चलते हैं।

(ii) एक ऋणात्मक पूर्णांक को जोड़ते हैं, तो बाईं ओर चलते हैं।

(iii) एक धनात्मक पूर्णांक को घटाते हैं, तो बाईं ओर चलते हैं।

(iv) एक ऋणात्मक पूर्णांक को घटाते हैं, तो दाईं ओर चलते हैं।

बताइए कि निम्नलिखित कथन सही हैं अथवा गलत। जो कथन गलत है उनको सही कीजिए–

(i) जब दो धनात्मक पूर्णांकों को जोड़ा जाता है, तो हमें एक धनात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है।

(ii) जब दो ऋणात्मक पूर्णांकों को जोड़ा जाता है, तो हमें एक धनात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है।

(iii) जब एक धनात्मक पूर्णांक और एक ऋणात्मक पूर्णांक को जोड़ा जाता है, तो हमें हमेशा एक ऋणात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है।

(iv) $-4 + (-8) + (12) + (-13) + (5) = -13$

(v) $(-10) + 3 - 10 - 3$

(vi) $8 + (-7) - (-4) = 8 + 7 - 4$

अपने उत्तरों की तुलना निम्नलिखित उत्तरों के साथ कीजिए–

(i) सही है। उदाहरणतः

(a) $56 + 73 = 129$ (b) $113 - 82 = 195$

(c) $15 + 25 = 40$ (d) $20 + 30 + 15 = 65$ आदि।

अतः धनात्मक पूर्णांकों का योगफल एक धनात्मक पूर्णांक होती है । ऐसे 5 और उदाहरण दीजिए ।

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

www.absol.in

(ii) गलत है क्योंकि $(-5) + (-8) = -13$, जो कि धनात्मक पूर्णांक नहीं है।

$(-18) + (-7) + (-5) = -30$

अतः ऋणात्मक पूर्णांकों का योगफल एक ऋणात्मक पूर्णांक होती है। इस कथन के पक्ष में पाँच और उदाहरण दीजिए।

(ऋणात्मक पूर्णांकों का योगफल में पूर्णांकों के विशुद्ध मान को जोड़कर योगफल के पहले (–) चिह्न लगा देते हैं।)

स्वयं करके देखिए

$-8 + (12) =$

$25 + (-75) =$

$-28 + (-52) =$

$50 + 88 =$

$-20 + (-15) + 50 =$

$-12 + (-4) - (-10) + 15 + 18 =$

(iii) गलत, क्योंकि $(-8) + (20) = 12$, यह एक ऋणात्मक पूर्णांक नहीं है।

$(-15) + (-50) = -35$

अतः जब एक धनात्मक और एक ऋणात्मक अथवा एक ऋणात्मक और एक धनात्मक पूर्णांक का जोड़ जाता है तो संख्या को घटा देते हैं और बड़े पूर्णांक का चिह्न उस अन्तर के पहले रख दिया जाता है। बड़े पूर्णांकों का निर्णय दोनों पूर्णांकों के चिह्नों की अनदेखी करते हुए लिया जाता है। जैसा कि ऊपर के उदाहरण से स्पष्ट है।

(iv) सही है, $-1 + (-8) + (12) + (-18) + (5)$ को सरल इस प्रकार किया जाता है।

$-1 + (-8) + (12) - (-18) + (5)$ या $-30 + 17 = -13$

अतः दो से अधिक ऋणात्मक और धनात्मक का योगफल ज्ञात करने के लिए धनात्मक संख्याओं का योगफल एक साथ और ऋणात्मक संख्याओं का योगफल एक साथ ज्ञात करने के बाद पुनः उन्हें अन्तर नियम (iii) के अनुसार प्राप्त कर लेते हैं। अतः पूर्णांकों का योगफल एक पूर्णांक होता है।

[redacted] $x \neq 7$, असत्य

[redacted] $8 + (-7)$ [redacted]

अतः [redacted] असत्य

1.3 पूर्णांकों के जोड़ व घटाव के गुण

1.3.1 ;kx d vrxr lor x.k ;k lojd x.k

हम सीख चुके हैं कि दो पूर्ण संख्याओं का योग पुनः एक पूर्ण संख्या ही होती है। उदाहरण : $5 - 8 = 13$ है, जो कि एक पूर्ण संख्या है। हम जानते हैं कि यह गुण, पूर्ण संख्याओं के योग का संवृत गुण या संवरक गुण कहलाता है।

आइए देखें कि क्या यह गुण पूर्णांकों के लिए भी सत्य है अथवा नहीं। पूर्णांकों के कुछ युग्म आगे दिए जा रहे हैं। आगे दी हुई सारणी को देखिए और इसे पूरा कीजिए–

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

	कथन	प्रेक्षण
(i)	8 + 4 − ☒☒	परिणाम एक पूर्णांक है।
(ii)	(−3) 5 = ———	———————————
(iii)	(25) + 8 ———	———————————
(iv)	19 − (−25) − −6	परिणाम एक पूर्णांक है।
(v)	5 + (−3) − ———	———————————
(vi)	(−20) 0 = ———	———————————
(vii)	(−7) + (−8) ———	———————————

क्या दो पूर्णांकों का योग हमेशा एक पूर्णांक होता है? क्या आपको पूर्णांकों का कोई ऐसा युग्म मिला जिसका योग पूर्णांक नहीं है? इस प्रकार पूर्णांक का योग एक पूर्णांक होता है, इसलिए हम कहते हैं कि पूर्णांक, योग के अंतर्गत संवृत (closed) होता है।

व्यापक रूप में, किन्हीं दो पूर्णांकों a तथा b के लिए $a + b$ एक पूर्णांक होता है।

1.3.2 क्रम विनिमेय गुणधर्म

$(-3) + (-5) = -8$ पुनः $(-5) + (-3) = -8$

तो हम पाते हैं कि $(-3) + (-5) = (-5) + (-3)$

अतः दो पूर्णांक संख्याओं का योगफल एवं उनके उल्टे क्रम का योगफल समान होते हैं। इस गुण को **क्रम विनिमेय गुण (commutative property)** कहते हैं। आप अन्य पूर्णांकों के साथ ऐसा करके देखिए। क्या आपको ऐसे पूर्णांक मिले जो क्रम विनिमेय नियम का पालन नहीं करता ? व्यापक रूप में a और b दो पूर्णांक हैं तो $a + b = b + a$, वह क्रम विनिमेय गुण है।

1.3.3 साहचर्य गुण (सहचरी)

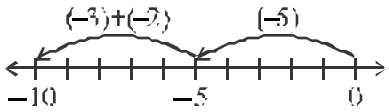
निम्नलिखित उदाहरणों को देखिए:

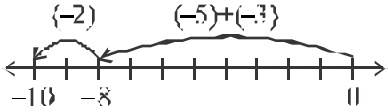
पूर्णांकों −3, −2 एवं −5 को लीजिए।

$(-5) + [(-3) - (-2)]$ और $[(-5) + (-3)] + (-2)$ पर ध्यान दीजिए।

प्रथम योग में (−3) और (−2) को मिलाकर एक समूह बनाया गया है और दूसरे योग में (−5) एवं (−3) को मिलाकर एक समूह बनाया गया है। हम इसकी जाँच करेंगे कि इनसे क्या परिणाम प्राप्त होते हैं?

© BSTBPC WEBCOPY NOT TO BE PUBLISHED





(–5) + [(–3) + (–2)] = [(–5) + (–3)] + (–2)

इन दोनों ही स्थितियों में हमें –10 प्राप्त होता है।

अर्थात्, (–5) + [(–3) + (–2)] = [(–5) + (–2)] + (–3)

इसी प्रकार, 1, –3, और –7 को लीजिए।

(–3) + [1 + (–7)] = –3 + ———— = ————

[(–3) + 1] + (–7) = –2 + ———— = ————

क्या (–3) + [1 + (–7)] एवं [(–3 + 1] + (–7) का हल समान हैं?

इस प्रकार के और उदाहरण लीजिए। आप ऐसा कोई उदाहरण नहीं पाएंगे जिसके लिए इस प्रकार के योग भिन्न हैं। यह दर्शाता है कि पूर्णांकों के लिए योग साहचर्यी (associative) होता है। व्यापक रूप में,

पूर्णांकों a, b और c के लिए हम कह सकते हैं कि $a + (b + c) = (a + b) + c$

;kT; rRled

निम्न पर विचार करें–

(i) (–5) + 0 = – 5 (ii) 2 + 0 = 2

पुनः 0 + (–5) = – 5 पुनः 0 + 2 = 2

→ (–5) + 0 = 0 + (–5) = –5 0 + 2 = 2 + 0

अतः हम कह सकते हैं कि किसी पूर्णांक a के लिए

a + 0 = a एवं 0 + a = a

तब 0 (शून्य) जोड़ के लिए '0' (शून्य) **;kT; rRled (Additive identity)** कहलाता है।

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

स्वयं करके देखिए

निम्नलिखित के सामने उसके उचित गुणों को लिखें–

1.	$5 + (-2) = -2 + 5$	
2.	$(-2) - 5 + (-4) = -2 + \{5 + (-4)\}$	
3.	$-25 + 0 = -25$	
4.	$-12 + (-5) = -17$	

1.4 पूर्णांकों का व्यवकलन (Subtraction) : देखिए और समझिए

(i) $12 - 20 = -8$ (ii) $8 - (-5) = 8 + 5 = 13$

(iii) $-5 - (-4) = -5 + 4 = -1$ (iv) $-10 - (4) = -10 - 4 = -14$

स्वयं करके देखिए

$-5 - (-50) =$ $20 - (-45) =$ $-55 - (+75) =$ $-60 - (-4) =$

1.5 पूर्णांकों का गुण (व्यवकलन के लिए)

(a) $-10 - (5) = -15$ (b) $6 - (-10) = 6 + 10 = 16$

अतः दो पूर्णांकों का अन्तर एक पूर्णांक संख्या होती है, इसे घटाने का **संवरक गुण (closure property)** कहते हैं। आप खुद हरएक लेकर देखिए क्या कोई ऐसे पूर्णांक भी मिले जिनका अन्तर एक पूर्णांक न हो? व्यापक रूप में a और b दो पूर्णांक संख्याएँ हैं तो a – b भी एक पूर्णांक संख्या होगी।

स्वयं करके देखिए

4, 12, 20, 28, ____, ____, ____

8, 6, 4, ____, ____, ____, ____

– 8, – 12, ____, – 20, ____, ____

– 15, –10, – 5, ____, ____, ____

ऐसे कुछ और pattern बनाइए और स्वयं या अपने मित्रों से करवाइए।

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

प्रश्नावली– 1.1

1. निम्नलिखित के बीच की सभी पूर्णांक लिखिए।

(a) – 5 और 5 (b) – 2 और 8

(c) – 6 और – 2 (d) – 4 और –10

2. निम्नलिखित में से प्रत्येक में बड़े पूर्णांक पर घेरा (◯) लगाएँ।

(a) – 20, 4 (b) – 15, – 8 (c) 0, – 5

(d) – 20, – 7 (e) 25, – 2 (f) – 20, – 18

3. रिक्त स्थानों में उचित चिह्न (>, < और =) को भरिए।

(a) – 6 ☐ – 8 (b) 4 ☐ 0 (c) – 15 ☐ 2

(d) –50 ☐ –54 + 4 (e) 25 ☐ 25 (f) 4 – 15 ☐ 2–20

4. नीचे दिए गए पूर्णांकों को बढ़ते क्रम में लिखिए।

(a) –8, 12, –5, 15, 20, –2 (b) 5, 0, –2, –4, –15, 8

5. नीचे दिए गए पूर्णांकों की अगली पूर्णांक बताइए।

(a) – 18 (b) 15 (c) – 20

(d) 18 (e) – 5

6. नीचे दिए गए पूर्णांकों के पहले का पूर्णांक बताइए।

(a) 25 (b) – 59 (c) – 55

(d) – 26 (e) + 100

7. रिक्त स्थान भरिए–

(i) (–5) + (2) = ... (2)+(–5) = ...

क्या (–5) + (2) = 2 + (–5) है? .....

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

कुछ अन्य पूर्णांक संख्याएं लेकर सारणी को पूरा कीजिए व जाँचिए–

	a	b	a–b	b+a	क्या (a+b)=(b–a) है?	a–b	b–a	क्या (a–b)=(b–a) है?
(i)	–6	3	–6–3 =–3	3+(–6) =–3		(–6)–(3) =–9	(3)–(–6) = 9	
(ii)								
(iii)								

8. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

(i) (–a) + (6) – (6) – ( )

(ii) –8 + ... – 0

(iii) (2) + [9 –(–6)] – [2 + 9] + (.....)

(iv) 15 + ... = 15

9. निम्नलिखित को जोड़िए।

(a) – 15 में – 18 को (b) – 20 में 17 को

(c) + 21 में – 16 को (d) – 8 में 5 का

10. निम्नलिखित को घटाइए।

(a) – 15 में से – 5 को (b) 25 में स – 75 को

(c) – 8 में से – 16 को (d) – 20 में स – 18 को

11. निम्नलिखित गुणों का एक–एक उदाहरण दीजिए।

(a) क्रम विनिमेय नियम (गुण) (b) साहचर्य गुण

(c) संवरक नियम (d) योज्य तत्समक

12. ऐसा पूर्णांक युग्म लिखिए जिसका –

(a) योग – 8 (b) अन्तर – 18 हो (c) योग 0 हो।

(संकेत (a) के लिए (i) – 5 + (– 3) = – 8 (ii) – 1 + (– 7) = – 8)

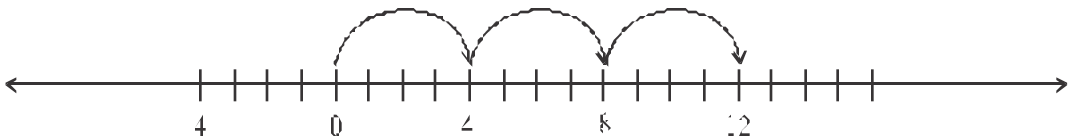
© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

1.6 पूर्णांकों का गुणा (Multiplication of integers)

धन पूर्णांकों का गुणा–

हम जानते हैं 4×3 यानी 4 तीन बार अर्थात $4 + 4 + 4 = 12$

इसे संख्या रेखा पर इस प्रकार निरूपित कर सकते हैं–

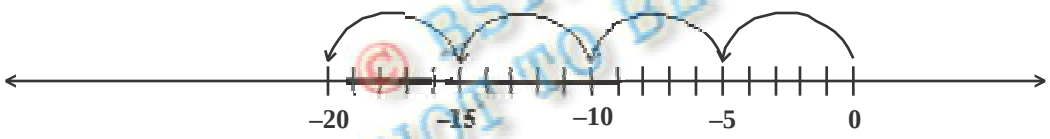


संख्या रेखा से स्पष्ट है → $4 + 4 + 4 = 3 \times 4 = 12$ अतः $3 \times 4 = 12$

धन पूर्णांक का ऋण पूर्णांक से गुणा–

जैसे $4 \times (-5)$ का अर्थ है: -5 का चार बार जोड़ना।

अतः प्रकार $(-5) + (-5) + (-5) + (-5) = -20$ है, संख्या–रेखा द्वारा इसे इस प्रकार निरूपित कर सकते हैं –



संख्या रेखा से स्पष्ट है → $(-5) + (-5) + (-5) + (-5) = 4 \times -5 = -20$

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

स्पष्ट है कि–

(i) **दो धन** पूर्णांकों का गुणनफल धनात्मक होता है।

माना कि $+a$ और $-b$ दो धन पूर्णांक है।

$\therefore \quad (-a) \times (+b) = +ab$

(ii) एक धन पूर्णांक का दूसरे ऋण पूर्णांक से गुणा करने से प्राप्त गुणनफल ऋणात्मक होता है।

माना कि $+a$ और $-b$ दो पूर्णांक है।

$\therefore \quad (-a) \times (-b) = -ab$

स्वयं करके देखिए

$5 \times (-6) =$

$4 \times (-2) =$

$3 \times (-4) =$

$5 \times (-2) =$

$2 \times 7 =$

आइए निम्न पैटर्न पर विचार करें:

$5 \times 4 = 20$ ↓
$5 \times 3 = 15$
$5 \times 2 = 10$
$5 \times 1 = 5$
$5 \times 0 = 0$
$5 \times (-1) = ?$

बगल की सारणी में गुणनफल के पैटर्न को देखने से पता चलता है कि ऊपर से नीचे की ओर संख्या क्रमशः 5 कम होती जाती है। अतः $5 \times (-1) = -5$

इसी प्रकार से इनके लिए भी पैटर्न बनाइए–

(i) 4×3 से शुरू कीजिए।

(ii) 7×3 से शुरू कीजिए।

अतः एक धन पूर्णांक व एक ऋण पूर्णांक के गुणा करने पर **सदैव एक ऋण** पूर्णांक प्राप्त होता है।

दो ऋण पूर्णांक का गुणा

पुनः निम्न पैटर्न पर **विचार करें**–

$5 \times (-1) = -5$ ↓
$4 \times (-1) = -4$
$3 \times (-1) = -3$
$2 \times (-1) = -2$
$1 \times (-1) = -1$
$0 \times (-1) = 0$
$(-1) \times (-1) = ?$

बगल की सारणी में गुणनफल के पैटर्न को देखने से पता चलता है कि ऊपर से नीचे की ओर संख्या का मान क्रमशः 1 (एक) अधिक होता जाता है। अतः $-1 \times (-1) = +1$ इस पैटर्न को आगे बढ़ाइए।

$(+a) \times (+b) = +ab$
$(-a) \times (-b) = +ab$
$(-a) \times (+b) = -ab$
$(+a) \times (-b) = -ab$

ऐसे और पैटर्न बनाएँ– (i) -5×3 से शुरू करें (ii) -3×4 से शुरू करें

अतः जब दो ऋण पूर्णांकों को गुणा किया जाता है तो सदैव एक धन पूर्णांक प्राप्त होता है।

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

निम्न उदाहरण को पढ़ें और समझें–

(i) $(+5)\times(+4) = +20$ या $5 \times 4 = 20$

(ii) $(-5)\times(+4) = -20$ या $-5 \times 4 = -20$

(iii) $(+8)\times(-2) = -16$ या $8 \times (-2) = -16$

(iv) $-10 \times (-5) = +50$ या $-10 \times (-5) = 50$

स्वयं करके देखिए

(i) $-8 \times (-20) =$ (ii) $-5 \times (-15) =$ (iii) $-10 \times 40 =$

(iv) $-30 \times 20 =$ (v) $18 \times 4 =$ (vi) $16 \times (-5) =$

प्रयास कीजिए : प्रत्येक बर्ग में स्तम्भ और हैडिंग संख्या से गुणा कीजिए व भरिए–

x	–9	–8	–7	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
9	–81																			
8																				
7																				
6																				
5																				
4																				
3																				
2																				
1																				
–1																				
–2																				
–3																				
–4																				
–5																				
–6																				

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

1.7 तीन अथवा अधिक ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल : आइए निम्नलिखित उदाहरणों को देखें–

(a) $(-2) \times (-4) = 8$

(b) $(-2) \times (-4) \times (-5) = [(-2) \times (-4)] \times (-5) = 8 \times -5 = -40$

(c) $(-3) \times (-4) \times (-6) \times (-8) = [(-3) \times (-4)] \times [(-6) \times (-8)] = 12 \times 48 = 576$

(d) $(-4) \times (-5) \times (-2) \times (-6) \times (-3) = [(-4) \times (-5)] \times [(-2) \times (-6)] \times (-3) = 20 \times 12 \times (-3) = 240 \times (-3) = -720$

उपर्युक्त उदाहरणों से हम देखते हैं कि–

(a) पहले दो पूर्णांकों का गुणनफल प्राप्त करते हैं। फिर प्राप्त गुणनफल को अन्य पूर्णांक से गुणा करते हैं।

(b) दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल एक धनात्मक पूर्णांक है।

(c) तीन ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल एक ऋणात्मक पूर्णांक होता है।

(d) चार ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल एक धनात्मक पूर्णांक है।

अतः प्रेक्षणों से स्पष्ट होता है कि यदि ऋणात्मक पूर्णांक के सम बार गुणा किया जाय तो गुणनफल धनात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है, जबकि ऋणात्मक पूर्णांक को विषम बार गुणा किया जाय तो गुणनफल ऋणात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है।

आप भी पाँच ऋणात्मक पूर्णांक लेकर गुणनफल की जाँच कीजिए, क्या गुणनफल ऋणात्मक प्राप्त होता है?

1.8 पूर्णांकों के गुणन संक्रिया के गुण

I. गुणन के लिए संवरक

निम्न पर विचार करें–

$4 \times 2 = 8$

$-5 \times -3 = 15$

$-2 \times 4 = -8$

$3 \times -6 = -18$

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE REPUBLISHED

इन उदाहरणों से स्पष्ट है कि दो पूर्णांकों का गुणनफल एक पूर्णांक ही होता है। अतः पूर्णांक गुणा के लिए संवृत होते हैं। माना कि a और b दो पूर्णांक हैं तथा उसका गुणनफल 'c' है तो c भी एक पूर्णांक होगा, क्या आप एसे कोई दो पूर्णांक सोच सकते हैं जिनका गुणनफल पूर्णांक न हो?

II. गुणन की क्रमविनिमेयता

इस तथ्य पर विचार करें—

$-8 \times 2 = -16$	इसी प्रकार $5 \times$ [redacted] $= 20$	$-2 \times 3 = -6$
$2 \times$ [redacted] $= -16$	$4 \times$ [redacted] $= 20$	$3 \times$ [redacted] $= -6$
$\rightarrow$ [redacted] $\times 2 = 2 \times$ [redacted]	$\rightarrow$ $5 \times$ [redacted] $= 4 \times$ [redacted]	$\rightarrow$ $-2 \times 3 = 3 \times$ [redacted]

उपर्युक्त उदाहरणों से स्पष्ट है कि दो पूर्णांकों के गुणन में पहले पूर्णांक को दूसरे से गुणा करें या दूसरे को पहले से, गुणनफल बराबर होते हैं। अतः पूर्णांकों का **गुणा क्रम विनिमेय** गुण का पालन करता है। यदि a और b दो पूर्णांक हैं तो $\boxed{a \times b = b \times a}$ भी सत्य है।

III. गुणन साहचर्य गुण

निम्न पर विचार करें—

$2 \times 3 \times 4$ में	$(2 \times 3) \times 4$	$2 \times (3 \times 4)$
	$= 6 \times 4$	$= 2 \times 12$
	$= 24$	$= 24$

अतः $(2 \times 3) \times 4 = 2 \times (3 \times 4)$

इसी प्रकार—

$-4 \times 5 \times 6$ में	$(-4 \times 5) \times 6$	$-4 \times (5 \times 6)$
	$= -20 \times 6$	$= -4 \times 30$
	$= -120$	$= -120$

अतः $(-4 \times 5) \times 6 = -4 \times (5 \times 6)$

नीचे दिए गए तीन पूर्णांकों का इसी प्रकार समूह बदलकर गुणा कीजिए।

(i) $3 \times -2 \times 4$, (ii) $-3 \times -5 \times 7$

क्या इनका गुणनफल समूह बदलने से बदला?

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

व्यापक रूप में किन्हीं तीन पूर्णांक a, b, c के लिए–

$$(a \times b) \times c \quad = \quad a \times (b \times c)$$

a, b, c में प्रत्येक के लिए धन मान लीजिए और इस गुण का सत्यापन कीजिए।

अतः पूर्ण संख्याओं की तरह तीन पूर्णांकों का गुणनफल उनके समूह बनाने पर निर्भर नहीं करता है। अर्थात् पहली को दूसरी के साथ गुणा करके तीसरे पूर्णांक के साथ गुणा करें या दूसरे व तीसरे पूर्णांक का गुणा कर पहले पूर्णांक के साथ उनका गुणा करें, गुणनफल समान आता है। यह पूर्णांकों के लिए गुणन का **साहचर्य गुण** कहलाता है।

व्यापक रूप में, माना कि a, b और c तीन पूर्णांक हैं तो $\boxed{(a \times b) \times c \quad a \times (b \times c)}$ भी सत्य है।

IV. वितरण नियम

निम्न पर विचार करें–

$4 \times (5 + 8)$ $\quad = 4 \times 5 + 4 \times 8$

$= 4 \times 13$ $\quad = 20 + 32$

$= 52$ $\quad = 52$

अतः $4 \times (5 + 8) = 4 \times 5 + 4 \times 8$

इसी प्रकार, $4 \times (-5 + 7)$ $\quad = 4 \times (-5) + 4 \times 7$

$= 4 \times 2$ $\quad = -20 - 28$

$= 8$ $\quad = -8$

अतः $4 \times (-5 + 7) = 4 \times (-5) + 4 \times 7$

इसी प्रकार, $4 \times [5 + (-7)]$

$4 \times (5 - 7)$ $\quad = 4 \times 5 + 4 \times (-7)$

$= 4 \times (-2)$ $\quad = 20 - 28$

$= -8$ $\quad = -8$

अतः $4 \times [5 + (-7)] = 4 \times 5 + 4 \times (-7)$

उपर्युक्त तथ्यों से स्पष्ट है कि दो या अधिक पूर्णांकों के योग में किसी अन्य पूर्णांक से गुणा किया जाय तो गुणनफल वही आता है, जो गुणक को पूर्णांकों में अलग–अलग गुणा करने से प्राप्त गुणनफलों का योग होता है।

अतः इस गुण को **वितरण नियम (distributive law)** कहते हैं। माना कि x और y दो

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

पूर्णांक हैं, जिनका योगफल $(x + y)$ है, इनके योगफल में a पूर्णांक से गुणा करने पर प्राप्त गुणनफल वही आता है जो पूर्णांक a का x और y के साथ अलग-अलग गुणा कर जोड़ने पर आता है– $\boxed{a(x+y) = ax + ay}$

V. गुणन के लिए तत्समक अवयव

निम्न पर गौर करें–

$4 \times 1 = 4$	$(-3) \times 1 =$	$25 \times 1 =$ .....
$-2 \times 1 = -2$	$(4) \times 1 =$	$-32 \times 1 =$ .....

उपर्युक्त सारणी से हम जानते हैं कि किसी पूर्णांक को एक से गुणा करने पर वही पूर्णांक प्राप्त होता है। अतः पूर्णांकों में गुणन के लिए तत्समक अवयव 1 है

VI. निम्न को समझें–

$5 \times (-1) = -5$	$-1 \times (-5) = +5$
$-5 \times (-1) = +5$	$-1 \times 5 = -5$

इस प्रकार किसी पूर्णांक में -1 से गुणा करने पर गुणनफल विपरीत चिह्न का वही पूर्णांक प्राप्त होता है, अर्थात योगात्मक प्रतिलोम प्राप्त होता है। यदि a कोई पूर्णांक हो, तो $\boxed{a \times -1 = -a}$ तथा $\boxed{-a \times -1 = a}$

VII. निम्न को समझें–

$2 \times 0 = 0$	$25 \times 0 =$	$125 \times 0 =$ .....
$-4 \times 0 = 0$	$37 \times 0 =$	$229 \times 0 =$ .....

अतः किसी पूर्णांक में शून्य से गुणा करने पर गुणनफल शून्य प्राप्त होता है। मान लें कि a एक पूर्णांक है, तो $\boxed{a \times 0 = 0}$

VIII. निम्न को समझें–

	$8 > 5$	पुनः	$8 > 5$
तथा,	$8 \times 2 > 5 \times 2$		$8 \times -2 < 5 \times -2$

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

यदि a, b तथा c ऐसे पूर्णांक हैं कि $a > b$ तो

(i) $a \times c > b \times c$ यदि c = धनपूर्णांक हो,

(ii) $a \times c < b \times c$ यदि c = ऋणपूर्णांक हो

IX. (i) $2 \times 3 \times 4 = (2 \times 3) \times 4 = 2 \times (3 \times 4) = (4 \times 2) \times 3$

(ii) $(-2) \times (-3) \times (-4) = [(-2) \times (-3)] \times (-4) = (-2) \times [(-3) \times (-4)] = [(-2) \times -1] \times (-3)$

अतः तीन पूर्णांकों का गुणा करने में किन्हीं दो पूर्णांकों के गुणनफल में शेष तीसरे पूर्णांक से गुणा करने से अन्तिम गुणनफल नहीं बदलता है।

स्वयं करके देखिए

निम्न गुणों के सामने प्रत्येक का एक उचित उदाहरण दें (गुणा के लिए)

गुण	गुणा के अन्तर्गत	उदाहरण
संवृत गुण		
वितरण गुण		
संवरक गुण		
क्रम विनिमेय गुण		
तत्समक गुण		

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

1.9 गुणा को आसान बनाने का तरीका

$20 \times 78 \times 5$ को हल करने के लिए हम इसे दो तरीकों से कर सकते हैं–

$= (20 \times 78) \times 5 = 1560 \times 5 = 7800$

अथवा, $(20 \times 5) \times 78$

$= 100 \times 78 = 7800$

कौन–सी विधि आसान है?

स्पष्ट है कि दूसरी विधि आसान है, क्योंकि 20 को 5 से गुणा करने पर 100 प्राप्त होता है, जिसे 78 से गुणा करना आसान है। ध्यान दीजिए दूसरी विधि में पूर्णांकों की क्रमविनिमेयता और सहचारिता के गुणों का उपयोग किया।

उदाहरण–1.

(i) 28×12

$28 \times 12 = 28 \times (10 + 2)$

$= 28 \times 10 + 28 \times 2$

$= 280 + 56 = 336$

(ii) -8×48

$-8 \times (50 - 2)$

$= -8 \times 50 + [(-8) \times (-2)]$

$= -100 - 16 = -384$

(iii) $(-25) \times (-98)$

$= -25 \times (-100 + 2)$

$= (-25) \times (-100) + (-25) \times 2$

$= 2500 - 50 = 2450$

(iv) $54 \times (-8) + (-54) \times 2$

$= -54 \times 8 + (-54) \times 2$

$= -54 \times (8 + 2) = -54 \times 10$

$= -540$

उपर्युक्त उदाहरणों को देखने से पता चलता है कि गुणा के नियमों/गुणों का **उपयोग** कर गुणनफल को आसानी से प्राप्त किया जा सकता है।

स्वयं करके देखिए

गुणा के नियमों द्वारा निम्नलिखित को सरल करें–

(a) $-50 \times 48 \times 2$ (b) 850×48

(c) -75×52 (d) $-38 \times 2 - 38 \times 8$

शब्द समस्याएँ

उदाहरण–2. **दो पूर्णांकों का गुणनफल** -30 है यदि उनमें से एक पूर्णांक 15 है तो दूसरी **पूर्णांक ज्ञात करें।**

हल : यहाँ, एक पूर्णांक $= 15$

गुणनफल $= -30$

$\because$ एक पूर्णांक $\times$ दूसरा पूर्णांक $=$ गुणनफल

$\therefore$ $15 \times$ दूसरा पूर्णांक $= -30$

$\therefore$ दूसरा पूर्णांक $= \frac{-30}{15} = -2$ उत्तर।

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

प्रश्नावली–1.2

1. गुणा कीजिए–

(a) $225 \times (-4)$ (b) $(-405) \times (-5)$

(c) $(-80) \times (-50)$ (d) $(-11) \times 15$

(e) $(-3) \times 35 \times (-10)$ (f) $(-25) \times 0$

(g) $(-4) \times (-4) \times (-4) \times (-4)$ (h) $(-2) \times (-2) \times (-2)$

(i) $(-20) \times (-15) \times (-25) \times (-5)$ (j) $-50 \times 5 \times (-20)$

2. निम्नलिखित में सत्य और असत्य को चुनें–

(i) $18 \times (-2) = (-2) \times 18$ (ii) $-38 \times 1 = 38$

(iii) $(-20) \times (-5) = (-5) \times (-20)$ (iv) $43 \times 0 = 43$

(v) $1 \times -425 = -425$ (vi) $-1 \times 25 = -25$

(vii) $[(-2) \times (-12)] \times -24 = (-2) \times [(-12) \times (-24)]$

(viii) $(-5) \times (2 + 3) = (-5) \times 2 + (-5) \times 3$

3. निम्नलिखित के सामने उसके उचित गुण को लिखिए–

(i) $-25 \times (8 + 2) = (-25) \times 8 + (-25) \times 2$ .....

(ii) $(-8) \times (-4) = (-4) \times (-8)$ (iv) $-2 \times -10 = 20$

(iii) $(20 \times 30) \times 40 = 20 \times (30 \times 40)$ (v) $-5 \times 1 = -5$

4. सत्यापित करें–

(i) $42 \times (-5) = -5 \times 42$

(ii) $25 \times (28 + 2) = 25 \times 28 + 25 \times 2$

(iii) $(50 \times 60) \times 70 = 50 \times (60 \times 70)$

(iv) $(-24) \times (5 \times 2) = (-24 \times 5) \times 2$

5. किस पूर्णांक में (–1) का गुणा करने पर गुणनफल निम्न प्राप्त होते है–

(i) 20 (ii) –15 (iii) 0 (iv) 1 (v) –50

6. $-1 \times 0 = 0$ के आधार पर सत्यापित कीजिए कि दो ऋण पूर्णांकों का गुणनफल धनात्मक पूर्णांक होता है।

(संकेत :– $-4 \times (2 - 2) = 0$ या $-4 \times [2 + (-2)] = -4 \times 2 + (-4) \times (-2) = -8 + (-4) \times (-2)$

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

इसका मान शून्य नहीं होगा जब $(-4) \times (-2) = -8$

$\therefore$ दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल धन पूर्णांक होता है।

7. सरल कीजिए (विभिन्न गुणों का उपयोग करते हुए)

(i) $(-7) \times 5 + (-7) \times 11$ (ii) $675 \times (-5) - 5 \times (-675)$

(iii) $8 \times (50 - 2)$ (iv) $5 \times 27 \times (-4)$

(v) 987×98 (vi) $-57 \times (-19) + 57$

8. निम्नलिखित सारणी को पूरा करें–

x	0	– 1	– 2	– 3	4	6
– 2						
– 3						
– 1						
– 1						
5						

9. निम्नलिखित में से कौन सत्य है और कौन असत्य?

(i) – 20 का योज्य प्रतिलोम 20 है। ( )

(ii) किसी पूर्णांक का योज्य प्रतिलोम प्राप्त करने के लिए उसमें शून्य से गुणा करते हैं। ( )

(iii) 5 ऋण पूर्णांकों का गुणनफल धन पूर्णांक होता है। ( )

(iv) चार ऋण पूर्णांकों का गुणनफल धन पूर्णांक होता है। ( )

(v) $-4 \times 1 = -4$ ( )

(vi) $-5 \times 0 = 0$ ( )

10. निम्नलिखित में पूर्णांकों के गुणा में सही कथनों के आगे सही का निशान लगाएँ तथा गलत कथनों को ठीक करके लिखें।

(i) $(-2) \times (-3) = -6$ ( ) (ii) $(-4) \times (18) = 132$ ( )

(iii) $(-2) \times (-2) = 12$ ( ) (iv) $(-3) \times (14) = -12$ ( )

BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

11. किसी हेमीकरण (ठंडा) प्रक्रिया में, कमरे के तापमान को 40°C से 5°C प्रति घंटे की दर से कम करने की आवश्यकता है। उस प्रक्रिया के शुरू होने के 10 घंटे बाद कमरे का तापमान क्या होगा?

12. दस प्रश्नोंवाले एक कक्षा टस्ट में प्रत्येक सही उत्तर के लिए 5 अंक दिए जाते हैं और प्रत्येक गलत उत्तर के लिए (– 2) अंक दिए जाते हैं एवं प्रयत्न नहीं किये गये प्रश्नों के लिए शून्य दिया जाता है।

(i) मोहन चार प्रश्नों का सही और छह प्रश्नों का गलत उत्तर देता है, उसके द्वारा प्राप्त अंक कितने हैं?

(ii) रेशमा के पाँच उत्तर सही है और पाँच उत्तर गलत है, उसके द्वारा प्राप्त अंक कितने हैं?

(iii) हीना ने कुल सात प्रश्न हल किए हैं, उनमें से दो के उत्तर सही हैं और पाँच के उत्तर गलत हैं तो, उसके द्वारा प्राप्त अंक कितने हैं?

13. एक सीमेंट कंपनी का सफेद सीमेंट बेचने पर 8 रुपये प्रति बोरी की दर से लाभ होता है और स्लेटी (Grey) रंग की सीमेंट बेचने पर 5 रुपये प्रति बोरी की दर से हानि होती है।

(a) किसी महीने में यह कंपनी सफेद सीमेंट की 3000 बोरियाँ और स्लेटी सीमेंट की 5000 बोरियाँ बेचती है। उसका लाभ अथवा हानि क्या है?

(b) यदि बेची गई सफेद सीमेंट की बोरियों की संख्या 6400 है तो, कम्पनी को स्लेटी सीमेंट की कितनी बोरियाँ बेचनी चाहिए, ताकि उसे ना तो लाभ हो और ना हानि?

14. एक विद्युत कम्पनी प्रत्येक रंगीन टी०वी० पर 80 रुपये का लाभ कमाता है और प्रत्येक रेफ्रिजरेटर पर 60 रुपये का हानि होता है।

(a) कम्पनी 5000 रंगीन टी०वी० और 4000 रेफ्रिजरेटर एक महीने में बेचता है। तो कम्पनी को कितना लाभ या हानि होती है?

(b) कम्पनी द्वारा 4000 रेफ्रिजरेटर बेचने पर कम्पनी कितना रंगीन टी०वी० बेचे कि उसे न लाभ हो और न हानि?

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

1.10 पूर्णांकों में भाग संक्रिया (Division Operation in Integers)

हम जानते हैं कि भाग, गुणा की विपरीत प्रक्रिया है, जैसे $4 \times 7 = 28$ है, इसलिए $28 : 4 = 7$ तथा $28 : 7 = 4$ है।

इसी प्रकार $5 \times 4 = 20$ और $20 \div 5 = 4$ एवं $20 \div 4 = 5$ प्राप्त होता है।

इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि पूर्ण संख्याओं के प्रत्येक गुणन कथन के लिए दो विभाजन या भाग, कथन होते हैं।

क्या आप पूर्णांकों के लिए गुणन कथन एवं संगत भाग कथनों को लिख सकते हैं?

निम्नलिखित सारणी को देखिए और इसे पूरा कीजिए।

गुणन कथन	संगत भाग कथन	
	I	II
$2 \times (-6) = (-12)$	$(-12) : (-6) = 2$	$(-12) \div 2 = (-6)$
$(-4) \times 5 = (-20)$	$(-20) \div (5) = (-4)$	$(-20) \div (-4) = 5$
$(-8) \times (-9) = 72$	$72 \div$ _____ = _____	$72 \div$ _____ = _____
$(-3) \times (-7) =$ _____	_____ $\div (-3) =$ _____	_____
$(-8) \times 4 =$ _____	_____	_____
$5 \times (-9) =$ _____	_____	_____
$(-10) \times (-5) =$	_____	_____

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

उपर्युक्त से हम देखते हैं कि–

$(-12) : 2 = (-6)$ $\qquad$ $(-20) : (5) = (-4)$

$(-32) \div 1 = -8$ $\qquad$ $(-15) \div 5 = -9$

हम देखते हैं कि जब हम एक ऋणात्मक पूर्णांक को धनात्मक पूर्णांक से भाग देते हैं, तो हम उन्हें पूर्ण संख्याओं के रूप में भाग देते हैं और इसके पश्चात् भागफल से पहले ऋण चिह्न (–) रख देते हैं। इस प्रकार, हम एक ऋणात्मक पूर्णांक प्राप्त करते हैं।

हम यह भी देखते हैं कि–

$72 \div (-8) = -9$ $\qquad$ और $\qquad$ $50 \div (-10) = -5$

$72 \div (-9) = -8$ $\qquad$ $\qquad$ $50 \div (-5) = -10$

इस प्रकार, हम यह कह सकते हैं कि जब हम एक धनात्मक पूर्णांक को एक ऋणात्मक पूर्णांक से भाग देते हैं, तो सर्वप्रथम हम उन्हें पूर्ण संख्याओं के रूप में भाग देते हैं और उसके पश्चात् भागफल के सामने ऋण चिह्न (–) रख देते हैं। इस प्रकार, हमें एक ऋणात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है।

व्यापक रूप में,

$$(+a) \div (+b) = +\frac{a}{b},\ (-a) \div (-b) = +\frac{a}{b},\ (+a) \div (-b) = -\frac{a}{b},\ (-a) \div (+b) = -\frac{a}{b}$$

स्वयं कीजिए

(a)	$-50 \div 10$	(b)	$-56 \div 7$	(c)	$85 \div (-5)$
(d)	$90 \div (-3)$	(e)	$-100 \div 20$		

उदाहरण—3. किसी टेस्ट में प्रत्येक सही उत्तर के लिए + 6 अंक दिए जाते हैं और प्रत्येक गलत उत्तर के लिए (– 2) अंक दिए जाते हैं। (i) रेखा ने सभी प्रश्नों के उत्तर दिए और 36 अंक प्राप्त किए जबकि उसके 12 उत्तर सही पाए गये। (ii) पवन ने भी कुछ प्रश्नों के उत्तर दिए और उसने – 12 अंक प्राप्त किए, जबकि उसके पाँच उत्तर सही पाए गये। प्रत्येक ने कितने प्रश्नों के उत्तर गलत दिए?

हल : (i) एक सही उत्तर के लिए दिए गये अंक = 6

अतः 12 सही उत्तरों के लिए दिए गये अंक $= 6 \times 12 = 72$

रेखा के द्वारा प्राप्त किये गये अंक = 36

गलत उत्तरों के लिए प्राप्त अंक $= 36 - 72 = -36$

(– 2) अंक मिलता है एक गलत उत्तर पर

इसलिए (– 36) अंक मिलना $-36 \div (-2) = 18$ गलत उत्तरों पर

∴ गलत उत्तरों की संख्या 18

(ii) पाँच सही उत्तरों के लिए दिए गये अंक $= 5 \times 6 = 30$

पवन द्वारा प्राप्त किये गये अंक = – 12

गलत उत्तरों के लिए प्राप्तांक $= -12 - 30 = -42$

∵ – 2 अंक मिलता है एक गलत उत्तर पर

∴ – 42 अंक मिलना $-42 \div (-2) = 21$ गलत उत्तर पर

∴ गलत उत्तरों की संख्या 21

BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

1.11 भाग संक्रिया के गुण (Properties of Division Operation)

निम्नलिखित पर विचार करें–

I. $-6 \div (-2) = 3$, पूर्णांक संख्या है $\qquad 6 \div (-2) = -3$ एक पूर्णांक है

परन्तु $-2 \div (-6) = \frac{-2}{-6}$, पूर्णांक संख्या नहीं है।

उपर्युक्त उदाहरण से स्पष्ट है कि किन्हीं दो पूर्णांकों का भागफल एक पूर्णांक होगा या नहीं भी।

II. $-12 \div (-4) = 3 \qquad -4 \div (-12) = \frac{-4}{-12}$

$\therefore \quad -12 \div (-4) \neq -4 \div (-12)$

अतः भाग में क्रम विनिमेय गुण नहीं है।

III. $-4 : 0 =$ अपरिभाषित $\qquad 5 : 0 =$ अपरिभाषित

अतः किसी भी पूर्णांक को शून्य से भाग करना अर्थहीन है। परन्तु $0 \div (-4) = 0$; $0 \div 5 = 0$

अतः शून्य में किसी भी पूर्णांक (शून्य को छोड़कर) से भाग करने पर भागफल शून्य होता है।

इसे एक उदाहरण लेकर समझा जा सकता है, जैसे $-0 \div 4 = ?$

हम जानते हैं, $0 \div 4 = \frac{0}{4} = \frac{1-1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$

IV. निम्नलिखित को देखें–

$-10 \div 1 = -10 \qquad +5 \div 1 = 5$

यह दर्शाता है कि किसी भी पूर्णांक में 1 से भाग देने पर भागफल वही पूर्णांक प्राप्त होता है। अतः पूर्णांकों में भाग के लिए तत्समक अवयव 1 है। माना कि पूर्णांक a है, तो $\boxed{a \div 1 = a}$ क्या (-1) से भाग देने पर भी वही पूर्णांक प्राप्त होगा?

V. $(-4) \div (-1) = 4 \qquad -4 \div (-1) = -4$

अतः किसी भी पूर्णांक में (-1) से भाग देने पर वही पूर्णांक प्राप्त नहीं होता है।

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

V. क्या हम कह सकते हैं $[(-8) \div (-4)] \div (-2)$ एवं $(-8) \div [(-4) \div (-2)]$ बराबर हैं?

हम जानते हैं कि $[(-8) \div (-4)] \div (-2) = 2 \div -2 = -1$

और $(-8) \div [(-4) \div (-2)] = (-8) \div 2 = -4$

अतः $[(-8) \div (-4)] \div (-2) \neq (-8) \div [(-4) \div (-2)]$

क्या आप कह सकते हैं कि पूर्णांकों के लिए भाग साहचर्य है?

नहीं।

अपनी ओर से पाँच अन्य उदाहरण लेकर इसे सत्यापित कीजिए।

> स्वयं करके देखिए
>
> क्या भाग में संवरक, तत्समक, क्रम विनिमेय साहचर्य नियम लागू है?
>
> एक-एक उदाहरण द्वारा समझाएँ।

प्रश्नावली– 1.3

1. हल कीजिए–

(i) $(-40) \div 5$ (ii) $(-450) \div 3$ (iii) $(-45) \div (-5)$

(iv) $(-56) \div (-4)$ (v) $25 \div 5$ (vi) $(-128) \div (-16)$

(vii) $0 \div 50$ (viii) $50 \div 0$ (ix) $(-80) \div (-80)$

2. निम्नलिखित गुणा की क्रिया को भाग की दो प्रक्रिया में बदलिए–

(i) $5 \times 8 = 40$ (ii) $-6 \times (-6) = 24$

(iii) $-12 \times 9 = -108$ (iv) $-4 \times (-12) = 48$

(v) $-10 \times 8 = -80$

3. खाली जगह में उपयुक्त पूर्णांक भरिए–

(i) $\square \div (-8) = (-12)$ (ii) $\square \div 8 = (-9)$

(iii) $24 \div \square = -4$ (iv) $-80 \div \square = 10$

(v) $-48 \div 6 = \square$

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

4. निम्नलिखित में कौन सत्य तथा कौन असत्य है। हल कीजिए व बताइए।

(i) $-4 \div 2 = 2 \div (-4)$ (ii) $(-2 \div 4) \div 6 = -2 \div (4 \div 6)$

(iii) $-25 : 0 = 0$ (iv) $0 : 5 = 0$

(v) $-125 : 1 = -125$ (vi) $-45 : (-45) = 1$

5. दोपहर 12 बजे तापमान शून्य से 10°C ऊपर था। यदि यह आधी रात तक 2°C प्रति घंटे की दर से कम होता है, तो किस समय तापमान शून्य से 8°C नीचे होगा? रात के 12 बजे तापमान क्या होगा?

6. एक उत्थापक (lift) किसी खान कूपक में 6m प्रति मिनट की दर से नीचे जाता है। यदि नीचे जाना भूमि तल से 10m ऊपर से शुरू होता है, तो –350m गहुँचने में कितना समय लगेगा?

1.12 कई संक्रियाओं युक्त व्यंजकों का सरलीकरण

उदाहरण–4. $8 + 20 \div 25$ का $\frac{1}{5} \times 10 - 4$

हल : $8 + 20 \div 25$ का $\frac{1}{5} \times 10 - 4$

$= 8 + 20 \div 5 \times 10 - 4$

$= 8 + 4 \times 10 - 4$

$= 8 + 40 - 4$

$= 48 - 4 = 44$

कार्य विधि

– सबसे पहले "का" को हल करते हैं।

– तत्पश्चात् : फिर × की क्रिया करते हैं।

– + तथा – की क्रिया में पहले धनात्मक संख्या के एक साथ और ऋणात्मक संख्या को एक साथ जोड़कर हटा देते हैं और चिह्न बड़ी संख्या वाली लगा देते हैं। (चिह्न रहित बड़ी संख्या)

उदाहरण–5. 240 का $\frac{5}{6}$

हल : $\overset{40}{\cancel{240}}$ का $\frac{5}{\cancel{6}} = 40$ का 5

(अर्थ है 40 का 5 गुणा)

अर्थात् $40 \times 5 = 200$.

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

उदाहरण–6. $350 \div \frac{7}{5}$

हल : $350 \div \frac{7}{5} = \overset{50}{\cancel{350}} \times \frac{5}{\cancel{7}} = 50 \times 5 = 250$

याद रखें

कई राशियों के सरलीकरण का क्रम के लिए इन्हें याद रखें –

पहले "का" कर, पीछे (÷) भाग।
फिर गुणा एवं जोड़–घटाव ।।

कार्य विधि–

भाग के गुणा में बदलकर भाग के बाद आने वाली संख्या (भिन्न) को उलट देते हैं, फिर गुणा की क्रिया करते हैं। गुणा की क्रिया में अंश और हर को किसी उभयनिष्ठ संख्या, जिससे अंश और हर पूरी तरह विभाजित हो सके संख्या से भाग देकर उस संख्या के ऊपर व नीचे भागफल को लिखते हैं, जैसा कि उदाहरण से स्पष्ट है।

1.13 कोष्ठकों का प्रयोग (Use of brackets) : आइए निम्न उदाहरण पर विचार करें–

उदाहरण–7. कुछ टॉफियों को 5 लड़के और 3 लड़कियों में बराबर–बराबर इस प्रकार बाँटना है कि प्रत्येक को 10 टॉफी मिले तो बताएँ कुल कितनी टॉफियां है?

हल : इसका हल दो तरीकों से निकालें–

कुल टॉफी	$= 5 \times 10 + 3 \times 10$	कुल टॉफी	$= 10 \times (5 + 3)$
	$= 50 + 30$		$= 10 \times 8$
	$= 80$		$= 80$

अतः उपर्युक्त उदाहरण से स्पष्ट होता है कि समस्याओं को हल करने में कोष्ठक का उपयोग किया जाता है, जिससे समस्या का समाधान करना आसान हो जाता है।

कोष्ठक (Bracket) निम्न प्रकार के हैं–

(i) **रेखा कोष्ठक (line bracket) :** इसे सरल रेखा द्वारा व्यंजक के ऊपर लगाते हैं, जिसका हल पहले करना है। जैसे – $3 + 4 - 2 + (\overline{2 - 3} + 4)$ में $2 - 3$ का पहले हल करना है।

(ii) **छोटा कोष्ठक (Small bracket या Parenthesis) :** इसका चिह्न "( )" जैसे – $2 + 3 \times (4 - 2)$ इसमें $4 - 2$ के पहले हल करना है।

(iii) **मँझला कोष्ठक (Curly bracket या Braces) :** इसका चिह्न "{ }" है।

(iv) **बड़ा कोष्ठक (Big bracket या Square bracket) :** इसका चिह्न "[ ]" है।

कोष्ठकों के तोड़ने अर्थात व्यंजकों के सरलीकरण का क्रम इस प्रकार है–पहले

© BSTBPC WEBCOPY NOT TO BE PUBLISHED

सेल –कोष्ठक, तब छोटा कोष्ठक, पुनः मंझला कोष्ठक और अंत में बड़े कोष्ठक को तोड़ते हैं। अर्थात् कोष्ठक के अन्दर के व्यंजकों को सरलीकरण करते हैं।

निम्नलिखित उदाहरण पर गौर करें–

उदाहरण–8. $(14 \div 7) \times [8 + \{3 - \overline{8-2}\}] - (5-2)$

हल : $(14 \div 7) \times [8 + \{3 + \overline{8-2}\}] - (5-2)$

$= \left(14 \times \frac{1}{7}\right) \times [8 + \{3 - 6\}] - 3$

$= 2 \times [8 + 9] - 3$

$= 2 \times 17 - 3$

$= 34 - 3 = 31$

उपर्युक्त उदाहरण के हल से स्पष्ट होता है कि–

(i) सबसे पहले रेखा कोष्ठक के भीतर की क्रिया करते हैं।

(ii) उसके बाद छोटा कोष्ठक का

(iii) तत्पश्चात मँझला कोष्ठक का और

(iv) अंत में बड़ा कोष्ठक के भीतर की क्रिया करते हैं।

हमें कोष्ठक को तोड़ते या हटाते समय निम्नलिखित तथ्यों पर ध्यान देना चाहिए–

(i) यदि किसी कोष्ठक के पहले संख्यांक है तो इसका अर्थ है कि कोष्ठक के भीतर की प्रत्येक संख्या से गुणा करना।

(ii) यदि कोष्ठक के पहले ऋण (–) चिह्न है तो कोष्ठक के भीतर के प्रत्येक संख्या (पद) का चिह्न बदल जाता है। (सिर्फ + और – चिह्न) [जैसे : $-(8-2) = -8-2$]

(iii) यदि कोष्ठक के बाहर धन (+) चिह्न है तो कोष्ठक के भीतर के प्रत्येक संख्या (पद) का चिह्न में कोई परिवर्तन नहीं होता है।

(iv) कोष्ठक के बाहर यदि कोई चिह्न न हो तो गुणा का चिह्न (×) समझा जाता है।

(v) यदि एक ही कोष्ठक के अन्दर कोई चिह्नयुक्त संख्या (पद) हो तो क्रियाओं में इस क्रम ("का", ÷, ×, +, –) का पालन करें।

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

इसे सहजता से याद रखने के लिए BODMAS के अक्षरों का क्रम याद रखें। अर्थात्

B	→	Bracket (कोष्ठक)
O	→	Of (का)
D	→	Division (भाग)
M	→	Multiplication (गुणा)
A	→	Addition (जोड़)
S	→	Subtraction (घटाव)

कोष्ठक लगाने का नियम–

(i) यदि कोष्ठक के ठीक पहले ऋण (–) चिह्न रखते हैं तो कोष्ठक के भीतर डाले जानेवाले प्रत्येक संख्या (पद) का चिह्न (+ और –) बदलकर रखते हैं। जैसे : $-12+4-2-5 = -(12-4+2-5)$

(ii) यदि कोष्ठक के बाहर धन (+) चिह्न रखते हैं तो कोष्ठक के भीतर डाले जानेवाले किसी भी संख्या (पद) का चिह्न नहीं बदलता है। जैसे : $-12+4-2-5 = +(-12+4-2+5)$

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

उदाहरण–9. मनीष अपने पिता से 60 रुपये माता से 30 रुपये लेकर बाजार गया। इन रुपयों में से 50 रुपये का उसने कपड़ा खरीदा। बचे हुए धन के 5वें भाग से एक पुस्तक खरीदा। उक्त विवरण को कोष्ठकों की सहायता से गणितीय रूप में लिखिए तथा बताइए कि मनीष ने कितने रुपये की पुस्तक खरीदी ?

हल : $[(60+30)-50] \div 5$ (उक्त विवरण का गणितीय रूप)

$= [90-50] \div 5$

$= 40 \div 5$

$= 40 \times \frac{1}{5} = 8$

अतः मनीष ने 8 रुपये की पुस्तक खरीदी।

प्रश्नावली–1.4

1. सरल कीजिए–

(i) 20 का $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{250}{9}$ का $\frac{3}{50}$ (iii) $2\frac{1}{2} : \frac{20}{8}$

(iv) $\frac{12}{7} : \frac{9}{35}$ (v) $\frac{75}{18} \times \frac{60}{36}$

(vi) 20 का $\frac{1}{4} \times \frac{1}{5} \div \frac{1}{8} + 10 - 15$ (vii) $20 - (8 + 5)$

(viii) $16 : (15 - 8 - 3) + 4$ (ix) $14 : \{3$ का $2 - (5 - 6)\} + 9$

(x) $(30 - 5 \times 6 + 2) \div 2$

2. कोष्ठकों का प्रयोग कर निम्नलिखित प्रश्नों को गणितीय रूप दीजिए–

(i) 5 और 15 के योग में 18 से भाग देना।

(ii) 69 में 1 और 6 के गुणनफल से 1 कम का भाग देना।

(iii) राहुल ने अपनी 24 पेंसिलों में से 4 को अपने पास रखकर शेष को अपने 5 साथियों में बराबर-बराबर बाँट दिया। प्रत्येक साथी को कितनी पेंसिलें मिलीं ?

(iv) 25 तथा 5 के योग से 1 अधिक का 124 में भाग देना।

(v) 2 तथा 4 के गुणनफल से 2 कम का 9 से गुणा कर गुणनफल में 6 से भाग देना।

3. सरल कीजिए–

(i) $50 + \{15 - 5 + (8 - 2)\}$ (ii) $8 [6 + 2 \{5 - 4 (5 - 8)\}]$

(iii) $12 : \overline{6 - 2} + 10$ (iv) $15 + [2 - 3 - [2 (5 - 4 + 1)]]$

(v) $103 - [144 \div (12 \times 12) + 5 + 12 \div \overline{6 - 2} + 10]$

(vi) $5 [5 - \{5 - (5 - 5 - 5)\}]$

(vii) $15 - (-3) (4 - 4) \div \{5 - (-6) \times (-3)\}$

(viii) $(-6) + (-6) \div 2 - [(-5) \times (-1) - 2 (4 - 2)]$

(ix) $25 + \left[20 - \left\{2 - \left(20 \text{ का } \frac{1}{5} \div \frac{1}{8} \times \frac{1}{16} - 8\right)\right\}\right]$

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

हमने सीखा

1. पूर्णांक संख्याएँ – जब पूर्ण संख्या के परिवार में ऋणात्मक संख्या शामिल हो जाती है तो इस संख्या परिवार को पूर्णांक संख्याएँ कहते हैं। जैसे :– ....., –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...

2. दो विपरीत गुणों को दर्शाने के लिए पूर्णांक का उपयोग किया जाता है, जैसे– ऊँचाई–गहराई, लाभ–हानि, ठण्डा–गर्म आदि।

3. दो धनात्मक पूर्णांकों के जोड़ने पर धनात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है तथा दो ऋणात्मक पूर्णांकों का जोड़ने पर ऋणात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है। यदि दो पूर्णांक विपरीत चिह्न के हों तो वे घट जाते हैं तथा जिसका परिमाण बड़ा होता है उसका चिह्न बच जाता है।

4. अब हमने जोड़ एवं घटा द्वारा संतुष्ट होनेवाले गुणों का अध्ययन किया है।

   (अ) पूर्णांक जोड़ एवं घटा दोनों के लिए संवरक है। अर्थात् $a + b$ और $a - b$ दोनों पुनः पूर्णांक होते हैं, जहाँ a और b कोई भी पूर्णांक हैं।

   (ब) पूर्णांकों के लिए योग क्रम विनिमेय है, अर्थात् सभी पूर्णांकों a तथा b के लिए $a + b = b + a$, परन्तु घटाव के लिए नहीं है अर्थात् $a - b \neq b - a$

   (स) पूर्णांकों के लिए योग साहचर्य है, अर्थात् सभी पूर्णांकों a, b तथा c के लिए $(a + b) + c = a + (b + c)$ होता है। परन्तु घटाव के लिए साहचर्य नहीं है अर्थात् $(a - b) - c = a - (b - c)$

   (द) योग के अंतर्गत पूर्णांक शून्य तत्समक है, अर्थात् किसी भी पूर्णांक a के लिए $a + 0 = 0 + a = a$ होता है।

5. एक धनात्मक एवं एक ऋणात्मक पूर्णांक का गुणनफल एक ऋणात्मक पूर्णांक है, जबकि दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल एक धनात्मक पूर्णांक है।
उदाहरण: $-2 \times 7 = -14$ और $-3 \times -8 = 24$ है।

6. एक से अधिक ऋण पूर्णांकों के गुणन की दशा में यदि ऋणात्मक पूर्णांकों की संख्या सम होने पर उनका गुणनफल धनात्मक होता है जबकि यह संख्या विषम होने पर उनका गुणनफल ऋणात्मक होता है।

7. पूर्णांक गुणन के अंतर्गत कुछ गुणों को देखते हैं।

   (अ) गुणन के अंतर्गत पूर्णांक संवृत होते हैं, अर्थात् किन्हीं दो पूर्णांकों a तथा b के लिए $a \times b$ एक पूर्णांक होता है।

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

(ब) पूर्णांकों के लिए गुणन क्रम विनिमेय होता है, अर्थात् किन्हीं दो पूर्णांकों a तथा b के लिए $a \times b = b \times a$ होता है।

(स) गुणन के अंतर्गत पूर्णांक 1, तत्समक है, अर्थात् किसी भी पूर्णांक a के लिए $1 \times a = a \times 1 = a$ होता है।

(द) पूर्णांकों के लिए गुणन साहचर्य होता है, अर्थात किन्हीं तीन पूर्णांकों a, b तथा c के लिए $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ होता है।

8. योग एवं गुणन के अंतर्गत पूर्णांक वितरण गुण का पालन करते हैं। अर्थात किन्हीं तीन पूर्णांकों a, b तथा c के लिए $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ होता है।

9. योग एवं गुणन के अंतर्गत क्रम विनिमेय, साहचर्य और वितरण के गुण इनके परिकलन को आसान बनाते हैं।

10. (अ) किन्हीं दो पूर्णांकों का भागफल एक पूर्णांक हो भी सकता है और नहीं भी।

(ब) जब एक धनात्मक पूर्णांक को धनात्मक पूर्णांक से भाग दिया जाता है तो प्राप्त भागफल धनात्मक होता है।

(स) जब एक धनात्मक पूर्णांक को एक ऋणात्मक पूर्णांक से भाग दिया जाता है या जब एक ऋणात्मक पूर्णांक को एक धनात्मक पूर्णांक से भाग दिया जाता है, तो प्राप्त भागफल एक ऋणात्मक होता है।

(द) एक ऋणात्मक पूर्णांक को दूसरे ऋणात्मक पूर्णांक से भाग देने पर प्राप्त भागफल एक धनात्मक होता है।

11. (अ) भाग में क्रम विनिमेय गुण नहीं होता है।

(ब) शून्य में किसी भी पूर्णांक (शून्य को छोड़कर) से भाग देने पर भागफल शून्य होता है तथा किसी भी पूर्णांक को शून्य से भाग देना अर्थहीन है। अपरिभाषित है।

(स) किसी भी पूर्णांक में 1 से भाग देने पर वही पूर्णांक प्राप्त होता है।
जैसे $5 \div 1 = 5, 4 \div 1 = 4$ अर्थात् $a \div 1 = a$ जहाँ a कोई एक पूर्णांक है।

(द) किसी भी पूर्णांक में (-1) से भाग करने पर वही पूर्णांक प्राप्त नहीं होता है।
जैसे $5 \div (-1) = -5$, तथा $6 \div (-1) = -6$

(ए) पूर्णांक भाग के लिए साहचर्य गुण प्रदर्शित नहीं करते हैं।

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

अध्याय-2 भिन्न

2.1 भूमिका

पिछली कक्षाओं में, आप भिन्न और उसके जोड़ एवं घटाव का अध्ययन कर चुके हैं। आपने भिन्नों की तुलना, तुल्य भिन्न, भिन्नों को संख्या रेखा पर निरूपित करना और भिन्नों को प्रकट करना आदि के बारे में भी अध्ययन किया है। इस अध्याय में हम इस से आगे भिन्नों के गुणन एवं भाग के बारे में अध्ययन करेंगे।

2.2 पुनरावलोकन

हमने पिछली कक्षाओं में पढ़ा है कि भिन्न वे संख्याएं हैं जिन्हें $\frac{a}{b}$ रूप में लिखा जा सकता है। जहाँ a और b पूर्ण संख्याएँ हैं तथा $b \neq 0$. क्या $1\frac{2}{3}$ एक भिन्न है? उचित भिन्न (समभिन्न) वह भिन्न होती है जो संपूर्ण के एक भाग को निरूपित करती है। क्या $\frac{5}{3}$ एक उचित भिन्न है? इसके अंश तथा हर में कौन बड़ा है?

विषम भिन्न में, सम्पूर्ण एवं सम्पूर्ण के एक भाग (उचित भिन्न) का संयोजन होता है। क्या $\frac{5}{3}$ एक विषम भिन्न है? यहाँ अंश अथवा हर में कौन बड़ा है? विषम भिन्न $\frac{5}{3}$ को $1\frac{2}{3}$ के रूप में लिखा जा सकता है। यह एक मिश्रित भिन्न है। आप उचित, विषम एवं मिश्रित भिन्न के पाँच–पाँच उदाहरण लिखिए। क्या $\frac{4}{7}$ और $\frac{8}{14}$ तुल्य भिन्न हैं? दो भिन्न तुल्य भिन्न कहलाती है, यदि वे समान मात्रा को निरूपित करती है।

© BSTBPC WEBCOPY NOT TO BE PUBLISHED

$\frac{2}{7}$ और $\frac{8}{14}$ में से भिन्न का सरलतम रूप कौन है? जिस भिन्न के हर और अंश में 1 के अलावा कोई दूसरा उभयनिष्ठ गुणनखण्ड न हो, वह भिन्न का सरलतम रूप (lowest form) होता है।

उदाहरण–1. $\frac{6}{7}$ और $\frac{4}{5}$ में कौन बड़ा है?

हल : 7 और 5 का लघुत्तम (L.C.M.) 35

इसलिए $\frac{6}{7}=\frac{6\times5}{7\times5}=\frac{30}{35}$ और $\frac{4}{5}=\frac{4\times7}{5\times7}=\frac{28}{35}$

चूँकि $\frac{30}{35}>\frac{28}{35}$ अतः $\frac{6}{7}>\frac{4}{5}$

उदाहरण–2. गिरधू ने $4\frac{1}{2}$ किलोग्राम आम और $2\frac{3}{4}$ किलोग्राम नाशपाती खरीदे। गिरधू द्वारा खरीदे गये फलों का कुल भार कितना है?

हल : फलों का कुल भार $=4\frac{1}{2}$ किलोग्राम $+2\frac{3}{4}$ किलोग्राम

$=\left(\frac{9}{2}+\frac{11}{4}\right)$ किलोग्राम

$=\left(\frac{18}{4}+\frac{11}{4}\right)$ किलोग्राम $\left(\frac{9}{2}=\frac{18}{4}\right.$ तुल्य भिन्न)

$=\frac{29}{4}$ किलोग्राम $=7\frac{1}{4}$ किलोग्राम।

उदाहरण–3. रोहित प्रतिदिन $3\frac{2}{3}$ घंटे खेलता है। वह अपने द्वारा समय में से $1\frac{4}{5}$ घंटे रोहित के साथ खेलता है तो दूसरे साथियों के साथ वह कितना समय खेलता है?

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

हल : रोहित के खेलने का कुल समय $3\frac{2}{3}$ घंटे $\frac{11}{3}$ घंटे

रोहित का नरेश के साथ खेलने में लगा समय $1\frac{4}{5}$ घंटे $-\frac{9}{5}$ घंटे

अतः रोहित का दूसरे साथियों के साथ लगा समय $\left(\frac{11}{3}-\frac{9}{5}\right)$ घंटे

$-\left(\frac{55}{15}-\frac{27}{15}\right)$ घंटे $\left(\frac{11}{3}=\frac{55}{15}\right.$ तथा $\left.\frac{9}{5}=\frac{27}{15}\right)$

$-\frac{28}{15}$ घंटे $-1\frac{13}{15}$ घंटे

प्रश्नावली–2.1

1. निम्न के चार–चार तुल्य भिन्न लिखिए–

(i) $\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{6}{7}$ (iii) $\frac{3}{17}$

2. नीचे दिए गए भिन्न संख्या के जोड़ों की तुलना कीजिए और बताइए कि दोनों में से कौन सी भिन्न संख्या छोटी है?

(i) $\frac{3}{5}$ और $\frac{4}{3}$ (ii) $\frac{6}{7}$ और $\frac{7}{6}$

(iii) $\frac{21}{5}$ और $\frac{18}{4}$ (iv) $\frac{7}{15}$ और $\frac{9}{20}$

3. हल कीजिए–

(i) $\frac{2}{5}-0$ (ii) $4+\frac{7}{8}$ (iii) $\frac{3}{2}+\frac{2}{7}$ (iv) $\frac{5}{9}+\frac{4}{7}$

(v) $\frac{2}{5}+\frac{9}{15}$ (vi) $\frac{2}{15}-\frac{1}{20}$ (vii) $\frac{9}{11}-\frac{4}{15}$

(viii) $7\frac{1}{2}-2\frac{1}{5}$ (ix) $4\frac{1}{2}-1\frac{1}{5}-\frac{2}{5}$ (x) $2\frac{1}{5}+1\frac{1}{4}-\frac{1}{2}$

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

4. एक 'जादुई वर्ग' में प्रत्येक पंक्ति, प्रत्येक स्तम्भ एवं प्रत्येक विकर्ण की संख्याओं का योग समान होता है। क्या यह एक जादुई वर्ग है?

$\frac{4}{13}$	$\frac{9}{13}$	$\frac{2}{13}$
$\frac{3}{13}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{7}{13}$
$\frac{8}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{6}{13}$

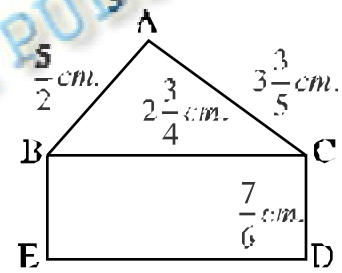
(प्रथम पंक्ति का अनुदिश $\frac{4}{13}$ $\frac{9}{13}$ $\frac{2}{13}$ – $\frac{15}{13}$)

5. निम्नलिखित भिन्न संख्याओं को आरोही क्रम (बढ़ते क्रम) में लिखिए–

(i) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}$ (ii) $\frac{3}{7}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}$

6. एक आयताकार श्यामपट्ट की लम्बाई $3\frac{1}{2}$ मी. और चौड़ाई $2\frac{2}{3}$ मी. है। श्यामपट्ट का परिमाण ज्ञात कीजिए।

7. चित्र में दी हुई आकृति में (i) ΔABC तथा (ii) आयत BCDE का परिमाण ज्ञात कीजिए तथा (iii) बताइए किसका परिमाप ज्यादा है?



8. राधा ने एक पाठ को पढ़ने में $\frac{11}{16}$ घंटे का समय लिया? शालीन ने उसी पाठ को पढ़ने में $\frac{3}{4}$ घंटे का समय लिया। किसने ज्यादा समय लिया। यह समय कितना ज्यादा था?

9. खाली स्थानों में सही अंक भरिए–

(i) $\frac{5}{7}+\frac{\square}{7}=\frac{6}{7}$ (ii) $\frac{8}{15}-\frac{2}{15}-\frac{\square}{\square}$ (iii) $\frac{7}{9}+\frac{\square}{\square}=\frac{7}{9}$

(iv) $\frac{3}{5}-\frac{\square}{5}=\frac{1}{5}$ (v) $1-\frac{1}{2}=\frac{\square}{\square}$

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

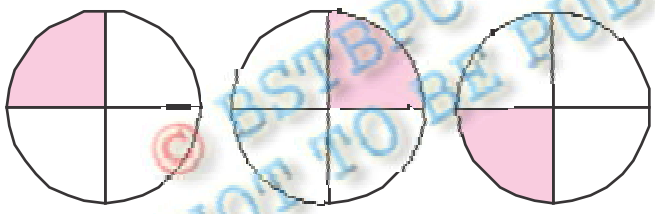
2.3 भिन्नों का गुणन

हम जानते हैं कि यदि किसी आयत की लम्बाई एवं चौड़ाई क्रमशः 9 सेमी. और 5 सेमी. हो तो इसका क्षेत्रफल 9 सेमी. × 5 सेमी. = 45 सेमी.^{2} होगा।

अब यदि आयत की लम्बाई एवं चौड़ाई क्रमशः $9\frac{1}{2}$ सेमी. एवं $5\frac{1}{2}$ सेमी. है तो इसका क्षेत्रफल क्या होगा? आप कहेंगे कि यह $9\frac{1}{2}$ सेमी. × $5\frac{1}{2}$ सेमी. = $\left(\frac{19}{2}\times\frac{11}{2}\right)$ सेमी.^{2} है। $\frac{19}{2}\times\frac{11}{2}$ भिन्नों का गुणन है। आइए भिन्नों का गुणा कैसे होता है देखें :–

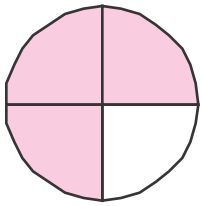
2.3.1 पूर्ण संख्या एवं भिन्न का गुणन

आकृति 2.1 को देखिए। प्रत्येक छायांकित (Shaded) भाग, वृत्त का $\frac{1}{4}$ भाग है।



आकृति–2.1

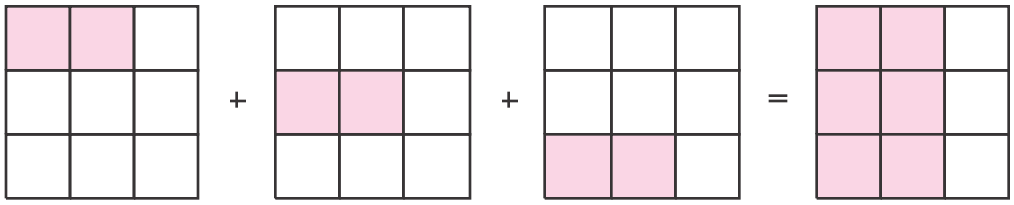
इस प्रकार तीन छायांकित भाग मिलकर वृत्त के $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=3\times\frac{1}{4}$ को निरूपित करेंगे। इन तीन छायांकित भागों को संयोजित करने पर हमें आकृति 2.2 प्राप्त होती है, जो वृत्त के $\frac{3}{4}$ भाग को निरूपित करता है, अर्थात् $3\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$



आकृति–2.2

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

क्या अब आप बता सकते हैं कि आकृति 2.3 किसे निरूपित करेगी?



आकृति–2.3

यहाँ प्रत्येक में छायांकित भाग $\frac{2}{9}$ है। अतः हमें $3\times\frac{2}{9}$ ज्ञात करना है।

$$3\times\frac{2}{9}=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{2+2+2}{9}=\frac{3\times2}{9}=\frac{6}{9}$$

इसी प्रकार $5\times\frac{2}{3}=\frac{5\times2}{3}=\frac{10}{3}$

क्या आप बता सकते हैं (i) $3\times\frac{1}{5}=?$ (ii) $4\times\frac{2}{7}=?$

ऊपर हमने $\frac{1}{4}, \frac{2}{9}, \frac{2}{3}$ आदि उचित भिन्नों का पूर्ण से गुणन की चर्चा की, किन्तु यह विषम भिन्न के लिए भी लागू होता है।

उदाहरणार्थ $2\times\frac{5}{3}=\frac{2\times5}{3}=\frac{10}{3}$

प्रयास कीजिए (i) $4\times\frac{12}{7}=?$ (ii) $3\times\frac{8}{5}=?$

अतः किसी पूर्ण संख्या का किसी उचित अथवा विषम भिन्न से गुणा करने के लिए हम–

(1) पूर्ण संख्या को भिन्न के अंश के साथ गुणा करते हैं और

(2) भिन्न के हर को अपरिवर्तित या समान (same) रखते हैं।

स्वयं करके देखिए

1. $3\times\frac{1}{3}=\frac{3}{3}$ के चित्र निरूपित कीजिए।

© BSTBPC WEBCOPY NOT TO BE PUBLISHED

2. ज्ञात कीजिए

(i) $3\times\frac{3}{8}$ (ii) $\frac{3}{7}\times4$ (iii) $\frac{13}{9}\times7$ (iv) $\frac{16}{7}\times3$

ध्यान दें कि किसी मिश्रित भिन्न को एक पूर्ण संख्या से गुणा करने के लिए सर्वप्रथम मिश्रित भिन्न को विषम भिन्न में परिवर्तित कीजिए और तब गुणा कीजिए।

जैसे $5\times2\frac{3}{7}=5\times\frac{17}{7}=\frac{85}{7}=12\frac{1}{7}$

प्रयास कीजिए (i) $3\times2\frac{5}{7}=?$ (ii) $2\times4\frac{2}{5}=?$

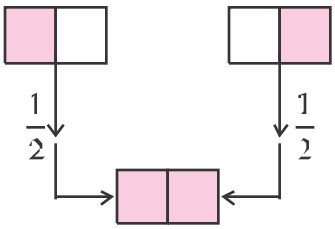
भिन्न, प्रचालक (operator) 'का' के रूप में

विचार कीजिए–

(i) 2 का आधा (ii) 3 का आधा

आकृति 2.4 में प्रत्येक छायांकित टुकड़ा 1 के $\frac{1}{2}$ (आधे) को निरूपित करता है।

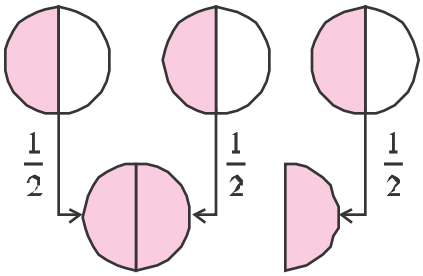
अब 2 छायांकित आधे भागों को मिलाने पर दोनों छायांकित टुकड़े मिलकर 2 के $\frac{1}{2}$ को निरूपित करते हैं।



आकृति–2.4

अतः 2 का $\frac{1}{2}=2\times\frac{1}{2}=1$

अब आकृति 2.5 में तीन छायांकित टुकड़े मिलकर 3 के $\frac{1}{2}$ (आधे) भाग को निरूपित करते हैं।



आकृति–2.5

© DSTBPC WEBCOPY NOT TO BE PUBLISHED

तथा इन्हें मिलाने पर यह $1\frac{1}{2}$ अर्थात् $\frac{3}{2}$ को निरूपित करता है।

इसलिए 3 का $\frac{1}{2}-\frac{3}{2}$ अत $3\times\frac{1}{2}-\frac{3}{2}$

इस प्रकार हम देखते हैं कि 'का' गुणन का निरूपित करता है।

उदाहरण—4. शुभम के पास 30 रुपये है। शकीला के पास शुभम के रुपयों का $\frac{1}{5}$ है तो शकीला के पास कितने रुपये हैं?

हल : शुभम के पास 30 रुपये हैं। शकीला के पास 30 का $\frac{1}{5}$ रुपये है, अर्थात् $30\times\frac{1}{5}=6$ रुपये।

प्रयास कीजिए:	(i) 16 का $\frac{1}{2}=?$	(ii) 25 का $\frac{2}{5}=?$	

उदाहरण—5. 60 विद्यार्थियों की एक कक्षा में कुल विद्यार्थियों की संख्या का $\frac{1}{4}$ अंग्रेजी पढ़ना पसंद करते हैं, कुल संख्या का $\frac{1}{2}$ गणित पढ़ना पसंद करते हैं और शेष विद्यार्थी विज्ञान पढ़ना पसंद करते हैं। तो बताइए कितने विद्यार्थी अंग्रेजी पढ़ना पसन्द करते हैं? कितने विद्यार्थी गणित पढ़ना पसंद करते हैं? कुल विद्यार्थियों की संख्या का कितना भाग विज्ञान पढ़ना पसंद करते हैं?

हल : कक्षा में कुल विद्यार्थियों की संख्या — 60

इनमें से कुल के $\frac{1}{4}$ अंग्रेजी पढ़ना पसंद करते हैं। अतः अंग्रेजी पढ़ना पसंद करने वाले विद्यार्थियों की संख्या 60 का $\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\times60=15$

गणित पढ़ना पसन्द करनेवाले विद्यार्थियों की संख्या — 60 का $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times60=30$

शेष विद्यार्थी विज्ञान पढ़ना पसंद करते हैं अतः विज्ञान पसंद करनेवाले विद्यार्थियों की

BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

संख्या कुल विद्यार्थी– (अंग्रेजी पढ़ना पसंद करनेवाले विद्यार्थी – गणित पढ़ना पसंद करनेवाले विद्यार्थी)

$= 60 - (15 - 30) = 60 - 45 = 15$

अतः वांछित भिन्न $\frac{15}{60} = \frac{1}{4}$ है।

प्रश्नावली 2.2

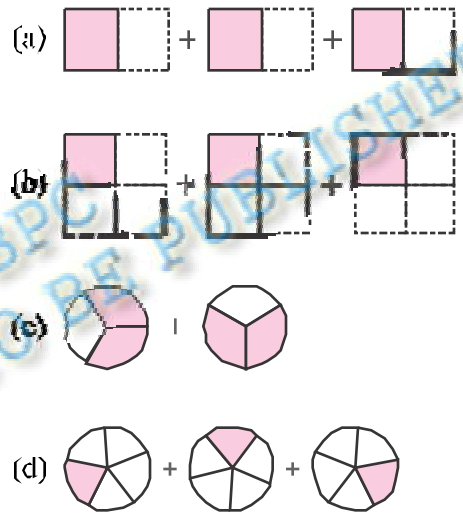
1. नीचे कुछ भिन्न संख्याओं के गुणा के लिए चित्र बनाए गए हैं, प्रत्येक गुणा को उसके सही चित्र से मिलाइए–

(i) $3 \times \frac{1}{5}$

(ii) $3 \times \frac{1}{2}$

(iii) $2 \times \frac{2}{3}$

(iv) $3 \times \frac{1}{4}$



© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

2. नीचे दी गई भिन्न संख्याओं का गुणन कीजिए व सरलतम रूप में लिखिए–

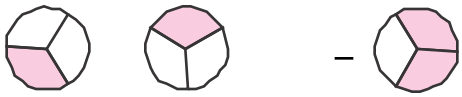
(i) $7 \times \frac{1}{5}$ (ii) $3 \times \frac{2}{3}$ (iii) $7 \times \frac{2}{9}$

(iv) $\frac{1}{3} \times 4$ (v) $2 \times \frac{6}{7}$ (vi) $\frac{7}{2} \times 6$

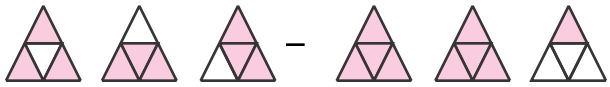
(vii) $11 \times \frac{3}{7}$ (viii) $15 \times \frac{3}{5}$ (ix) $11 \times \frac{1}{3}$

(x) $10 \times \frac{3}{5}$ (xi) $5 \times \frac{3}{2}$ (xii) $6 \times \frac{1}{6}$

3. निम्नलिखित चित्रों के लिए निम्न लिखिए–

(i) 

2 का _____ = _____

(ii) 

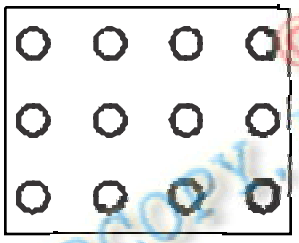
3 का _____ – _____

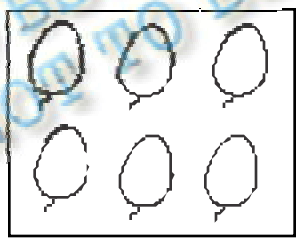
(iii)

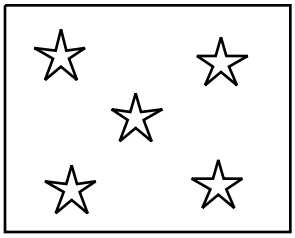
3 का _____ – _____

4. छायांकित कीजिए–

(i) वृत्तों का $\frac{1}{2}$ भाग। (ii) बैलूनों का $\frac{2}{3}$ भाग (iii) तारों का $\frac{3}{5}$ भाग







5. ज्ञात कीजिए–

(i) 26 का $\frac{1}{2}$ (ii) 38 का $\frac{1}{2}$ (iii) 21 का $\frac{2}{3}$

(iv) 24 का $\frac{2}{3}$ (v) 20 का $\frac{3}{4}$ (vi) 36 का $\frac{3}{4}$

(vii) 25 का $\frac{4}{5}$ (viii) 30 का $\frac{4}{5}$ (ix) 81 किलोग्राम का $\frac{7}{9}$

(x) 14 रुपया का $\frac{4}{7}$

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

6. गुणा कीजिए और मिश्रित भिन्न के रूप में व्यक्त कीजिए–

(i) $3\times5\frac{1}{5}$ (ii) $4\times6\frac{1}{2}$ (iii) $7\frac{1}{5}\times5$

(iv) $4\frac{1}{7}\times21$ (v) $3\frac{1}{4}\times6$ (vi) $\frac{5}{8}\times108$

7. रीया और राहुल पिकनिक पर गए। उनकी माँ ने उन्हें 5 लीटर पानीवाली एक बोतल दी। रीया ने कुल पानी का $\frac{3}{5}$ उपयोग किया। शेष पानी राहुल ने पिया।

(i) रीया ने कितना पानी पिया?

(ii) पानी की कुल मात्रा का कितना हिस्सा राहुल ने पिया?

8. ज्ञात करें–

(i) एक दिन का $\frac{5}{6}$ (घंटों में) (ii) एक घंटे का $\frac{2}{3}$ (मिनट में)

(iii) एक सप्ताह का $\frac{2}{7}$ (दिन में) (iv) एक किलोग्राम का $\frac{3}{5}$ (ग्राम में)

(v) एक वर्ष का $\frac{3}{5}$ (दिन में)

9. एक आयताकार आँगन $5\frac{1}{4}$ मीटर लम्बा और $1\frac{1}{7}$ मीटर चौड़ा है। उस आँगन का परिमाप ज्ञात करें।

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

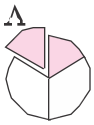
2.3.2 भिन्न का भिन्न से गुणन

आइए देखते हैं कि दो भिन्नों का गुणनफल जैसे $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$ कैसे ज्ञात किया जाए?

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$ का अर्थ है $\frac{1}{3}$ का $\frac{1}{2}$ या $\frac{1}{3}$ का आधा। इसे जानने के लिए एक वृत्त का $\frac{1}{3}$ भाग लेते हैं। (आकृति–2.6)

आकृति–2.6

पुनः $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}$ के लिए इस तिहाई भाग का आधा करते हैं। (आकृति 2.7)



आकृति—2.7

यह आधा हिस्सा (A) पूरे वृत्त का कितना हिस्सा है?

यह पता करने के लिए पूरे वृत्त को A के बराबर हिस्सों में बाँटना पड़ेगा। हम पाते हैं कि ऐसे छह हिस्से होते हैं तथा A उसमें से एक है। अतः $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

आकृति—2.8

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$ का $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$ भी $\frac{1}{6}$ होगा। चित्र बनाकर देखिए।

इस प्रकार हम पाते हैं कि दो भिन्नों का गुणनफल $=\frac{\text{अंशों का गुणनफल}}{\text{हरों का गुणनफल}}$

उदाहरणार्थ $\frac{2}{3}\times\frac{4}{7}=\frac{2\times4}{3\times7}=\frac{8}{21}$

प्रयास करें: (i) $\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=?$ (ii) $\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=?$

© BSTBPC WEBCOPY NOT TO BE PUBLISHED

गुणनफल का मान

हम जानते हैं कि दो पूर्ण संख्याओं का गुणनफल उन दोनों संख्याओं से बड़ा होता है। उदाहरणार्थ $2\times3=6$ और $6>3, 6>2$

दो भिन्नों के गुणा कर गुणनफल के मान को दिए गए भिन्नों से तुलना कीजिए।

भिन्नों का गुणन	गुणनफल की दोनों भिन्नों से तुलना	निष्कर्ष
$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{15}$	$\frac{8}{15}<\frac{2}{3}, \frac{8}{15}<\frac{4}{5}$	गुणनफल प्रत्येक भिन्न से कम है।
$\frac{1}{4}\times\frac{3}{7}$	$\frac{3}{28}<\frac{1}{4}, \frac{3}{28}<\frac{3}{7}$	

$\frac{1}{4}\times\frac{3}{7}$		
$\frac{7}{8}\times\frac{2}{5}$		

हम पाते हैं कि दो उचित भिन्नों के गुणनफल का मान दोनों भिन्नों में से प्रत्येक से छोटा होता है। रिक्त को पूरा कर इसकी जाँच कीजिए।

आइए अब हम दो विषम भिन्नों के गुणनफल की चर्चा करते हैं।

$\frac{7}{4}\times\frac{7}{3}=\frac{49}{12}$	$\frac{49}{12}>\frac{7}{3},\frac{49}{12}>\frac{7}{4}$	गुणनफल प्रत्येक भिन्न से बड़ा है।
$\frac{4}{3}\times\frac{7}{5}=\frac{28}{15}$		
$\frac{7}{2}\times\frac{9}{2}=\frac{63}{4}$		
$\frac{3}{2}\times\frac{7}{6}=\frac{21}{12}$		

हम पाते हैं कि दो विषम भिन्नों के गुणनफल का मान उनमें से प्रत्येक भिन्न से अधिक है। ऐसे पाँच और उदाहरणों को बनाइए और उपर्युक्त कथन को सत्यापित कीजिए।

आइए, अब हम एक विषम और एक उचित भिन्न को गुणा करते हैं।

मान लीजिए $\frac{3}{4}$ और $\frac{8}{5}$ को गुणा करना है।

हम पाते हैं $\frac{3}{4}\times\frac{8}{5}=\frac{24}{20}$ यहाँ $\frac{24}{20}<\frac{8}{5}$ और $\frac{24}{20}>\frac{3}{4}$

अर्थात् प्राप्त गुणनफल, गुणन की विषम भिन्न से कम और उचित भिन्न से बड़ा है।

$\frac{7}{5}\times\frac{2}{7}$, $\frac{10}{3}\times\frac{3}{5}$ के लिए भी गुणनफल की जाँच कीजिए।

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

प्रश्नावली–2.3

1. निम्न का मान ज्ञात कीजिए–

(i) $\frac{1}{2}$ का $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{2}{5}$ का $\frac{1}{4}$ (iii) $\frac{5}{4}$ का $\frac{1}{4}$

(iv) $\frac{12}{5}$ का $\frac{1}{5}$ (v) $\frac{6}{7}\times\frac{3}{8}$ (vi) $2\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$

(vii) $\frac{3}{5}\times3\frac{4}{7}$ (viii) $9\times\frac{7}{2}$ (ix) $5\frac{1}{4}\times\frac{2}{5}$

(x) $\frac{7}{9}\times6\frac{2}{5}$

2. कौन बड़ा है–

(i) $\frac{1}{2}$ का $\frac{2}{7}$ अथवा $\frac{3}{4}$ का $\frac{2}{7}$ (ii) $\frac{5}{8}$ का $\frac{3}{5}$ अथवा $\frac{3}{4}$ का $\frac{1}{6}$

3. बुधवारी अपने बगीचे में पाँच छोटे पौधे एक पंक्ति में लगाती है। दो क्रमागत छोटे पौधे के बीच की दूरी $\frac{3}{4}$ मी. है। प्रथम एवं अंतिम पौधे के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

4. शिवानी एक पुस्तक को प्रतिदिन $1\frac{2}{7}$ घंटे पढ़ती है। वह सम्पूर्ण पुस्तक का एक सप्ताह में पढ़ती है। उस पुस्तक को पढ़ने में उसने कुल कितने घंटे लगाए?

5. एक स्कूटर 1 लीटर पेट्रोल में 35 किमी. दूरी तय करता है। $3\frac{4}{5}$ लीटर पेट्रोल में वह स्कूटर कुल कितनी दूरी तय करेगा?

2.4 भिन्नों का भाग

जयदेव के पास 9 सेमी. लंबी कागज की एक पट्टी है। वह इस पट्टी को 3 सेमी. लंबी छोटी पट्टियों में काटता है। तो वह $9 \div 3 = 3$ पट्टियाँ प्राप्त करेगा।

अब अगर जयदेव 9 सेमी. लंबाई वाली एक दूसरी पट्टी को $\frac{3}{2}$ सेमी. लंबाई वाली

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

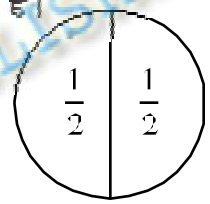
छोटी पट्टियों में काटना चाहता है तो उसे $9 \div \frac{3}{2}$ पट्टियां प्राप्त होंगी। इसी प्रकार $\frac{21}{2}$ सेमी. लम्बाई वाली पट्टी को $\frac{3}{2}$ सेमी. लम्बाई वाली छोटी पट्टियों में काटने पर हमें $\frac{21}{2} \div \frac{3}{2}$ टुकड़े प्राप्त होंगे। इसे हल करने के लिए हमें एक पूर्ण संख्या को किसी भिन्न से अथवा एक भिन्न को दूसरे भिन्न से भाग देने की आवश्यकता पड़ती है। आइए इसे हल करने का तरीका देखें।

2.4.1 भिन्न से पूर्ण संख्या का भाग

आइए $1 \div \frac{1}{2}$ हल करते हैं। यदि 1 सेमी. लम्बी पट्टी हो तो जवाहर उसमें आधे सेमी. के कितनी पट्टियाँ काट सकता है (आकृति 2.9)। एक आधे भागों की संख्या $1 \div \frac{1}{2} = 2$ होगी। अर्थात ऐसे दो आधे भाग हैं। अतः एक इकाई में आधे–आधे दो भाग होते हैं।

इसलिए $1 \times \frac{2}{1} = 2$ हुआ साथ ही $1 \times \frac{2}{1} = 1 \times 2 = 2$

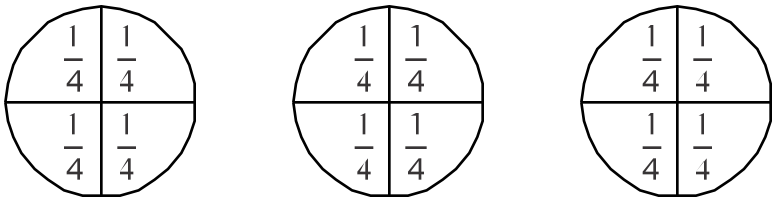
अतः $1 \div \frac{1}{2} = 1 \times \frac{2}{1}$ होगा।



आकृति – 2.9

इसी प्रकार $3 \div \frac{1}{4}$ यानी 3 सम्पूर्ण में कितने $\frac{1}{4}$ भाग हैं यह जानने के लिए हम 3 इकाइयों का $\frac{1}{4}$ भागों में बाँटेंगे व गिनेंगे।

$\frac{1}{4}$ भागों की संख्या = 12 (आकृति–2.10)



आकृति – 2.10

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

पुनः हम जानते हैं $3 \div \frac{1}{4} = 12$ तथा $3 \times \frac{4}{1} = 12$

इसी प्रकार $3 \div \frac{1}{3}$ और $3 \times \frac{3}{1}$ ज्ञात कीजिए। हम पाते हैं कि भिन्न से पूर्ण संख्या को भाग देने पर वही भागफल प्राप्त होता है जो हम पूर्ण संख्या को भिन्न के व्युत्क्रम (Reciprocal) से गुणा करने पर मिलता है।

$\frac{1}{4}$ के अंश एवं हर का परस्पर बदलने पर $\frac{4}{1}$ प्राप्त होता है। यही $\frac{1}{4}$ का व्युत्क्रम है। इसी प्रकार किसी भी भिन्न के अंश–हर को परस्पर बदलने से उस भिन्न का व्युत्क्रम प्राप्त होता है।

निम्नलिखित गुणनफलों को देखिए और रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

$8 \times \frac{1}{8} = 1$

$\frac{1}{7} \times 7 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{6}{6} = 1$

$\frac{7}{3} \times \frac{3}{7} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\frac{3}{7} \times \ldots\ldots\ldots = 1$

$\ldots\ldots\ldots \times \frac{4}{9} = 1$

सोचिए,

1. क्या एक उचित भिन्न का व्युत्क्रम भी उचित भिन्न होगा?
2. क्या एक विषम भिन्न का व्युत्क्रम भी विषम भिन्न होगा?

स्वयं करके देखिए : ज्ञात कीजिए

(i) $8 \div \frac{2}{5}$ (ii) $12 \div \frac{4}{7}$ (iii) $1 \div \frac{8}{9}$

(iv) $5 \div 5\frac{1}{3}$ (v) $9 \div 2\frac{4}{7}$

ध्यान दें– जैसे पूर्ण संख्या को एक मिश्रित भिन्न से भाग करते समय, सर्वप्रथम मिश्रित भिन्न को विषम भिन्न में बदलते हैं, तब हल करते हैं।

उदाहरणार्थ $3 \div \frac{12}{5} = 3 \div \frac{12}{5}$

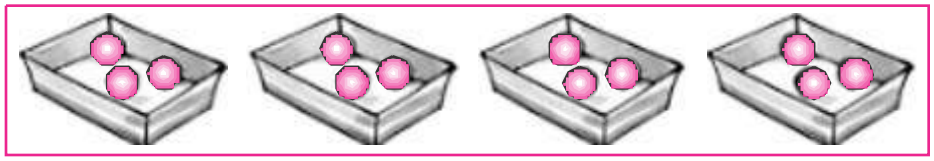
$= 3 \times \frac{5}{12} = \frac{5}{4}$

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

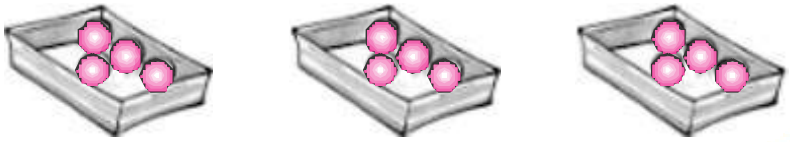
2.4.2 पूर्ण संख्या से भिन्न का भाग

हम भाग को दो तरह से समझ सकते हैं: $12 \div 3$

1. 12 में तीन–तीन के कितने समूह हैं?



2. 12 चीजों को तीन लोगों में बाँटने पर प्रत्येक को मिलनेवाला हिस्सा ?



अब $\frac{3}{4} \div 5$ की चर्चा करें।

$\frac{3}{4} \div 5$ अर्थात् $\frac{3}{4}$ को 5 भागों में बाँटना तथा प्रत्येक हिस्सा कितना है यह पता लगाना है।

यह हिस्सा पूर्ण का कितना भाग है, पता करने के लिए पूर्ण के इतने ही बराबर छोटे हिस्से किए गए हैं। इस प्रकार कुल हिस्से 20 तथा छायांकित हिस्से 3 हैं। अतः $\frac{3}{4}$ के 5 हिस्से करने पर हमें $\frac{3}{20}$ हिस्सा मिलेगा अर्थात् $\frac{3}{4} \div 5 = \frac{3}{4} \div \frac{5}{1} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{20}$

इसी प्रकार $\frac{5}{4} \div 5$ का मान होगा $= \frac{5}{4} \div \frac{5}{1} = \frac{5}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{4}$

© BSTBPC WEBCOPY NOT TO BE PUBLISHED

इसी प्रकार $\frac{2}{3} \div 5 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$ हुआ।

किन्तु $2\frac{1}{4} \div 3 = ?$

यहाँ मिश्रित भिन्न को पूर्ण से भाग करने के लिए मिश्रित भिन्न को विषम भिन्न में बदलना होगा अर्थात

$$2\frac{1}{4} \div 3 = \frac{9}{4} \div \frac{3}{1} = \frac{9}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$$

प्रयास करें:

1. $2\frac{2}{5} \div 4 = ?$
2. $3\frac{2}{5} \div 3 = ?$

2.4.3 एक भिन्न का दूसरी भिन्न से भाग

उदाहरणार्थ $\frac{2}{3} \div \frac{5}{6}$

$= \frac{2}{3} \times$ ($\frac{5}{6}$ का व्युत्क्रम)

$= \frac{2}{3} \times \frac{6}{5} = \frac{4}{5}$

इसी प्रकार $\frac{9}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{9}{5} \times$ ($\frac{2}{3}$ का व्युत्क्रम)

$= \frac{9}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{27}{10}$

स्वयं करके देखें:

(i) $\frac{2}{5} \div \frac{1}{2} = ?$

(ii) $2\frac{1}{2} \div \frac{2}{5} = ?$

(iii) $5\frac{1}{3} \div \frac{9}{2} = ?$

© BSTBPC WEBCOPY NOT TO BE PUBLISHED

प्रश्नावली—2.4

1. ज्ञात कीजिए—

(i) $15 \div \frac{3}{4}$ (ii) $12 \div \frac{5}{6}$ (iii) $9 \div \frac{7}{3}$

(iv) $8 \div \frac{8}{3}$ (v) $3 \div 2\frac{2}{3}$ (vi) $7 \div 3\frac{2}{7}$

2. **निम्नलिखित भिन्नों में से प्रत्येक का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए। व्युत्क्रमों को उचित भिन्न, विषम भिन्न एवं पूर्ण संख्या के रूप में वर्गीकृत कीजिए।**

(i) $\frac{3}{5}$ (ii) $\frac{1}{5}$ (iii) $\frac{9}{7}$ (iv) $\frac{7}{5}$

(v) $\frac{15}{8}$ (vi) $\frac{1}{5}$ (vii) $\frac{1}{13}$

3. **ज्ञात कीजिए–**

(i) $\frac{5}{3} \div 2$ (ii) $\frac{7}{9} \div 5$ (iii) $\frac{7}{13} \div 7$ (iv) $2\frac{1}{3} \div 3$

(v) $4\frac{1}{2} \div 4$ (vi) $3\frac{3}{7} \div 7$ (vii) $5\frac{3}{4} \div 7$ (viii) $3\frac{2}{3} \div 11$

4. **ज्ञात कीजिए–**

(i) $\frac{3}{5} \div \frac{1}{2}$ (ii) $\frac{2}{7} \div \frac{7}{3}$ (iii) $\frac{3}{7} \div \frac{6}{7}$ (iv) $2\frac{1}{3} \div \frac{2}{5}$

(v) $5\frac{1}{2} \div \frac{11}{3}$ (vi) $\frac{2}{5} \div 2\frac{1}{2}$ (vii) $2\frac{1}{5} \div 3\frac{2}{3}$ (viii) $3\frac{1}{5} \div 2\frac{1}{5}$

5. आधा दर्जन केलों का मूल्य $7\frac{1}{2}$ रुपया है तो 1 केला का मूल्य ज्ञात कीजिए।

6. एक छात्रावास में औसतन प्रत्येक छात्र प्रतिदिन $1\frac{5}{6}$ लिटर दूध लेता है। प्रत्येक दिन कुल 308 लीटर दूध छात्रावास में उपयोग होता है, तो छात्रों की संख्या ज्ञात कीजिए।

7. एक $15\frac{1}{5}$ मी. लम्बे रिबन के 4 बराबर हिस्से किया जाता है, तो प्रत्येक हिस्से की लम्बाई क्या होगी?

8. $3\frac{1}{4}$ किग्रा. सेब का मूल्य 130 रुपया है, तो 1 किलोग्राम सेब का मूल्य क्या होगा?

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

हमने क्या सीखा

1. दो भिन्नों को गुणा करने के लिए उनके अंश एवं हर को पृथक–पृथक गुणा किया जाता है और फिर गुणनफल को $\frac{\text{अंशों का गुणनफल}}{\text{हरों का गुणनफल}}$ के रूप में लिखते हैं।

2. भिन्न, प्रचालक 'का' के रूप में काम करती है। जैसे 2 का $\frac{1}{2}$ होता है $2 \times \frac{1}{2} = 1$

3. (अ) दो उचित भिन्नों का गुणनफल, गुणा किए गए प्रत्येक भिन्न से कम होता है।

   (ब) दो विषम भिन्नों का गुणनफल, गुणा किए गए दोनों भिन्नों में से प्रत्येक से बड़ा होता है।

   (स) एक उचित और एक विषम भिन्न का गुणनफल विषम भिन्न से कम तथा उचित भिन्न से अधिक होता है।

4. एक भिन्न का व्युत्क्रम अंश और हर को परस्पर बदलने से प्राप्त होता है।

5. ऐसे शून्येतर संख्याएँ जिनका परस्पर गुणनफल 1 है, एक दूसरे की व्युत्क्रम संख्या कहलाती है। जैसे, 5 व $\frac{1}{5}$ या $\frac{2}{3}$ और $\frac{3}{2}$ ।

6. किसी पूर्ण या भिन्न संख्या को दूसरी पूर्ण या भिन्न संख्या से भाग करने के लिए हम पहली संख्या को दूसरी संख्या के व्युत्क्रम से गुणा करते हैं।

   (1) पूर्ण का भिन्न से भाग $2 \div \frac{3}{5} = 2 \times \frac{5}{3}$

   (2) भिन्न का पूर्ण से भाग $\frac{2}{3} \div 7 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{7}$

   (3) भिन्न का भिन्न से भाग $\frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \times \frac{7}{5}$

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

अध्याय-3 दशमलव भिन्न

3.1 भूमिका

आपने पिछली कक्षा में दशमलव भिन्न का अध्ययन किया है जिसमें हम ने दशमलव भिन्न की तुलना, जोड़ व घटाव सीखा है। इस अध्याय में हम दशमलव भिन्नों के गुणा—भाग पर चर्चा करेंगे परन्तु इससे पूर्व पिछले अवधारणाओं को अधिक स्पष्ट करने के लिए आइये कुछ करते हैं। नीचे दी गई सारणी को देखिए और रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

सैकड़ा	दहाई	इकाई	दशांश	शतांश	सहस्रांश	संख्या
100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	
1	2	3	4	5	6	123.456
2	3	4	5	6	7	.....
0	4	5	6	7	8	.....
5	.....	6	7	8	9	506.789
6	7	8	9	0	1	.....
.....	.....	.....	.....	.....	.....	890.001
9	0	1	0	0	0	.....
3	0	0	2	.....	.....	.....

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

ऊपर की सारणी में आपने संख्याओं का प्रसारित स्थानीय मान से संख्या ज्ञात की। यदि संख्या दी गई हो तो उसका प्रसारित स्थानीय मान भी ज्ञात किया जा सकता है।

जैसे— $256.457 = 2\times100+5\times10+6\times1-4\times\frac{1}{10}+5\times\frac{1}{100}+7\times\frac{1}{1000}$

www.absol.in

रशीदा की लम्बाई 1.67 मीटर है तथा बुधन की लम्बाई 1.85 मीटर है। कौन अधिक लम्बा है? यह पता करने के लिए हमें 1.67 व 1.85 की तुलना करने की आवश्यकता है, इसके लिए सबसे पहले बायीं ओर से शुरुआत करते हैं। इस स्थिति में दोनों 1 बराबर है तब हम दशांश स्थान के अंक की तुलना करेंगे चूँकि 6 छोटा है 8 से (6<8)। अतः 1.67, 1.85 से छोटा होगा। अतः रशीदा की लम्बाई बुधन से कम है।

यदि दशांश स्थान के अंक भी बराबर हो तो तब शतांश अंक की तुलना कर बड़ी–छोटी संख्या का निर्धारण करेंगे और इसी प्रकार सहस्रांश व दस हजारवें भाग और इसके आगे तक दशमलव भिन्नों की तुलना की जा सकती है।

2.34 < 3.45 क्योंकि पूर्ण भाग 2 < पूर्ण भाग 3 से

2.34 > 2.12 क्योंकि पूर्ण भाग 2 — पूर्ण भाग 2 और दशांश 3 > दशांश 1 से

इसी प्रकार दशमलव भिन्न संख्याओं की तुलना के लिए बायें से दायें की तरफ तब तक बढ़ते जाते हैं जब तक संख्याओं में अंतर नहीं आ जाता है और यदि अन्तिम स्थान तक अंक बराबर हो तो दोनों दशमलव भिन्न बराबर होंगी।

प्रयास कीजिए

निम्न की तुलना कीजिए।

1. 1.234 व 2.345
2. 1.234 व 1.123
3. 1.134 व 1.132

दशमलव भिन्न का प्रयोग हम मुद्रा, लम्बाई, क्षेत्रफल, समय आदि की निम्न इकाइयों को उच्च इकाइयों में परिवर्तित करते समय करते हैं। उदाहरण–

5 पैसा = $\frac{5}{100}$ रु० = .05 रु० = 0.05 रु०

10 से.मी. = $\frac{10}{100}$ मी. = .1 मी. = 0.1 मी.

12 ग्राम = $\frac{12}{1000}$ किग्रा. = .012 किग्रा. = 0.012 किग्रा.

30 मि० = $\frac{30}{60}$ मि० = 0.5 मिनट

प्रयास कीजिए

निम्न को बदलें

1. 10 पैसे को रुपए में
2. 125 सेमी. को मीटर में
3. 1025 ग्राम को किलोग्राम में

दशमलव भिन्न संख्याओं को दशमलव संख्याएँ भी कहते हैं। हमने दशमलव संख्याओं को जोड़ने एवं घटाने की संक्रिया का अभ्यास किया है। इसमें हमने देखा है कि सहस्रांश में सहस्रांश, शतांश में शतांश, दशांश में दशांश, इकाई में इकाई और इसी प्रकार आगे संख्याओं को जोड़ते एवं घटाते हैं।

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

जैसे— 25.67 + 4.3 का हल ज्ञात कीजिए।

$$\begin{array}{r} 25.67 \\ +\ 4.30 \\ \hline 29.97 \end{array}$$

निम्न का हल क्या होगा ?

(i) $\begin{array}{r} 0.23 \\ +\ 1.90 \\ \hline 2.13 \end{array}$ (ii) $\begin{array}{r} 1.75 \\ -\ 0.30 \\ \hline 1.45 \end{array}$

प्रयास कीजिए

(i) 0.44 + 0.11 = (ii) 2.12 − 2.1 = (iii) 1.23 + 1.2 =

(iv) 1.12 − 0.12 = (v) 1.02 + 1.05 = (vi) 4.12 − 1.13 =

प्रश्नावली—3.1

1. निम्नलिखित दशमलव संख्या के जोड़े में से बड़ी संख्या लिखिए।

(a) 5.67 एवं 5.7 (b) 5.60 एवं 5.61 (c) 5.67 एवं 4.67

2. जोड़िए।

(a) 1.22 में 2.11 (b) 1.23 में 0.12 (c) 2.13 में 0.87

(d) 1.2 में 1.002 (e) 1.02 में 2.099 (f) 2.37 + 3.76

3. घटाइए।

(a) 2.34 में से 1.23 (b) 1.01 में से 0.1 (c) 1.02 में से 0.02

4. 1.20, 2.01, 0.123, 0.21, 1.02 को बढ़ते क्रम में लिखिए।

5. दशमलव का प्रयोग कर निम्नलिखित को रुपये में व्यक्त कीजिए।

(a) 212 रुपये 10 पैसे। (b) 5 रुपये 5 पैसा। (c) 315 पैसा।

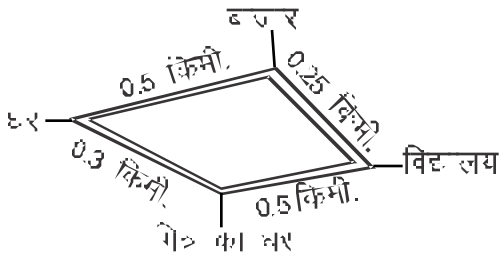
6. (i) 10 से.मी. को मीटर एवं किमी. में लिखिए।

(ii) 115 से.मी. को मीटर एवं किमी. में लिखिए।

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

7. दशमलव संख्या 2.345 व 3.24 का प्रसारित रूप लिखिए तथा प्रत्येक में 2 का स्थानीय मान ज्ञात कीजिए।

8. नीला अपने घर से विद्यालय बाजार होकर जाती है या अपने मित्र के घर होकर जाती है (चित्र के अनुसार)। घर से बाजार होकर विद्यालय जाने में उसे कितनी दूरी चलनी होगी। यदि वह घर से अपने मित्र के घर जाती है और वहाँ से वह विद्यालय जाती है तो उसे कितनी दूरी चलनी होगी। किस परिस्थिति में उसे कम दूरी चलनी होगी और कितनी?



9. बबलू ने घर के लिए 3 किलोग्राम 500 ग्राम आलू, 1 किलोग्राम बैंगन एवं अफसाना ने 2 किलोग्राम 50 ग्राम चीनी 2 किलोग्राम 250 ग्राम चावल खरीदें। किसने वजन में अधिक सामान खरीदे और कितना?

10. 15 मीटर, 6.5 मीटर से कितना अधिक है?

3.2 दशमलव संख्याओं का गुणन (Multiplication)

सत्येन्द्र ने 12.50 रु० प्रति किलोग्राम की दर से 2 किलोग्राम प्याज एवं 6.5 रु० प्रति किलोग्राम की दर से 1.5 किलोग्राम आलू खरीदे। उसे कितने रुपये दुकानदार को देने होंगे? निश्चित रूप से यह प्याज खरीदने में लगे कुल रुपये एवं आलू खरीदने में लगे कुल रुपये के जोड़ के बराबर होगा।

प्याज खरीदने में लगे कुल रुपये = 12.50×2 रु० = 25.00 रु०

आलू खरीदने में लगे कुल रुपये = (6.50×1.5) रु. = ?

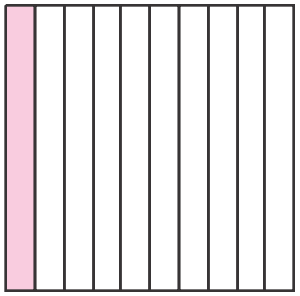
इस तरह हमारे सामने ऐसी कई परिस्थितियाँ आ सकती हैं जिसमें हमें दो दशमलव भिन्न को आपस में गुणा करना होता है। आइये एक सरल उदाहरण 0.1×0.1 की मदद से दो दशमलव भिन्न के गुणा को समझने का प्रयास करते हैं।

$\because$ $0.1 = \frac{1}{10}$ (दशमलव भिन्न को साधारण भिन्न में बदला)

अब 0.1×0.1 अर्थात् $\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1 \times 1}{10 \times 10} = \frac{1}{100} = 0.01$

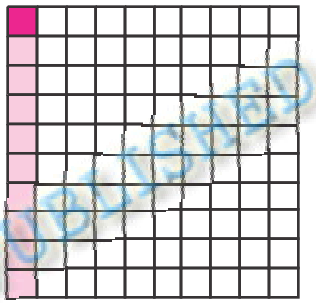
© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

आइये 0.1×0.1 के गुणनफल को चित्र से समझने का प्रयास करें।



चित्र–3.1

$0.1 = \frac{1}{10}$ भिन्न $\frac{1}{10}$ का अर्थ है 10 समान भाग में से एक भाग। चित्र–3.1 का छायांकित भाग $\frac{1}{10}$ को प्रदर्शित करता है। हम जानते हैं कि $0.1 \times 0.1 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$ अर्थात $\frac{1}{10}$ का $\frac{1}{10}$ अब चित्र में निरूपित 10 वें हिस्से के और 10 हिस्से किये।

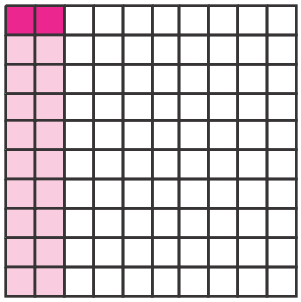


चित्र 3.2

इस प्रकार गहरा छायांकित भाग 0.1×0.1 को दर्शाता है।

यह पूरे का कितना हिस्सा है? यह पता लगाने के लिए पूरी इकाई (वर्ग) को ऐसे छोटे–छोटे वर्गों में बाँटा। हम पाते हैं कि इस प्रकार प्राप्त छोटा वर्ग 100 बराबर भागों में से एक भाग है अर्थात् यह $\frac{1}{100}$ है यानी 0.01 है। अर्थात $0.1 \times 0.1 = 0.01$

BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED



चित्र 3.3

क्या हम ऊपर दी गयी विधि से 0.2×0.2 गुणनफल ज्ञात कर सकते हैं? स्पष्ट है कि $0.2 \times 0.2 = \frac{2}{10} \times \frac{2}{10}$ अर्थात् $\frac{4}{100}$ जो कुल 100 बराबर भाग में से चार भाग लाता अतः यह छायांकित भाग $\frac{4}{100}$ को निरूपित करता है जो 0.04 के बराबर है। अतः $0.2 \times .02 = 0.04$

ध्यान दीजिए कि दशमलव के गुणा में अंश के रूप में वह संख्या होगी जो मूल दशमलव संख्या में थी $(2 \times 2 = 4)$। अतः उसका गुणनफल बिना दशमलव में करें तब भी संख्या वही आएगी पुनः हर में उतने ही संख्या में शून्य होते हैं जितना कि मूल संख्याओं में दशमलव के बाद शून्य की कुल संख्या थी।

मीना ने दो दशमलव भिन्न को गुणा करते समय सबसे पहले दशमलव चिह्न को छोड़ते हुए उन दोनों संख्याओं का गुणा किया। फिर उसने दोनों दशमलव संख्याओं के दशमलव वाले भाग में अंकों की संख्या को गिना व जोड़ दिया और उन्हें प्राप्त गुणनफल के दायें ओर से उतनी संख्या में अंकों को छोड़कर दशमलव चिह्न रख दिया।

जैसे 2.37 × 1.4 में उसे 237 व 14 का गुणा किया फिर देखा कि पहले में दशमलव के बाद दो अंक व दूसरी संख्या में एक अंक है तो उसने प्राप्त गुणनफल 3318 में ऐसी जगह दशमलव लगाया कि दशमलव के बाद तीन अंक रहे यानी 3 के बाद। अतः प्राप्त गुणनफल 3.318 आया।

जैसे 0.2 × 0.2 में दशमलव चिह्न के बिना गुणा करने पर = 02 × 02 = 2 × 2 = 4

अब इन दोनों दशमलव भिन्न में दशमलव चिह्न के बाद अंकों को गिनते हैं। जिनकी संख्या क्रमशः 1 और 1 है। इन्हें जोड़ने पर 1 + 1 = 2

अब प्राप्त गुणनफल में दायीं ओर दो अंक बचते हैं। किन्तु गुणनफल में तो सिर्फ एक अंक ही है। ऐसी स्थिति में हम गुणनफल के बायीं ओर आवश्यकतानुसार शून्य रखते हैं। दिये गए परिस्थिति में यदि एक शून्य बायीं ओर रखें तो दो अंक बढ़ने के लिए आवश्यक दो अंक प्राप्त हो जाते हैं, जिसके बायीं ओर दशमलव के चिह्न प्रयोग करने से 0.04 प्राप्त है जो 0.2 × 0.2 का गुणनफल है। अतः 0.2 × 0.2 = 0.04

नोट : दशमलव चिह्न का स्थान तय करने के लिए गुणनफल के इकाई अंक से बायीं ओर बढ़ते हैं और इसीलिए जरूरत पड़ने पर शून्य भी गुणनफल के बायीं ओर ही रखते हैं।

निम्न का गुणनफल करें – 0.25 × 0.25

सबसे पहले 25 × 25 ज्ञात करेंगे
$$\begin{array}{r} 25 \\ \times\ 25 \\ \hline 625 \end{array}$$

पहले दशमलव भिन्न में दशमलव चिह्न के बाद 2 अंक है। दूसरे दशमलव भिन्न में दशमलव चिह्न के बाद 2 अंक है।

प्रयास कीजिए:

गुणनफल ज्ञात करें–

(i) 0.2 × .02

(ii) 0.2 × 1.2

(iii) 1.3 × 1.3

(iv) 1.23 × 1.2

(v) 5 × 2.5

(vi) 4 × 1.3

© BIHARSCERT WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

∴ गुणनफल में दशमलव चिह्न दायीं ओर से बायीं ओर बढ़ने पर (2 + 2) चार अंकों के बाद अर्थात् 0625 के बाईं ओर होगा। इसलिए गुणनफल = 0.0625 ∵ $0.25 \times 0.25 = 0.0625$

3.2.1 दशमलव भिन्न संख्या का 10, 100 एवं 1000 से गुणन—

रीति ने पूर्ण संख्याओं से गुणा करते समय पाया कि किसी प्राकृत संख्या में 10, 100 या 1000 से गुणा करने पर उस संख्या के दायीं ओर क्रमशः एक, दो या तीन शून्य बढ़ जाते हैं, जैसे—

$5 \times 10 = 50,\ 5 \times 100 = 500,\ 5 \times 1000 = 5000$

उसने पूर्ण संख्याओं, पूर्णांकों के साथ भी यह कार्य दुहराकर पाया कि प्रत्येक स्थिति में संख्या के बाद शून्य की वृद्धि उपर्युक्त नियमानुसार ही होती है। उसने दशमलव भिन्नात्मक संख्याओं में क्रमशः 10, 100 एवं 1000 से गुणा कर गुणनफल प्राप्त कर अपने नियम की पुष्टि करनी चाही। उसने एक दशमलव भिन्न 3.456 लिया और क्रमशः 10, 100, 1000 से गुणा किया।

$$3.456 \times 10 = \frac{3456}{1000} \times 10 = \frac{3456}{100} = 34.56$$

$$3.456 \times 100 = \frac{3456}{1000} \times 100 = \frac{3456}{10} = 345.6$$

$$3.456 \times 1000 = \frac{3456}{1000} \times 1000 = 3456 = 3456.00$$

उसने आश्चर्यजनक परिणाम प्राप्त किये। उसने देखा ऐसी संख्या में क्रमशः 10, 100 या 1000 से गुणा करने पर शून्य की संख्या नहीं बढ़ती बल्कि दशमलव चिह्न का स्थान बदल जाता है और यह बदलाव 10, 100 या 1000 में शून्यों की संख्या पर निर्भर करती है। 10 में 1 शून्य है अतः 10 से गुणा करने पर दशमलव चिह्न 1 स्थान दायीं ओर स्थानांतरित हो जाता है। 100 या 1000 से गुणा करने पर यह दशमलव चिह्न क्रमशः दो अंक या तीन अंक दायीं खिसक जाता है।

अब आप समझ गए होंगे कि सत्यन्द्र का कुल $(12.50 \times 2) + (6.50 \times 1.5)$ रुपये यानी $25 + 9.750 = 34.75$ रु० देने पड़ेंगे।

गुणनफल ज्ञात करें

$1.230 \times 10 =$

$1.203 \times 100 =$

$1.203 \times 1000 =$

$1.203 \times 10000 =$

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

www.absol.in

प्रश्नावली 3.2

1. **गुणनफल ज्ञात कीजिए ।**

(i)	5.4×0.4	(ii)	$4.32 \times .02$	(iii)	8.24×0
(iv)	15.2×0.002	(v)	3×0.3	(vi)	0.7×0.7
(vii)	0.0003×10	(viii)	0.0003×100	(ix)	0.0003×1000
(x)	0.0003×10000	(xi)	0.0003×100000		
(xii)	0.0003×0.0003	(xiii)	0.400×0.500		
(xiv)	-2.5×5	(xv)	$(-2.5) \times (-2.5)$		

2. किसी वर्ग की भुजा 2.3 मीटर है तो उसका क्षेत्रफल क्या होगा ?

3. किसी त्रिभुज का आधार एवं आधार पर शीर्षलंब की लम्बाई क्रमशः 2 सेमी. एवं 1.5 सेमी. है। त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

4. 70.5 रु० प्रति मीटर की दर से 3.5 मीटर कपड़े का मूल्य क्या होगा?

5. एक मोटरसाइकिल 1 लीटर पेट्रोल से 55.75 किमी. जाती है यदि तेल टंकी में 2.750 पेट्रोल हो तो उस गाड़ी द्वारा अधिकतम कितनी दूरी तय की जा सकती है?

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

3.3 दशमलव भिन्न संख्याओं का भाग (Division)

हम अपने दैनिक जीवन में कई ऐसे स्थितियों से गुजरते हैं जिसमें दशमलव संख्याओं में दशमलव संख्याओं का भाग करने की आवश्यकता होती है। इन्द्र सुरभि भी कुछ इसी तरह की समस्या में फँस गई है। उसके घर में 1.5 लीटर दूध खरीदा जाता है। वह दूध को गिलास में रखना चाहती है। प्रत्येक गिलास में अधिकतम 0.25 लीटर दूध रखा जा सकता है। उसे कितने गिलास की आवश्यकता पड़ेगी? क्या इन सुरभि की कोई मदद कर सकते हैं। आइये इसे समझने के लिए दशमलव संख्याओं में कुछ पूर्ण संख्याओं से भाग करते हैं।

एक दशमलव भिन्न संख्या लेते हैं 345.67 इसे हम क्रमशः 10,100 एवं 1000 से बारी–बारी भाग करते हैं।

www.absol.in

10 से भाग करने पर

$$345.67 \div 10 = 345.67 \times \frac{1}{10} = \frac{34567}{100} \times \frac{1}{10} = \frac{34567}{1000} = 34.567$$

यहाँ 10 में शून्य की संख्या 1 है। अतः दशमलव चिह्न का विस्थापन बाईं ओर एक स्थान हुआ।

100 से भाग करने पर

$$345.67 \div 100 = 345.67 \times \frac{1}{100} = \frac{34567}{100} \times \frac{1}{100} = \frac{34567}{10000} = 3.4567$$

यहाँ 100 में शून्य की संख्या दो है। अतः दशमलव चिह्न का विस्थापन बाईं ओर दो स्थान हुआ।

प्रयास कीजिए:

$2.4 \div 10 = ?$

$2.4 \div 100 = ?$

$2.4 \times 1000 = ?$

1000 से भाग करने पर

$$345.67 \div 1000$$

$$= 345.67 \times \frac{1}{1000} = \frac{34567}{100} \times \frac{1}{1000} = \frac{34567}{100000} = 34567$$

यहाँ 1000 में शून्य की संख्या तीन है अतः दशमलव चिह्न का विस्थापन बाईं ओर तीन स्थान हुआ।

इसी प्रकार हम पाते हैं कि जब किसी दशमलव भिन्न संख्या को 10, 100 या 1000 से भाग किया जाता है तो भागफल में दशमलव चिह्न बाईं तरफ उतने ही स्थान खिसक जाता है जितने 10, 100, 1000 ... आदि में 1 के आगे शून्य होते हैं।

एक अन्य उदाहरण लेते हैं 3.6 : 2

$$3.6 \div 2 = 3.6 \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{36}{10} \times \frac{1}{2} \quad \text{या} \quad = \frac{36}{2} \times \frac{1}{10}$$

$$= 18 \times \frac{1}{10} \quad \text{या} \quad = \frac{18}{10} = 1.8$$

प्रयास कीजिए

$7.5 \div 3 = ?$

$0.15 \div 3 = ?$

$15.8 : 2 = ?$

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

उपर्युक्त उदाहरणों से यह स्पष्ट होता है कि यदि भाजक पूर्ण संख्या हो तो उत्तरों दशमलव भिन्न संख्याओं में भाग दिया जा सकता है। अथवा सर्वप्रथम हम 36 को 2 से भाग करते हैं जिससे हमें 18 प्राप्त होता है। 3.6 में दशमलव के दाईं ओर एक अंक है। अतः 18 में भी दशमलव इस प्रकार रखेंगे कि दशमलव के बाद एक संख्या बचे।

किसी दशमलव भिन्न संख्या में दशमलव भिन्न संख्या से भाग करने में भी हम ऊपर दिये गये विधि का प्रयोग करते हैं पर उसके लिए पहले भाजक को पूर्ण संख्या में बदलते हैं। भाजक को पूर्ण संख्या बनाने के लिए आवश्यकतानुसार 10, 100, 1000, ... आदि से भाज्य एवं भाजक में गुणा करते हैं, फिर यदि भाज्य में दशमलव बिन्दु बचता है तो उसे भी साधारण भिन्न के रूप में लिखते हैं। अंत में भाग देने की क्रिया करते हैं। आइये कुछ उदाहरण से समझें।

1. $4.5 : 0.5 = 4.5 \times \frac{1}{0.5} = \frac{4.5}{0.5} = \frac{4.5\times10}{0.5\times10} = \frac{45}{5} = 9$ (∵ 0.5 में दशमलव के बाद 1 अंक है इसलिए 10 से गुणा करेंगे।)

पुनः सुरभि की समस्या पर विचार करते हैं। उसे दूध के लिए आवश्यक गिलासों की

$$\text{संख्या} = \frac{\text{कुल दूध}}{\text{एक गिलास में दूध}} = \frac{1.5}{0.25} = \frac{1.5\times100}{0.25\times100} = \frac{150}{25} = 6$$

इस प्रकार सुरभि को 6 गिलास की आवश्यकता होगी।

ऊपर दिये गए उदाहरणों में हमने देखा कि भाग की क्रिया करने पर शेष शून्य रह गया। भागफल कोई पूर्ण संख्या या दशमलव भिन्न होता है किन्तु कभी-कभी भाग की क्रिया में शेषफल शून्य नहीं आता। जैसे– 129 ÷ 9 ऐसी स्थितियों के उत्तर में हम अगले कक्षाओं में चर्चा करेंगे।

प्रयास कीजिए–

40.23 ÷ 10 = ?,

40.23 : 100 = ?,

40.23 ÷ 1000 = ?

© BSTBPC WEBCOPY NOT TO BE PUBLISHED

प्रश्नावली–3.3

1. भाग कीजिए–

(i)	4.25 को 2 से	(ii)	0.25 को 0.5 से
(iii)	17.5 को 3.5 से	(iv)	1.75 को 3.5 से
(v)	0.175 को 3.5 से	(vi)	0.175 को 35 से
(vii)	2.75 को 0.5 से	(viii)	0.175 को 0.35 से
(ix)	400.23 को 10 से	(x)	400.23 को 100 से
(xi)	40.23 को 1000 से	(xii)	35 को 0.2 से

2. हल कीजिए–

(i)	40.5 ÷ 2.2	(ii)	40.5 ÷ 1000	(iii)	2.5 ÷ 0.5
(iv)	8 ÷ 0.25	(v)	1 ÷ 0.25	(vi)	0 ÷ 0.5
(vii)	0.2 ÷ 0.2				

3. एक कपड़े के थान की कुल लम्बाई 32.50 मीटर है। यदि एक छात्र की पोशाक 3.25 मीटर कपड़े से बनती है तो कपड़े के एक थान से कितने छात्रों के लिए पोशाक बनाई जा सकती है?

4. किसी आयत का क्षेत्रफल 6.5 वर्गमीटर है। यदि उसकी चौड़ाई 1.25 मी. की है तो लम्बाई ज्ञात कीजिए।

5. एक मोबाइल कम्पनी 3 पैसे प्रति सेकण्ड की दर से कॉल करने का चार्ज लेती है। यदि सोनाली द्वारा फोन करने पर 0.9 रु० लगता है तो उसने कितने समय तक मोबाइल पर बात की?

6. एक आदमी ने लगातार 10.5 घंटे तक सिलाई की। यदि वह 3.5 घंटे में एक सलवार सिलता है तो उसने कुल कितनी सलवार सिली?

7. लस्सी के 15 पैकेट का वजन 1.47 किलोग्राम है तो एक पैकेट का वजन ज्ञात कीजिए।

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

हमने सीखा

1. दशमलव भिन्नों की तुलना में सबसे पहले पूर्ण भाग की तुलना करते हैं। जिस दशमलव भिन्न का पूर्ण भाग बड़ा होता है वह दशमलव भिन्न बड़ा होता है। दशमलव भिन्नों का पूर्ण भाग बराबर होने पर दशमलव भाग के दशांश की तुलना करते हैं और जिसका दशांश बड़ा होता है वह दशमलव भिन्न बड़ा होता है।

2. दशमलव संख्याओं के गुणन में सबसे पहले संख्याओं में गुणा बिना दशमलव चिह्न का करते हैं। फिर दशमलव चिह्न का निर्धारण करने के लिए दोनों गुणा होनेवाली संख्याओं के दशमलव भाग के अंक को गिनकर जोड़ लेते हैं एवं गुणनफल में दाईं ओर से शुरू करके बायीं ओर बढ़ते हुए इस जोड़ के बराबर अंक छोड़कर दशमलव चिह्न देते हैं।

3. दशमलव संख्या में 10, 100, 1000 से गुणा करने पर दशमलव चिह्न का स्थान बदल जाता है। यह स्थान दायीं ओर उतने स्थान होता है जितने शून्य 1 के अलावा होते हैं। स्थान बढ़ाने के लिए यदि अंक नहीं होते हैं तो दायीं ओर आवश्यकतानुसार शून्य की संख्या बढ़ा देते हैं।

4. दशमलव संख्याओं के भाज्य एवं भाजक को पूर्ण संख्या में बदलकर भाग की क्रिया करते हैं एवं जिस गुणा से भाग के रूप में 10, 100, 1000, ... आदि से गुणा या भाग कर दशमलव चिह्न निर्धारित करते हैं।

5. दशमलव संख्या में 10, 100, 1000 आदि से भाग करने पर दशमलव चिह्न बाईं ओर उतने अंक से विस्थापित होता है जितने शून्य 10, 100 या 1000 ..... में 1 के अलावा होते हैं। अंक कम पड़ जाने पर दशमलव संख्या के बाईं ओर आवश्यकतानुसार शून्य को बढ़ा देते हैं।

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

अध्याय-4 आँकड़ों का प्रबंधन

4.1 भूमिका:

पिछली कक्षाओं में आपने विभिन्न प्रकार के आँकड़ों पर कार्य किया था। आपने आँकड़ों को इकट्ठा करना, उनका तालिकाबद्ध करना, उन्हें चित्रालेख व दण्डालेख के रूप में प्रदर्शित करना सीखा था। आँकड़ों का संग्रह, अवलोकन और प्रस्तुतीकरण हमारे अनुभवों को संगठित करने और उनसे निष्कर्ष निकालने में हमारी सहायता करते हैं। इस अध्याय में हम इससे आगे आँकड़ों के बारे में सीखेंगे।

आपके दैनिक जीवन में आपके सामने अनेक तरह की सूचनाएँ आती हैं। जैसे आपकी कक्षा के विद्यार्थियों द्वारा गणित के यूनिट टेस्ट में प्राप्त किए गए अंक आदि। इसी तरह आप अखबार, टेलीविजन, पत्रिकाओं और अन्य साधनों से विभिन्न प्रकार की सूचनाएँ देख चुके हैं। इन्हीं सूचनाओं को **आँकड़ा (Data)** कहते हैं। आँकड़े प्रायः एक ऐसी स्थिति के संदर्भ में एकत्रित किए जाते हैं, जिनका हम अध्ययन करना चाहते हैं। आँकड़ों के ये संग्रह आपको क्या बताते हैं?

सारणी 4.1

	नगरों के तापमान	
शहर	अधिकतम	न्यूनतम
पटना	41°C	25°C
गया	43°C	26°C
भागलपुर	37°C	23°C
रँची	36°C	24°C
दिल्ली	42°C	27°C
मुम्बई	36°C	29°C
चेन्नई	31°C	27°C
श्रीनगर	23°C	11°C

सारणी 4.1 से हम कह सकते हैं कि गया का अधिकतम तापमान सबसे अधिक था तथा श्रीनगर का तापमान सबसे कम था। सारणी 4.2 से हम कह सकते हैं कि चतुर्थ सोमवार को विद्यालय में सबसे कम बच्चे अनुपस्थित थे। जितने बच्चे प्रथम सोमवार को अनुपस्थित थे उतने ही बच्चे पंचम सोमवार को अनुपस्थित थे। इस प्रकार आँकड़े हमें अनेक बातें बता सकते हैं।

सारणी 4.2

एक विद्यालय में विभिन्न सोमवार को अनुपस्थिति दर्शानेवाला आँकड़ा

प्रथम सोमवार	😐 😐 😐 😐 😐
द्वितीय सोमवार	😐 😐 😐
तृतीय सोमवार	😐 😐 😐 😐 😐 😐
चतुर्थ सोमवार	😐 😐
पंचम सोमवार	😐 😐 😐 😐 😐
यहाँ 😐 एक बच्चे को निरूपित करता है।	

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

4.2 आँकड़ों का संग्रह (Collecting Data)

सारणी 4.1 के आँकड़े हमें यह नहीं बता सकते कि पूरे वर्ष में किस नगर का अधिकतम तापमान सबसे अधिक था? यह जानने के लिए हमें इन नगरों में से प्रत्येक नगर के पूरे वर्ष के दौरान रिकार्ड किए गए अधिकतम तापमानों से संबंधित आँकड़े इकट्ठे करने पड़ेंगे।

इससे यह प्रतिबिंबित होता है कि आँकड़ों का एक दिया हुआ संग्रह हमें उससे संबंधित एक विशिष्ट सूचना दे सकता है। इसके लिए हमें उस विशिष्ट सूचना के संदर्भ में रखते हुए आँकड़ों के इकट्ठे करने की आवश्यकता होती है। सारणी 4.1 हमें पूरे वर्ष के दौरान इन नगरों के अधिकतम तापमान क्या रहे, के बारे में कुछ नहीं बता सकती। इस प्रकार, **आँकड़ों को इकट्ठे करने से पहले, हमें यह जानना आवश्यक है कि हम इनका प्रयोग किसके लिए करेंगे?**

उदाहरणार्थ, आप निम्न स्थितियों पर गौर करें–

– कक्षा में आपके गणित में प्रदर्शन का आँकड़ा

– आपकी कक्षा का गणित में प्रदर्शन का आँकड़ा

– बिहार में महिला साक्षरता दर का आँकड़ा

– किसी गाँव में 5 वर्ष से कम आयु के बच्चों की संख्या का आँकड़ा।

उपर्युक्त स्थितियों में आपको किस प्रकार के आँकड़ों की आवश्यकता है? अर्थात प्रत्येक के लिए उपयुक्त आँकड़े क्या हैं? अपने मित्रों से तर्क कीजिए और पहचानिए कि प्रत्येक स्थिति में किन आँकड़ों की आवश्यकता है।

4.3 आँकड़ों का संगठन (Organisation of Data)

जब हम आँकड़ों को संग्रहित करते हैं, तो हमें उन्हें रिकॉर्ड करके संगठित करना होता है। आइए एक उदाहरण पर विचार करें–

कक्षा अध्यापिका सुश्री अर्चना यह जानना चाहती थी कि गणित में बच्चों का प्रदर्शन कैसा रहा? वह बच्चों द्वारा प्राप्त अंकों को निम्नलिखित प्रकार से लिखती है :

23, 35, 48, 30, 25, 46, 13, 27, 32, 38

इस रूप में आँकड़े सरलता से समझने योग्य नहीं थे। इस आँकड़े से यह भी पता नहीं चलता था कि किस विद्यार्थी का प्रदर्शन कैसा रहा? अर्चना के एक सहकर्मी ने उन आँकड़ों को सारणी रूप में इकट्ठे करने में उसकी सहायता की। (सारणी 4.3)

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

सारणी 4.3

रोल नं.	नाम	प्राप्तांक	रोल नं.	नाम	प्राप्तांक
1	आशीष	23	6	सुहन	46
2	अरशद	35	7	जयरज	13
3	अमरेन्द्र	48	8	कोकिल	27
4	दीपू	30	9	मनीषा	32
5	दीप्ति	25	10	हीरज	38

अब अर्चना यह समझ सकी कि किस छात्र ने कितने अंक प्राप्त किए। लेकिन वह कुछ और जानकारी भी चाहती थी। तो स्कूलमी ने उन आँकड़ों को दूसरे तरह से प्रदर्शित किया।

सारणी 4.4

रोल नं.	नाम	प्राप्तांक	रोल नं.	नाम	प्राप्तांक
3	अमरेन्द्र	48	4	दीपू	30
6	सुहन	46	8	कोकिल	27
10	हीरज	38	5	दीप्ति	25
2	अरशद	35	1	आशीष	23
9	मनीषा	32	7	जयरज	13

© BSTBPC WEBCOPY NOT TO BE PUBLISHED

अब अर्चना को यह जानना सरल हो गया कि किसने सबसे अच्छा प्रदर्शन किया है? कितने बच्चे 25 से कम अंक लाए हैं और किसको सहायता की आवश्यकता है। इस प्रकार **जब हम आँकड़ों को एक उपयुक्त सारणी में रख लेते हैं, तो उन्हें समझना और उनकी व्याख्या करना सरल हो जाता है।**

हमारे सामने आनेवाले अनेक आँकड़े सारणीबद्ध रूप में होते हैं। हमारे स्कूल के रजिस्टर, प्रगति रिपोर्ट, अभिलेख–पुस्तिकाओं में कक्षानुसार सूची, दुकान के रिकॉर्ड आदि अनेक आँकड़े सारणीबद्ध (Tabular) रूप में होते हैं। क्या आप कुछ और आँकड़ों के बारे में सोच सकते हैं, जो सारणीबद्ध हो?

स्वयं करके देखिए

अपनी कक्षा के छात्रों का वजन पता कीजिए। प्राप्त आँकड़ों को सारणी में संगठित कीजिए तथा निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए:

(i) सबसे कम भार किसका है?

(ii) कितने छात्र 40 किलोग्राम से अधिक भार का है?

(iii) कौन-सा भार अधिकतर लड़के का है?

(iv) सबसे अधिक और सबसे कम भार का अंतर कितना है?

4.4 प्रतिनिधि मान

आप "औसत" (Average) शब्द से अवश्य ही परिचित होंगे तथा अपने दैनिक जीवन में औसत शब्द से संबंधित निम्नलिखित प्रकार के कथन अवश्य ही सुने या पढ़े होंगे:

– ईशा औसतन 5 घंटे पढ़ती है।

– मेरे शहर का औसत तापमान 40 डिग्री सेल्सियस (40°C) है।

– मेरी कक्षा के विद्यार्थियों की औसत आयु 12 वर्ष है।

– एक स्कूल की वार्षिक परीक्षा के समय विद्यार्थियों की औसत उपस्थिति 98 प्रतिशत थी।

इसी प्रकार के अनेक कथन हो सकते हैं। ऊपर दिए हुए कथनों के बारे में सोचिए।

क्या आप सोचते हैं कि पहले कथन में बताया गया बच्चा प्रतिदिन ठीक 5 घंटे पढ़ता है? अथवा, क्या उस विशेष समय पर, दिए हुए स्थान का तापमान सदैव 40°C रहता है? अथवा, क्या उस कक्षा के प्रत्येक विद्यार्थी की आयु 12 वर्ष है? स्पष्टतः इन प्रश्नों का उत्तर है 'नहीं'। तब, ये कथन हमें क्या बताते हैं?

औसत से हम समझते हैं कि ईशा प्रायः एक दिन में 5 घंटे पढ़ती है। कुछ दिन वह इससे कम घंटे पढ़ती है और कुछ दिन इससे अधिक घंटे भी पढ़ती है। इसी प्रकार, 40°C के औसत तापमान का अर्थ है कि वर्ष के इस समय पर तापमान प्रायः 40°C रहता है। कभी वह 40° C से कम रहता है और कभी 40° C से अधिक भी रहता है।

औसत एक ऐसी संख्या है जो आँकड़ों के समूह की केंद्रीय प्रवृत्ति (Central Tendency) को निरूपित करती है। इसलिए हम कहते हैं कि औसत, आँकड़ों के एक समूह की केंद्रीय प्रवृत्ति का मापक (Measure) है।

© BSTBPC WEBCOPY NOT TO BE PUBLISHED

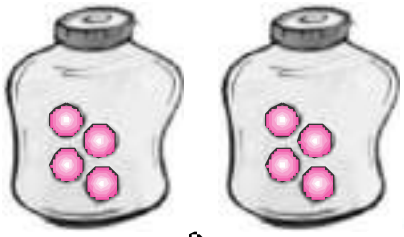
विभिन्न प्रकार के आँकड़ों की व्याख्या करने के लिए, विभिन्न प्रकार के प्रतिनिधि (Representative) अथवा केंद्रीय मानों (Central Values) की आवश्यकता होती है। इन्हीं से एक प्रतिनिधि मान **अंकगणितीय माध्य अथवा समांतर माध्य (Arithmatic Mean)** है।

4.5 अंकगणितीय माध्य

आँकड़ों के एक समूह के लिए अधिकांशतः प्रयोग किया जानेवाला प्रतिनिधि मान अंकगणितीय मध्य या समांतर मध्य (Arithmatic Mean) है, संक्षेप में इसे माध्य (Mean) या औसत कहते हैं। दो बर्तनों में क्रमशः 2 लड्डू और 6 लड्डू हैं। यदि दोनों बर्तनों में बराबर–बराबर लड्डू रखे जाएँ तो प्रत्येक बर्तन में कितना लड्डू होगा?

आकृति 4.1

इस के लिए हमें अंकगणितीय माध्य ज्ञात करना होगा।



आकृति 4.2

$$\text{अंकगणितीय माध्य या औसत} = \frac{\text{लड्डू की कुल संख्या}}{\text{बर्तन की संख्या}}$$

$$= \frac{2+6}{2} \text{ लड्डू} = 4 \text{ लड्डू}$$

माध्य को निम्नलिखित रूप से परिभाषित किया जाता है.

$$\text{माध्य} = \frac{\text{सभी प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की संख्या}}$$

उदाहरण–1. नीलम तीन क्रमागत दिनों में क्रमशः 5 घंटे, 6 घंटे और 4 घंटे पढ़ती है। उसके पढ़ने का औसत समय क्या है?

हल : नीलम के पढ़ने का औसत समय होगा:

$$\frac{\text{पढ़ाई में लगाया कुल समय}}{\text{दिनों की संख्या जिसमें पढ़ाई की}} = \frac{5+6+4}{3} \text{ घंटे} = 5 \text{ घंटे प्रतिदिन}$$

इस प्रकार नीलम प्रतिदिन 5 घंटे के औसत से पढ़ाई करती है। अर्थात् कुछ दिन वह इससे कम घंटे और कुछ दिन इससे अधिक घंटे पढ़ती है।

© BSTBPC WEBCOPY NOT TO BE PUBLISHED

उदाहरण–2. एक बल्लेबाज ने 6 पारियों में निम्न रन बनाये– 45, 56, 58, 38, 37, 48

एक पारी में उसके द्वारा बनाए गए रनों का माध्य ज्ञात कीजिए।

हल : कुल रन = 45 + 56 + 58 + 38 + 37 + 48 = 282

$$\text{माध्य} = \frac{\text{सभी प्रेक्षणों का योग}}{\text{सभी प्रेक्षणों की संख्या}} = \frac{282}{6} = 47$$

इस प्रकार एक पारी में उसके द्वारा बनाए गए रनों का माध्य 47 है।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

उपर्युक्त उदाहरणों में दिए गए आँकड़ों पर विचार कीजिए तथा बताइए–

- क्या माध्य प्रत्येक प्रेक्षण से बड़ा है?

अपने मित्रों के साथ चर्चा कीजिए। इसी तरह का एक और उदाहरण बनाइए और इन्हीं प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

आप पाएँगे कि माध्य सबसे बड़े और सबसे छोटे प्रेक्षणों के बीच में स्थित होता है। विशिष्ट रूप में, दो संख्याओं का माध्य सदैव उनके बीच में स्थित होता है। उदाहरणार्थ, 6 और 10 का माध्य $\frac{6+10}{2} = 8$ है, जो 6 और 10 के बीच में स्थित है।

स्वयं करके देखिए

1. आप पढ़ाई में व्यतीत किए गए अपने समय (घंटों में) का पूरे सप्ताह का औसत ज्ञात कीजिए।
2. आप औसतन एक दिन में कितने घंटे खेलते हैं। चार दिन के आँकड़े लेकर बताएँ।
3. 5 और 11 का माध्य कहाँ स्थित होगा?

4.5.1 प्रसार या परिसर

प्रेक्षणों के उच्चतम एवं निम्नतम मानों के अंतर से, हमें प्रेक्षणों के प्रसार (Range) का एक अनुमान लग जाता है। इसे सबसे बड़े प्रेक्षण में से सबसे छोटे प्रेक्षण को घटा कर ज्ञात किया जा सकता है। हम इस परिणाम को आँकड़ों या प्रेक्षणों का प्रसार या परिसर (Range) कहते हैं।

अतः प्रेक्षणों का परिसर = प्रेक्षण का उच्चतम मान – प्रेक्षण का निम्नतम मान

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

उदाहरण–3. एक स्कूल के 10 अध्यापकों की वर्षों में आयु इस प्रकार है

38, 40, 32, 41, 28, 54, 35, 26, 23, 33

(i) सबसे बड़ी उम्रवाले अध्यापक की आयु क्या है? तथा सबसे छोटी उम्रवाले अध्यापक की आयु क्या है?

(ii) अध्यापकों की आयु का परिसर क्या है?

(iii) इन अध्यापकों की माध्य आयु क्या है?

हल : (i) आयु का आरोही क्रम – 23, 26, 28, 32, 33, 35, 38, 40, 41, 54

स्पष्ट है कि सबसे बड़ी उम्र – 54 वर्ष

तथा सबसे छोटी उम्र – 23 वर्ष

(ii) अध्यापकों की आयु का परिसर (54 – 23) वर्ष = 31 वर्ष

(iii) शिक्षकों की माध्य आयु = $\frac{23+26+28+32+33+35+38+40+41+54}{10}$ वर्ष

$= \frac{350}{10}$ वर्ष = 35 वर्ष

© BSTBPC WEBCOPY NOT TO BE PUBLISHED

प्रश्नावली – 4.1

1. अपनी कक्षा के किन्हीं दस विद्यार्थियों के वजन का आँकड़ा इकट्ठा कीजिए तथा इसका परिसर ज्ञात कीजिए।

2. प्रथम 7 पूर्ण संख्याओं का माध्य ज्ञात कीजिए।

3. कक्षा के एक मूल्यांकन में प्राप्त किए गए निम्नलिखित अंकों को एक सारणीबद्ध रूप में संगठित कीजिए :

4, 6, 7, 5, 3, 5, 4, 5, 2, 6, 2, 5, 1, 9, 6, 5, 8, 4, 6, 7

(i) सबसे बड़ा अंक कौन–सा है?

(ii) सबसे छोटा अंक कौन–सा है?

(iii) इन अंकों का परिसर क्या है?

(iv) अंकगणितीय माध्य ज्ञात कीजिए।

4. एक क्रिकेट खिलाड़ी ने 6 पारियों में निम्नलिखित रन बनाए :

45, 40, 35, 50, 0, 100

इनका माध्य ज्ञात कीजिए।

5. निम्न सारणी प्रत्येक खिलाड़ी द्वारा चार खेलों में अर्जित किए गए अंकों को दर्शाती है–

खिलाड़ी	खेल 1	खेल 2	खेल 3	खेल 4
A	16	10	10	14
B	6	8	4	0
C	8	0	11	13

अब निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए–

(i) सभी खेलों में A द्वारा अर्जित अंकों का माध्य ज्ञात कीजिए।

(ii) सभी खेलों में C द्वारा अर्जित माध्य अंक ज्ञात करने के लिए आप कुल अंकों को 3 से भाग देंगे या 4 से? क्यों?

(iii) B ने सभी खेलों में भाग लिया है। आप उसके अंकों का माध्य कैसे ज्ञात करेंगे? लिखिए।

(iv) किस खिलाड़ी का प्रदर्शन सबसे अच्छा है?

6. पिछले चार वर्षों में एक स्कूल में विद्यार्थियों की संख्या निम्नलिखित थी–

1670, 1750, 2540, 2820

इस काल में विद्यार्थियों की माध्य संख्या ज्ञात कीजिए।

7. गणित की एक परीक्षा में बच्चों के एक समूह द्वारा (100 में से) प्राप्त किए गए अंक 49, 50, 65, 90, 96, 48, 92, 84 और 75 है तो ज्ञात कीजिए–

(i) बच्चों द्वारा प्राप्त सबसे कम अंक और सबसे अधिक अंक

(ii) प्राप्त अंकों का परिसर

(iii) समूह द्वारा प्राप्त माध्य अंक

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

8. एक नगर में किसी विशेष सप्ताह के 7 दिनों में हुई वर्षा (मिमी. में) निम्नलिखित रूप से अंकित की गई–

दिन	रविवार	सोमवार	मंगलवार	बुधवार	बृहस्पतिवार	शुक्रवार	शनिवार
वर्षा (मिमी.)	12.2	0.0	20.5	2.1	5.5	1.0	0.0

उपरोक्त आँकड़ों से

(i) वर्षा का परिसर (Range) ज्ञात कीजिए।

(ii) सप्ताह की माध्य वर्षा निकालिए।

(iii) माध्य वर्षा से कम वर्षा कौन–कौन से दिन रही ?

9. यदि 6, 8, 5, x, 4, 7 और 8 का माध्य 7 है, तो x का मान ज्ञात करें।

10. यदि 10 संख्याओं का माध्य 20 है, तो प्रत्येक संख्या से 2 घटाने पर नया माध्य क्या होगा ?

11. पाँच संख्याओं का माध्य 16 है। यदि समूह में एक संख्या और मिलाई जाए तो 6 संख्याओं का माध्य 21 हो जाता है, तो छठी संख्या का मान ज्ञात करें।

4.6 माध्यक (Median)

हमने देखा कि कभी-कभी अंकगणितीय माध्य आँकड़ों का एक प्रतिनिधि नहीं है। परन्तु यह सदैव उपयुक्त हो यह आवश्यक नहीं। जैसे– 11 विद्यार्थियों का एक समूह जिनकी ऊँचाइयाँ सेमी. में नीचे दी गई है–

120, 106, 115, 102, 123, 125, 117, 120, 112, 115, 110

उक्त शिक्षिका इन को ऐसे दो समूहों में बाँटना चाहती है कि एक उच्च ऊँचाई समूह हो तथा एक निम्न ऊँचाई समूह हो। वह एवरेज किस प्रकार करेगी?

$$= \frac{120 + 106 + 115 + 102 + 123 + 125 + 117 + 120 + 112 + 115 + 110}{11}$$

$$= \frac{1247}{11} = 113.36$$

इस प्रकार माध्य ऊँचाई से कम ऊँचाई वाले भाग में 4 बच्चे व माध्य ऊँचाई से अधिक ऊँचाई वाले भाग में 7 होंगे। अर्थात् दोनों समूह में बराबर बच्चे नहीं होंगे। इसलिए ऐसी परिस्थिति के लिए एक अन्य प्रतिनिधि मान की आवश्यकता होगी। आइए माध्यक के बारे में सोचें।

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

माध्यक दिए गए आँकड़ों में वह मान होता है, जो इसे ठीक–ठीक दो भागों में विभक्त कर देता है। आधे प्रेक्षण इससे अधिक मान वाले होते हैं और आधे प्रेक्षण इससे कम मानवाले होते हैं।

दिए गए आँकड़ों का माध्यक निकालने के लिए आँकड़ों को आरोही व अवरोही क्रम में व्यवस्थित करते हैं। जब प्रेक्षणों की संख्या (n) विषम होती है, तब माध्यक $\left(\frac{n+1}{2}\right)$वें प्रेक्षण का मान होता है। उदाहरण के लिए, यदि $n = 11$ है, तो $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ वें अर्थात् $\frac{11+1}{2} = \frac{12}{2} = 6$ वें प्रेक्षण का मान माध्यक होगा अर्थात् 115, 106, 110, 115, 115, 115, 115, 117, 120, 120, 123, 125 में 115 माध्यक होगा।

इस प्रकार माध्यक (जब प्रेक्षणों की संख्या n विषम) $= \left(\frac{n-1}{2}\right)$ वें प्रेक्षण

जब प्रेक्षणों की संख्या (n) सम होती है, तो माध्यक $\left(\frac{n}{2}\right)$ वें और $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ वें प्रेक्षणों का माध्य होता है। उदाहरण के लिए, यदि $n = 10$ है, तो $\left(\frac{10}{2}\right)$ वें और $\left(\frac{10}{2}+1\right)$ वें प्रेक्षणों के मानों के माध्य अर्थात् 5वें और 6वें प्रेक्षणों के मानों का माध्य ही माध्यक होगा।

इस प्रकार माध्यक (जब प्रेक्षणों की संख्या सम) $= \frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}\text{ वें प्रेक्षण} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{ वें प्रेक्षण}\right)$

उदाहरण–4 एक कक्षा के 9 विद्यार्थियों की (सेन्टीमीटरों में) लम्बाइयाँ ये हैं–

155, 160, 145, 149, 150, 147, 152, 144, 148

इन आँकड़ों का माध्यक ज्ञात कीजिए।

हल : सबसे पहले हम इन आँकड़ों को आरोही क्रम (या अवरोही क्रम) में इस प्रकार लिखते हैं : 144, 145, 147, 148, 149, 150, 152, 155, 160

यहाँ विद्यार्थियों की संख्या 9 है, अर्थात् विषम है, इसलिए हम $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ वें $= \left(\frac{9+1}{2}\right)$ वें $=$ 5वें विद्यार्थी की लम्बाई, जो कि 149 सेंटीमीटर है, ज्ञात करके माध्यक प्राप्त कर लेते हैं। अतः माध्यक लंबाई 149 सेंटीमीटर है।

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

उदाहरण–5. कबड्डी की एक टीम द्वारा अनेक मैचों में प्राप्त किए गए अंक ये हैं:

17, 2, 7, 27, 15, 5, 14, 8, 10, 24, 48, 10, 8, 7, 18, 28

टीम द्वारा प्राप्त किए गए अंकों का माध्यक ज्ञात कीजिए।

हल : टीम द्वारा प्राप्त किए गए अंकों का आरोही क्रम

2, 5, 7, 7, 8, 8, 10, 10, 14, 15, 17, 18, 24, 27, 28, 48

यहाँ 16 पद है, जो सम संख्या का प्रेक्षण है। इसलिए यहाँ दो मध्य पद हैं। ये $\frac{16}{2}$ वें और $\left(\frac{16}{2}-1\right)$ वें अर्थात् 8वें और 9वें पद हैं।

अतः 8वें और 9वें पदों के मान का मध्य ही माध्यक होगा।

$$\text{इसलिए माध्यक} = \frac{10+14}{2} = 12$$

अतः कबड्डी टीम द्वारा प्राप्त किए माध्यक अंक 12 हैं।

4.7 बहुलक (Mode):

हमने देखा, माध्य और माध्यक केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप या प्रतिनिधि मान हैं। परन्तु क्या ये हमारी सारी आवश्यकताओं के लिए उपयुक्त हैं। आओ एक उदाहरण को देखें।

एक दुकानदार को कमीजों की बिक्री का रिकॉर्ड इस प्रकार है :–

माप (cm) में	90	95	100	105	110
बेची गई कमीजों की संख्या	8	22	32	37	6

अब दुकानदार कमीजों के स्टॉक (Stock) के लिए प्रवृत्ति के मानक का प्रयोग करें कि वह अपने ग्राहकों की आवश्यकताओं को पूरा कर पाए।

देखें मध्य और माध्यक के द्वारा क्या माप्क आते हैं–

$$\text{बेची गई कमीजों का माध्य} = \frac{8+22+32+37+6}{5} = \frac{105}{5} = 21$$

अर्थात् वह प्रत्येक माप की 21 कमीज स्टॉक में रखें।

© BSTBPC WEBCOPY NOT TO BE PUBLISHED

बेची गई कमीजों का माध्यक = 6, 8, 22, 32, 37, का $\left(\frac{5+1}{2}\right)$ वें मान = तीसरा मान = 22 है।

अर्थात् वह प्रत्येक माप की 22 कमीजें स्टॉक में रखें। स्पष्ट है, रेडीमेड (Readymade) कपड़ों के दूकानदार के लिए माध्य और माध्यक जैसे मापक उपयुक्त नहीं है। यहाँ दुकानदार कमीज के उस माप को देखेगा, जो सबसे अधिक बिकती है। यह आँकड़ों का एक अन्य प्रतिनिधि मान है। सबसे अधिक बिक्री 105 सेमी. माप की कमीजों की 37 है। यह प्रतिनिधि मान (105) आँकड़ों का बहुलक (Mode) कहलाता है।

इस प्रकार बहुलक प्रेक्षण का वह मान होता है, जो सबसे अधिक बार घटित होता है।

उदाहरण—6. निम्नलिखित संख्याओं का बहुलक ज्ञात कीजिए :

1, 1, 2, 3, 1, 2, 1, 2, 2, 4

हल : समान मानवाली संख्याओं को एक साथ व्यवस्थित करने पर, हमें प्राप्त होता है

1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 4

इन आँकड़ों का बहुलक 2 है, क्योंकि यह अन्य प्रेक्षणों की तुलना में अधिक बार आता है।

4.7.1 बड़े आँकड़ों का बहुलक :

यदि प्रेक्षणों की संख्या बड़ी हो, तो उनको समान मानवाले प्रेक्षणों के रूप में व्यवस्थित करना और फिर उनको गिनना इतना सरल नहीं होता है। ऐसी स्थिति में, हम आँकड़ों को सारणीबद्ध करते हैं, जैसा कि आप पिछली कक्षा में कर चुके हैं, आँकड़ों के सारणी बनाने का कार्य मिलान चिह्नों (Tally Marks) से प्रारंभ करते हुए प्रेक्षणों की बारंबारताएँ (Frequencies) बना कर पूरा किया जा सकता है। अर्थात् किसी प्रविष्टि की बारम्बारता वह संख्या है, जितनी बार वह प्रविष्टि आँकड़ों में आती है।

उदाहरण—7. एक विद्यालय की 7वीं कक्षा के 22 विद्यार्थियों द्वारा (100 अंकों में से) प्राप्त किए गए अंक निम्न है—

10, 20, 36, 50, 50, 56, 60, 60, 70, 70, 36, 40, 36, 60, 40, 50, 50, 56, 60, 70, 60, 60.

इन आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

हल : इन आँकड़ों को एक सारणी के रूप में रखने पर।

अंक	मिलान चिह्न	विद्यार्थियों की संख्या (बारंबारता)
10	I	1
20	I	1
36	III	3
40	II	2
50	IIII	4
56	II	2
60	IIII I	6
70	III	3

इस सारणी को देखकर हम तुरंत यह कह सकते हैं कि '60' बहुलक है, क्योंकि 60 सबसे अधिक बार आया है। इस प्रकार अधिकांश विद्यार्थियों ने 60 अंक प्राप्त किए हैं। एक निश्चित अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या को इस अंक की बारंबारता (Frequency) कहते हैं। अधिकतम बारंबारता वाले प्रेक्षण को बहुलक कहा जाता है। क्या संख्याओं के एक समूह में दो बहुलक हो सकते हैं? सोचिए और चर्चा कीजिए।

उदाहरण–8. निम्नलिखित संख्याओं का बहुलक ज्ञात कीजिए।

2, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 8

हल : यहाँ 2 और 5 दोनों ही तीन बार आए हैं। अतः ये दोनों ही आँकड़ों के बहुलक है।

स्वयं करके देखिए

1. आप अपनी कक्षा के साथियों की वर्षों में आयु रिकॉर्ड कीजिए और फिर उनका बहुलक ज्ञात कीजिए।

2. निम्नलिखित आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए–

   12, 14, 12, 16, 15, 13, 14, 18, 19, 12, 14, 15, 16, 15, 16, 16, 15, 17, 13, 16, 15, 15, 13, 15, 17, 15, 14, 15, 13, 15, 14

3. 25 बच्चों की ऊँचाइयाँ (cm में) नीचे दी गई है–

   168, 165, 163, 160, 163, 161, 162, 164, 163, 162, 164, 163, 160, 163, 160, 165, 163, 162, 163, 164, 163, 160, 165, 163, 162

   उनकी लंबाइयों का बहुलक क्या है? यहाँ बहुलक से आप क्या समझते हैं?

© BSTBPC WEBCOPY NOT TO BE PUBLISHED

उदाहरण–9. एक कारखाने में 5 व्यक्ति काम करते हैं, जिसमें एक सुपरवाइजर है और चार मजदूर हैं। प्रत्येक मजदूर को प्रति माह 5000 रु० वेतन मिलता है, जबकि सुपरवाइजर को प्रति 15000 रु० वेतन मिलता है। इनके वेतनों के माध्य, माध्यक और बहुलक ज्ञात कीजिए।

हल : माध्य $= \dfrac{5000+5000+5000+5000+15000}{5} = \dfrac{35000}{5} = 7000$

अतः माध्य वेतन 7000 रु० प्रतिमाह है।

माध्यक ज्ञात करने के लिए इन वेतन के आँकड़े को इस प्रकार आरोही क्रम में रखते हैं—

5000, 5000, 5000, 5000, 15000

क्योंकि फैक्टरी में काम करनेवाले लोगों की संख्या 5 है, इसलिए **माध्यक प्रेक्षण** $= \dfrac{5+1}{2}$ वाँ $= \dfrac{6}{2}$ वाँ – तीसरा प्रेक्षण होगा। अतः **माध्यक तीसरे प्रेक्षण का मान**, अर्थात 5000 रु० प्रतिमाह होगा।

वेतनों का बहुलक 5000 रु० **(क्योंकि सबसे अधिक व्यक्तियों** का वेतन 5000 रु. है) प्रति माह।

यहाँ आँकड़ों का माध्य 7000 रु० है, जो आँकड़ों के चरम मान से प्रभावित है। यह माध्य की दुर्बलता है। यदि आँकड़ों के कुछ अंकों में अंतर बहुत अधिक हो (जैसे, 1, 7, 8, 9, 9) तो इस स्थिति में माध्य इन आँकड़ों का उचित प्रतिनिधित्व नहीं करता। माध्यक और बहुलक आँकड़ों में उपस्थित चरम मानों से प्रभावित नहीं होते हैं। रेडीमेड गार्मेन्ट (सिले–सिलाये वस्त्र), उद्योग, और जूता उद्योग केन्द्रीय प्रवृत्ति के बहुलक माप्क का प्रयोग करते हैं और निर्णय लेते हैं कि किस साइज या माप का उत्पादन अधिक संख्या में करना चाहिए।

सोचिए और चर्चा कीजिए – कौन सी केन्द्रीय प्रवृत्ति (प्रतिनिधि मान) उपयुक्त होगा?

(i) आपको एक पिकनिक में 10 सदस्यों के लिए आवश्यक चुड़ियों के दर में निर्णय लेना है।

(ii) एक पिकनिक पर जाते समय, प्रत्येक साथी के लिए केवल एक ही फल खरीदा जाना है, तब, हम कौन सा फल खरीदेंगे?

© BSTBPC WEBCOPY NOT TO BE PUBLISHED

उदाहरण–10. मीना और मंटू को उनकी परीक्षा की कॉपियाँ दी गई हैं। परीक्षा में 10 – 10 अंकों के पाँच प्रश्न थे। इस परीक्षा में उनके प्राप्तांक ये थे:

प्रश्नों की क्रम संख्या	1	2	3	4	5
मीना का प्राप्तांक	10	8	9	8	7
मंटू का प्राप्तांक	4	7	10	10	10

परीक्षा की कापियाँ प्राप्त होने पर मीना और मंटू दोनों आपस–अपने प्रदर्शन पर चर्चा शुरू किया। मीना ने कहा मेरा औसत प्राप्तांक $= \frac{42}{5} = 8.4$ है। मंटू ने कहा मेरा औसत प्राप्तांक $= \frac{41}{5} = 8.2$ है।

क्योंकि मीना का औसत प्राप्तांक मंटू के औसत प्राप्तांक से अधिक था, इसलिए मीना का कहना था कि परीक्षा में मंटू की तुलना में उसका प्रदर्शन अच्छा रहा है। परन्तु मंटू इससे सहमत नहीं था उसने दोनों के प्राप्तांकों को आरोही क्रम में रखा और मध्य प्राप्तांक इस प्रकार प्राप्त किया–

मीना का प्राप्तांक	7	8	8	9	10
मंटू का प्राप्तांक	4	7	10	10	10

मंटू कहता था कि उसका सबसे मध्य का प्राप्तांक 10 है, जो कि मीना के सबसे मध्य के प्राप्तांक अर्थात् 8 से अधिक है। इसलिए परीक्षा में उसके प्रदर्शन को उत्तम माना जाना चाहिए।

परन्तु मीना उसके तर्क से सहमत नहीं थी। मीना को अपने कथन से सहमत कराने के लिए मंटू ने एक अन्य युक्ति अपनाई, जो निम्न थी–

मीना का प्राप्तांक	7	8	8	9	10
मंटू का प्राप्तांक	4	7	10	10	10

मंटू ने बताया कि उसने 10 अंक अधिक बार (3 बार) प्राप्त किए हैं, जबकि मीना ने 8 अंक अधिक बार (2 बार) प्राप्त किए हैं। अतः परीक्षा में उसका प्रदर्शन उत्तम रहा है।

पहली स्थिति में मीना ने जो औसत प्राप्तांक प्राप्त किया था वह है – माध्य (Mean) तथा प्राप्तांक जिसको मंटू ने अपने तर्क में प्रयोग किया था वह है – माध्यिका (Median) या माध्यिका।

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

अपनी दूसरी युक्ति में मंटू ने अधिक बार अधिक अंक प्राप्त करने की बात कही थी वह है – बहुलक (Mode)

ये तीनों आँकड़ों के एक समूह की केन्द्रीय प्रवृत्ति का मापक (Measure) है।

प्रश्नावली 4.2

1. **एक क्रिकेट मैच में खिलाड़ियों द्वारा बनाए गए रन इस प्रकार हैं–**

   6, 15, 120, 50, 100, 80, 10, 15, 8, 10, 15

   इन आँकड़ों के माध्य, माध्यक और बहुलक ज्ञात कीजिए। क्या ये तीनों समान हैं?

2. **गणित की एक परीक्षा में, 15 विद्यार्थियों द्वारा (25 पूर्णांक में से) प्राप्त किए गए अंक निम्नलिखित है–**

   19, 25, 23, 20, 9, 10, 15, 10, 5, 16, 25, 20, 24, 12, 20

   इन आँकड़ों के बहुलक और माध्यक ज्ञात कीजिए। क्या ये समान हैं?

3. **निम्नलिखित आँकड़ों के बहुलक और माध्यक ज्ञात कीजिए–**

   38, 42, 35, 37, 45, 50, 32, 43, 43, 40, 36, 38, 43, 38, 47

   क्या इसके एक से अधिक बहुलक हैं?

4. **एक टीम ने फुटबॉल के 10 मैचों में निम्नलिखित गोल किए–**

   2, 3, 4, 5, 0, 1, 3, 3, 1, 3

   इन गोलों के माध्य, माध्यक और बहुलक ज्ञात कीजिए।

5. **बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य है अथवा असत्य–**

   (i) माध्य प्रत्येक प्रेक्षण से बड़ा होता है।

   (ii) माध्य प्रत्येक प्रेक्षण से छोटा होता है।

   (iii) माध्य सबसे बड़े और सबसे छोटे प्रेक्षणों बीच में स्थित होता है।

   (iv) दो संख्याओं का माध्य सदैव उनके बीच में स्थित होता है।

   (v) माध्य दिए हुए आँकड़ों में से एक संख्या हो सकता है।

   (vi) बहुलक सदैव आँकड़ों में से ही संख्या होती है।

   (vii) माध्यक आँकड़ों में से सदैव एक संख्या होता है।

   (viii) आँकड़े 3, 4, 5 का माध्य 4 है।

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

4.8 दंड आरेख

अब हम आँकड़ों के आलेखीय निरूपण (Graphical Representation) की ओर अपना ध्यान केन्द्रित करें। आलेख, एकत्रित आँकड़ों का चित्र द्वारा प्रदर्शन है। आलेखों द्वारा प्रदर्शन समझने में बहुत आसान होता है। हमने पिछली कक्षाओं में भी विभिन्न प्रकार के आलेखों के बारे में कुछ चर्चा की थी।

1. **एक चित्रालेख (Pictograph)** : संकेतों का प्रयोग करते हुए आँकड़ों का चित्रीय निरूपण–

(i) वर्ष के महीने में कितनी पेन्सिल की बिक्री हुई?

(ii) किस महीने में पेन्सिल की बिक्री अधिकतम हुई?

(iii) किन महीनों में पेन्सिल की बिक्री बराबर हुई?

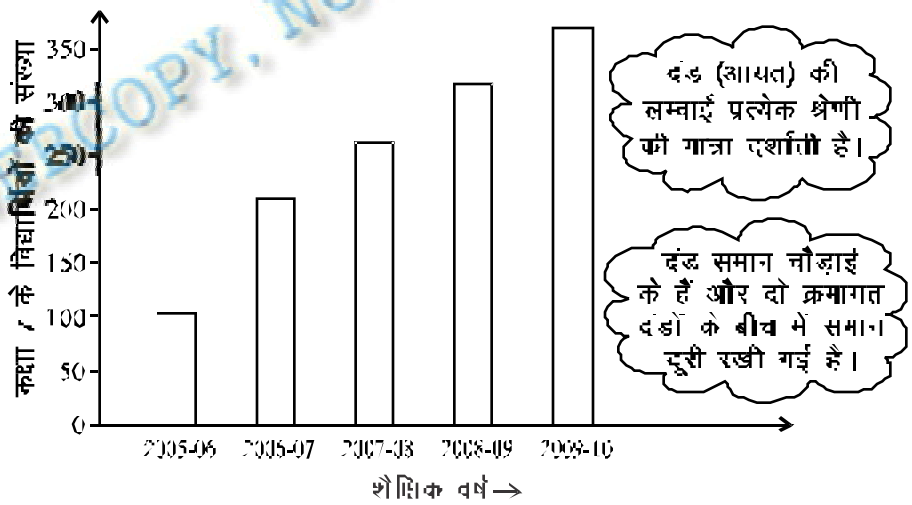
सारणी–4.6

✎ = 500 पेन्सिल की बिक्री

जनवरी	✎✎
फरवरी	✎✎✎
मार्च	✎
अप्रैल	✎✎✎✎
मई	✎✎✎

2. **एक दंड आलेख (Bar Graph)**

हम जानते हैं कि दंड आलेख समान चौड़ाई के दंडों (bar) द्वारा संख्याओं (आँकड़े) का प्रदर्शन (निरूपण) है, जिसमें दंडों की लम्बाइयाँ (ऊँचाइयाँ) कमशः उस्क मानों के समानुपाती होती हैं।



आकृति–4.3

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए–

(i) इस दंड आलेख द्वारा क्या सूचना दी गई है?

(ii) किस वर्ष विद्यार्थियों की संख्या अधिकतम है?

(iii) किस वर्ष में विद्यार्थियों की संख्या में अधिकतम वृद्धि हुई?

(iv) किस वर्ष विद्यार्थियों की संख्या सबसे कम है?

4.8.1 दंड आलेख बनाना (Construction of Bar Graphs)

आइए अब हम एक उदाहरण लेकर देखें कि एक दंड आलेख ग्राफ पेपर पर किस प्रकार बनाया जाता है।

उदाहरण–11. एक बाग में विभिन्न वर्षों में लगाए गए पौधों की संख्या निम्नलिखित है–

वर्ष	2006	2007	2008	2009
पौधों की संख्या	3000	2000	4000	5000

इन आँकड़ों से दंड आलेख बनाइए।

हल : हम इन आँकड़ों का दंड आलेख निम्नलिखित चरणों में बनाते हैं–

(i) एक ग्राफ पेपर पर हम दो परस्पर लंब रेखाएँ खींचते हैं, जिनमें एक क्षैतिज (पड़ी) तथा दूसरी ऊर्ध्वाधर (खड़ी) हो।

(ii) हम क्षैतिज अक्ष पर वर्ष (वर्ष) को दिखाते हैं। स्पष्टता के लिए हम सभी दंड समान चौड़ाई के लेते हैं और उनके बीच समान दूरी बनाते रखते हैं। दंड की चौड़ाई इस प्रकार लेनी चाहिए कि सभी वर्ष (वर्ष) को दिखाया जा सके।

(iii) हम ऊर्ध्वाधर अक्ष पर पौधों की संख्या (बारम्बारता) को दिखाते हैं। इस अक्ष पर एक इकाई लम्बाई से कितने प्रेक्षणों को निरूपित करना है, इसके लिए एक उपयुक्त पैमाना चुनते हैं। इन आँकड़ों में सबसे बड़ा मान 5000 है, तो स्केल को 5000 से कुछ अधिक पर समाप्त करते हैं।

साथ ही, अक्ष पर समान विभाजनों का प्रयोग करते हुए, हम स्केल को इस प्रकार चुनेंगे, ताकि 0 और 5000 के बीच की लम्बाई न तो अधिक छोटी और न ही अधिक बड़ी हो। यहाँ हम 1 इकाई = 1000 पौधे लेते हैं।

(iv) अब हम चुने गये स्केल (1 इकाई = 1000 पौधे) के अनुसार निम्नलिखित दण्डों की ऊँचाई ज्ञात करते हैं–

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

इस प्रकार ग्राफ पेपर पर समान चौड़ाई के 4 दण्ड निम्न प्रकार बनते हैं। (आकृति 4.4)

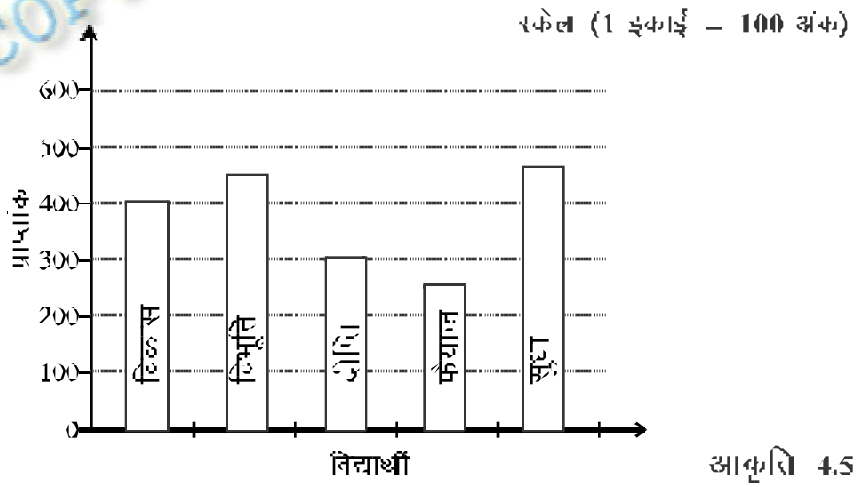
वर्ष	दण्ड की ऊँचाई
2006	$\frac{1}{1000} \times 3000 = 3$ इकाई
2007	$\frac{1}{1000} \times 2000 = 2$ इकाई
2008	$\frac{1}{1000} \times 4000 = 4$ इकाई
2009	$\frac{1}{1000} \times 5000 = 5$ इकाई

आकृति 4.4

उदाहरण—12. निम्नलिखित आँकड़े एक कक्षा के पाँच विद्यार्थियों द्वारा (500 में से) प्राप्त किए गए कुल अंकों को दर्शाते हैं। इन्हें एक दंड आलेख द्वारा निरूपित कीजिए।

विद्यार्थी	विकास	विभूति	दीप्ति	फैयाज	सुधा
प्राप्तांक	400	450	300	250	460

हल हम 1 इकाई = 100 अंक लेते हैं। (यदि हम 1 इकाई से 10 अंकों को निरूपित करें, तो क्या कठिनाई होगी)



आकृति 4.5

© BSTBPC WEBCOPY NOT TO BE PUBLISHED

4.8.2 दोहरे दंड आलेख खींचना

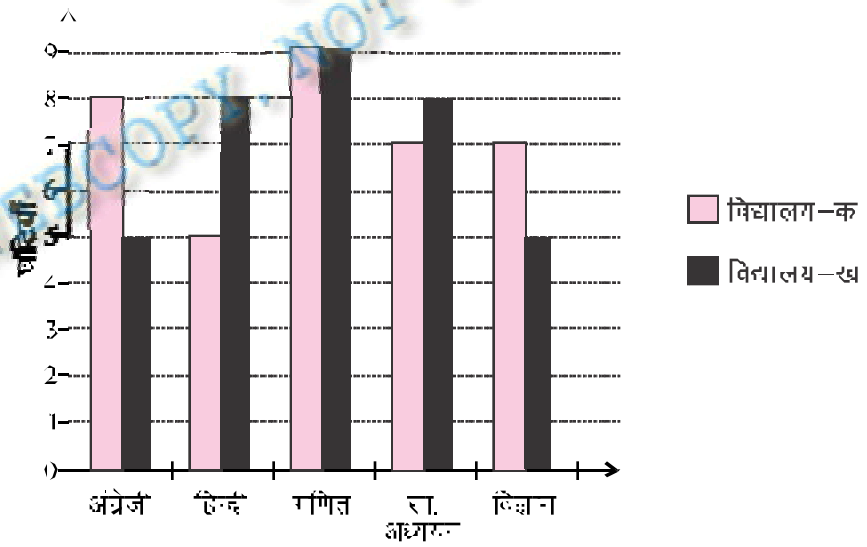
नीचे दो स्कूलों में विभिन्न विषयों के दिए जानेवाले कालांशों (घंटियों) का आँकड़ा दिया गया है। इस पर विचार कीजिए–

विद्यालय–क	
विषय	कालांश
अंग्रेजी	8
हिन्दी	5
गणित	9
सा. अध्ययन	7
विज्ञान	7

विद्यालय–ख	
विषय	कालांश
अंग्रेजी	5
हिन्दी	8
गणित	9
सा. अध्ययन	8
विज्ञान	5

इनके अलग–अलग दंड आलेख खींचकर हम ऐसी जानकारियाँ प्राप्त कर सकते हैं, जैसे दोनों स्कूलों में अधिकतम कालांश किस विषय को दिए जाते हैं या प्रत्येक स्कूल में किस विषय को सबसे कम कालांश दिए जाते हैं आदि। परन्तु एक खास विषय में किस स्कूल में कालांश अधिक हैं जैसे प्रश्नों का उत्तर देने के लिए हमें दोहरा दंड आलेख खींचना।

अर्थात् जब हमें आँकड़ों के दो समूहों की तुलना करने की आवश्यकता होती है, तो दोहरे दंड आलेख (Double Bar Graphs) खींचते हैं।



आकृति 4.6

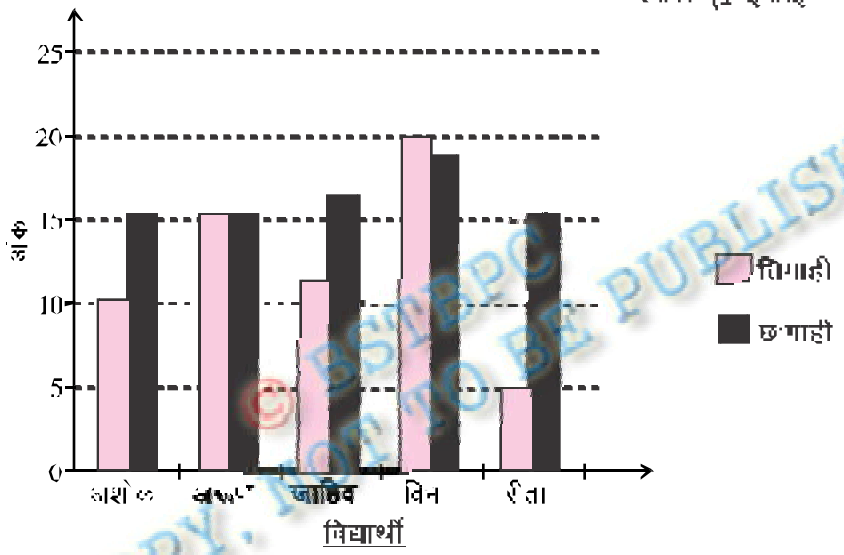
© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

उदाहरण—13. गणित की अध्यापिका 5 कमजोर बच्चों द्वारा तिमाही परीक्षा और छमाही परीक्षा में पूर्णांक 25 में से प्राप्त किए गए अंकों को निम्न रूप में दर्शाती है।

विद्यार्थी	अशोक	अरुण	जावेद	विनीता	रीता
तिमाही	10	15	12	20	5
छमाही	15	15	16	18	15

इन आँकड़ों से दोहरे दंड आलेख खींचिए ।

हल : रकेल (1 इकाई – 5 अंक)



आकृति 4.7

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

दंडों को देखकर अब आप निम्न प्रश्नों का उत्तर दीजिए :–

(i) किस विद्यार्थी का प्रदर्शन तिमाही की तुलना में छमाही में सबसे अच्छा रहा?

(ii) किस विद्यार्थी की प्रगति तिमाही और छमाही में समान रही?

(iii) किस विद्यार्थी ने तिमाही की अपेक्षा छमाही में अच्छा प्रदर्शन नहीं किया?

(iv) कितने विद्यार्थी ने छमाही परीक्षा में 15 अंक से अधिक अंक प्राप्त किया?

क्या आप कुछ अन्य स्थितियों के बारे में बता सकते हैं, जहाँ आप दोहरे दंड आलेख का प्रयोग कर सकते हैं ?

स्वयं करके देखिए

1. वर्ष 2006 से 2010 में अंग्रेजी और हिन्दी की पुस्तकों की बिक्री नीचे दी गई है:

वर्ष	2006	2007	2008	2009	2010
अंग्रेजी	250	300	350	520	620
हिन्दी	400	425	500	550	600

एक दोहरा दंड आलेख खींचिए और निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए:

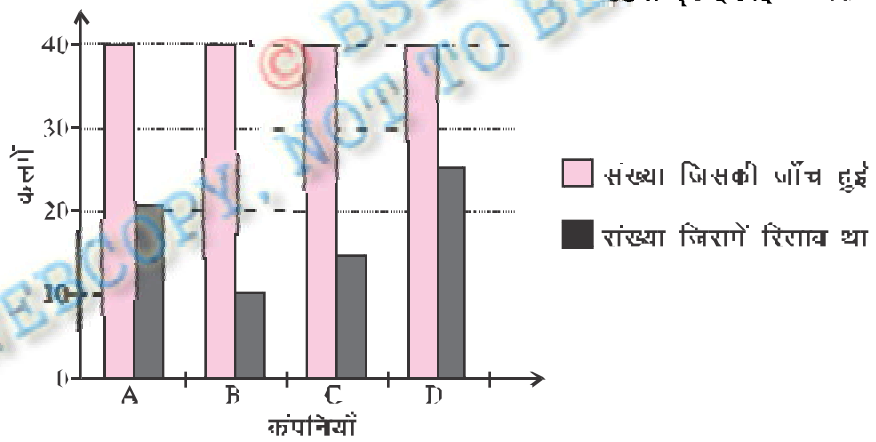
(a) क्या आप कह सकते हैं कि अंग्रेजी की पुस्तकों की बिक्री में तेजी से वृद्धि हुई है? इसके पीछे का तर्क दीजिए।

(b) किस वर्ष दोनों भाषाओं की पुस्तकों की बिक्री का अन्तर न्यूनतम था?

(c) किस वर्ष दोनों भाषाओं के पुस्तकों की बिक्री का अंतर अधिकतम था?

2. दिए हुए दंड आलेख विभिन्न कंपनियों द्वारा बनाई गई बॉल पेन की जाँच के लिए लिए गए एक सर्वेक्षण को दर्शाता है। इनमें से प्रत्येक कंपनी ने यह दावा किया कि उनके बॉल पेन रिसाव नहीं है।

स्केल (1 इकाई = 10 कलमें)



आकृति 4.8

(a) प्रत्येक कंपनी के लिए रिसाववाली कलमों की संख्या, कुल कलमों की संख्या का कौन-सा हिस्सा थी?

(b) किस कम्पनी की कलमें बेहतर हैं?

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

प्रश्नावली 4.3

1. आकृति 4.9 में दिए दंड आलेख का प्रयोग कर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(a) किस कंपनी की साइकिल अधिक लोकप्रिय है?

(b) कितने विद्यार्थियों को पसन्द P कंपनी की साइकिलें हैं?

(c) किस कम्पनी की साइकिलें सबसे कम लोकप्रिय हैं?

आकृति 4.9

2. निम्न सारणी में एक विद्यालय के 2006 से 2010 तक प्रत्येक वर्ष वार्षिक खेलों में भाग लेने वाले खिलाड़ियों की संख्या दी गई है। इन आँकड़ों को एक दंड आलेख द्वारा निरूपित कीजिए।

वर्ष	2006	2007	2008	2009	2010
खिलाड़ियों की संख्या	160	280	200	400	320

(a) दंडालेख बनाने के लिए आप क्या पैमाना लेंगे।

(b) निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए–

(i) किस वर्ष में खिलाड़ियों की संख्या अधिकतम है और किस वर्ष में न्यूनतम है?

(ii) वर्ष 2006 के खिलाड़ियों की संख्या का वर्ष 2010 के खिलाड़ियों की संख्या से अनुपात ज्ञात कीजिए।

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

3. **एक विद्यार्थी के प्रथम सत्र और द्वितीय सत्र का प्रदर्शन दिया हुआ है (100 में से)। इन आँकड़ों का एक दोहरा दंड आलेख खींचिए और दिए गए प्रश्नों के उत्तर दीजिए–**

विषय	हिन्दी	अंग्रेज़ी	गणित	सा. विज्ञान	विज्ञान
प्रथम सत्र	60	70	80	84	76
द्वितीय सत्र	80	65	95	85	80

(i) विद्यार्थी ने अपना किस विषय में सबसे अधिक सुधार किया है?

(ii) सबसे कम सुधार किस विषय में हुआ?

(iii) क्या किसी विषय में प्रदर्शन नीचे गिरा है?

4. **एक फल विक्रेता ने किन्हीं दो दिनों में फलों की बिक्री (kg में) का तुलनात्मक सारणी बनाया। आप इन्हें दोहरे दंड आलेख में दिखाइए तथा दिए गए प्रश्नों के उत्तर दीजिए–**

फल	आम	सेब	संतरे	पपीता	केला	तरबूज
सोमवार	35	29	12	20	18	38
मंगलवार	26	34	8	25	16	35

(i) कौन–सा फल अधिक लोकप्रिय है?

(ii) इस दंड आलेख से आप क्या निष्कर्ष निकालते हैं?

5. **एक कॉलोनी में लगातार दो वर्षों में विभिन्न मदों पर खर्च निम्नलिखित है–**

मद	2008 (हजार रु० में)	2009 (हजार रु० में)
जल आपूर्ति	25	30
चिकित्सा	30	35
सुरक्षा	50	70
रोड	40	20
विद्युत	35	35

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

एक उपयुक्त स्केल चुनकर, एक दोहरा दंड आलेख खींचिए व प्रश्नों का उत्तर दीजिए।

(i) किस मद में पिछले वर्ष की अपेक्षा सबसे अधिक खर्च किया गया?

(ii) किस मद में दोनों वर्षों में बराबर खर्च हुए?

(iii) 2008 में विद्युत और रोड पर कुल कितना खर्च हुआ?

(iv) किस वर्ष का खर्च अधिक रहा?

6. इस अध्याय के प्रारंभ में, दिए हुए विभिन्न नगरों के न्यूनतम और अधिकतम तापमानों के आँकड़ों (सारणी 4.1) को लीजिए। इन आँकड़ों का एक दोहरा दंड आलेख खींच कर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i) किस नगर के न्यूनतम और अधिकतम तापमान का अंतर सबसे अधिक है?

(ii) कौन-सा नगर सबसे गर्म है, और कौन-सा नगर सबसे ठंडा है?

(iii) ऐसे दो नगरों के नाम लिखिए, जिनमें से एक का अधिकतम तापमान दूसरे के न्यूनतम तापमान से कम है।

(iv) उस नगर का नाम लिखिए जिसके न्यूनतम और अधिकतम तापमानों का अंतर सबसे कम है।

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

4.9 संयोग और प्रायिकता

हमें अपने दैनिक जीवन में इस प्रकार के कथन सुनने को मिलते रहते हैं :

(i) आज वर्षा होने की संभावना (या संयोग) नहीं है।

(ii) भारत विश्व कप जीतेगा।

(iii) सूर्य पश्चिम से निकलता है।

(iv) एक पासे को फेंकने पर 8 आएगा।

(v) एक किलोग्राम की अपेक्षा 2 किलोग्राम सब्जी अधिक होगी।

(vi) छोटे पत्थर की जगह बड़ा पत्थर अधिक जगह घेरेगा।

(vii) भारत अगली टेस्ट श्रृंखला जीतेगा।

(viii) विमुद्रीकरण से दाम कम होंगे।

उपर्युक्त कथनों के बारे में आप क्या कहेंगे? यहाँ पश्चिम से सूर्य का निकलना असंभव है, एक पासे को फेंकने पर 8 आना भी संभव नहीं है। इसके विपरीत कथन (v) और (vi) का होना निश्चित (Certain) है। दूसरी ओर कथन (i), (ii), (vii) और (viii) के बारे में क्या है? ये नहीं भी हो सकते हैं। दोनों ही संभव है। हाँ या न होने का संयोग (Chance) है।

4.9.1 संयोग

जब आप एक सिक्के को उछालते हैं, तो क्या आप सदैव इसके सही भविष्यवाणी कर सकते हैं कि चित (Head) प्राप्त होगा या पट (Tail)? आप 10 बार एक सिक्के को उछालकर उससे प्राप्त होनेवाले परिणाम एवं अपनी भविष्यवाणी को निम्न सारणी में लिखिए—

सारणी—4.7

उछाल संख्या	भविष्यवाणी	परिणाम
1.		
2.		
3.		
4.		
5.		
6.		
7.		
8.		
9.		
10.		

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

क्या आप इसमें कोई पैटर्न देखते हैं? प्रत्येक उछाल के बाद आपको क्या प्राप्त होता है?

आप देखेंगे कि ये प्रेक्षण कोई स्पष्ट प्रतिरूप (Pattern) नहीं दर्शाते हैं। निम्न सारणी को देखिए—

सारणी—4.8

उछाल संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
परिणाम	H	T	H	H	H	T	T	T	T	T	T
उछाल संख्या	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
परिणाम	H	H	T	T	H	H	H	H	H	T	H

उक्त सारणी नाज़ेया और नवीन के 22 उछालों से प्राप्त प्रेक्षणों का है। यहाँ H – Head (चित) T = Tail (पट) है। स्पष्ट है, यहाँ चित और पट के आने का कोई निश्चित पैटर्न नहीं है। यह संयोग (Chance) की बात है कि एक विशेष उछाल में चित या पट में से कोई एक हो सकता है।

स्वयं करके देखिए

1. एक सिक्के को 125 बार उछालिए और ज्ञात कीजिए कि कितनी बार चित आया तथा कितनी बार पट?
2. एक पासे को 100 बार फेंकिए तथा परिणामों का रिकॉर्ड कीजिए। ज्ञात कीजिए कि 1, 2, 3, 4, 5 और 6 कितनी–कितनी बार आए हैं?
3. विभूति ने एक पासे को 250 बार फेंका और निम्नलिखित सारणी प्राप्त की:

सारणी–4.9

पासे की संख्या	मिलान चिह्न	बारम्बारता
1	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 III	33
2	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸	40
3	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 II	47
4	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 II	52
5	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸	40
6	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 III	38

इन आँकड़ों के लिए एक दंड आलेख खींचिए। इन परिणामों से प्राप्त निष्कर्ष क्या है? क्यों करें।

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

4.9.2 प्रायिकता

जब एक सिक्के को उछाला जाता है, तो आपको क्या संभव परिणाम प्राप्त होते हैं? निःसंदेह, चित (Head) या पट (Tail)। इस प्रकार चित और पट, सिक्के उछालने के दो परिणाम (Outcomes) हैं तथा परिणाम के आने का संयोग (Chance) एक ही है। अर्थात् दोनों ही परिणाम की सम्भावनाएँ बराबर थीं। अतः ये समप्रायिक (Equally Likely) घटनाएँ हैं। एक चित प्राप्त करने की संभावना 2 परिणामों में से 1 है अर्थात् ½ है।

अब यदि आप एक पासे (Die) को फेंके, तो क्या आप प्राप्त होनेवाली संख्या की भविष्यवाणी कर सकते हैं? लूडो (Ludo) या 'साँप और सीढ़ी' के खेल खेलते समय, हम में से अधिकांश चाहते होंगे, कि मनपसन्द संख्या प्राप्त हो। लेकिन क्या सदैव आपकी चाहत पूरी होती है?

अब एक पासे लीजिए, उसे 150 बार फेंकिए तथा प्राप्त परिणामों को निम्न सारणी में भरिए—

सारणी—4.10

पासे पर लिखित संख्या	मिलान चिह्न Tally Mark	सच्चा कितनी बार प्राप्त हुई (बारंबारता)
1		
2		
3		
4		
5		
6		

फेंक कर प्रत्येक परिणाम के लिए उपयुक्त खाने में मिलान चिह्न जैसे 3 आने पर 3 के सम्मुख लगाते रहिए। इस प्रक्रिया को 150 बार करिए तथा प्रत्येक परिणाम की बारंबारता (कुल संख्या) ज्ञात कीजिए। इन आँकड़ों के आधार पर एक दंड आलेख बनाइए तथा निम्न प्रश्नों के उत्तर प्राप्त कीजिए—

1. परिणाम 1, 2, 3, 4, 5 और 6 में से कौन सा सबसे अधिक बार है?
2. सबसे बड़े परिणाम और सबसे छोटे परिणाम का अन्तर क्या है?

अब एक पासे को एक बार फेंकने पर 1, 2, 3, 4, 5 या 6 परिणाम प्राप्त होगा। इस प्रकार छः सम संभावित परिणाम है। तो हम कहते हैं कि 1, 2, 3, 4, 5 और 6 में से प्रत्येक के आने की प्रायिकता $\frac{1}{6}$ है।

जैसे— (i) 5 आने की प्रायिकता $\frac{1 \leftarrow \text{5 देने वाले परिणामों की संख्या}}{6 \leftarrow \text{समप्रायिक परिणामों की संख्या}}$

© BSTBPC WEBCOPY NOT TO BE PUBLISHED

(ii) 8 आने की प्रायिकता $\frac{0 \leftarrow \text{8 देने वाले परिणामों की संख्या}}{6 \leftarrow \text{सम्भव परिणामों की संख्या}}$

स्पष्ट है कि कई संभव आने वाली घटना की प्रायिकता 0 और 1 के बीच नहीं होती है। जिनके घटित होने का कोई संयोग या संभावना नहीं है, उनकी प्रायिकता 0 होती है तथा जिनके निश्चित रूप से घटित होने है, उनकी प्रायिकता 1 होती है।

प्रश्नावली—4.4

1. **बताइए कि निम्नलिखित में से किसका होना निश्चित है, किसका होना असंभव है तथा कौन हो भी सकता है, नहीं भी हो सकता है।**

   (i) त्रिभुज बनाने पर तीन शीर्ष बनेंगे।

   (ii) एक सिक्के को उछालने पर पट आयेगा।

   (iii) एक सिक्के को उछालने पर चित्त एवं पट दोनों आयेगा।

   (iv) एक पासे को फेंकने पर 7 आएगा।

   (v) कल बादल घिरे होंगे।

   (vi) यह गेंद भारत जीतेगा।

2. एक–एक पर्ची पर 1 से 8 तक संख्याएँ लिखी हुई हैं। उन्हें एक बॉक्स में रखकर अच्छी प्रकार से मिला दिया जाता है। बॉक्स के अन्दर से बिना देखे एक पर्ची निकाली जाती है तो निम्न की प्रायिकता क्या है?

   (i) संख्या 5 प्राप्त करना।

   (ii) 1 अंक की एक संख्या प्राप्त करना।

   (iii) 5 से छोटी एक संख्या प्राप्त करना।

   (iv) 5 से बड़ी एक संख्या प्राप्त करना।

3. रानी और रीता में कौन पहले गाना गायेगी, इसका निर्णय करने के लिए एक सिक्का उछाला जाता है। रीता के पहले गाने की प्रायिकता क्या है?

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

हमने सीखा

1. आँकड़ों (Data) का इकट्ठा करने से पहले, हमें यह जान लेना चाहिए कि हम इनका उपयोग किस कार्य में करेंगे।

2. एकत्रित किए गए आँकड़ों को एक उपयुक्त सारणी के रूप में संगठित किए जाने की आवश्यकता होती है, ताकि ये सरलता से समझने के योग्य हों और इनकी व्याख्या की जा सके।

3. प्रतिनिधि मान एक ऐसी संख्या है, जो दिए हुए प्रेक्षणों के समूह (या आँकड़ों) के महत्वपूर्ण अभिलक्षणों (केन्द्रीय प्रवृत्ति) को दर्शाता है।

4. औसत एक ऐसी संख्या है, जो प्रेक्षणों (Observations) या आँकड़ों (Data) के एक समूह की केन्द्रीय प्रवृत्ति को दर्शाती है। यह सबसे अधिक तथा सबसे कम मूल्य (Value) के आँकड़ों के बीच में होता है।

5. प्रेक्षणों के उच्चतम एवं निम्नतम मानों के अंतर से, हमें प्रेक्षणों का प्रसार (Range) का एक अनुमान लग जाता है।

6. मध्यक भी एक प्रकार का प्रतिनिधि मान है। यह उस मान को दर्शाता है, जो प्रेक्षण के मध्य (बीच) में होता है (उन्हें आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करने के बाद) अर्थात् आधे प्रेक्षण इसके ऊपर होते हैं और आधे प्रेक्षण इसके नीचे होते हैं।

7. बहुलक प्रेक्षणों के एक समूह में वह प्रेक्षण होता है, जो सबसे अधिक बार आता है।

8. आलेख (Graph), एकत्रित आँकड़ों का चित्रों द्वारा निरूपण (Representation) है। दंड आलेख (Bar Graph) आँकड़ों का समान चौड़ाई वाले दंडों (आयतों) द्वारा एक चित्रीय निरूपण है।

9. दोहरा दंड आलेख, प्रेक्षणों के दो समूहों की तुलना करने में सहायक है।

10. हमें अपने दैनिक जीवन में ऐसी स्थितियाँ मिलती हैं—(i) जो निश्चित रूप से होती है। (ii) जिसका होना संभव नहीं है। (iii) जो हो भी सकती है, नहीं भी हो सकती।

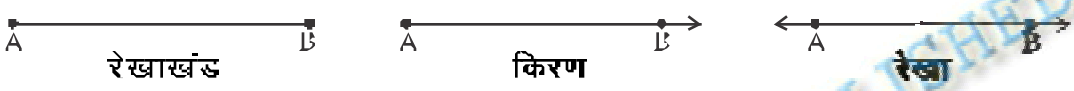
    जिसके घटित होने का कोई संयोग (Chance) नहीं है, उनकी प्रायिकता (Probability) 0 होती है। जिनको निश्चित रूप से घटित होना है उनकी प्रायिकता 1 होती है। कई संभावनाओं वाली घटना की प्रायिकता 0 और 1 के बीच में होती है।

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

अध्याय-5 ज्यामितीय आकृतियों की समझ

5.1 भूमिका

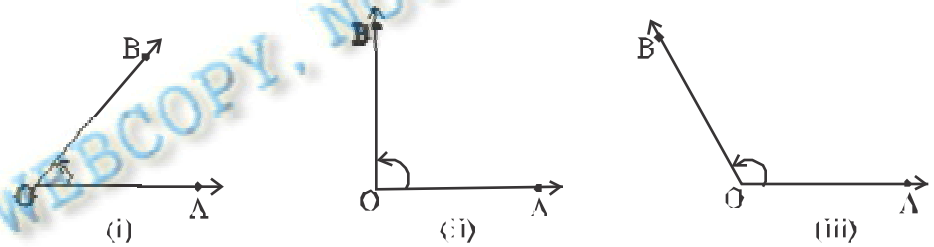
अभी तक हमने सीखा है कि एक रेखाखंड के दो अंत बिन्दु होते हैं। यदि हम केवल एक अंत बिन्दु को उसी दिशा में अपरिमित रूप में बढ़ाते हैं तो हमें किरण प्राप्त होती है तथा उसके दोनों अंत बिन्दुओं को अलग-अलग दिशा में अपरिमित बढ़ाते हैं तो हमें रेखा प्राप्त होती है।



चित्र–5.1

इनमें $\overline{AB}$ रेखाखंड, $\overrightarrow{AB}$ किरण तथा $\overleftrightarrow{AB}$ रेखा को दिखाया गया है।

हम यह भी सीख चुके हैं कि जब दो किरणें एक बिन्दु पर मिलती या काटती हैं तो उन किरणों के बीच के घुमाव या झुकाव को कोण कहते हैं।



चित्र–5.2

ऊपर के चित्र में $\overrightarrow{OA}$ तथा $\overrightarrow{OB}$ एक शीर्ष बिन्दु 'O' पर मिलकर $\angle AOB$ बना रही है। चित्र (i) में न्यूनकोण, चित्र (ii) में समकोण तथा चित्र (iii) में अधिक कोण को दर्शाया गया है जहाँ $\overrightarrow{OB}$ का झुकाव $\overrightarrow{OA}$ पर वामावर्त दिशा में घड़ी की सुई की विपरीत दिशा में अग्रसर बढ़ता जा रहा है। कोणों के इसी झुकाव की माप हम प्रोटेक्टर की सहायता से करते हैं। कोण AOB की माप को हम $m\angle AOB$ लिखते हैं।

WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED ©BSTBPC

www.absol.in

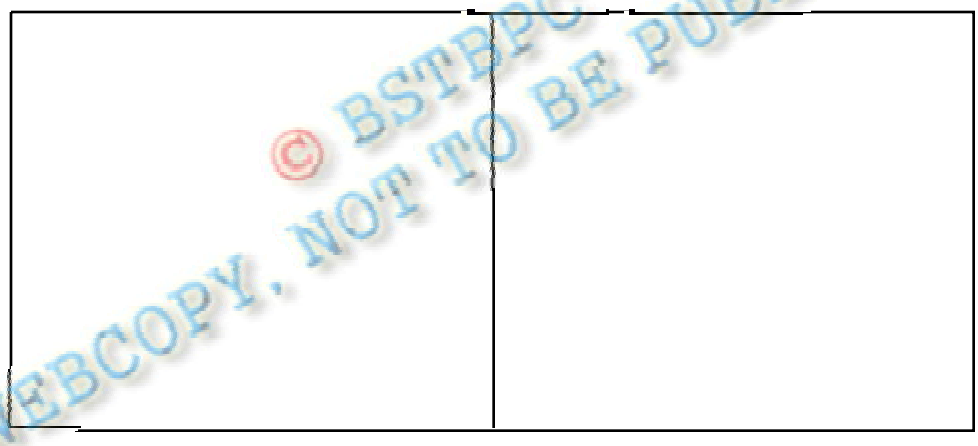
इस पाठ में हम विभिन्न कोण बनाने के बारे में सीखेंगे।

कुछ करें

1. चित्रों में बनने वाले विभिन्न कोणों को पहचानिए तथा उन पर गोल घेरा लगाइए–

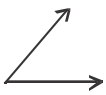
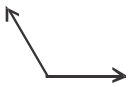
चित्र–5.3

2. नीचे के खाने में कोई ऐसी दो आकृतियाँ बनाइए, जिसमें न्यूनकोण, समकोण तथा अधिककोण का प्रयोग हुआ हो।



© BSTBPC
WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

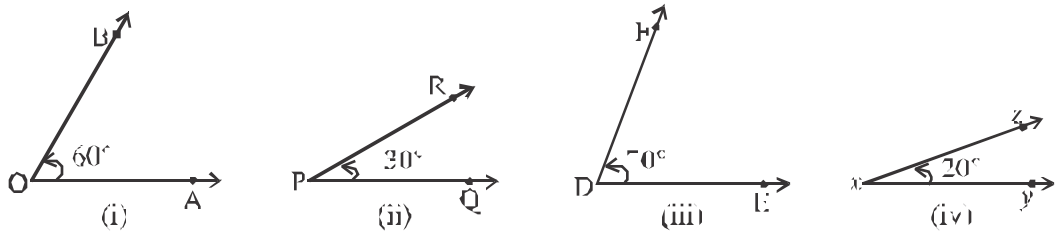
3. प्रत्येक आकृति के नीचे उनका नाम लिखिए कि वह क्या है: रेखा/किरण/रेखाखण्ड/न्यूनकोण/समकोण/अधिककोण।

www.absol.in

5.1 कोणों का युग्म

5.1.1 ijd dk.k ;k dkfVijd dk.k ;k yEcijd dk.k (Complementary angle)



चित्र—5.4

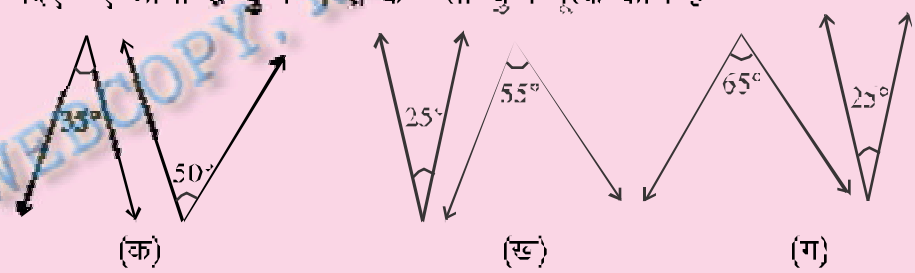
किन्हीं दो कोणों की माप को एक साथ मिलाकर देखें। चित्र 5.4 के (i) एवं (ii) में बने कोण की माप = 60° + 30° = 90° तथा (iii) एवं (iv) में बने कोण की माप = 70° + 20° = 90°

यहाँ कोणों के युग्म यानी जोड़ की माप आपस में मिलकर 90° है। कोणों का ऐसा जोड़ा जिनकी मापों का जोड़ 90° हो **पूरक कोण** (Complementary Angle) कहलाता है तथा युग्म के दोनों कोण एक दूसरे के **पूरक** कहलाते हैं। चित्र–5.4 में कोण (i), कोण (ii) का पूरक है। इसी प्रकार कोण (iii), कोण (iv) का पूरक है।

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

स्वयं करके देखिए

1 दिए गए कोणों के युग्मों में से कौन-सा युग्म पूरक कोण है?



चित्र—5.5

(क) 35° + 50° = 85° (ख) ———————— (ग) ————————

पूरक कोण नहीं है। ———————— ————————

2. दिए गए कोणों के पूरक की माप कर लिखिए—

क. 40° के कोण का पूरक = 90° – 40° = 50°

ख. 55° के कोण का पूरक = ...

ग. 15° के कोण का पूरक = ...

घ. 78° के कोण का पूरक = ...

3. दो कोण एक दूसरे का पूरक होंगे यदि वे हों—

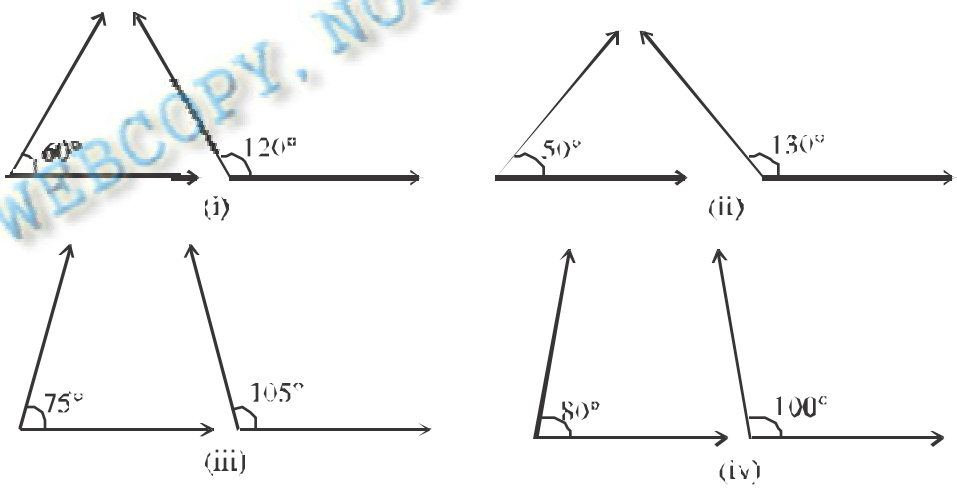
(i) न्यूनकोण हों (ii) समकोण हों (iii) अधिककोण हों

4. दो कोण एक-दूसरे के पूरक हैं, यदि उनके मापों का अंतर 30° है तो दोनों कोण की माप बताइए।

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

5.1.2 lijd dk.k ;k _tijd dks.k (Supplementary angle)

नीचे बने कोणयुग्मों पर विचार कीजिए तथा सारणी को पूरा कीजिए—



चित्र—5.6

www.absol.in

सारणी

कोणों का युग्म	युग्म के पहले कोण की माप	युग्म के दूसरे कोण की माप	युग्म के दोनों कोणों की मापों का योग
(i)	60°	120°	180°
(ii)			
(iii)			
(iv)			

सारणी से स्पष्ट है कि कोणों के प्रत्येक युग्म यानी जोड़े के कोणों की मापों का योग 180° है। कोणों के ऐसे जोड़े **संपूरक कोण** (Supplementary Angle) कहलाते हैं। युग्म के दोनों कोण एक-दूसरे के संपूरक कहलाते हैं। सारणी में युग्म (i) में 60° का कोण, 120° के कोण का संपूरक है तथा 120° का कोण 60° के कोण का संपूरक है।

सोचिए : क्या 50° के कोण का संपूरक 130° है?

80° का संपूरक 100° ही क्यों है?

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

स्वयं करके देखिए

1. यदि कोणों का युग्म संपूरक कोण हो, तब नीचे के कथनों में से कौन सत्य कथन हैं तथा कौन असत्य?

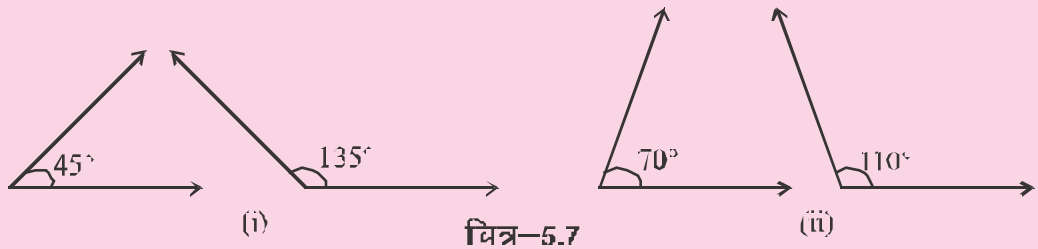
   (i) युग्म के दोनों कोण न्यूनकोण हो सकते हैं (असत्य)

   (ii) युग्म के दोनों कोण समकोण हो सकते हैं ( )

   (iii) युग्म के दोनों कोण अधिककोण हो सकते हैं ( )

   (iv) युग्म के एक कोण अधिककोण तथा दूसरा न्यूनकोण हो सकता है ( )

2. नीचे कोणों के दो युग्म दिये गये हैं, उनमें कौन संपूरक कोण हैं? बताइए–



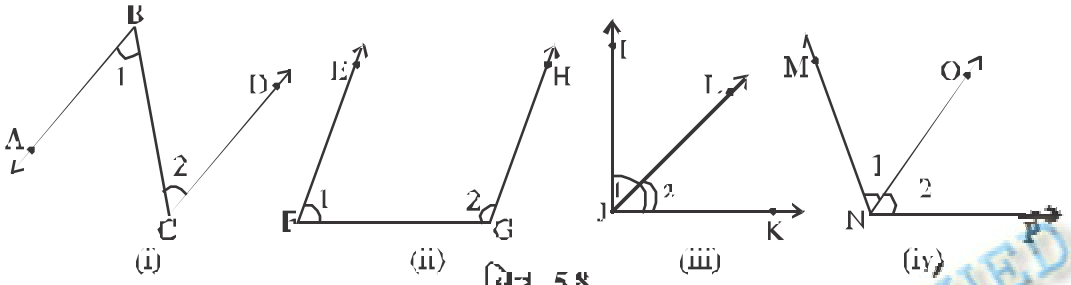
चित्र–5.7

3. निम्नलिखित कोणों में से प्रत्येक के संपूरक बताइए–

(i) 75° ..... (ii) 125° .....

(iii) 80° ..... (iv) 90° .....

5.1.3 आसन्न कोण : आइए अब चित्र–5.5 में कोण युग्मों पर विचार करें–



चित्र 5.8

ऊपर के सभी कोण युग्मों में कोण बनाने वाली भुजाओं में से एक भुजा उभयनिष्ठ है। चित्र (i) एवं चित्र (ii) में दो शीर्ष हैं जबकि चित्र (iii) एवं चित्र (iv) में एक ही शीर्ष है। चित्र (iii) में कोण बनाने वाली दो भुजाएँ JI तथा JL उभयनिष्ठ भुजा JK के एक ही तरफ है, जबकि चित्र (iv) में कोण बनाने वाली भुजाएँ NM तथा NP उभयनिष्ठ भुजा NO के एक–एक तरफ है। चित्र (iv) में बने कोण युग्म आसन्न कोण (Adjacent Angle) है। इस प्रकार हम कह सकते हैं कि कोणों का ऐसा युग्म जिसमें दोनों कोण इस प्रकार संलग्न हैं कि

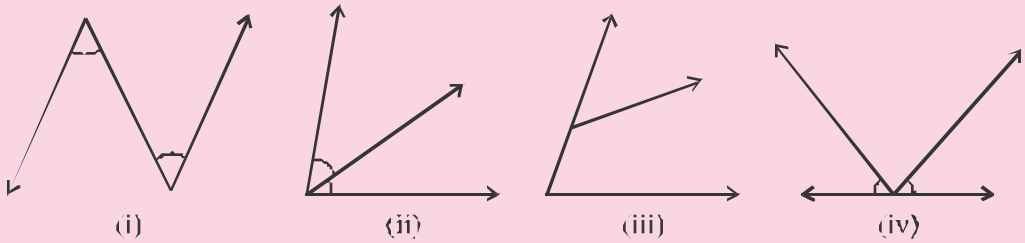
(i) उनका शीर्ष उभयनिष्ठ है।

(ii) कोण बनाने वाली भुजाओं में से एक भुजा उभयनिष्ठ है, तथा

(iii) कोण बनाने वाली दो भुजाएँ उभयनिष्ठ नहीं है, पर उभयनिष्ठ भुजा के एक–एक तरफ हैं, आसन्न कोण कहलाता है।

स्वयं करके देखिए

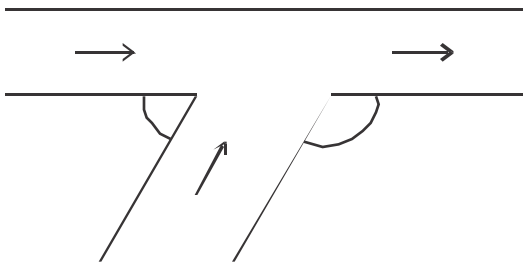
निम्न चित्रों में से कौन आसन्न कोणों का युग्म बना रहे हैं?



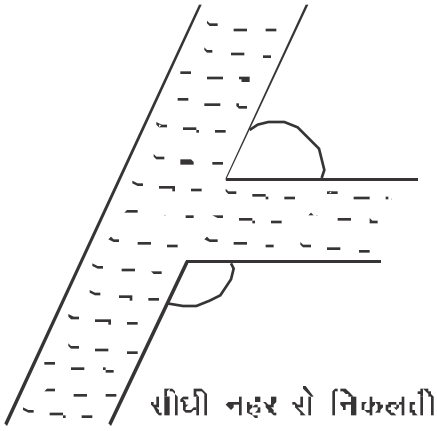
चित्र–5.9

WEBCOPY NOT TO BE PUBLISHED

5.1.4 रैखिक युग्मः



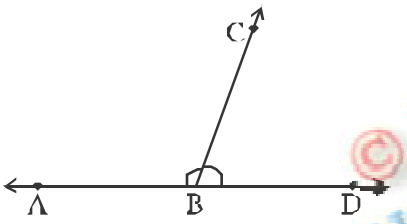
सीधी सड़क में मिलती एक दूसरी सड़क



सीधी नहर से निकलती एक दूसरी नहर

चित्र–5.10

ऊपर के दोनों चित्र आसन्न कोणों के उदाहरण हैं। यहाँ कोण बनाने वाली भुजाओं में से एक भुजा उभयनिष्ठ है तथा शेष दो भुजाएँ उभयनिष्ठ भुजा के एक–एक तरफ इस प्रकार हैं कि वे एक दूसरे के ठीक विपरीत दिशा में हैं तथा एक सीधी रेखा बना रही हैं।



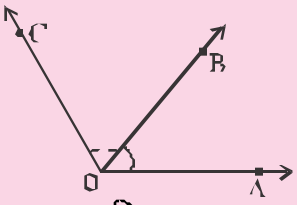
चित्र–5.11

ठीक उसी प्रकार चित्र–5.11 में $\angle ABC$ तथा $\angle DBC$ आपस में मिलकर एक आसन्न कोण बना रहे हैं तथा AB एवं BD एक सरल रेखा बना रही हैं। आसन्न कोणों का ऐसा युग्म रैखिक युग्म कहलाता है। अर्थात् आप कह सकते हैं कि जब आसन्न कोणों का योग 180° हो तब वे रैखिक युग्म बनाते हैं।

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

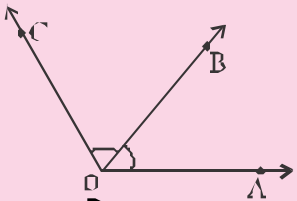
स्वयं करके देखिए

1. चित्र–5.12 को देखकर बताइए– $\angle AOB$ तथा $\angle BOC$ एक रैखिक युग्म बनाते हैं।



चित्र–5.12

2. (a) क्या $\angle AOB$ तथा $\angle BOC$ आपस में मिलकर रैखिक युग्म बनाते हैं यदि हाँ तो कैसे, नहीं तो क्यों?

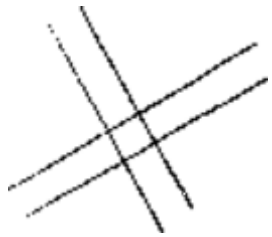


चित्र–5.13

(b) रैखिक युग्म के कोण होते हैं : (i) पूरक (ii) संपूरक।

(c) $\angle AOB$ तथा $\angle BOC$ आपस में मिलकर रैखिक युग्म बनाते हैं यदि $\angle AOB$ 75° हो तो $\angle BOC$ की माप बताइए।

5.1.5 प्रतिच्छेदी रेखाएँ



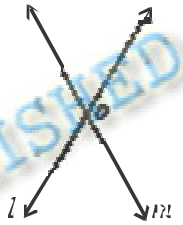
चौराहे पर एक दूसरे को काटती सड़कें

गुलेल

अंग्रेजी वर्णमाला का 24 वाँ अक्षर

चित्र–5.10

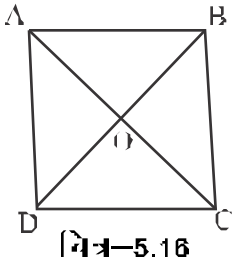
इन चित्रों को ध्यान से देखने पर हम इनमें एक समानता ढूँढ़ सकते हैं कि इनमें रेखाएँ एक दूसरे को एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है या काटती है। चित्र 5.15 में l और m दो रेखाएँ है तथा एक दूसरे को O बिन्दु पर प्रतिच्छेदित करती हैं। O बिन्दु इनमें उभयनिष्ठ है, **इसे इन** दोनों रेखाओं का **प्रतिच्छेदन बिन्दु** कहते हैं तथा l और m **प्रतिच्छेदी रेखाएँ कहलाती हैं।**



चित्र 5.15

कुछ करें

चित्र 5.16 में बताइए–

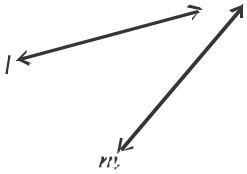


चित्र–5.16

1. प्रतिच्छेदन बिन्दु ——— _____
2. प्रतिच्छेदी रेखाएँ ——— _____
3. रैखिक युग्म के कोण होते हैं ?

   (i) संपूरक (ii) पूरक

4. रेखा l तथा m को आगे पीछे बढ़ाइए। क्या वे आपस में एक दूसरे को काटती हैं। यदि काटती हैं तो किस ने बिन्दु पर काटती हैं ?



चित्र–5.17

5. दो कोण आपस में मिलकर रैखिक युग्म बनाते हैं तो दोनों कोण हो सकते हैं–

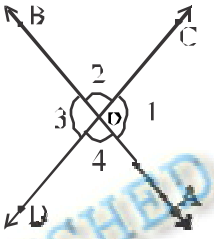
   (i) न्यूनकोण (ii) समकोण

   (iii) अधिककोण (iv) एक न्यूनकोण एक अधिककोण

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

5.1.6 ऊर्ध्वाधर सम्मुख कोण *(Verticaly opposite angle)*

चित्र 5.18



चित्र 5.19

चित्र–5.18 में एक सरल रेखा को एक दूसरे सरल रेखा काट रही है। अगर इस स्थानों को हम दो रेखाओं द्वारा देखना चाहें तो वह चित्र–5.19 के समान ही होगी जिसमें AB और CD दो रेखाएँ एक दूसरे को O बिन्दु पर काट रही है। इसमें चार कोण बन रहे हैं। इनमें ∠1 तथा ∠3 एवं ∠2 तथा ∠4 ऊर्ध्वाधर सम्मुख कोणों के युग्म हैं। आइए अब इन कोणों की माप पर विचार किया जाये। ∠1 एवं ∠2 मिलकर एक रैखिक युग्म बनाते हैं।

तब, ∠1 + ∠2 = 180° ∴ ∠1 = 180° − ∠2 .....(i)

इसी प्रकार ∠2 एवं ∠3 मिलकर एक रैखिक युग्म बनाते हैं।

तब, ∠2 + ∠3 = 180° ∴ ∠3 = 180° − ∠2 .....(ii)

समीकरण (i) और (ii) से हम पाते हैं कि ∠1 = ∠3

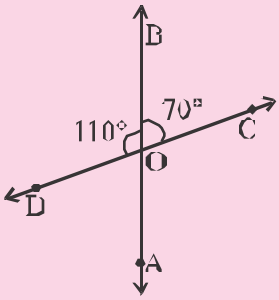
इसी प्रकार हम दिखा सकते हैं ∠2 = ∠4

हम कह सकते हैं कि जब दो सरल रेखाएँ एक दूसरे को काटती हैं तो ऊर्ध्वाधर सम्मुख कोणों के दो युग्म बनते हैं तथा प्रत्येक युग्म के दोनों कोण समान माप के होते हैं।

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

स्वयं करके देखिए

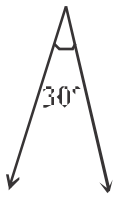
1. चित्र–5.20 में AB और CD एक दूसरे को O बिन्दु पर काटते हैं। ∠BOC=70° तथा ∠BOD=110° हैं तब ∠AOC एवं ∠AOD के माप बताइए।
2. अपने आस–पास से ऊर्ध्वाधर सम्मुख कोणों के दो उदाहरण प्रस्तुत कीजिए।



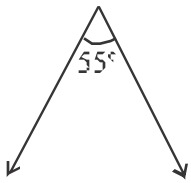
चित्र 5.20

प्रश्नावली 5.1

1. नीचे दिये गये कोणों का पूरक चाँद की सहायता से बनाइए–



.....

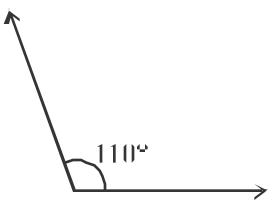


.....

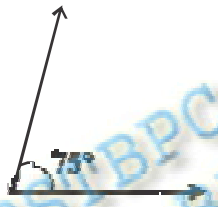
2. निम्न कोणों का पूरक ज्ञात कीजिए–

(i) 35° (ii) 54° (iii) 45° (iv) 78°

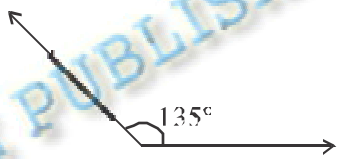
3. निम्न कोणों के संपूरक ज्ञात कीजिए–



(i)



(ii)



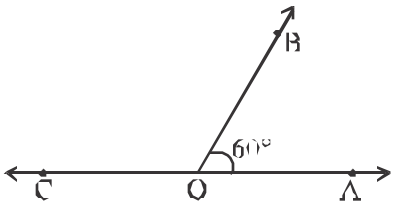
(iii)

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

4. एक कोण तथा उसके पूरक की माप समान है दोनों की माप बताइए।

5. संपूरक कोणों के युग्म में यदि एक कोण न्यूनकोण है तो उसका संपूरक अधिक कोण होगा या न्यूनकोण? कारण सहित बताइए।

6. संलग्न चित्र में ∠AOB तथा ∠BOC एक रैखिक युग्म बना रहे हैं। यदि ∠AOB=60° हो तब ∠BOC की माप क्या क्या होगी?



चित्र–5.21

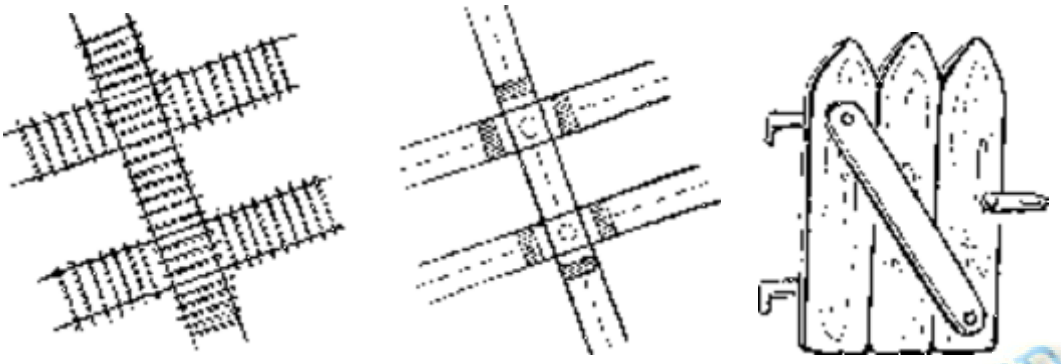
7.

चित्र–5.22

दिए गए चित्र में ∠AOC=120° है, तब ∠BOC ∠BOD तथा ∠AOD का मान ज्ञात कीजिए।

5.2 तिर्यक रेखा के गुण

5.2.1. तिर्यक छेदी रेखा:



दो रेलवे लाइन को पार करती एक दूसरी रेलवे लाइन

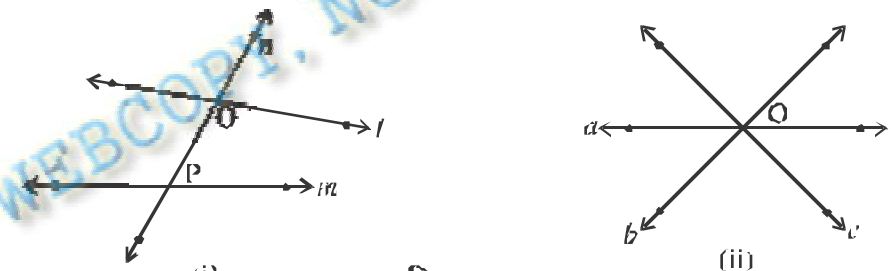
दो सड़कों को पार करती एक सड़क

दरवाजे के तीन पटरियों को जोड़ती तिर्यक पटरियाँ

चित्र 5.23

उपर्युक्त चित्र का ध्यान से देखने पर आप पाते हैं कि यहाँ एक रेखा दो या दो से अधिक रेखाओं को भिन्न–भिन्न बिन्दुओं पर प्रतिच्छेदित करती है। ऐसी रेखाएँ **तिर्यक छेदी रेखाएँ** कहलाती हैं।

WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED © BSTBPC



चित्र–5.24

यहाँ चित्र–5.24 के (i) में l और m दो रेखाएँ हैं जिन्हें एक n रेखा O तथा P बिन्दु पर प्रतिच्छेदित कर रही है, यहाँ n एक तिर्यक छेदी रेखा है। (ii) में a और b दो रेखाएँ हैं जिन्हें एक रेखा c एक ही बिन्दु O पर काटती है यह तिर्यक रेखा नहीं है, यहाँ तीनों रेखाएँ a, b तथा c एक ही बिन्दु 'O' से गुजर रही हैं। एक बिन्दु से गुजरने वाली रेखाएँ **संगामी रेखाएँ** कहलाती हैं।

स्वयं करके देखिए

1. l तथा m दो रेखाओं के लिए कितनी तिर्यक रेखाएँ खींची जा सकती हैं?

2. l, m तथा n तीन रेखाओं के लिए रेखा p एक तिर्यक रेखा है। बताइए यहाँ कितने प्रतिच्छेद बिन्दु हैं?

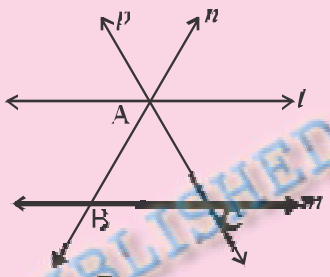
3. अपने आस-पास से ऐसे कुछ उदाहरण दीजिए जिनमें आप तिर्यक रेखा देख पाएँ।

4. संलग्न चित्र को ध्यान से देखिए तथा निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए–

   (i) क्या रेखा p रेखा l तथा m के लिए तिर्यक रेखा है?

   (ii) क्या रेखा p रेखा l, m तथा n के लिए तिर्यक रेखा है?

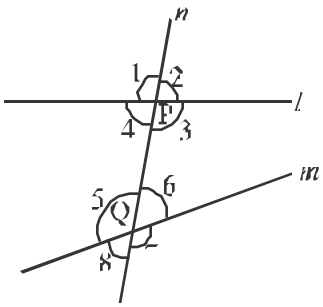
   (iii) रेखा p, n तथा l कैसी रेखाएँ हैं? तिर्यक, समान्तर या संगामी?



चित्र–5.25

5.2.2 तिर्यक रेखा द्वारा दो रेखाओं को काटने से बनने वाले कोण संगत कोण–

चित्र 5.26 में n एक तिर्यक रेखा है जो l और m दो रेखाओं को दो भिन्न बिन्दु P और Q पर काटती है। इस प्रकार n और l प्रतिच्छेदी रेखाएँ हैं। इस प्रकार बनने वाले चार कोणों को $\angle 1, \angle 2, \angle 3$ तथा $\angle 4$ से दर्शाया गया है। उसी प्रकार n और m प्रतिच्छेदी रेखाएँ हैं तथा उनके प्रतिच्छेदन बिन्दु पर बनने वाले चार कोण $\angle 5, \angle 6, \angle 7$, तथा $\angle 8$ हैं। अतः हम कह सकते हैं कि n तिर्यक रेखा दो रेखाओं l तथा m को काटने से कुल 8 कोण बनाते हैं। तिर्यक रेखा के बायीं ओर बनने वाले कोण $\angle 1, \angle 4, \angle 5, \angle 8$ हैं तथा तिर्यक रेखा के दायीं ओर बनने वाले कोण $\angle 2, \angle 3, \angle 6, \angle 7$ हैं। उसी प्रकार l और m रेखा के ऊपर और नीचे भी चार-चार कोण बन रहे हैं। तिर्यक रेखा n के बायीं या दायीं तरफ l के ऊपर या नीचे और m के ऊपर या नीचे बना कोण युग्म क्रमशः संगत कोणों का युग्म कहलाता है। ऊपर के चित्र में $\angle 1$ तथा $\angle 5$, $\angle 2$ तथा $\angle 6$, $\angle 4$ तथा $\angle 8$ एवं $\angle 3$ तथा $\angle 7$ संगत कोणों के युग्म हैं।



चित्र 5.26

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

स्वयं करके देखिए

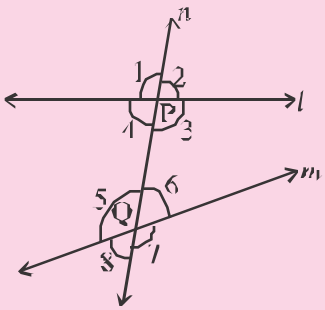
1. चित्र–5.27 में देखकर संगत कोणों के चार युग्मों को लिखिए–

(i) _____ और _____

(ii) _____ और _____

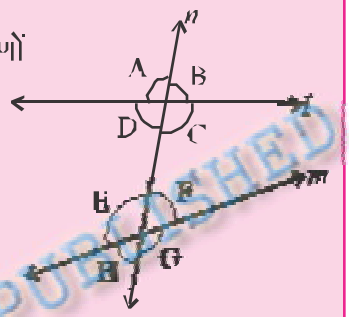
(iii) _____ और _____

(iv) _____ और _____



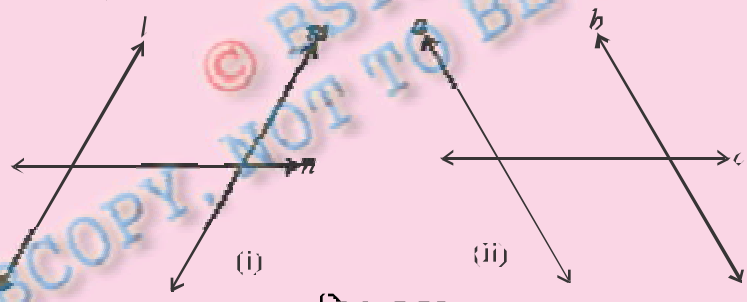
चित्र 5.27

2. चित्र–5.28 में तिर्यक रेखा n के बायीं ओर बने संगत कोणों के युग्मों के नाम लिखिए।



चित्र–5.28

3. चित्र–5.29 में कोणों का नामांकित कर सारणी में संगत कोण युग्मों को लिखिए।

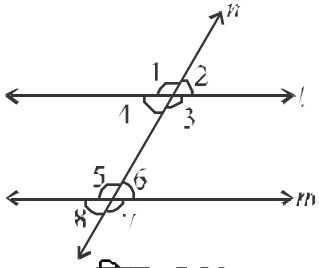


चित्र–5.29

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

5.2.3 एकान्तर कोण

रेखा l और m को तिर्यक रेखा n दो भिन्न बिन्दुओं पर काटती है। प्रतिच्छेदन बिन्दु पर बने कोणों को चित्र–5.30 में दिखाया गया है। $\angle 3$ और $\angle 5$ तथा $\angle 4$ और $\angle 6$ तिर्यक रेखा के दोनों तरफ के अन्तः कोणों का युग्म है जो आपस में संलग्न नहीं है। ये अन्तः एकान्तर कोणों के युग्म हैं।



चित्र–5.30

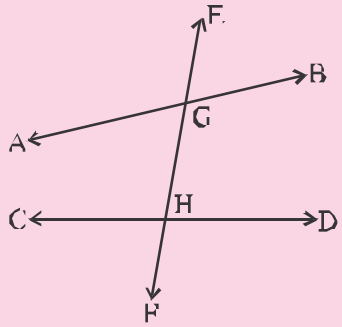
इसी प्रकार $\angle 2$ और $\angle 8$ तथा $\angle 1$ और $\angle 7$ भी बाह्य एकान्तर कोण हैं।

स्वयं करके देखिए

1. चित्र–5.31 में बाह्य एकान्तर कोण तथा अन्तः एकान्तर कोणों के युग्म को छाँटकर लिखिए–

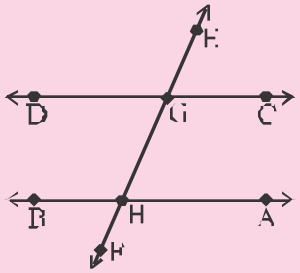
   (i) बाह्य एकान्तर कोण

   (ii) अन्तः एकान्तर कोण



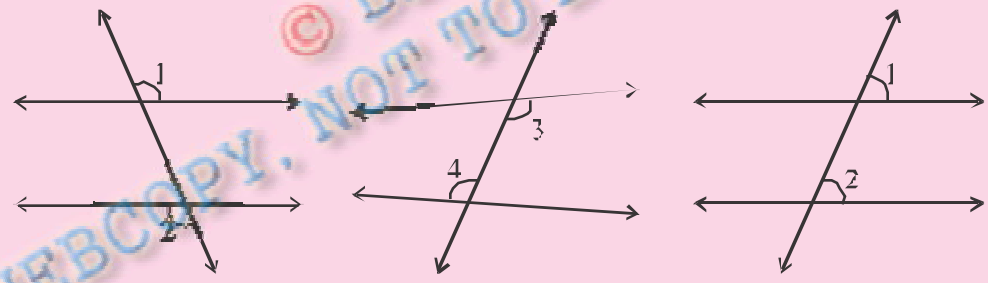
चित्र–5.31

2. चित्र–5.32 में संगत कोणों तथा एकान्तर कोणों के युग्म बताइए।



चित्र–5.32

3. दर्शाए गए कोण युग्म को पहचानिए व बताइए वे कौन से कोण युग्म हैं। संगत कोण, अन्तः एकान्तर कोण या बाह्य एकान्तर कोण?



_____ _____ _____

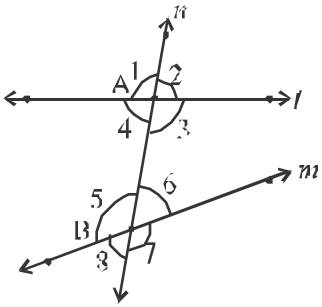
© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

5.2.4 बाह्य एवं अन्तः कोण (Exterior & interior angle)

यहाँ n तिर्यक रेखा द्वारा l और m दो रेखाओं को बिन्दु A एवं B पर काटने से कुल आठ कोण बने हैं। यहाँ रेखा l तथा m के बाहर की ओर बनने वाले कोण **बाह्यकोण** तथा रेखा l और m के अन्दर की ओर बनने वाले कोण **अन्तःकोण** कहलाते है।

बाह्यकोण $= \angle 1, \angle 2, \angle 7$ तथा $\angle 8$

अन्तःकोण $= \angle 3, \angle 4, \angle 5$ तथा $\angle 6$

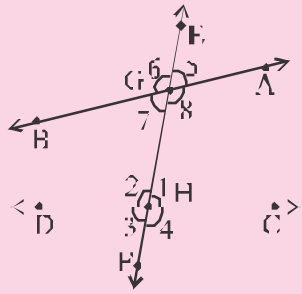


चित्र 5.33

स्वयं करके देखिए

(i) अनुपूरक कोणों के नाम लिखिए।

(ii) अन्तःकोणों के नाम लिखिए।

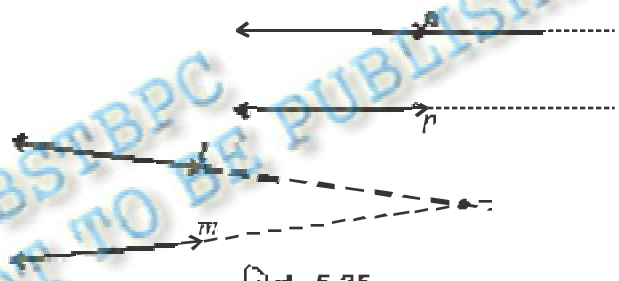


चित्र–5.34

5.3 समान्तर रेखाओं के गुण

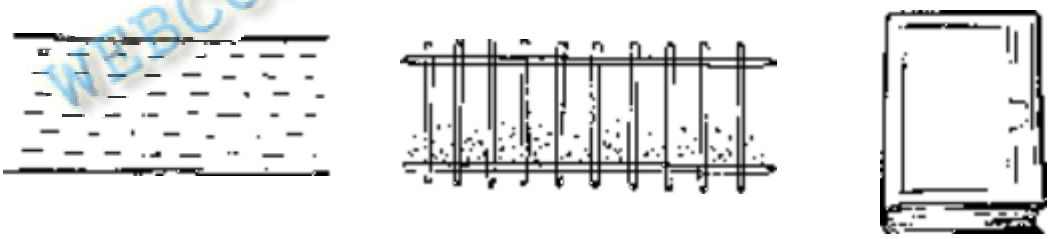
5.3.1 समांतर रेखाएँ (Paralles lines)

किसी तल में खींची गई दो रेखाओं पर विचार करें। यदि दोनों ओर इन रेखाओं को असीमित बढ़ाया जाये तो हम पाते हैं या तो रेखाएँ एक दूसरे से एक बिन्दु पर मिलती हैं या फिर कभी और कहीं नहीं मिलतीं। जो रेखाएँ आपस में मिलती हैं वो प्रतिच्छेदी रेखाएँ हैं तथा जो आगम में कभी नहीं मिलतीं समांतर रेखाएँ कहलाती हैं। यदि m तथा p समान्तर रेखाएँ हैं तो इसे $m \parallel p$ द्वारा प्रदर्शित करते हैं।



चित्र–5.35

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

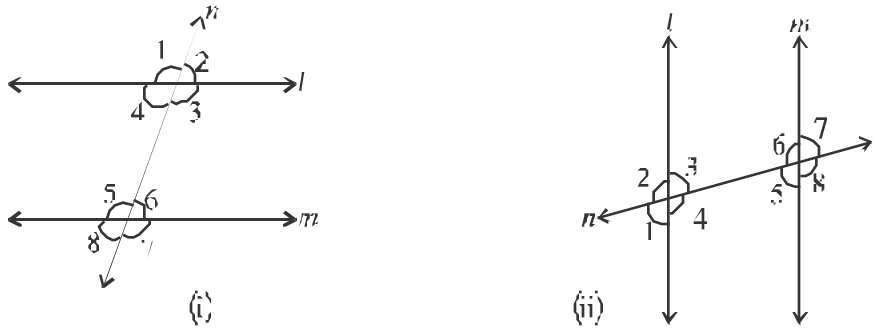


नदी या नहर का दो किनारा — रेलवे लाइन के दो रेल — पुस्तक के आगने–सामने के दो किनारे

चित्र–5.36

5.3.2 समांतर रेखाओं की तिर्यक रेखा–

l और m दो समान्तर रेखाएँ हैं जिनको n एक तिर्यक रेखा काटती है। इस प्रकार बने 8 कोणों की माप को प्रोटेक्टर की सहायता से निम्न सारणी को भरें–



चित्र–5.37

चित्र	∠1	∠2	∠3	∠4	∠5	∠6	∠7	∠8
(i)								
(ii)								

यहाँ हम पाते हैं कि $\angle 1 = \angle 5$, $\angle 2 = \angle 6$, $\angle 3 = \angle 7$ तथा $\angle 4 = \angle 8$ यानी संगत कोणों के युग्म समान माप के हैं।

फिर $\angle 1 = \angle 7$, $\angle 2 = \angle 8$, $\angle 3 = \angle 5$ तथा $\angle 4 = \angle 6$

यानी एकान्तर कोणों के बाह्य एवं अन्तः युग्म समान माप के हैं। फिर $\angle 4 + \angle 5 = 180°$ तथा $\angle 3 + \angle 6 = 180°$ यानी तिर्यक रेखा के एक ओर के अन्तः कोणों का योग सम्पूरक यानी $180°$ है।

इस प्रकार हम इस नतीजे पर पहुँचते हैं कि जब दो समान्तर रेखाओं को एक तिर्यक रेखा काटती है तब

(i) संगत कोणों के प्रत्येक युग्मों में कोणों की माप समान होती है।

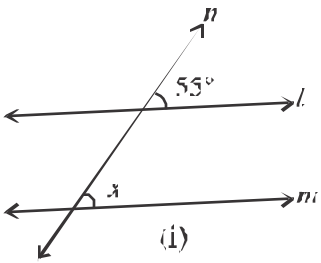
(ii) एकान्तर कोणों के प्रत्येक युग्म में कोणों की माप समान होती है।

(iii) तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अन्तः कोणों का योग $180°$ यानी संपूरक होता है।

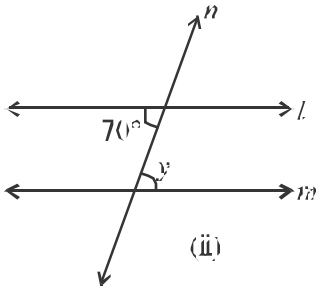
© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

स्वयं करके देखिए

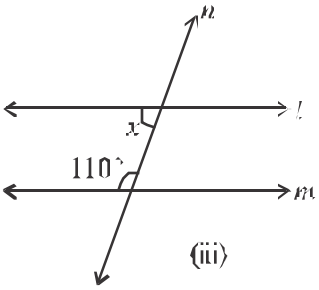
नीचे दिए गए चित्रों में $l \parallel m$ हो तो अज्ञात कोणों के माप ज्ञात कीजिए।



(i)

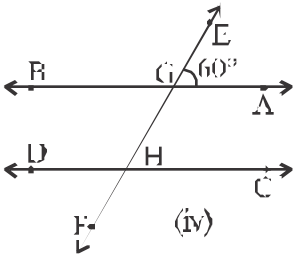


(ii)



(iii)

$\angle x$ = ... $\angle y$ = ... $\angle x$ = ...

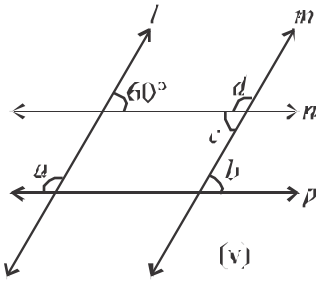


(iv)

$\angle BGH$ = ...

$\angle DHF$ = ...

$\angle GHC$ = ...



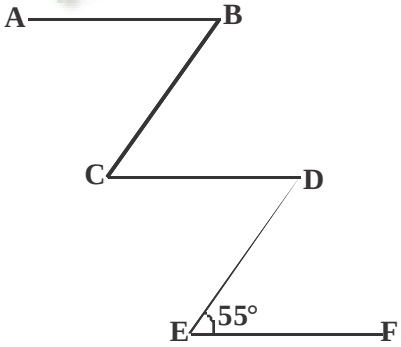
(v)

a = ...

b = ...

c = ...

d = ...



(vi)

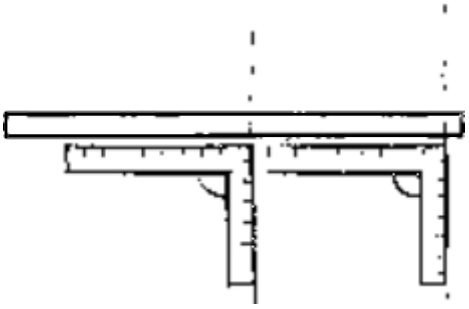
$\angle B$ = ...

$\angle C$ = ...

$\angle D$ = ...

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

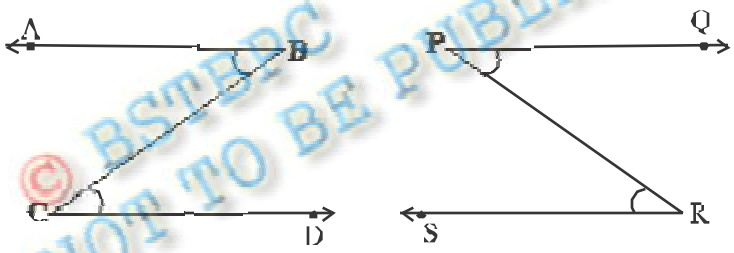
5.3.3. समांतर रेखाओं की जाँच–



चित्र–5.38

आइए अब विचार करें कि जब दो रेखाएँ दी हुई हों, तब वे समान्तर हैं या नहीं, इसकी जाँच कैसे हो। दैनिक जीवन में हमें अक्सर समान्तर रेखाओं की आवश्यकता पड़ती रहती है। नक्शा बनाने वाले, मिस्त्री, बढ़ई प्रकार चित्र 5.38 में दिखायी गयी वस्तुओं का प्रयोग करते आपको दिखाई पड़ जायेंगे। यहाँ वे रेखाओं को समान्तर करने के लिए दो L को स्केल पर रखकर संगत कोण को बराबर करते हैं। अतएव हम कह सकते हैं –

"जब दो रेखाओं को तिर्यक रेखा इस प्रकार काटे कि संगत कोणों के युग्म समान हों तब रेखाएँ समान्तर होती हैं। अब चित्र–5.39 पर विचार कीजिए। इसमें Z की सीधी एवं उल्टी आकृति बन रही है। इन आकृतियों में AB ∥ CD तथा PQ ∥ SR दिखाई पड़ रही है, ऐसा अंतः एकान्तर कोणों के बराबर होने के कारण हो रहा है। अतः हम यह कह सकते हैं कि यदि दो रेखाओं को एक तिर्यक रेखा काटती है तथा एकान्तर कोणों के युग्म समान हों तब रेखाएँ समान्तर होती हैं।



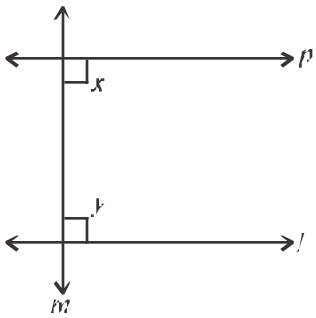
चित्र–5.39

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

कुछ करें

एक रेखा l खींचिए। फिर l के लम्बवत् एक रेखा m खींचिए। अब एक दूसरी रेखा p इस प्रकार खींचिए कि वह m के लम्बवत् हो। यहाँ रेखा p तथा l, रेखा m पर लम्ब हैं। ये दोनों रेखाएँ समान्तर हैं क्योंकि $\angle x = \angle y = 180°$

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि जब दो रेखाओं को कोई तिर्यक रेखा इस प्रकार काटे कि तिर्यक रेखा के एक ही ओर बने अंतः कोणों का योग 180° हो, तब दोनों रेखाएँ समान्तर होंगी।

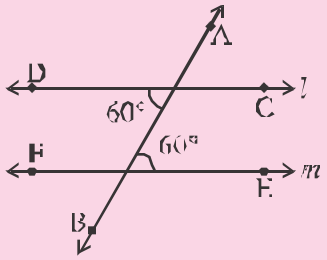


चित्र–5.40

स्वयं करके देखिए

नीचे दिए गए चित्रों में बताइए रेखाएँ l व m समान्तर हैं या नहीं। यदि नहीं तो कारण भी दीजिए।

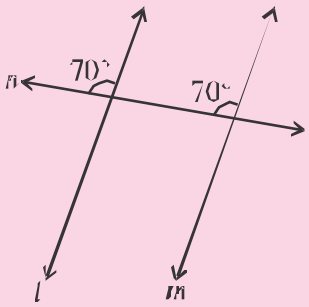
1.



हाँ / नहीं

कारण—

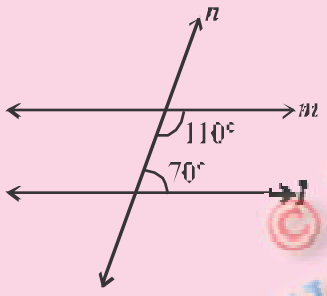
2.



हाँ / नहीं

कारण—

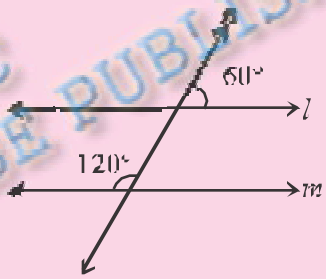
3.



हाँ / नहीं

कारण—

4.



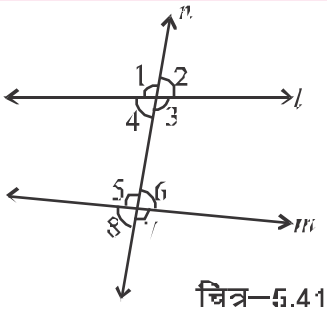
हाँ / नहीं

कारण—

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

प्रश्नावली—5.2

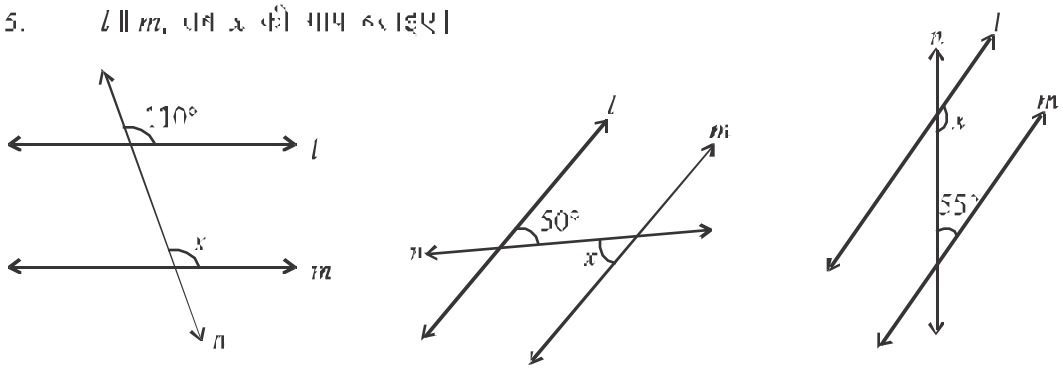
चित्र में बताइए—



चित्र—5.41

1. संगत कोणों के युग्मों के नाम।
2. अन्तः एकान्तर कोणों के युग्मों के नाम।
3. बहिः एकान्तर कोणों के युग्मों के नाम।
4. तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अन्तः कोणों के नाम।

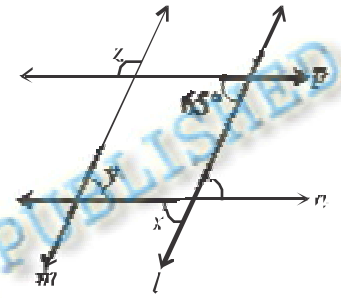
5. $l \parallel m$, तब x की माप कराइए।



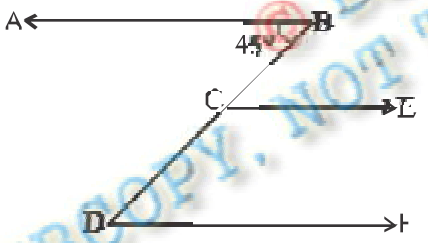
(i) (ii) (iii)

6. चित्र–5.42 में $l \parallel m$ तथा $p \parallel n$
तब $\angle x$ तथा $\angle y$ का मान ज्ञात कीजिए।

7. चित्र–5.42 में $\angle z$ का मान क्या होगा? तथा इसमें बनने वाला त्रिभुज किस प्रकार का होगा? कारण बताइए।



चित्र–5.42



चित्र–5.43

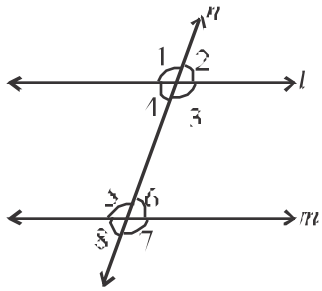
8. चित्र–5.43 में $AB \parallel CE$ तथा $CE \parallel DF$ तब $\angle B = 45°$ तब $\angle C$ तथा $\angle D$ का मान ज्ञात करें। क्या $AB \parallel DF$ यदि हाँ तो कैसे?

BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

9. चित्र–5.44 में l और m दो रेखाओं को n एक तिर्यक रेखा काटती है तब

(i) किन–किन कोणों के बराबर होने पर $l \parallel m$ होगा?

(ii) चित्र–5.44 में $\angle 4 + \angle 5 = 180°$ है। तब क्या $l \parallel m$ होगा?



चित्र–5.44

हमने सीखा

1. दो कोणों की माप 90° हो तो वे दोनों मिलकर पूरक कोण युग्म तथा अलग-अलग आपस में एक दूसरे के पूरक कहलाते हैं।
2. कोणों का ऐसा युग्म जिनके मापों का योग 180° हो, संपूरक कोण कहलाते हैं। युग्म के दोनों कोण एक दूसरे के संपूरक कहलाते हैं।
3. कोणों का ऐसा युग्म जिसमें दोनों कोण इस प्रकार संलग्न हैं कि उनका शीर्ष उभयनिष्ठ हो, कोण बनाने वाले भुजाओं में से एक भुजा उन्यनिष्ट है तथा कोण बनाने वाली जो भुजाएँ उभयनिष्ठ नहीं है, वे उभयनिष्ठ भुजा के एक-एक ओर है, आसन्न कोण कहलाते हैं।
4. जब आसन्न कोणों का योग 180° हो तब वे रैखिक युग्म बनाते हैं।
5. जब दो सरल रेखाएँ एक दूसरे को काटती हैं तो ऊर्ध्वाधर अभिमुख कोणों का दो युग्म बनता है तथा प्रत्येक युग्म के दोनों कोण समान नाप के होते हैं।
6. एक रेखा दो या दो से अधिक रेखाओं को भिन्न-भिन्न बिन्दुओं पर प्रतिच्छेदित करती है, तिर्यक रेखा कहलाती है।

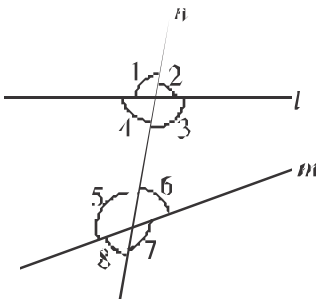
   एक बिन्दु से होकर गुजरने वाली सभी रेखाएँ संगामी रेखाएँ कहलाती हैं।

   तिर्यक रेखा द्वारा दो रेखाओं को काटने से

   (i) संगत कोणों का चार जोड़ा $\angle 2$ एवं $\angle 6$, $\angle 1$ एवं $\angle 5$, $\angle 4$ एवं $\angle 8$, $\angle 3$ एवं $\angle 7$ बनाते हैं।

   (ii) एकान्तर अन्तः कोण का दो जोड़ $\angle 3$ एवं $\angle 5$ तथा $\angle 4$ एवं $\angle 6$ बनते हैं।

   (iii) एकान्तर बाह्य कोण का दो जोड़ा $\angle 1$ एवं $\angle 7$, तथा $\angle 2$ एवं $\angle 8$ बनते हैं।



7. जब दो समान्तर रेखाओं को एक तिर्यक रेखा काटती है तब
   (i) संगत कोणों के प्रत्येक युग्मों में कोणों की माप समान होती है।
   (ii) एकान्तर कोणों के प्रत्येक युग्म में कोणों की माप समान होती है।
   (iii) तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अन्तः कोणों का योग 180° होता है।
8. दो रेखाएँ समांतर होंगी, यदि और केवल यदि
   (i) संगत कोण बराबर हों
   (ii) एकान्तर कोण बराबर हों तथा
   (iii) एक ही ओर के अंतः कोणों का योगफल 180° हो।

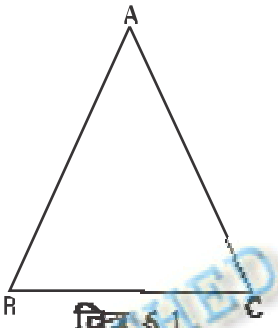
WEBCOPY © BSTBPC NOT TO BE PUBLISHED

www.absol.in

अध्याय-6

त्रिभुज और उसके गुण

भूमिका



चित्र 6.1

पिछली कक्षा में हमने त्रिभुज के बारे में पढ़ा है। तीन रेखा खंडों से घिरी सरल आकृति त्रिभुज है। त्रिभुज में तीन शीर्ष तीन भुजाएँ तथा तीन कोण होते हैं। चित्र 6.1 में ABC एक त्रिभुज है तथा A, B तथा C शीर्ष है। AB, BC तथा CA भुजाएँ हैं, तथा $\angle ABC$, $\angle BCA$, $\angle CAB$ तीन कोण हैं। शीर्ष A के सामने की भुजा BC तथा BC के सामने का कोण $\angle BAC$ है।

हम त्रिभुजों को उनकी भुजा एवं कोण के आधार पर वर्गीकृत करने का भी अध्ययन कर चुके हैं। भुजा के आधार पर त्रिभुज के तीन प्रकार होते हैं समबाहु, समद्विबाहु तथा विषमबाहु त्रिभुज। इसी प्रकार कोण के आधार पर त्रिभुज तीन प्रकार के होते हैं, न्यूनकोण, समकोण तथा अधिककोण त्रिभुज।

© BSTBPC WEBCOPY NOT TO BE PUBLISHED

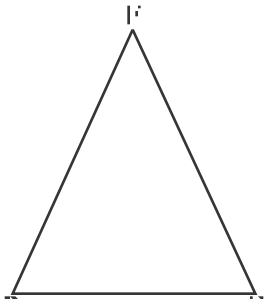
प्रयास कीजिए

1. चित्र 6.2 में त्रिभुज DEF के शीर्ष, भुजा एवं कोणों के नाम लिखिए।

   _____

   _____

   _____



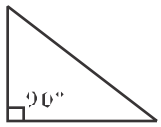
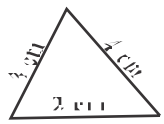
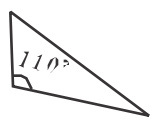
चित्र 6.2

2. $\angle DEF$ के सामने वाली भुजा के नाम बताइए।

   _____

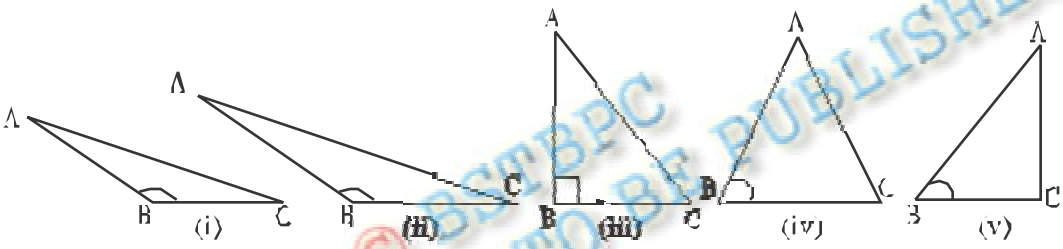
www.absol.in

3. नीचे दिए गए प्रत्येक त्रिभुज के नीचे लिखिए कि वह कौन-सा त्रिभुज है? (समबाहु, समद्विबाहु, समकोण, न्यूनकोण, अधिककोण या विषमबाहु)

6.1 त्रिभुज के कोणों के योग का नियम

नीचे बने त्रिभुजों के कोण B को ध्यान से देखिए–



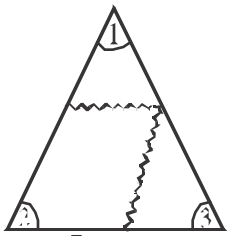
चित्र 6.3

© BSTBPC WEBCOPY NOT TO BE PUBLISHED

ऊपर के चित्र में त्रिभुज ABC में ∠B की नाप का घटते हुए दिखाया गया है। हम पाते हैं कि जैसे जैसे ∠B का मान घट रहा है वैसे–वैसे ∠A और ∠C का मान बढ़ रहा है। अर्थात त्रिभुज में तीनों कोणों का घटना या बढ़ना किसी एक निश्चित नियम के द्वारा होता है तथा त्रिभुज के कोणों का योग भी किसी नियम से बंधा होता है, आइए इसको सीखने की कोशिश करें।

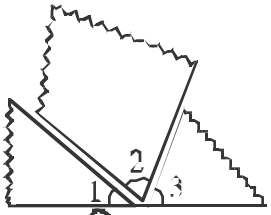
कुछ करें

अपने नोट बुक पर एक त्रिभुज बनाइए अब परकर की सहायता से त्रिभुज के तीनों कोणों को सान-त्रिज्या वाली चापों से दर्शाइए तथा उन पर चित्र नुसार 1, 2 एवं 3 अंकित कीजिए। अब त्रिभुज को तीन टुकड़ों में इस प्रकार काटिए कि प्रत्येक टुकड़ा त्रिभुज का एक–एक कोण हो।



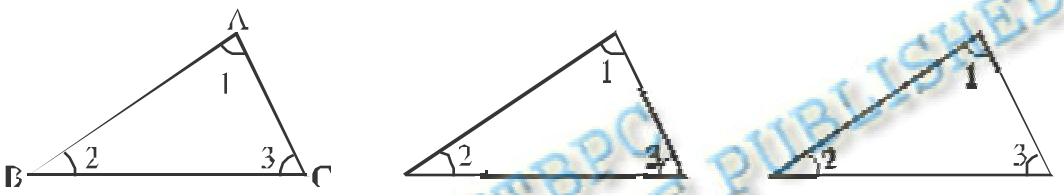
चित्र 6.4

अब तीनों टुकड़ों में बने कोणों को इस प्रकार से व्यवस्थित कीजिए कि उनके शीर्ष एक साथ एक बिन्दु पर रहें (चित्र 6.5)। यहाँ $\angle 1$, $\angle 2$ और $\angle 3$ मिलकर एक सरल रेखा बनाते हैं तथा समान त्रिज्या वाले चापों से दर्शाये गए कोण एक सरल रेखा पर व्यवस्थित होते हैं। चूँकि एक सरल रेखा पर बने समस्त कोणों का योग दो समकोणों के बराबर होता है और चूँकि एक समकोण $= 90^\circ$ अतः दो समकोण $= 180^\circ$ अतः $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$। इस प्रकार हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है। आइए इस निष्कर्ष को हम एक अन्य तरीके से भी जानने की कोशिश करें।



चित्र 6.5

इस तथ्य को आप एक अन्य विधि द्वारा भी देख सकते हैं। किसी $\triangle ABC$ के तीन प्रतिरूप बनाइए (चित्र 6.6)।

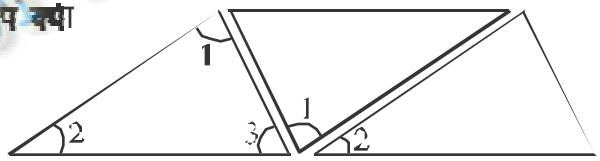


चित्र 6.6

इन तीनों को आकृति 6.7 की भाँति मिलाकर ठीक से रखिए।

$\angle 1 - \angle 2 - \angle 3$ के बारे में आप क्या अवलोकन करते हैं?

(क्या आप यहाँ बाह्य कोण से संबंधित गुण भी देख पाते हैं?)



चित्र 6.7

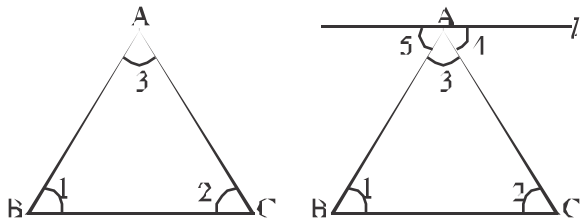
फुटकर

अपनी अभ्यास पुस्तिका में कोई तीन त्रिभुज, जैसे $\triangle ABC$, $\triangle PQR$ तथा $\triangle XYZ$ खींचिए। इन सभी त्रिभुजों के प्रत्येक कोण की माप एक कोण मापक द्वारा मापकर ज्ञात कीजिए। इन मानों को तालिका रूप में इस प्रकार लिखिए,

$\triangle$ का नाम	$\angle$ कोणों की माप			तीनों कोणों की मापों का योग
$\triangle ABC$	$m\angle A=$	$m\angle B=$	$m\angle C=$	$m\angle A+m\angle B+m\angle C=$
$\triangle PQR$	$m\angle P=$	$m\angle Q=$	$m\angle R=$	$m\angle P+m\angle Q+m\angle R=$
$\triangle XYZ$	$m\angle X=$	$m\angle Y=$	$m\angle Z=$	$m\angle X+m\angle Y+m\angle Z=$

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

कथन: त्रिभुज के तीनों कोणों की मापों का योग 180° होता है। इस तथ्य को स्थापित करने के लिए हम समान्तर रेखा के गुणों का उपयोग करें।



चित्र 6.8

दिया है– $\triangle ABC$ के तीन कोण $\angle 1, \angle 2$ तथा $\angle 3$ है। (चित्र 6.8)

दिखाना है: $\angle 1+\angle 2-\angle 3=180^\circ$

शीर्ष A से गुजरती $\overline{BC}$ के समान्तर रेखा l खींचें

उपपत्ति	चरण	कारण
(i)	$\angle 1 = \angle 5$	$l \parallel \overline{BC}$ तथा AB एक तिर्यक रेखा है। अतः एकान्तर कोण समान होने चाहिए।
(ii)	$\angle 2 = \angle 4$	$l \parallel \overline{BC}$ तथा AC एक तिर्यक रेखा है। अतः एकान्तर कोण समान होने चाहिए।

(i) + (ii)

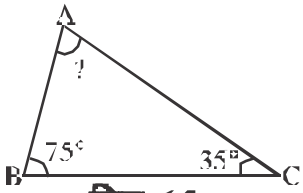
$\angle 1 + \angle 2 = \angle 5 + \angle 4$ दोनों पक्षों में $\angle 3$ जोड़ने पर

$\angle 1 + \angle 2 - \angle 3 = \angle 5 + \angle 4 + \angle 3$

$= 180^\circ$ $\angle 3, \angle 4, \angle 5$ एक रेखा पर बने कोण हैं तथा एक रेखा पर बने कोणों का योग 180° होता है।

अर्थात् त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° यानी दो समकोण के बराबर होता है।

उदाहरण–1. दिए गए त्रिभुज में $\angle B = 75^\circ$, $\angle C = 35^\circ$ तब $\angle A$ के माप ज्ञात कीजिए।



चित्र 6.9

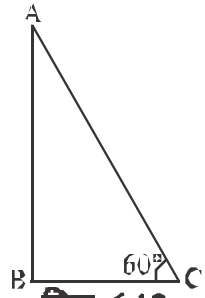
हम जानते हैं कि त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है, अतः $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$

या, $\angle A + 75^\circ + 35^\circ = 180^\circ$

या $\angle A + 110^\circ = 180^\circ$ या $\angle A = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

उदाहरण—2. दिए गए चित्र में ΔABC एक समकोण त्रिभुज है जिसमें कोण B समकोण है तथा कोण C का माप 60° है। कोण A का मान ज्ञात कीजिए।



चित्र 6.10

समकोण त्रिभुज ABC में

$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

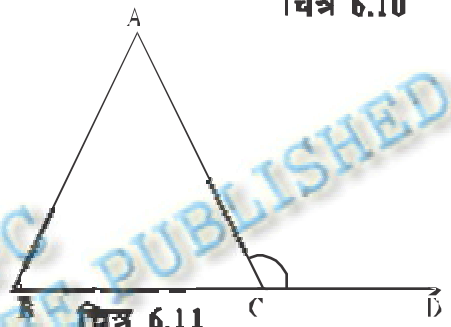
$\Rightarrow \angle A + 90° + 60° = 180°$ $(\because \angle B = 90°)$

$\Rightarrow \angle A + 150° = 180°$

$= \angle A = 180° - 150° = 30°$

अतः $\angle A = 30°$

6.2 बाह्य कोण, अन्तः अभिमुख कोण

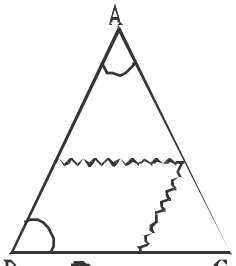


चित्र 6.11

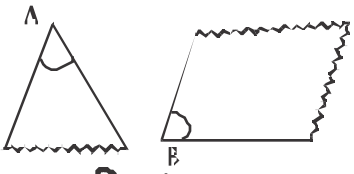
चित्र 6.11 में त्रिभुज ABC में BC भुजा को C की दिशा में D बिन्दु तक बढ़ाया गया है। इस C बिन्दु पर बना कोण $\angle ACD$ त्रिभुज के बाह्य भाग में बना कोण है। ऐसे बाह्य कोण अन्य भुजाओं को बढ़ाकर भी प्राप्त किए जा सकते हैं।

अतः $\angle ACD$ ΔABC के शीर्ष C पर बना एक बाह्य कोण कहलाता है। यहाँ ΔABC के तीनों कोणों में $\angle C$ बाह्य कोण ACD के साथ जुड़ा कोण है, $\angle A$ तथा $\angle B$ बाह्य कोण से दूर स्थित कोण है जो त्रिभुज के आन्तरिक भाग में है। शीर्ष C पर स्थित बाह्य कोण के लिए $\angle C$ संलग्न अंतः कोण तथा $\angle A$ एवं $\angle B$ सम्मुख अन्तः कोण है।

आइए अब बाह्य कोण एवं अन्तः कोणों में संबंध को देखें। एक ट्रेसिंग पेपर पर ΔABC का ट्रेस करें। (चित्र 6.12) अब ट्रेसिंग पेपर को इस तरह दो हिस्सों में बाँटिए कि $\angle A$ एक हिस्से पर तथा $\angle B$ दूसरे हिस्से पर हो, (चित्र 6.13)



चित्र 6.12

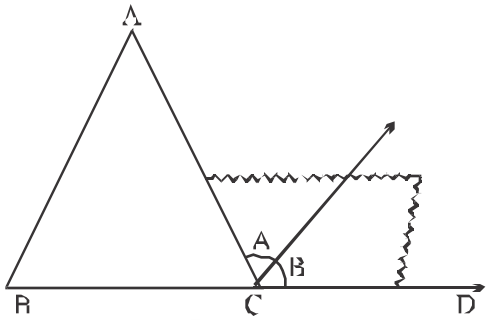


चित्र 6.13

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

अब $\angle A$ और $\angle B$ को संलग्न कर $\angle ACD$ पर रखिए। क्या ये दोनों कोण $\angle ACD$ को पूरी तरह ढक लेते हैं? चित्र 6.14 को देखने से यह पता चलता है कि $\angle A$ और $\angle B$ एक साथ मिलकर $\angle ACD$ को पूरी तरह ढक लेते हैं।

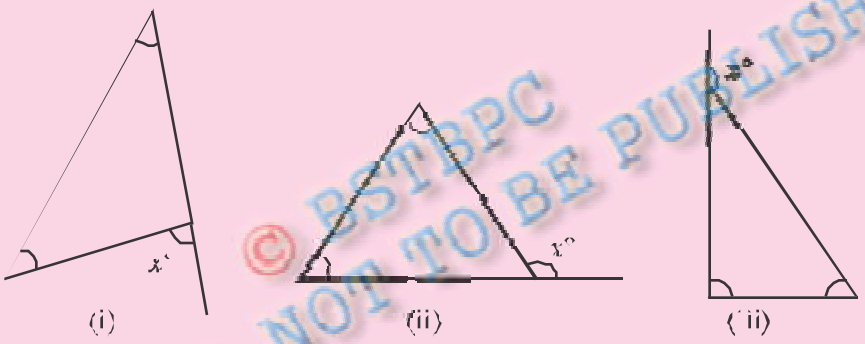
तब $m\angle ACD = m\angle A + m\angle B$ यानी किसी त्रिभुज का बाह्य कोण अपने दाहिने सम्मुख अन्तः कोणों के योग के बराबर होता है।



चित्र 6.14

स्वयं करके देखिए

नीचे दिए गए त्रिभुजों में दिए गये बाह्य कोण व संगत अन्तः अभिमुख कोणों को नापिए तथा इस नियम की जाँच कीजिए तथा x का मान ज्ञात कीजिए।



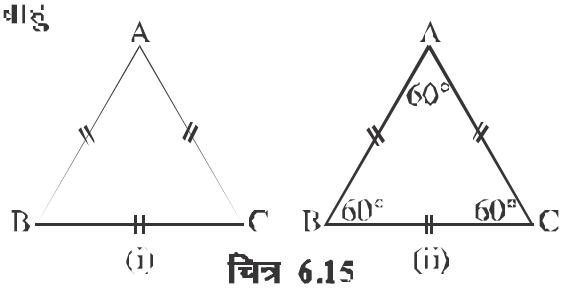
© BSTBPC WEBCOPY NOT TO BE PUBLISHED

त्रिभुज के कोण व भुजा में संबंध:

दो विशेष त्रिभुज: समबाहु तथा समद्विबाहु

एक त्रिभुज, जिसकी तीनों भुजाओं की माप समान हो, समबाहु त्रिभुज कहलाता है।

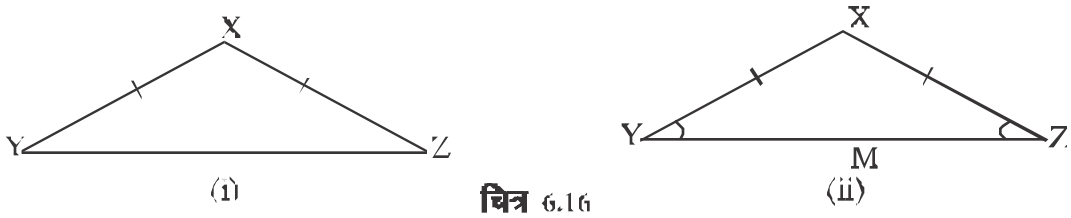
एक समबाहु त्रिभुज ABC (चित्र 6.15) बनाइए। इसके प्रतिरूप यानी इसी माप का एक और समबाहु त्रिभुज कागज से काटें। पहले त्रिभुज के ऊपर रखते हुए इस पर दूसरा त्रिभुज इसे ढँकते हुए रखें। दूसरा त्रिभुज पहले को पूरी तरह ढँक लेता है। दूसरे त्रिभुज को पहले त्रिभुज पर किसी भी तरह घुमाकर रखें, वे दोनों त्रिभुज फिर भी एक दूसरे को ढंक लेते हैं। क्या आप देख पाते हैं कि



चित्र 6.15

यदि त्रिभुज की तीनों भुजाएँ समान माप की हैं तब तीनों कोण भी समान नाप के ही होते हैं। हम निष्कर्ष निकालते हैं कि समबाहु त्रिभुज में (i) तीनों भुजाएँ समान माप की होती हैं। (ii) प्रत्येक कोण की नाप 60° होती है।

एक त्रिभुज, जिसकी दो भुजाओं की माप समान हों, एक समद्विबाहु त्रिभुज कहलाता है।



चित्र 6.16

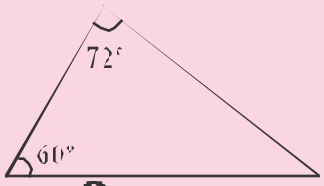
कागज़ के टुकड़े से एक समद्विबाहु त्रिभुज XYZ काटिए, जिसमें भुजा XY = भुजा XZ हो (आकृति 6.16)। इसे इस प्रकार मोड़िए जिससे शीर्ष Z शीर्ष Y पर आच्छादित हो। अब शीर्ष X से गुज़रने वाली रेखा XM इस त्रिभुज का समनिष्ठ अक्ष है। आप देखते हैं कि ∠Y और ∠Z एक दूसरे का पूर्णतया ढँक लेते हैं। XY और XZ त्रिभुज की सम भुजाएँ कहलाती हैं। YZ आधार; ∠Y तथा ∠Z आधार कोण कहलाते हैं जो परस्पर समान होते हैं।

इस प्रकार हम निष्कर्ष निकालते हैं कि समद्विबाहु त्रिभुज में (i) दो भुजाएँ बराबर लंबाई की होती हैं। (ii) समान भुजाओं के सामने का कोण समान होता है।

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

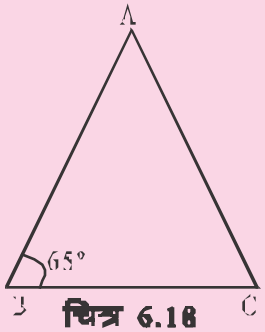
स्वयं करके देखिए

1. एक समकोण त्रिभुज का एक न्यूनकोण 42° है तो दूसरे न्यूनकोण की माप क्या होगी?
2. चित्र 6.17 में त्रिभुज के एक कोण की माप 60° तथा दूसरे कोण की माप 72° है तब तीसरे कोण की नाप ज्ञात करें।



चित्र 6.17

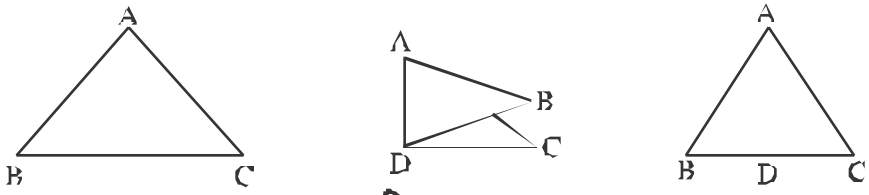
3. एक त्रिभुज के तीनों कोणों में अनुपात 3 : 4 : 5 है। कोणों की नाप ज्ञात कीजिए।
4. एक समकोण त्रिभुज का दोनों न्यूनकोण समान है, दोनों न्यूनकोणों की माप बताइए।
5. चित्र 6.18 में AB = AC तथा ∠ABC = 65° तब त्रिभुज के शेष दोनों कोणों की माप बताइए।



चित्र 6.18

6.3 त्रिभुज की माध्यिकाएँ

कागज के टुकड़े से एक त्रिभुज ABC काटिए।



चित्र 6.19

इसके शीर्ष B को शीर्ष C पर रखकर मोड़िए। जिससे BC भुजा को दो बराबर भागों में बाँटा गया है तथा D बिन्दु को भुजा BC के मध्य बिन्दु के रूप में दिखाया गया है। अब शीर्ष A से D को मिलाया गया यही त्रिभुज की माध्यिका है। क्या आप AB एवं AC भुजा पर भी माध्यिका खींच सकते हैं? हाँ, खींच सकते हैं त्रिभुज में कुल 3 माध्यिकाएँ होती हैं जो त्रिभुज के तीनों शीर्षों से सामने वाली भुजाओं पर खींची जा सकती है।

त्रिभुज में किसी भुजा के मध्य बिन्दु को सम्मुख शीर्ष से मिलाने वाली रेखा ही त्रिभुज की माध्यिका है। तीनों माध्यिकाएँ एक दूसरे को जिस बिन्दु पर काटती हैं वह बिन्दु त्रिभुज का **केन्द्रक** कहलाता है।

कुछ करें

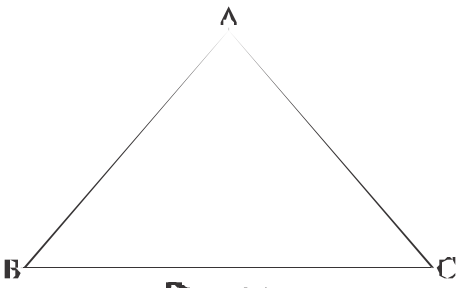
एक त्रिभुज में तीनों माध्यिकाएँ खींचिए तथा बताइए–

(i) क्या तीनों माध्यिकाएँ संगामी होती है यानी एक ही बिन्दु से गुजरती है?

(ii) क्या एक माध्यिका पूर्णतया त्रिभुज के अन्दर होती है, यदि आपके अनुसार यह सत्य नहीं है तो उस स्थिति को दिखाने के लिए एक आकृति खींचिए।

6.4 त्रिभुज के शीर्षलम्ब

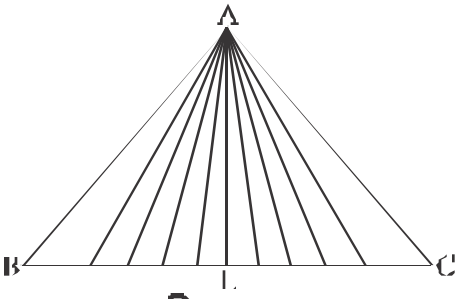
त्रिभुज के आकार वाले एक गत्ते को समतल जमीन पर सीधा खड़ा करें। उसकी ऊँचाई कितनी है? यह ऊँचाई शीर्ष A से भुजा $\overline{BC}$ तक की दूरी है। (चित्र 6.20) शीर्ष A से भुजा $\overline{BC}$ तक अनेक रेखाखण्ड खींचे जा सकते हैं, (चित्र 6.21)। इनमें से त्रिभुज की ऊँचाई कौन-सी रेखाखंड प्रदर्शित करती है?



चित्र 6.20

© BSTBPC WEBCOPY NOT TO BE PUBLISHED

वह रेखाखण्ड जो शीर्ष A से सीधा ऊर्ध्वाधर नीचे $\overline{BC}$ तक और उस पर लंबवत होता है, त्रिभुज की ऊँचाई होती है।



चित्र 6.21

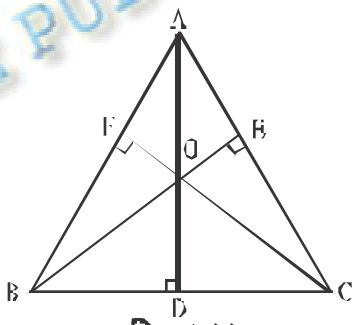
रेखाखण्ड AL त्रिभुज का एक शीर्षलम्ब है। शीर्षलम्ब का एक अंत बिन्दु, त्रिभुज के एक शीर्ष पर और दूसरा अंत बिन्दु सम्मुख भुजा बनाने वाली रेखा पर स्थित होता है। प्रत्येक शीर्ष से एक शीर्षलम्ब खींचा जा सकता है।

चित्र 6.21 को देखिए त्रिभुज ABC में शीर्ष A से भुजा BC पर अनेक रेखाखंड खींचे गये हैं। सोचिए सबसे छोटी लम्बाई का रेखाखंड कौन होगा?

AL शीर्ष A से BC भुजा पर खींचे गये विभिन्न लम्बाई के रेखाखंडों में सबसे छोटा रेखाखंड है। AL शीर्ष A से भुजा BC पर डाला गया लम्ब है।

AL ही त्रिभुज ABC का शीर्षलंब है इसे त्रिभुज की ऊँचाई भी कहते हैं। इस प्रकार त्रिभुज में शीर्ष से सामने की भुजा पर डाला गया लम्ब ही शीर्षलंब है।

एक त्रिभुज में तीन शीर्षलंब होते हैं। प्रत्येक शीर्ष से सामने की भुजा पर एक-एक लम्ब खींचा जा सकता है जो शीर्ष लंब है।



चित्र 6.22

चित्र 6.22 में AD, BE तथा CF त्रिभुज ABC के तीन शीर्षलंब हैं। तीनों शीर्षलंब एक बिन्दु पर मिल रहे हैं यह बिन्दु है त्रिभुज का लंब केन्द्र है।

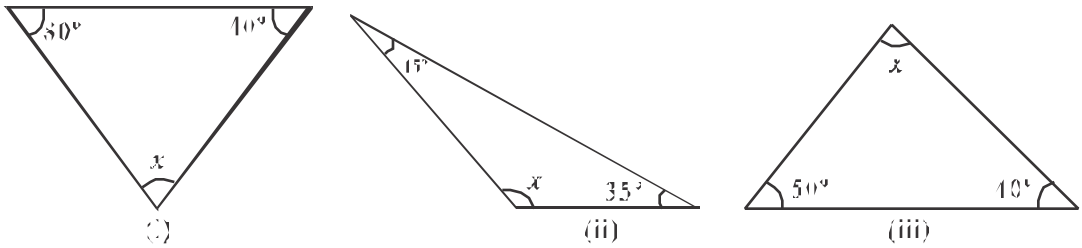
© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

स्वयं करके देखिए

1. एक त्रिभुज में कितने शीर्षलंब होते हैं?
2. क्या किसी त्रिभुज में माध्यिका और शीर्षलंब एक रेखाखंड हो सकता है?
3. त्रिभुज के शीर्षलंब का एक अंत बिंदु त्रिभुज के शीर्ष पर होता है। तो इसे दूसरा अंत बिन्दु कहाँ होगा?
4. क्या किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ उसका शीर्षलंब हो सकती हैं यदि हाँ तो यह त्रिभुज कैसा होगा?

प्रश्नावली 6.1

1. x का मान ज्ञात कीजिए।



2. एक समकोण त्रिभुज का एक न्यूनकोण 35° का है तो दूसरे न्यूनकोण का मान बताइए।

3. एक समद्विबाहु त्रिभुज के तीनों कोणों की माप क्या होगी?

4. चित्र 6.23 के आधार पर निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए

(i) y का मान बताइए।

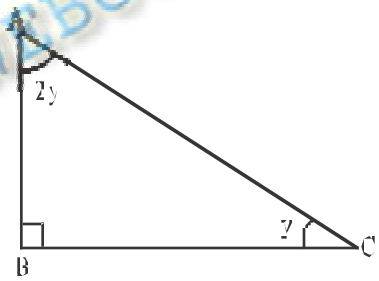
(ii) त्रिभुज का प्रकार बताइए।

चित्र 6.23

5. एक त्रिभुज का पहला कोण, दूसरे और तीसरे कोण के माप के योग के बराबर है तथा दूसरा कोण तीसरे कोण के माप के बराबर है। इस त्रिभुज को आप क्या नाम देंगे?

नीचे दिए गए त्रिभुजों में अज्ञात कोणों के माप ज्ञात कीजिए–

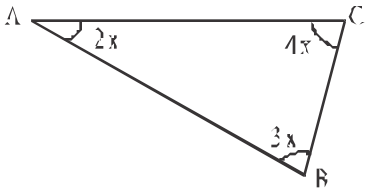
6.



$\angle A$ – .....

$\angle C$ = ...

7.



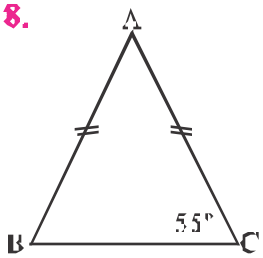
$\angle A$ – .....

$\angle B$ – .....

$\angle C$ = ...

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

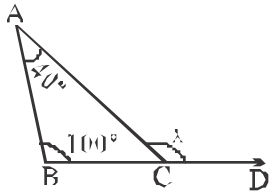
8.



$\angle A$ = ...

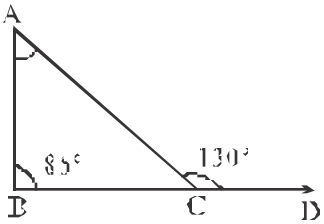
$\angle B$ = ...

9.



x = ...

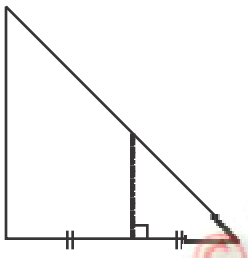
10.



$\angle A$ = ...

11. नीचे दिए गए त्रिभुजों के अन्दर दर्शायी गई खण्डित रेखाओं (Dotted Lines) के नाम लिखिए। साथ में कारण भी दीजिए।

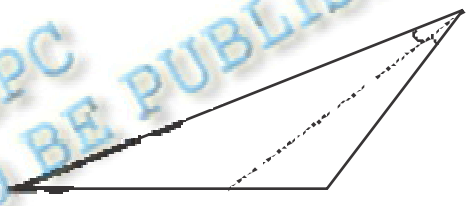
(i)



रेखा का नाम : आधार पर लम्ब समद्विभाजक

कारण : क्योंकि यह आधार को दो बराबर भागों में बाँटता है तथा आधार पर लम्ब है।

(ii)

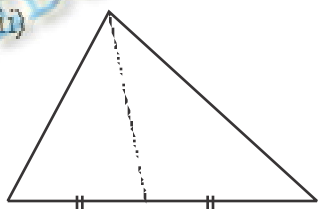


रेखा का नाम : कोण समद्विभाजक

कारण : ——————————

——————————————

(iii)

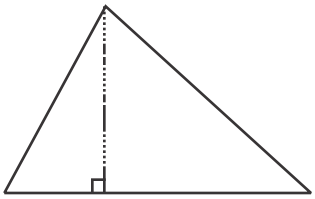


रेखा का नाम : ————————

कारण : ——————————————

——————————————

(iv)



रेखा का नाम : ————————

कारण : ——————————

——————————————

© BSTBPC
WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

12. एक ऐसा त्रिभुज (कच्चा चित्र) बनाइए, जिसके एक शीर्ष से खींचा गया लम्ब, त्रिभुज के बाहर स्थित हो।

आपने कैसा त्रिभुज बनाया? न्यूनकोण त्रिभुज, समकोण त्रिभुज, अधिककोण त्रिभुज या अन्य?

13. नीचे एक बड़ा समद्विबाहु त्रिभुज ABC बनाइए, जिसमें AB = AC हो। इस त्रिभुज में निम्न रेखाएँ बनाइए।

(i) कोण A के लिए समद्विभाजक

(ii) शीर्ष A के सामने वाली भुजा पर लम्ब

(iii) शीर्ष A से सामने वाली भुजा की माध्यिका

लेख बनाइए,

(i) क्या ये सभी रेखाएँ अलग-अलग हैं? या नहीं?

(ii) इन रेखाओं की क्या विशेषताएँ हैं?

14. एक त्रिभुज में किसी एक कोण की समद्विभाजक रेखा उस कोण के सामने की भुजा पर लम्ब भी है। बताओ, त्रिभुज किस प्रकार का होगा? कैसे पता लगाया?

15. नीचे दी गई सारणी में खाली स्थान भरिए—

क्र.	Δ का नाम	भुजा की माप	कोण की माप	शेष कोणों की माप
1.	ΔABC	AB=AC	∠B=50°	∠C=....., ∠A=.....
2.	ΔPQR	PQ=PR	∠R=.....	∠P=....., ∠Q=45°
3.	ΔDEF	DE=DF	∠E=.....	∠D=84°, ∠F=.....
4.	ΔLMN	LM=MN=NL	∠L=.....	∠M=....., ∠N=.....

6.5 त्रिभुज अरागिका गुण

चित्र 6.24 में एक त्रिभुजाकार खेत के बाहर की तरफ से रास्ता है। इस रास्ते से संबंधित कुछ प्रश्नों के उत्तर सारणी में दीजिए।

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

आप खड़े हैं	आपको जाना है	जाने के रास्तों की ल.		छोटा रास्ता
		पहला रास्ता	दूसरा रास्ता	
बिन्दु A पर	बिन्दु B पर	AB	AC + CB	AB
बिन्दु B पर	बिन्दु C पर			
बिन्दु C पर	बिन्दु A पर			

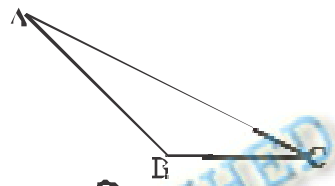
यहाँ त्रिभुजाकार खेत के हर दो रास्तों के रास्ते के बारे में आपने देखा कि

$AC + CB > AB$

$BA + AC > BC$

$CB + BA > CA$

यहाँ AB, BC तथा CA इस त्रिभुजाकार खेत की भुजाएँ हैं।



चित्र 6.24

कुछ करें

1 cm. से लेकर 10 cm. लम्बाई की बीस की पट्टियाँ लीजिए। अब इन कमाचियों में कोई तीन कमाचियाँ लेकर त्रिभुज बनाने का प्रयास कीजिए तथा सारणी को पूरा कीजिए–

प्रयासों की संख्या	पहले कमाची की लम्बाई	दूसरी कमाची की लम्बाई	पहली व दूसरी कमाची की लम्बाई का योग	तीसरे कमाची की लम्बाई	क्या त्रिभुज बन रहा है
I					
II					
III					
IV					

इन प्रयासों में आपने देखा कि आप उन्हीं तीन कमाचियों से त्रिभुज बना पा रहे हैं जिनमें किन्हीं दो की लम्बाई का योग तीसरे कमाची से ज्यादा है।

vr त्रिभुज की किन्ही दो भुजाओं की लम्बाई का योगफल तीसरी भुजा से बड़ी होती है।

उदाहरण : तीन भुजाओं की माप क्रमशः 2c.m., 3 c.m. तथा 6 c.m. है, क्या इन तीन भुजाओं से त्रिभुज बनना संभव है?

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

यहाँ 2cm + 2cm < 6 cm

यानी दो भुजाओं का योग तीसरी से कम है, इसलिए इन तीन भुजाओं से त्रिभुज बनना संभव नहीं है ।

स्वयं करके देखिए

1. बताइए, दी गई भुजाओं की माप से कौन–कौन से त्रिभुज बनाना संभव है?

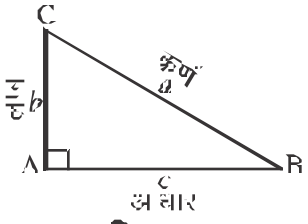
(i)	1cm., 3cm., 6cm.	(ii)	4cm., 8cm., 9cm.
(iii)	3cm., 5cm., 8cm.	(iv)	3cm., 4cm., 5cm.

6.6 पाइथागोरस प्रमेय

पाइथागोरस एक यूनानी दार्शनिक थे। उनका जन्म 6ठी शताब्दी ईसा पूर्व हुआ था। उन्होंने समकोण त्रिभुज की भुजाओं की लम्बाइयों के बीच संबंध स्थापित करने हेतु एक प्रमेय का सत्यापन किया जिसे पाइथागोरस प्रमेय के नाम से जाना जाता है। इस प्रमेय के समकक्ष एक अन्य प्रमेय के बारे में भारतीय गणितज्ञ बौधायन ने 1000 ईसा पूर्व जानकारी दी। ऐसा माना जाता है कि 2000 ईसा पूर्व मिस्र एवं बेबीलोन के निवासियों को समकोण त्रिभुज की भुजाओं के बीच के संबंध के बारे में पता था। यूक्लिड ने 300 ईसापूर्व अपने प्रसिद्ध ग्रंथ The element में इस प्रमेय को सत्यापित किया। आगे हम पाइथागोरस प्रमेय के बारे में विस्तार से जानेंगे।

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

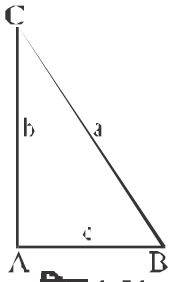
समकोण त्रिभुज– कोण के आधार पर त्रिभुजों को वर्गीकृत करते समय हम ने देखा है कि जिस त्रिभुज का एक कोण 90° हो वह समकोण त्रिभुज कहलाता है । समकोण त्रिभुज की भुजाओं को विशेष नाम दिया जाता है । समकोण के सामने वाली भुजा को कर्ण (Hypotenuse) कहते हैं जो कि तीन भुजाओं में से सबसे बड़ी भुजा होती है। अन्य दो भुजाओं को त्रिभुज के पाद (Legs) के रूप में जाना जाता है इनमें से एक को आधार (Base) और दूसरे को लम्ब (Perpendicular) कहा जाता है ।



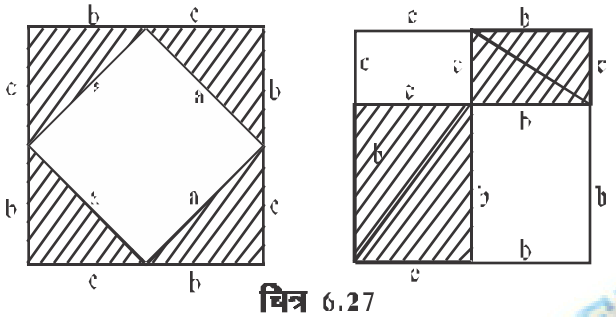
चित्र 6.25

कुछ करें

किसी भी माप का एक समकोण त्रिभुज बनाइए तथा उसके और 7 प्रतिरूप लीजिए। इस प्रकार अब आपके पास एक ही माप के आठ त्रिभुज हैं। इन सभी त्रिभुजों में कर्ण को a तथा दो अन्य पक्ष को b तथा c मानें।



चित्र 6.26



चित्र 6.27

अब एक समान माप के दो वर्ग बनाइए जिनकी भुजाओं की लंबाई b + c के बराबर हो। अब 4 त्रिभुज को पहले वर्ग में तथा 4 त्रिभुज को दूसरे वर्ग में चित्र 6.27 के अनुसार स्थापित कीजिए। अब आप जानते हैं कि दोनों वर्ग समान क्षेत्रफल के हैं तथा उनमें रखे गए त्रिभुज भी एक समान हैं अतः

पहले वर्ग का अनाच्छादित क्षेत्र = दूसरे वर्ग का अनाच्छादित क्षेत्र

$$a^2 = b^2 + c^2$$

अतः हम कह सकते हैं कि समकोण त्रिभुज में कर्ण पर बना वर्ग अन्य दो भुजाओं पर बने वर्गों के योग के बराबर होता है। यही पाइथागोरस प्रमेय है।

स्वयं कीजिए

विभिन्न माप के तीन समकोण त्रिभुज बनाइए तथा उनके भुजाओं की नापकर निम्न सारणी को पूरा कीजिए।

त्रिभुज–1	त्रिभुज–2	त्रिभुज–3

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

www.absol.in

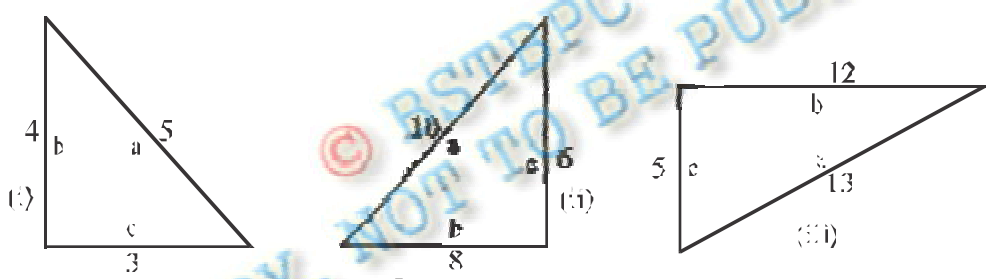
सारणी

त्रिभुज का नाम	कर्ण की माप (a)	प्रथम पाद भुजा की माप (b)	द्वितीय पाद भुजा की माप (c)	a^2	b^2	c^2	$b^2 + c^2$	क्या $a^2 = b^2 + c^2$
1.								
2.								
3.								

यहाँ सारणी में हमने देखा कि समकोण त्रिभुज में $a^2 = b^2 + c^2$

अर्थात् समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग अन्य दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है।

2. आइए अब निम्न त्रिभुजों पर विचार करें।



चित्र 6.28

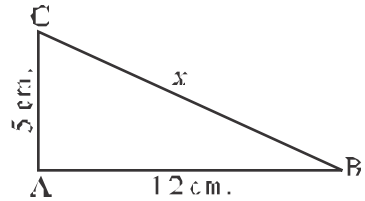
चित्र 6.28 में बने तीन त्रिभुजों की भुजाओं के माप के आधार पर निम्न सारणी को पूरा कीजिए।

त्रिभुज का नाम	a^2	b^2	c^2	$b^2 + c^2$	क्या $a^2 = b^2 + c^2$	भुजा a के सामने के कोण की माप	त्रिभुज का प्रकार
(i)							
(ii)							
(iii)							

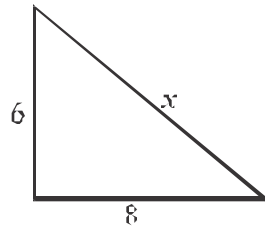
© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

3. एक त्रिभुज की भुजाएँ 6 c.m, 8 c.m तथा 10 c.m लंबी हैं। निर्धारित कीजिए कि क्या वह समकोण त्रिभुज है ।

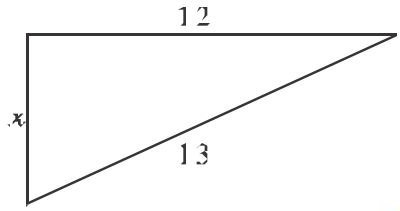
4. नीचे दिये गये समकोण त्रिभुजों में अज्ञात भुजाओं का माप ज्ञात कीजिए:



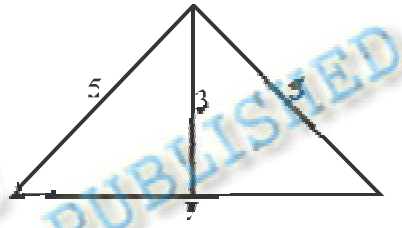
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

© BSTBPC WEBCOPY NOT TO BE PUBLISHED

प्रश्नावली 6.2

1. नीचे तीन संख्याओं का समूह दिया गया है बताइए कौन सा समूह त्रिभुज की भुजाओं को प्रदर्शित करता है?

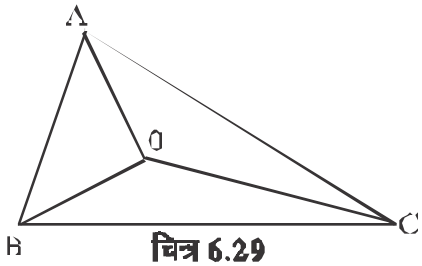
(i) (3, 4, 5) (ii) (2, 3, 4) (iii) (1, 2, 3) (iv) (1, 3, 5)

2. चित्र 6.29 में O बिन्दु त्रिभुज ABC के अन्दर स्थित है, तो बताइए नीचे दिए गए कथनों में कौन सत्य है तथा कौन असत्य?

(i) AO – OB < AB

(ii) AO + OC > AC

(iii) BO + OC < BC

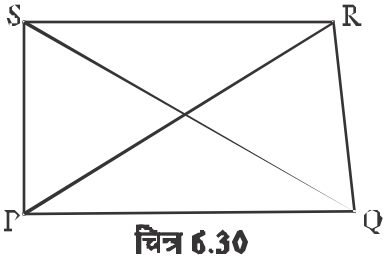


चित्र 6.29

www.absol.in

3. चित्र 6.30 में PQRS एक चतुर्भुज है। दिखाइए कि

$PQ + QR + RS - SP > PR + SQ$



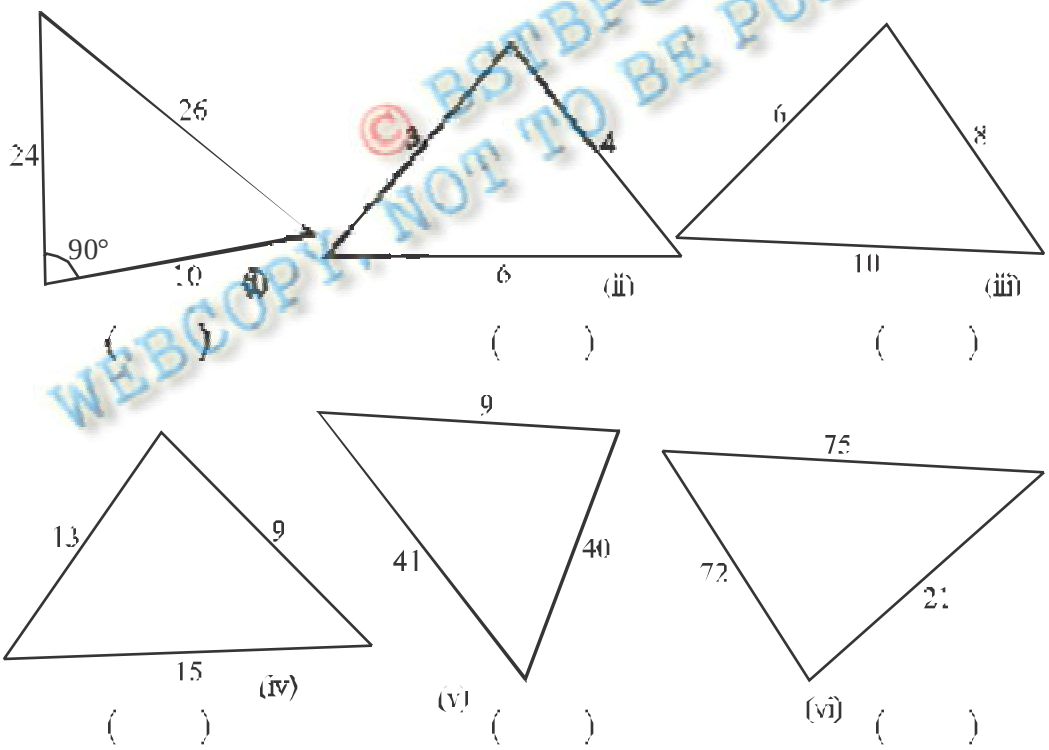
चित्र 6.30

4. एक त्रिभुज की दो भुजाओं की माप 10 सेमी. तथा 14 सेमी. है। इस त्रिभुज की तीसरी भुजा की न्यूनतम एवं अधिकतम माप की सीमा क्या होगी?

5. ABC एक त्रिभुज है जिसका $\angle A$ समकोण है यदि $AB = 10$ सेमी., $AC = 24$ सेमी. तब कर्ण BC का मान क्या होगा?

6. **नीचे दिए गए त्रिभुजों में से कौन–कौन से त्रिभुज समकोण त्रिभुज हैं? उनके नीचे सही का निशान (✓) लगाइए। साथ ही समकोण त्रिभुजों का जो कोण समकोण है, उसे 90° लिखकर इंगित कीजिए।**

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

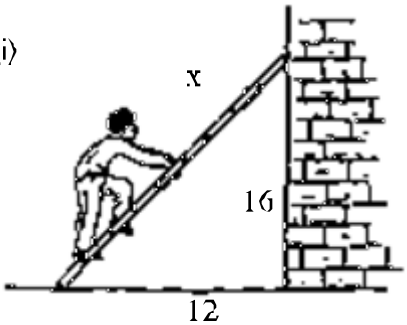


( ) ( ) ( )

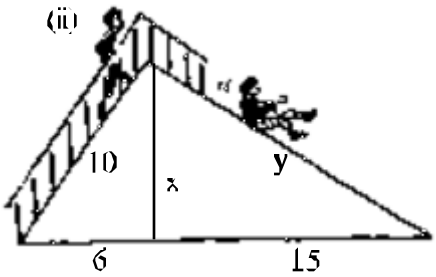
( ) ( ) ( )

7. **नीचे दी गई परिस्थितियों में 'x' व 'y' का मान निकालिए।**

(i)



(ii)



x = _____ x = _____, y = _____

हमने सीखा

1. त्रिभुज में तीन भुजाएँ तीन कोण तथा तीन शीर्ष होते हैं।
2. (i) त्रिभुज के तीनों कोणों का योग एक समकोण यानी 180° होता है।
   (ii) किसी भी त्रिभुज में एक से अधिक कोण समकोण या अधिक कोण नहीं हो सकते।
3. समबाहु त्रिभुज की तीनों भुजाएँ आपस में बराबर होती हैं।
4. समद्विबाहु त्रिभुज की दो भुजाएँ बराबर होती हैं, तथा समान भुजाएँ के सामने के कोण भी आपस में बराबर होते हैं।
5. त्रिभुज में किसी भुजा के मध्य बिन्दु को सम्मुख शीर्ष से मिलाने वाली रेखा माध्यिका कहलाती है। त्रिभुज में तीन माध्यिकाएं होती हैं। तीनों माध्यिकाएँ एक बिन्दु पर मिलती हैं जिसे त्रिभुज का केन्द्रक कहते हैं।
6. किसी त्रिभुज के एक शीर्ष से उसके सम्मुख भुजा पर खींचे गए लम्ब को त्रिभुज का एक शीर्षलंब कहते है। त्रिभुज में तीन शीर्षलम्ब होते हैं। तीनों शीर्ष लंब एक बिन्दु पर मिलते हैं यह बिन्दु त्रिभुज का लंब केन्द्र कहते हैं।
7. किसी त्रिभुज में दो भुजाओं की लम्बाई का योग तीसरी भुजा की लम्बाई से ज्यादा होता है।
8. समकोण त्रिभुज में कर्ण पर बने वर्ग शेष दोनों भुजाओं पर बने वर्गों के योग के बराबर होता है। यह प्रमेय पाइथागोरस प्रमेय के नाम से जाना जाता है।
9. यदि किसी त्रिभुज में बड़ी भुजा की लम्बाई का वर्ग शेष दोनों भुजाओं की लम्बाई के वर्गों के योग के बराबर हो, तब वह त्रिभुज समकोण त्रिभुज होगा।

WBSSBC NOT TO BE PUBLISHED

अध्याय-7 सर्वांगसमता

भूमिका

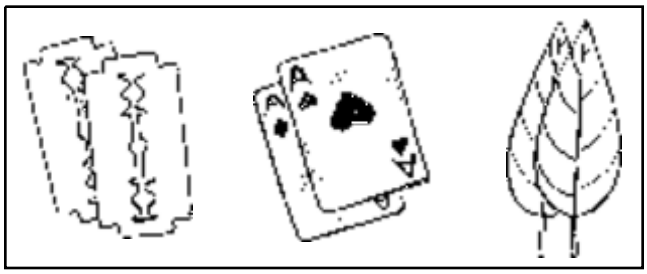
चित्र–7.1

पायल अपने गुल्लक में रखे सिक्कों की गिनती कर रही थी। तभी उसकी छोटी भाई पल्लव वहाँ पहुँचा तथा उसको गिनने में मदद करने लगा। पायल ने उसे सिक्कों को छाँटने का निर्देश दिया। इसी बीच पायल को उसकी माँ ने किसी काम से अपने पास बुला लिया। कार्य खत्म कर पायल जब वापस अपने भाई के पास लौटी तो वह यह देखकर आश्चर्यचकित हुई कि पल्लव ने सिक्कों को सही ढंग से छाँट कर रखा था। उसने पल्लव से छाँटने का तरीका पूछा। पल्लव ने कहा कि मैंने सिक्कों को एक के ऊपर एक रखकर देखा जो सिक्के आपस में एक दूसरे को पूरी तरह ढक रहे थे उन्हें एक साथ रखा।

आप भी अपने आस–पास में इसी प्रकार पूर्णतः एक दूसरे को ढकने वाली वस्तुओं को खोजिए।

7.1 सर्वांगसम आकृति एवं सर्वांगसमता

एक जैसे दो ब्लेड लीजिए। दोनों को एक दूसरे के ऊपर रख कर देखिए क्या वे दोनों एक दूसरे को पूरी तरह ढक लेते हैं। एक ही आकार में ताश के दो पत्ते लीजिए। एक पत्ते को दूसरे के ऊपर रखिए। आप पायेंगे दोनों ब्लेड एवं ताश के पत्ते एक दूसरे को पूरी तरह से ढक लेते हैं। इसका अर्थ है दोनों पत्ते या ब्लेड एक ही आकार एवं माप की हैं, ऐसी वस्तुएँ **सर्वांगसम** कहलाती हैं तथा दो वस्तुओं के सर्वांगसम होने



चित्र–7.2

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

www.absol.in

का संबंध **सर्वांगसमता** कहलाती है। एक के ऊपर एक वस्तु रखकर सर्वांगसमता ज्ञात करने की यह विधि **अध्यारोपण विधि** (Super position) कहलाती है।

दो आकृतियों की सर्वांगसमता को हम चिह्न $\cong$ से दिखाते हैं। यदि A और B दो आकृतियाँ सर्वांगसम हैं तब हम $A \cong B$ लिखते हैं।

कुछ करें

1. किन्हीं दो वस्तुओं के नाम लिखो, जो

(a) एक–दूसरे को पूरा–पूरा ढकती हों ——————————————————

——————————————————————————————

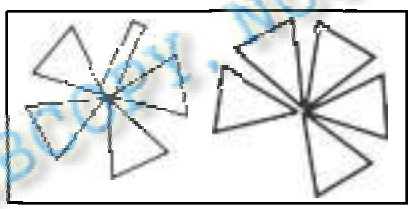
(b) एक–दूसरे को पूरा–पूरा नहीं ढकती हों ——————————————

——————————————————————————————

2. अपनी कॉपी के पेज के नीचे कार्बन लगाइए और जिस पेज के नीचे आपने कार्बन लगाया है, उस पेज पर कोई आकृति बनाइए। अब बताइए कार्बन के नीचे वाले पेज पर बनी आकृति ऊपरी पेज पर बनी आकृति के सर्वांगसम है या नहीं।

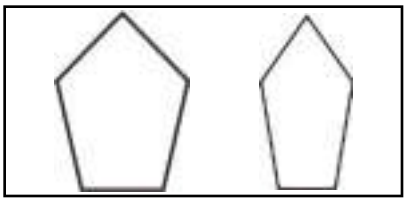
3. नीचे कुछ आकृतियों के जोड़े दिए गए हैं। बताओ कि ये सर्वांगसम (congruent) है या नहीं?

(i)



……

(ii)

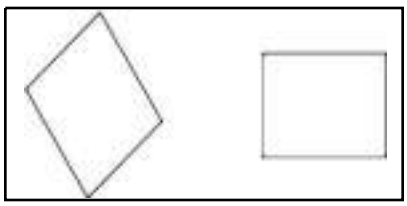


……

(iii)

……

(iv)



……

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

7.2 ज्यामितीय आकृतियों की सर्वांगसमता

जिस प्रकार एक चित्र को उसके आकार और माप में परिवर्तन किये बिना एक जगह से उठा कर दूसरी जगह रखकर इनकी सर्वांगसमता की जाँच करें; उसी प्रकार ज्यामितीय आकृतियों को भी एक के ऊपर दूसरी रखकर जाँच कर सकते हैं। परन्तु ध्यान रहे उनके आकार (माप) व आकृति में परिवर्तन नहीं कर सकते हैं। आइए अब कुछ ज्यामितीय आकृतियों की सर्वांगसमता के बारे में विचार करें।

7.2.1 रेखाखण्डों की सर्वांगसमता

नीचे दिए गए रेखाखण्डों के दो जोड़ों को देखिए:

चित्र–7.3

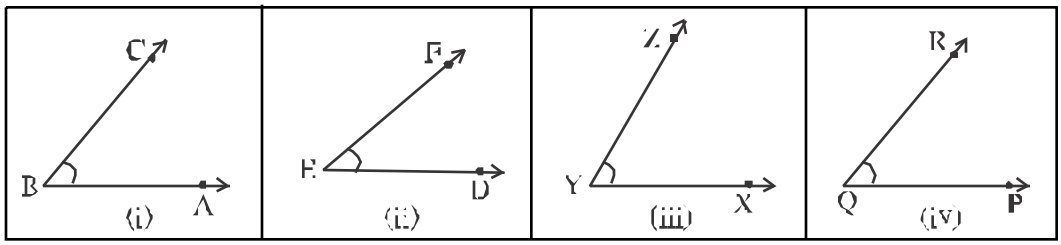
दोनों जोड़ों में एक रेखाखण्ड को ट्रेसिंग पेपर पर ट्रेस कर लीजिए तथा दूसरे पर रखकर देखिए कौन–सा जोड़ा सर्वांगसम है?

आप देखेंगे कि पहला जोड़ा सर्वांगसम है जबकि दूसरा नहीं। इनकी लम्बाई को नापिए। किस जोड़े की लम्बाई समान है? यही क्रियाकलाप कुछ और रेखाखण्ड के जोड़ों के साथ करके देखिए।

> यदि दो रेखाखंडों की लम्बाई समान है तो वे सर्वांगसम होंगे। उसी प्रकार यदि दो रेखाखंड सर्वांगसम हैं तो उनकी लम्बाइयाँ भी समान होंगी।

ऊपर चित्र 7.3 में $\overline{AB} = \overline{CD}$ एवं $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

7.2.2 कोणों की सर्वांगसमता



चित्र–7.4

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

चित्र 7.4 में चार कोणों को देखिए, ये विभिन्न नापों के हैं। (i) में बने कोण को ट्रेसिंग पेपर पर ट्रेस कीजिए तथा फिर अध्यारोपण विधि से उसे ट्रेस किये गये कोण से बारी-बारी (ii), (iii) एवं (iv) में बने कोणों को ढकने का प्रयास कीजिए। जैसे– दूसरे कोण को ढकने के लिए सबसे पहले बिन्दु A को D पर तथा $\overrightarrow{BA}$ को $\overrightarrow{ED}$ पर रखिए तथा बताइए क्या $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{EF}$ पर आता? इसी प्रकार अन्य दो कोणों (iii) व (iv) पर भी ढकने की कोशिश कीजिए। $\angle ABC$ ने $\angle PQR$ को पूरी तरह से ढक लिया। अर्थात $\angle ABC$ एवं $\angle PQR$ सर्वांगसम हैं। यहां हमने देखा कि $\angle ABC$, $\angle DEF$ तथा $\angle XYZ$ को नहीं ढक पाते यानि $\angle ABC$, $\angle DEF$ और $\angle XYZ$ के सर्वांगसम नहीं है। सर्वांगसम कोण $\angle ABC$ और $\angle PQR$ की माप भी समान है। इसे हम इस प्रकार भी लिख सकते हैं $\angle ABC \cong \angle PQR$।

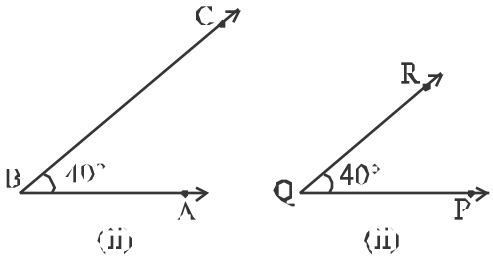
और $m\angle ABC = m\angle PQR$

हम कह सकते हैं कि दो कोणों की माप यदि समान हो तो वे आपस में सर्वांगसम होते हैं अथवा यदि दो कोण सर्वांगसम हो तो उनकी नाप समान होती है।

अब आप ऐसे कोणों का जोड़ा बना सकते हैं जिनके माप बराबर नहीं फिर भी वे सर्वांगसम हो।

अब हम चित्र–7.5 में बने कोणों पर विचार करें

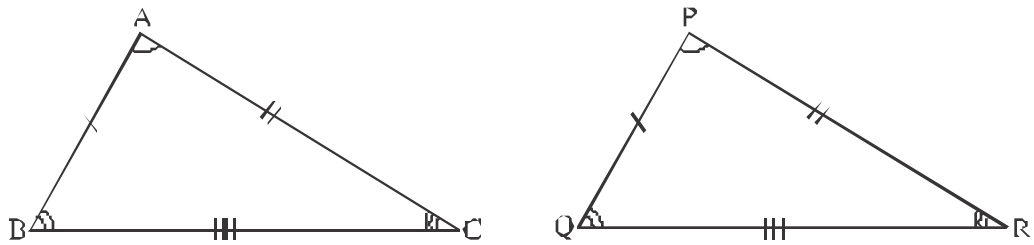
$\angle PQR$ का जब $\angle ABC$ पर अध्यारोपित करते हैं तब किरण $\overrightarrow{QP}$, किरण $\overrightarrow{BA}$ पर तथा किरण $\overrightarrow{QR}$, किरण $\overrightarrow{BC}$ पर पड़ती है, परन्तु किरण $\overrightarrow{QR}$, किरण $\overrightarrow{BC}$ को पूरी तरह नहीं ढक पाती है तथा किरण $\overrightarrow{BC}$ ज्यादा लम्बी प्रतीत होती है, इसके आधार पर हम कह सकते हैं कि $\angle ABC$, $\angle PQR$ से छोटा है। परन्तु $\overrightarrow{BC}$ केवल कोण की दिशा को बताती है, लम्बाई को नहीं। यहाँ कोणों की माप समान है अतः $\angle ABC$, $\angle PQR$ के सर्वांगसम है अर्थात् $\angle ABC = \angle PQR$। अतः कोणों की सर्वांगसमता केवल उनके नापों की समानता पर निर्भर करती है।



चित्र–7.5

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

7.2.3 त्रिभुजों की सर्वांगसमता



चित्र–7.5

चित्र–7.6 में बने दोनों त्रिभुज को ध्यान से देखिए। ये दोनों त्रिभुज समान आकार एवं समान आकृति के हैं। ΔABC को ट्रेसिंग पेपर पर ट्रेस कर ΔPQR पर अध्यारोपित कीजिए। क्या ΔABC तथा ΔPQR एक दूसरे को आपस में पूरी तरह ढक लेते हैं? यदि हाँ तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम है। इसे इस प्रकार लिखेंगे:

$\Delta ABC \cong \Delta PQR$

यहाँ ΔABC को ΔPQR पर अध्यारोपित करते समय आपने शीर्ष P के ऊपर शीर्ष A, शीर्ष Q के ऊपर शीर्ष B तथा शीर्ष R के ऊपर शीर्ष C को रखा था। जिससे $\angle P$ पर $\angle A$, $\angle Q$ पर $\angle B$, $\angle R$ पर $\angle C$ अध्यारोपित हुए तथा भुजा $\overline{PQ}$ पर भुजा $\overline{AB}$, भुजा $\overline{QR}$ पर भुजा $\overline{BC}$ तथा भुजा $\overline{RP}$ पर भुजा $\overline{CA}$ अध्यारोपित हो गई। ये सभी शीर्ष, कोण व भुजाएं दोनों त्रिभुजों के संगत भाग हैं इसे हम निम्न प्रकार दर्शाते हैं–

संगत शीर्ष A और P, B और Q, C और R

संगत कोण $\angle A$ और $\angle P$, $\angle B$ और $\angle Q$, $\angle C$ और $\angle R$

संगत भुजा $\overline{AB}$ और $\overline{PQ}$, $\overline{BC}$ और $\overline{QR}$, $\overline{CA}$ और $\overline{RP}$

यदि दो त्रिभुज सर्वांगसम हो तो उनके संगत भाग समान होते हैं।

7.2.4 दो वर्गों की सर्वांगसमता

चित्र–7.7

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

सभी वर्ग आकार में एक ही तरह के होते हैं। वर्गों की माप का निर्धारण उनकी भुजा की लम्बाई से होता है। अतः दो वर्ग आपस में एक दूसरे को पूरी तरह तभी ढक सकते जब दोनों की भुजाएं समान माप की होंगी। चित्र–7.7 में दोनों वर्गों की भुजाएं समान माप की है। अतएव दोनों सर्वांगसम हैं।

अतः दो वर्ग सर्वांगसम होंगे यदि उनकी भुजाएँ समान माप की हो।

7.2.5 दो आयतों की सर्वांगसमता

चित्र–7.8

आयत के आकार एवं माप का निर्धारण उसकी लम्बाई और चौड़ाई से होता है। यदि दो आयतों की लम्बाई एवं चौड़ाई बराबर हो तो वे एक दूसरे को पूरी से ढक लेंगे। यानि वे आकार एवं माप में भी समान होंगे। चित्र 7.8 में दोनों आयत की लम्बाई एवं चौड़ाई समान है व ये आकार एवं माप में भी समान हैं इसलिए ये एक दूसरे को पूरी तरह से ढक लेते हैं। अतः दोनों आयत सर्वांगसम है। इस प्रकार हम कह सकते हैं कि दो आयत तभी सर्वांगसम होंगे जब उनकी लम्बाई एवं चौड़ाई समान माप की हो।

अतः दो आयत सर्वांगसम होंगे यदि उनकी लम्बाई एवं चौड़ाई समान माप की हो।

7.2.6 दो वृत्तों की सर्वांगसमता

चित्र–7.9

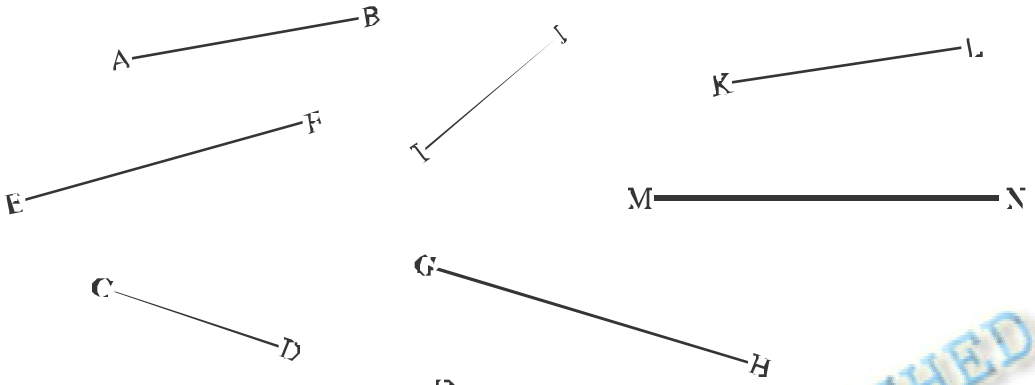
सभी वृत्त आकार में समान होते हैं। उनकी माप का निर्धारण त्रिज्या से होता है। जिस वृत्त की त्रिज्या जितनी ज्यादा होगी उसका माप भी उतना ही ज्यादा होगा। यहां चित्र 7.9 में दो समान त्रिज्या वाले वृत्त हैं। यदि पहले वृत्त को देख कर, दूसरे पर अध्यारोपित किया जाये तो दोनों एक दूसरे को पूरी तरह से ढक लेंगे। अतः दोनों वृत्त सर्वांगसम है।

nks or lokxlee gksx ;fn mudh f=T;k cjkcj gkA

WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

प्रश्नावली – 7.1

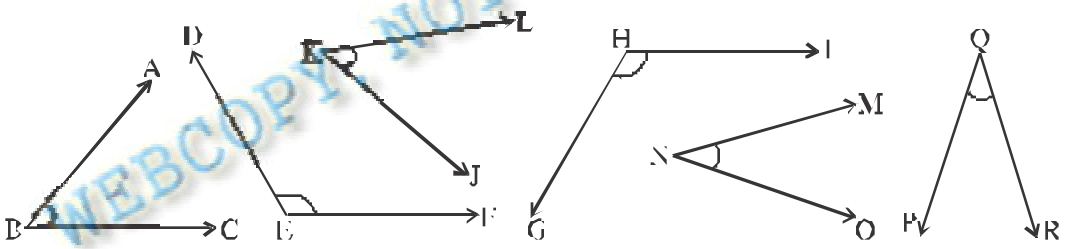
1. (i) **चित्र–7.10 में सर्वांगसम रेखा खंडों को छाँटिए। (आप ट्रेस करके देखें)**



चित्र–7.10

(ii) सर्वांगसम रेखाखण्डों को मापिए। **उनके माप के बारे में आप क्या** कह सकते हैं?

2. (i) **नीचे दिए गए चित्रों में सर्वांगसम कोणों को छाँटिए– (कोणों को ट्रेस कर पता करें)**



चित्र–7.11

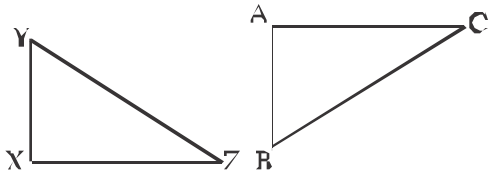
(ii) इनमें से सर्वांगसम कोणों को मापिए। आप उनके माप के बारे में क्या कह सकते हैं?

3. $\angle ABC$ और $\angle DEF$ सर्वांगसम हैं। यदि $\angle ABC$ की माप $70°$ हो तो $\angle DEF$ की माप क्या होगी?

© BSTBPC WEBCOPY NOT TO BE PUBLISHED

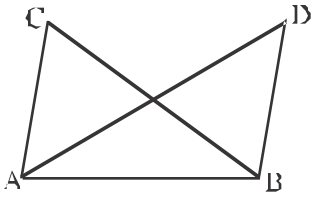
4. **नीचे दिए गए सर्वांगसम त्रिभुजों के प्रत्येक जोड़े में संगत भुजाएँ व संगत कोण बताइए।**

(i) $\Delta XYZ \cong \Delta ABC$



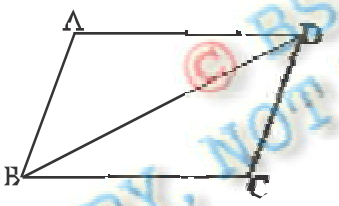
भुजा	कोण
$XY \leftrightarrow$	$\angle X \leftrightarrow$
$YZ \leftrightarrow$	$\angle Y \leftrightarrow$
$XZ \leftrightarrow$	$\angle Z \leftrightarrow$

(ii) $\Delta ABC \cong \Delta ABD$



$AB \leftrightarrow$	$\angle ABC \leftrightarrow$
$BC \leftrightarrow$	$\angle BCA \leftrightarrow$
$AC \leftrightarrow$	$\angle BAC \leftrightarrow$

(iii) $\Delta ABD \cong \Delta CDB$

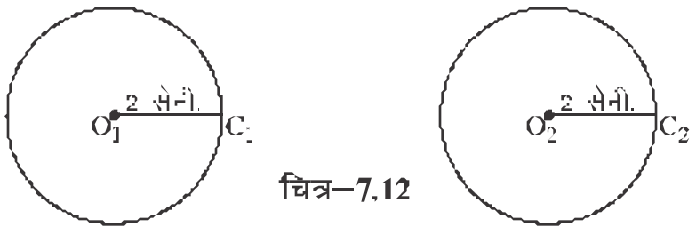


$AB \leftrightarrow$	$\angle ABD \leftrightarrow$
$BD \leftrightarrow$	$\angle BDA \leftrightarrow$
$AD \leftrightarrow$	$\angle DAB \leftrightarrow$

5. दो वर्ग जिनकी भुजाएँ समान है, क्या वे सर्वांगसम होंगे?

6. एक आयत की लम्बाई 10 सेमी. तथा चौड़ाई 8 सेमी. है तथा दूसरे आयत की लम्बाई 12 सेमी. तथा चौड़ाई 8 सेमी. है, दोनों आयतों को सर्वांगसम करने हेतु पहले आयत की लम्बाई को कितना बढ़ना होगा।

7. **चित्र–7.12 में बने दो वृत्त क्या सर्वांगसम होंगे, यदि हाँ तो क्यों?**



चित्र–7.12

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

7.3 दो त्रिभुजों के सर्वांगसम होने की शर्तें

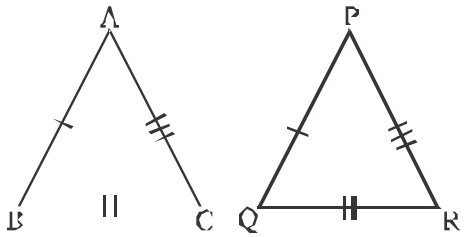
जब दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं तो उनके संगत भुजाएँ एवं संगत कोण आपस में बराबर होते हैं। उसी प्रकार दो त्रिभुजों के संगत भुजाएँ एवं संगत कोण आपस में बराबर हो, दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

चित्र–7.13 में दो त्रिभुज ABC एवं PQR दिये गये हैं जो सर्वांगसम है–

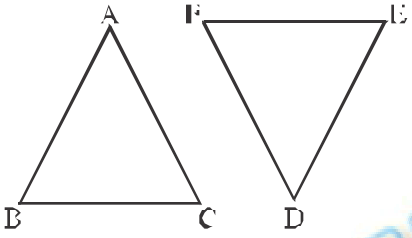
तब $\overline{AB} = \overline{PQ}$, $\overline{BC} = \overline{QR}$, $\overline{AC} = \overline{PR}$

तथा $\angle ABC = \angle PQR$, $\angle BCA = \angle QRP$

और $\angle CAB = \angle RPQ$ होगा।



चित्र–7.13



चित्र–7.14

उसी प्रकार चित्र–7.14 में $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\overline{BC} = \overline{EF}$, $\overline{CA} = \overline{FD}$, $\angle ABC = \angle DEF$, $\angle BCA = \angle EFD$ तथा $\angle BAB = \angle FDE$ है

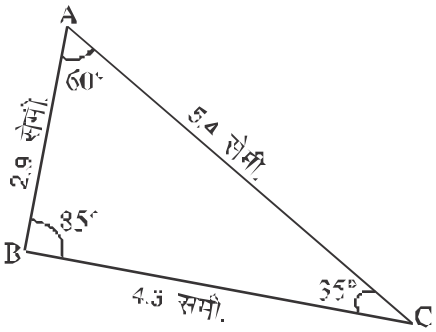
तब $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

इस प्रकार दो त्रिभुजों में सर्वांगसमता के लिए आवश्यक अवयवों में दोनों त्रिभुजों के तीनों कोण एवं तीनों भुजाएँ शामिल हैं।

सोचिए रेखाखंड, कोण, वर्ग, आयत एवं वृत्त के समान दो त्रिभुज की सर्वांगसमता दिखाने के लिए त्रिभुज के सभी 6 अवयवों में समानता देखनी होगी या कुछ अवयवों से काम चल जाएगा। आइये इसे करके देखें।

कुछ करें

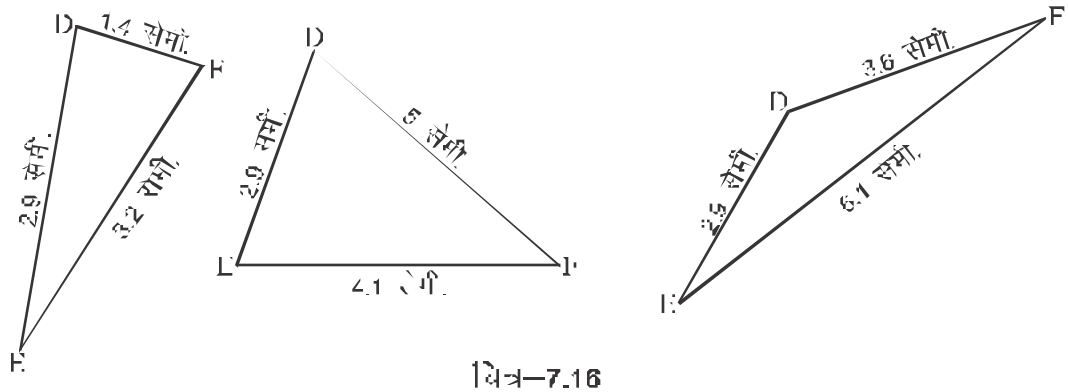
यहाँ चित्र–7.15 में एक त्रिभुज बनाया गया है तथा उसके सभी 6 अवयवों (तीन भुजाएँ, तीन कोण) के नाम के भी दर्शाया गया है। आप बारी–बारी से इनके नाम को लेकर देखें कि कम से कम कितने अवयवों की समानता के बाद उसके सर्वांगसम एक त्रिभुज बनाया जा सकता है।



चित्र–7.15

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

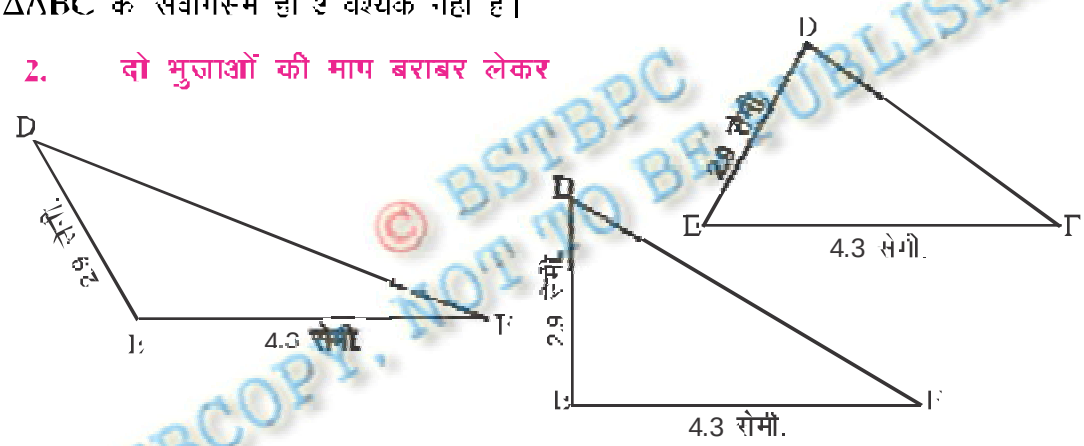
1. एक भुजा की माप बराबर लेकर



चित्र–7.16

चित्र–7.16 की तरह कई प्रकार के त्रिभुज बनाये जा सकते हैं जो चित्र 7.15 में बने ΔABC के सर्वांगसम हो आवश्यक नहीं है।

2. दो भुजाओं की माप बराबर लेकर

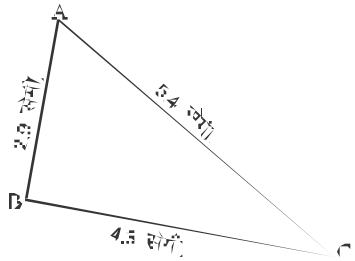


चित्र–7.17

यहाँ भी कई प्रकार के त्रिभुज बनाये जा सकते हैं जो चित्र 7.15 मे बने ΔABC के सर्वांगसम हों आवश्यक नहीं है।

3. तीनों भुजाएं बराबर लेकर

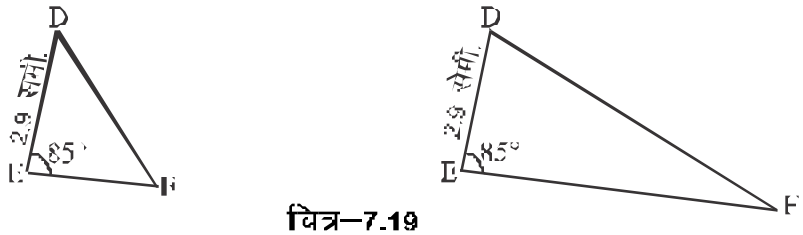
चित्र–7.18 में इस प्रकार का केवल एक ही त्रिभुज बनाया जा सकता है जो आकार एवं माप में चित्र 7.15 में बने ΔABC के बराबर होगा। अतः यह सर्वांगसम त्रिभुज होगा। यह भुजा–भुजा–भुजा (SSS) प्रतिबंध कहलाता है।



चित्र–7.18

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

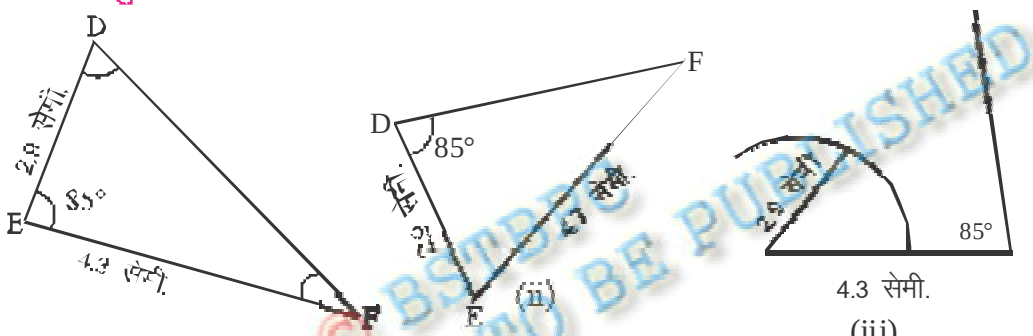
4. एक भुजा एवं एक कोण की माप बराबर लेकर



चित्र–7.19

इस स्थिति में भी कई त्रिभुज बनाये जा सकते हैं जो ABC के सर्वांगसम हों यह आवश्यक नहीं।

5. दो भुजाएँ एवं एक कोण बराबर लेकर



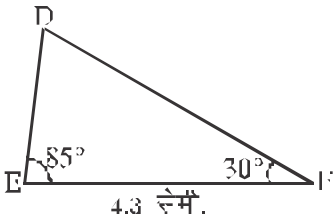
चित्र–7.20

त्रिभुज नहीं बन सका।

यदि दो भुजा और कोई एक कोण बराबर लेते हैं तब जरूरी नहीं है कि बनने वाला त्रिभुज सर्वांगसम हो ही। परन्तु जब दो भुजा एवं उनके बीच बनने वाला कोण बराबर लेते हैं तब बनने वाला त्रिभुज सर्वांगसम होता है, जैसा चित्र–7.20 के (i) में बनाया गया है जो चित्र 7.15 में बने ΔABC के बराबर है यह भुजा–कोण–भुजा प्रतिबंध कहलाता है।

6. एक भुजा एवं दो कोण बराबर हो

इसके अनुसार जितने भी त्रिभुज बनेंगे उन सबका आकार एवं माप चित्र–7.21 में बने त्रिभुज की तरह ही होगा और इस प्रकार बना त्रिभुज ΔABC के सर्वांगसम होगा। यह कोण–भुजा–कोण (ASA) प्रतिबंध कहलाता है।

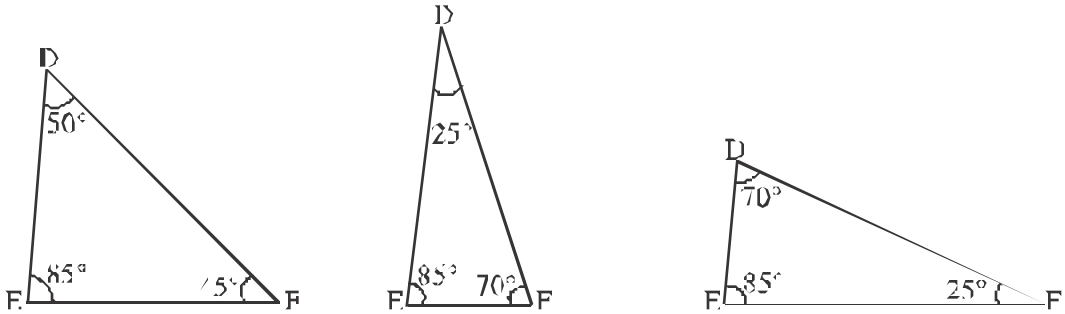


चित्र–7.21

© BSTBPC WEBCOPY NOT TO BE PUBLISHED

www.absol.in

7. एक कोण की माप बराबर रखकर

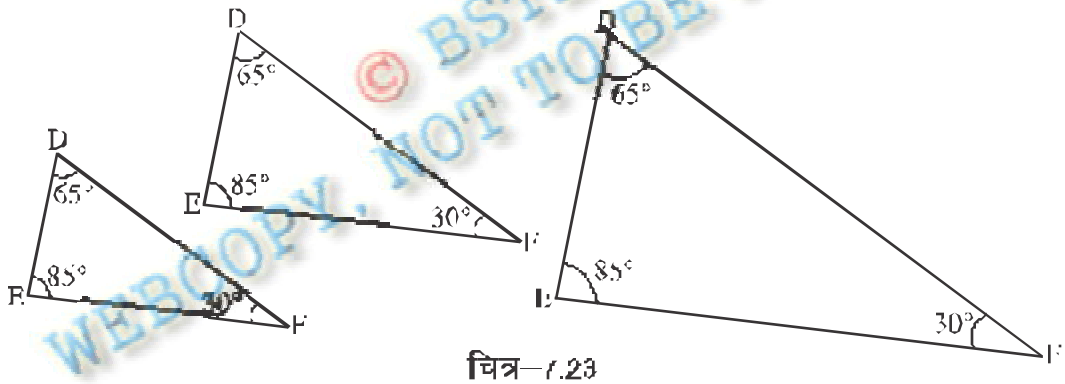


चित्र–7.22

यहां भी कई प्रकार के त्रिभुज बनाए जा सकते हैं जो चित्र 7.15 में बने ΔABC के सर्वांगसम नहीं है।

8. दो कोणों की माप बराबर रखकर

चूंकि हम जानते हैं कि दो त्रिभुजों में दो कोण परस्पर बराबर रखने पर तीसरा अपने आप बराबर हो जाता है। इसलिए दो कोण की माप बराबर रखने का अर्थ अपने आप तीन कोणों की माप बराबर रखना हो जाता है।



चित्र–7.23

यहां भी कई प्रकार के त्रिभुज बनाये जा सकते हैं जो आकृति में दिए ΔABC के समान हैं परन्तु आकार में समान नहीं है। अतः वे सर्वांगसम नहीं है।

9. समकोण त्रिभुजों में सर्वांगसमता

दो समकोण त्रिभुजों की स्थिति में सर्वांगसमता को न्यायोचित विशेष ध्यान देना होता है। ऐसे त्रिभुजों में, समकोण पहले से ही बराबर होते हैं। अतः सर्वांगसमता प्रतिबंध आसान हो जाता है।

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

क्या आप एक ΔABC बना सकते हैं जिसमें $\angle B = 90^\circ$ हो (चित्र–7.24 में दिखाया गया) यदि:

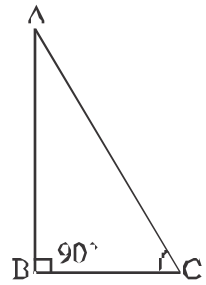
(i) केवल भुजा BC ज्ञात हो?

(ii) केवल $\angle C$ ज्ञात हो?

(iii) $\angle A$ और $\angle C$ ज्ञात हो?

(iv) भुजा AB और BC ज्ञात हो?

(v) कर्ण AC और AB या BC में से एक भुजा ज्ञात हो?



चित्र–7.24

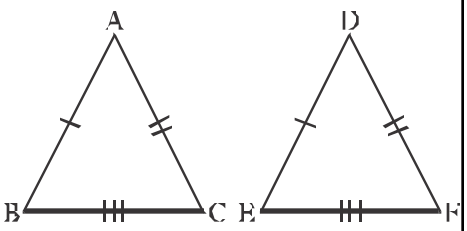
इनकी आकृतियाँ बनाने का प्रयास कीजिए। आप देखेंगे कि (iv) और (v) त्रिभुज बनाने में आपकी सहायता करते हैं। परंतु स्थिति (iv) में वास्तवमें SAS प्रतिबंध ही है। स्थिति (v) कुछ नया है। यह निम्न प्रतिबंध की ओर अग्रसर करता है।

RHS सर्वांगसमता प्रतिबंध

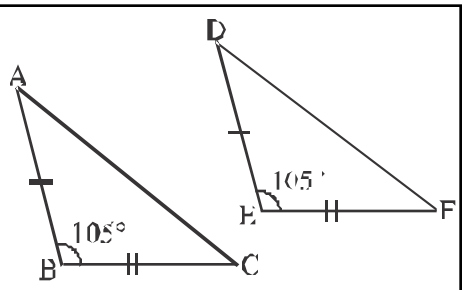
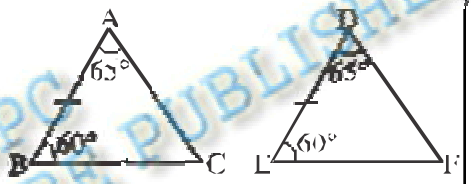
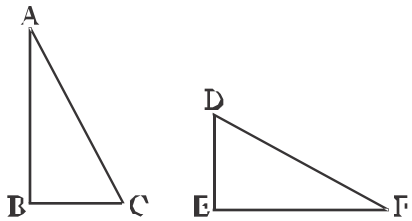
यदि एक समेलन के अंतर्गत, किसी समकोण त्रिभुज का कर्ण और एक भुजा क्रमशः किसी दूसरे समकोण त्रिभुज के कर्ण और एक भुजा के बराबर हो, तो वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

हम इसे RHS सर्वांगसमता क्यों कहते हैं? इसके बारे में सोचिए।

ऊपर की नौ गतिविधियों के आधार पर हम दो त्रिभुजों के सर्वांगसम होने के प्रतिबंधों को हम निम्नवत तरीके से सारणीबद्ध कर सकते हैं।

क्र. सं.	दो त्रिभुजों के सर्वांगसम होने का प्रतिबंध	प्रतिबंध की शर्त	प्रतिबंध का उदाहरण
1.	भुजा–भुजा–भुजा (SSS) प्रतिबंध	यदि एक त्रिभुज की तीनों भुजाएं दूसरे त्रिभुज की तीनों भुजाओं की माप के बराबर हो तब दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होंगे।	 $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\overline{BC} = \overline{EF}$, $\overline{AC} = \overline{DF}$ तब $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

BEING REPUBLISHED WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

2.	भुजा–कोण–भुजा (SAS) प्रतिबंध	यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएँ तथा उनके अन्तर्गत बने कोण, दूसरे त्रिभुज की दो भुजाएँ तथा उनके अन्तर्गत बने कोण के बराबर हो तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होंगे।	 $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\overline{BC} = \overline{EF}$ $\angle B = \angle E$ तथा $\Delta ABC \cong \Delta DEF$
3.	कोण–भुजा–कोण (ASA) प्रतिबंध	यदि एक त्रिभुज के दो कोण एवं संगत भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोण एवं संगत भुजा के बराबर हो तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होंगे।	 $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\overline{AB} = \overline{DE}$ तथा $\Delta ABC \cong \Delta DEF$
4.	समकोण–कर्ण–भुजा (RHS) प्रतिबंध	दो समकोण त्रिभुजों में से एक त्रिभुज का कर्ण एवं एक भुजा, दूसरे त्रिभुज के कर्ण एवं कोई एक अन्य भुजा के बराबर हो तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होंगे।	 $\angle B = \angle E = 90°$ $\overline{AC} = \overline{DF}$, $\overline{BC} = \overline{EF}$ $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED © BSTBPC

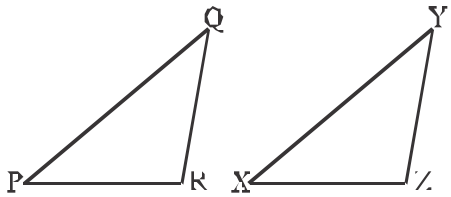
प्रश्नावली—7.2

1. निम्न में आप कौन से सर्वांगसम प्रतिबंधों का प्रयोग करेंगे?

(i) दिया है

PQ = XY, QR = YZ, PR = XZ

इसलिए Δ ☒☒☒ ≅ Δ ☒☒☒

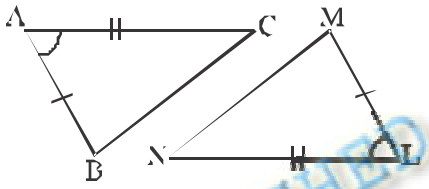


(ii) दिया है

AB = LM, AC = NL

$\angle BAC = \angle MLN$

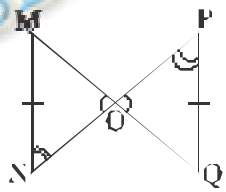
इसलिए $\Delta ABC \cong \Delta LMN$



(iii) MN = PQ

$\angle MON = \angle POQ$

$\angle ONM = \angle OPQ$

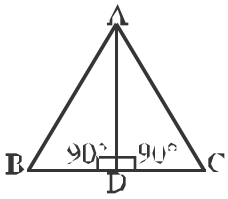


(iv) $\angle ADB = \angle ADC = 90°$

AD = AD

AB = AC

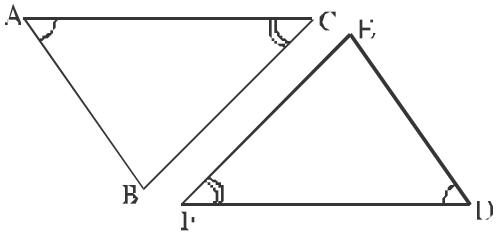
इसलिए $\Delta ABD \cong \Delta ACD$



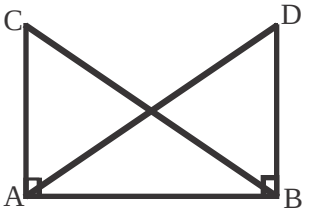
© BSTBPC
WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

2. चित्र में बने दो त्रिभुज ΔABC और ΔDEF आपस में सर्वांगसमता दर्शाते है, तो निम्न चरणों के लिए रिक्त स्थान में कारण भरिए।

	क्रम	कारण
(i)	AC = FD	
(ii)	$\angle BAC = \angle FDE$	
(iii)	$\angle ACB = \angle EFD$	



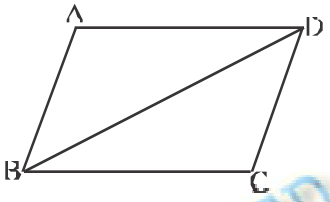
3. दिए गए चित्र में एक आधार AB पर बने दो त्रिभुज ABC तथा ADB में भुजा AC=BD, BC=AD तब बताइए कौन-से कथन सत्य हैं।



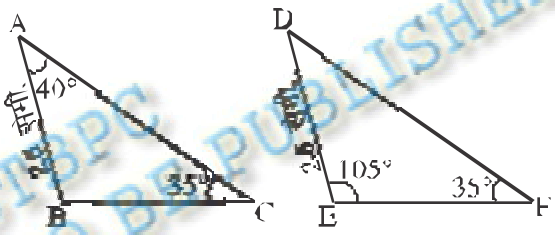
(i) $\Delta ABC \simeq \Delta ABD$ (ii) $\Delta ABC \simeq \Delta ADB$

(iii) $\Delta ABC \cong \Delta BAD$

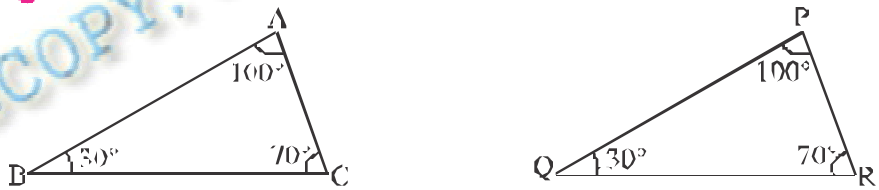
4. दिए गए चित्र में दिखाइए कि क्या $\Delta ABD \cong \Delta BDC$ (आप भुजाओं को माप सकते हैं)



5. दिए गए चित्र में ΔABC में $\angle A=10°$, $\angle C=35°$ तथा भुजा AB = 2.5 सेमी. है, तथा ΔDEF में $\angle E=35°$, $\angle F=105°$ एवं भुजा DE = 2.5 सेमी. तो बताइए क्या $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

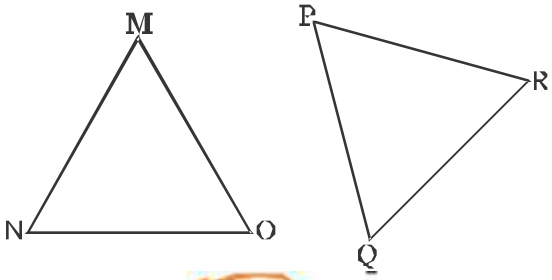


6. (i) भुजाओं को मापकर लिखिए–



(ii) नीचे दिए गए समान माप की भुजाओं वाले त्रिभुजों के कोणों को मापिए।

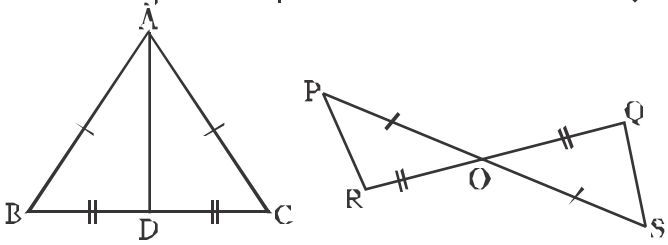
आप भी इसी प्रकार एक ही माप व संगत कोण वाले त्रिभुज अपनी कॉपी में बनाइए व बताइए कि दोनों में से कौन से त्रिभुज सदैव सर्वांगसम प्राप्त होते हैं?



WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED
© BSTBPC

www.absol.in

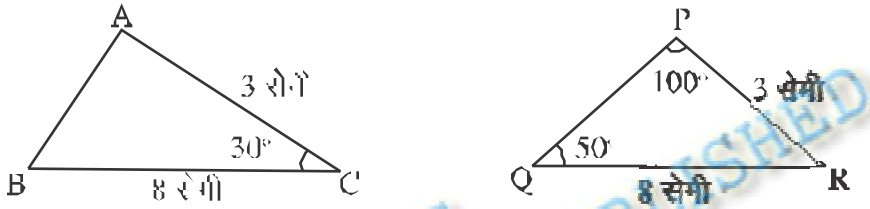
7. नीचे दी गई आकृतियों में सर्वांगसम त्रिभुजों के जोड़े पहचानकर लिखो। उनमें से एक त्रिभुज की भुजाएँ तथा कोण तथा उनके संगत भुजाएँ व कोण सर्वांगसम त्रिभुज में से छाँटकर लिखो।



(i) (ii)

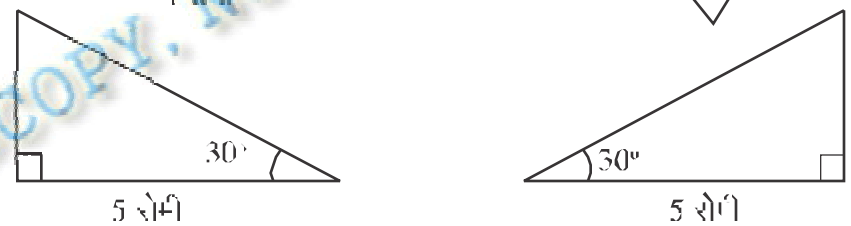
8. नीचे कुछ सर्वांगसम त्रिभुजों के जोड़े दिए गए हैं। ये किस नियम से सर्वांगसम है, लिखो।

(i)



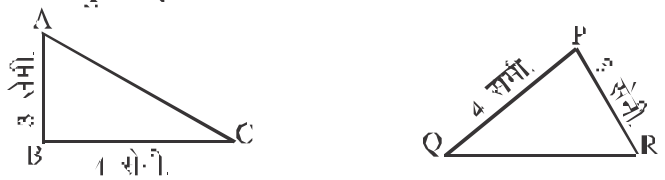
(ii)

(iii)



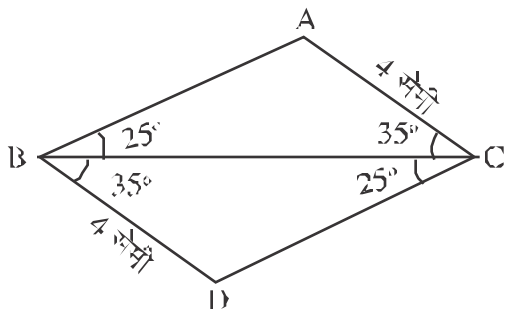
© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

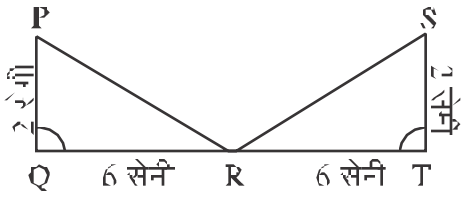
9. नीचे दो त्रिभुज दिए गए हैं, देखकर बताओ क्या ये सर्वांगसम हैं? हाँ/नहीं। अपने उत्तर का कारण भी दो। (दोनों त्रिभुजों की सभी भुजाएँ व कोण नापो।) इससे तुम किस निष्कर्ष पर पहुँचते हो?



10. नीचे दिए गए प्रत्येक चित्र में त्रिभुजों के सर्वांगसम होने की जाँच करो और उनके सर्वांगसम होने या न होने का कारण भी लिखो।

(i) क्या $\Delta BAC \cong \Delta CDB$? (ii) क्या $\Delta RPQ \cong \Delta RST$?





हमने सीखा

1. दो आकृतियाँ जब आकार एवं नाप में समान हों तो वे सर्वांगसम होती हैं।
2. दो समान लम्बाई के रेखाखंड आपस में सर्वांगसम होंगे।
3. दो कोण सर्वांगसम होंगे यदि वे समान माप के हों।
4. दो वृत्त सर्वांगसम होते हैं, यदि उनकी मुक्त ई समान लम्बाई की हों।
5. दो आयत सर्वांगसम होते हैं यदि लम्बाई एवं चौड़ाई के परा में बराबर हो।
6. दो वृत्त सर्वांगसम होते हैं यदि उनकी त्रिज्या समान नाप की हो।
7. दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं, यदि
   (i) उनकी तीनों भुजाएँ आपस में बराबर हों। (SSS)
   (ii) यदि दो भुजाएँ एवं बीच का कोण दूसरे त्रिभुज की तदनुरूपी दो भुजाएँ एवं उनके अन्तर्गत कोण के बराबर हों। (SAS)
   (iii) यदि दो कोण एवं अन्तर्गत भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोण एवं अन्तर्गत भुजा के बराबर हो। (ASA)
   (iv) दो समकोण त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं यदि एक त्रिभुज का कर्ण और एक भुजा दूसरे त्रिभुज के कर्ण एवं एक भुजा के बराबर हो। (RHS)

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

अध्याय-8 घातांक

8.1 भूमिका

आप सभी जानते हैं कि शतरंज के खेल का आविष्कार भारत में हुआ था। इससे जुड़ी एक मज़ेदार कहानी इस प्रकार है– जब वहाँ के राजा को पता चला कि बुद्धिमत्तापूर्ण इस खेल का आविष्कार उन्हीं के राज्य का एक विद्वान है, तो आविष्कारक को बुलाकर राजा ने कहा– "मैं तुम्हारे द्वारा अनूठे आविष्कार के लिए तुम्हें पुरस्कार देना चाहता हूँ।" यह सुनकर विद्वान ने अपना सिर झुका दिया।

राजा ने कहा– मेरा पास पर्याप्त धन है। मैं तुम्हारी कोई भी इच्छा पूरी कर सकता हूँ। मांगो जो तुम्हारी इच्छा हो, डरो मत।

विद्वान ने कहा– राजन्, आपकी उदारता महान है। आप मुझे शतरंज के पहले घर (खाने) के लिए गेहूँ का एक दाना दिलाने की आज्ञा दें। दूसरे घर के लिए 2 दाने दिलाने को, तीसरे घर के लिए 4, चौथे घर के लिए 8, पाँचवें घर के लिए 16, छठवें घर के लिए 32.....

बस करो...., राजा ने क्रोधित होकर बीच में रोक दिया।

तुम्हें शतरंज के पूरे 64 घरों के लिए दाने मिल जायेंगे। हर घर में दानों की संख्या पिछले घर से दुगुनी होनी चाहिए, यही तुम्हारी शर्त है ना, परन्तु यह जान लो कि इतने छोटे ईनाम माँगकर तुम मेरी उदारता का अपमान कर रहे हो।

क्या आप बता सकते हैं कि चौसठवें खाने में राजा को गेहूँ के कितने दाने देने पड़ेंगे?

गणना बहुत बड़ी होती जा रही है लेकिन गौरतलब बात यह है कि यहाँ 2 का 2 के साथ बार–बार गुणा करना पड़ रहा है, जैसे–

पहले घर में दाना	:	1
दूसरे घर में दाने	:	2
तीसरे घर में दाने	:	2×2

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

www.absol.in

चौथे घर में दाने	:	$2 \times 2 \times 2$
पाँचवें घर में दाने	:	$2 \times 2 \times 2 \times 2$
छठवें घर में दाने	:	$2 \times 2 \times$ ..... 5 बार
.....	:	.....
.....	:	.....

इसी प्रकार,

चौंसठवें घर में दाने	:	$2 \times 2 \times$ ..... 63 बार

निश्चित ही यह संख्या बहुत बड़ी होगी, पर क्या आप कहानी के अंत को जानना नहीं चाहेंगे? क्या राजा आविष्कारक को यह ईनाम दे सका?

आविष्कारक को 9223372036854775809 दाने गेहूँ के देने पड़ेंगे और पूरी पृथ्वी की जमीन पर अगर गेहूँ की खेती की जाए तब भी इतनी गेहूँ नहीं मिलेगी। अब आप ही सोचिए यह है ना एक बहुत बड़ी संख्या?

$2 \times 2 \times$ ..... 63 बार करने पर कितनी बड़ी संख्या प्राप्त होगी? क्या क्या किसी संख्या में उसी संख्या से बार–बार गुणा करने की प्रक्रिया को लिखने का कोई और तरीका नहीं है?

8.2 घातांक या घात (Exponent or Power)

कक्षा के सभी विद्यार्थी यही सोच रहे थे कि किसी राशि का उसी राशि के साथ गुणा करने की प्रक्रिया का प्रयोग गणित में और क्यों किया गया है?

तभी रशीदा ने हेमांशु से कहा– "हम क्षेत्रफल निकालने में लंबाई को सेमी × सेमी सेमी² लिखते हैं। इसी प्रकार आयतन निकालते समय भी लंबाई को सेमी × सेमी × सेमी – सेमी³ लिखते हैं। क्या इसी प्रकार $2 \times 2 \times 2$ को 2^3 नहीं लिखा जा सकता?

रशीदा ने किसी राशि को उसी राशि से बार–बार गुणा करने को संक्षेप में लिखने का ठीक तरीका सुझाया। क्या आप $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$ को संक्षेप में लिख सकते हैं?

जिस प्रकार $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^6$ है।

उसी प्रकार $a \times a \times a \times a \times a \times a = a^6$

तथा $x \times x \times x \times x = x^4$ होता है।

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

आप भी किसी राशि का उसी राशि के साथ बार–बार गुणा को संक्षेप में लिखिए:

(i) $x \times x \times x \times x \times x \times x \times x \times x \times x$ = ...

(ii) $r \times r \times r \times r \times r$ = ...

(iii) $17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17$ = ...

(iv) $101 \times 101 \times 101 \times 101 \times 101$ = ...

किसी संख्या का उसी संख्या के साथ बार–बार गुणा करने को आप संक्षेप में लिखना सीख चुके हैं। इस संक्षिप्त रूप को हम घातीय संकेतन भी कहते हैं। आइए, देखें कि इन्हें किस तरह से पढ़ा जाता है–

यहाँ 10^3 में '10' आधार (Base) और '3' घातांक (Exponent or Index) कहलाता है।

10^3 इसे 10 के ऊपर घात 3 पढ़ा जाता है। अथवा "10 की तीसरी घात" भी कहते हैं। 10^3 के 1000 का घातांकीय रूप (Exponemntial Form) कहा जाता है। अर्थात 1000 को घातांकों का प्रयोग करके संक्षिप्त रूप (10^3) में लिख सकते हैं।

कुछ घातों के विशेष नाम भी हैं।

जैसे – 5^2 जो 5 के ऊपर घात 2 है, इसे 5 का वर्ग (5 Squared) भी पढ़ा जाता है।

5^3 जो 5 के ऊपर घात 3 है, इसे 5 का घन (5 Cubed) भी पढ़ा जाता है।

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

स्वयं करके देखिए

नीचे लिखे व्यंजकों के आधार एवं घात को उनके सामने दिए गए स्थानों में लिखिए:

5^3 में आधार – 3 और घात – 5

7^4 में आधार – ..... और घात – .....

x^5 में आधार – ..... और घात – .....

p^4 में आधार – ..... और घात – .....

x^2 में आधार – ..... और घात – .....

अब आप समझ चुके होंगे कि घातीय रूप में लिखने का वास्तविक उद्देश्य किसी बहुत बड़े राशि को संक्षिप्त रूप में लिखना है।

जैसे सूर्य से पृथ्वी की दूरी 150000000 किलोमीटर है जो एक बहुत बड़ी राशि है इसे निम्न प्रकार से लिख सकते हैं:

150000000 कि.मी. = $15 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 15 \times 10^7$ कि.मी.

विस्तृत रूप को संक्षिप्त रूप में लिखना तो आप सीख चुके हैं। कुछ घातीय रूप को विस्तृत रूप में लिखिए:

1. $a^5 = a \times a \times a \times a \times a$
2. $3^6 =$
3. $5^5 =$
4. $r^7 =$
5. $2^m =$

रहीम को यह समझ में नहीं आ रहा था कि वह 2^m को विस्तृत रूप में कैसे लिखें क्योंकि m का कोई निश्चित मान नहीं है। क्या आपके पास रहीम की समस्या का जवाब है?

पहले भी आपने देखा है कि शतरंज के 64 वें खाने में राजा को $2 \times 2 \times 2 \times ....63$ बार अर्थात् 2^{63} दाने गेहूँ के देने थे।

उसी प्रकार,

$2^m = 2 \times 2 \times 2 \times .....$ m बार लिख सकते हैं।

इसी प्रकार हम x^n और y^n को निम्न प्रकार से लिख सकते हैं–

$x^n = x \times x \times x \times .....$n बार, और

$y^n = y \times y \times .....$n बार लिख सकते हैं।

किसी संख्या का घातांकीय रूप उसके अभाज्य गुणनखण्डों की घातों के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। उदाहरण में : 1000 = 2×2×2×5×5×5 (अभाज्य गुणनखण्ड) = $2^3 \times 5^3$ (अभाज्य गुणनखण्डों की घातों के गुणनफल वाला रूप)

उदाहरण–1. 64 को 2 की घात के रूप में लिखें।

हल : 64 = 2×2×2×2×2×2

अतः हम कह सकते हैं कि $64 = 2^6$

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

उदाहरण–2. 8^2 और 2^8 में कौन बड़ा है?

हल : $8^2 = 8 \times 8 = 64$

$2^8 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 256$ है। स्पष्ट : $2^8 > 8^2$

उदाहरण–3. (1^5) का मान ज्ञात कीजिए।

$(1^5) = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$ (वास्तव में, 1 की कोई भी घात 1 के बराबर होती है।)

उदाहरण–4. निम्नलिखित संख्याओं को अभाज्य गुणनखंडों की घातों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए–

(i) 144 (ii) 216

(i) 144
$= 72 \times 2$
$= 36 \times 2 \times 2$
$= 18 \times 2 \times 2 \times 2$
$= 9 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
$= 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
$= 3^2 \times 2^4$ (वांछित रूप)

(ii) 216
$= 108 \times 2$
$= 54 \times 2 \times 2$
$= 27 \times 2 \times 2 \times 2$
$= 9 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2$
$= 3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2$
$= 3^3 \times 2^3$ (वांछित रूप)

आधार ऋणात्मक पूर्णांक भी हो सकता है –

जैसे– $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$ है।

$(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = 16$ है।

स्पष्ट है आधार ऋणात्मक पूर्णांक होने पर, जब घात विषम संख्या हो तो मान ऋणात्मक प्राप्त होता है। तथा जब घात सम संख्या हो तो मान धनात्मक प्राप्त संख्या होती है।

उदाहरण–5. निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए।

(i) $(-1)^5$ (ii) (-1) (iii) (-10) (iv) $(-5)^3$

हल : (i) $(-1)^5 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = -1$

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

(ii) $(-1)^4 = (-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1) = 1$

(iii) $(-10)^4 = (-10)\times(-10)\times(-10)\times(-10) = 100\times(-10)\times(-10) = 100\times 100 = 10000$

(iv) $(-5)^3 = (-5)\times(-5)\times(-5) = 25\times(-5) = -125$

प्रश्नावली—8.1

1. निम्नलिखित को घातांकीय रूप में व्यक्त कीजिए—

(i) $5\times5\times5\times5$ (ii) $c\times c\times c$ (iii) $2\times2\times3\times3\times3$

(iv) $6\times6\times b\times b$ (v) $a\times a\times b\times b\times b\times b\times d$

2. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए—

(i) 3^4 (ii) 6^4 (iii) 9^3 (iv) 5^4 (v) 4^4

3. निम्नलिखित संख्याओं में से प्रत्येक को घातांकीय संकेतन (रूप) में व्यक्त कीजिए—

(i) 343 (ii) 512 (iii) 729 (iv) 3125

4. निम्नलिखित में से प्रत्येक में कौन बड़ा है—

(i) 4^3 या 3 (ii) 2^5 या 5^2 (iii) 2^4 या 8^2 (iv) 100^2 या 2^{100}

5. निम्नलिखित में से प्रत्येक को उनके अभाज्य गुणनखंडों की घातों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) 1200 (ii) 720 (iii) 1080 (iv) 2250 (iv) 3600

6. सरल कीजिए—

(i) 3×10^2 (ii) $7^2\times3^3$ (iii) $(-1)^3\times7^2$

(iv) 0×10^2 (v) $3^4\times2^3$ (vi) $3^2\times10^4$

7. सरल कीजिए—

(i) $(-3)^3$ (ii) $(-1)\times(-2)^3$ (iii) $(-4)^2\times(-3)^2$

(iv) $(-2)^3\times(-10)^4$ (v) $(-5)^2\times(2)^7$

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

8. निम्न संख्याओं की तुलना कीजिए–

(i) 5×10^{7} ; 4×10^{7} (ii) 2.6×10^{12}; 9.6×10^{8}

(iii) 2.7×10^{-1} ; 3.0×10^{15} (vi) 7.0008×10^{15} ; 2.009×10^{20}

9. निम्नलिखित को घातांकीय रूप में लिखिए–

(i) $\frac{8}{729}$ (ii) $\frac{81}{343}$ (iii) $\frac{243}{1024}$

8.3 घातांकों के नियम

8.3.1 एक ही आधार वाली घातों का गुणन

आप जानते हैं कि $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ होता है। इसमें 2 के गुणकों को अलग–अलग समूह बनाकर कई प्रकार से लिख सकते हैं। जैसे:–

$2^5 = 2 \times (2 \times 2 \times 2 \times 2) = 2^1 \times 2^4$

$2^5 = (2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) = 2^2 \times 2^3$

$2^5 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2) = 2^3 \times 2^2$

$2^5 = (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times 2 = 2^4 \times 2^1$

यहाँ 2^5 को 2 के आधार वाले व्यंजकों में कई प्रकार से लिखा गया है। आप भी नीचे दिए गए घातीय व्यंजकों को समान आधार वाले दो व्यंजकों के गुणांक के रूप में लिखिए और घातों का योगफल प्राप्त कीजिए–

क्र.	घातीय व्यंजक	विस्तृत रूप में लिखकर दो समूहों में बाँटना (समूह अपनी इच्छा से बनाइए)	प्रत्येक समूह को घातीय व्यंजक के रूप में लिखिए	घातों का योगफल
1.	a^7	$\underline{a \times a \times a \times a} \times \underline{a \times a \times a}$	$a^4 \times a^3$	$4 + 3 = 7$
2.	x^5			
3.	y^{10}			
4.	27^7			
5.	7^{12}			

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

ऊपर घातीय व्यंजकों के विस्तारित रूप को देखिए तथा नीचे दिए हुए रिक्त स्थानों को भरिए—

$a^7 = a^3 \times \boxed{a^4}$ $\quad x^5 = x^4 \times \boxed{}$ $\quad y^{10} = y \times \boxed{}$

$27^7 = 27^4 \times \boxed{}$ $\quad 7^{12} = 7^8 \times \boxed{}$

क्या दो समान आधार वाली राशियों का गुणा करने पर उन राशियों के घातों का गुणनफल वाली राशि के घात से कोई सम्बन्ध है?

आइए देखें कि समान आधार वाली घातीय व्यंजकों का गुणा कैसे होता है—

$x^4 \times x^4 = x \times x \times x \times x \times x \times x \times x \times x = x^8 = x^{4+4}$

$x^5 \times x^3 = x \times x \times x \times x \times x \times x \times x \times x = x^8 = x^{5+3}$

$y^{19} \times y^{21} =$ (y × y × ..... 19 बार) × (y × y × ..... 21 बार)

क्या आप बता सकते हैं कि ऊपर y का y के साथ कितनी बार गुणा होगा? गुणनफल में y का क्या होगा?

y का y के साथ 19 + 21 = 40 बार गुणा हो रहा है।

अतः गुणनफल y^{40} होगा।

अतः हम कह सकते हैं कि "जब दो समान आधार वाले घातीय राशियों का गुणा होता है, तो गुणनफल में आधार वही रहता है तथा घातों को परस्पर में जोड़ा जाता है।"

जैसे—

$3^{10} \times 3^{15} = 3^{(10+15)} = 3^{25}$

क्या आप $x^m \times x^n$ का गुणनफल बता सकते हैं?

$x^m \times x^n = x \times x$.....m बार और n बार अर्थात् (m–n) बार गुणा हो रहा है।

अतः $\boxed{x^m \times x^n = x^{m+n}}$ (नियम–1)

स्वयं करके देखिए

(i) $3^3 \times 3^4 = 3^{\square}$ $\quad$ (ii) $(-12)^2 \times (-12)^6 = -12^{\square}$

© BSTBPC WEBCOPY NOT TO BE PUBLISHED

(iii) $h^2 \times h^3 = h^{\square}$ (iv) $c^{10} \times c^{20} = c^{\square}$

(v) $p^4 \times p^2 = p^{\square}$ (iv) $a^4 \times a^2 \times a^7 = a^{\square}$

8.3.2 एक ही आधार वाली घातों का विभाजन

फातिमा ने मोनू से पूछा, समान आधार वाली घातीय राशियों को गुणा करना तो हमने सीख लिया, समान आधार वाली घातीय राशियों का भाग कैसे करेंगे?

मोनू ने कहा, चलो करके देखते हैं।

$$\frac{2^5}{2^3} = \frac{2\times2\times2\times2\times2}{2\times2\times2} = 2\times2 = 2^2$$

रीना और जगदीश ने भी इसी प्रकार के सवाल हल किए:–

(i) $$\frac{3^5}{3^2} = \frac{3\times3\times3\times3\times3}{3\times3} = 3\times3\times3 = 3^3$$

(ii) $$\frac{7^9}{7^6} = \frac{7\times7\times7\times7\times7\times7\times7\times7\times7}{7\times7\times7\times7\times7\times7} = 7\times7\times7 = 7^3$$

फातिमा ने सारे हलों को देखकर साथियों से कहा कि जिस तरह दो समान आधार वाली घातीय राशियों का गुणा करने पर घातें जुड़ते हैं उसी प्रकार दो समान आधार वाली घातीय राशियों में भाग किया करने पर अंश के घातांक में से हर का घातांक घटा देते हैं।

जैसे– $2^5 \div 2^3$ के भागफल का घात $7 - 5 = 2$ होता है, $3^5 \div 3^2$ के भागफल का घात $5 - 2 = 3$ एवं $7^9 \div 7^6$ के भागफल का घात $9 - 6 = 3$ है। अर्थात्

$a^m \div a^n$ के भागफल का घात $m - n$ होगा।

अर्थात् $\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$ (नियम–2)

तभी मोनू ने कहा "यह तो ठीक है पर यदि अंश और हर की घातीय संख्याएं समान हों तो क्या होगा? चलो हल करके देखें, जैसे:–

$$\frac{7^5}{7^5} = 7^{5-5} = 7^0 \qquad \text{परन्तु } \frac{7^5}{7^5} = \frac{7\times7\times7\times7\times7}{7\times7\times7\times7\times7} = 1 \qquad \therefore\ 7^0 = 1$$

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

जैसे $\frac{p^n}{p^n} = 1$ होगा परन्तु सूत्र से

$\frac{p^n}{p^n} = p^{n-n} = p^0$

$\boxed{p^0 = 1}$ (नियम–3)

जहाँ p 0

अब ज़रा निम्न संख्याओं पर विचार करें।

$\frac{1}{5^2} = \frac{5^0}{5^2} = 5^{0-2} = 5^{-2}$ ($5^0 = 1$ से)

$\frac{1}{6^{15}} = \frac{6^0}{6^{15}} = 6^{0-15} = 6^{-15}$ ($6^0 = 1$ से)

$\frac{1}{4^{90}} = \frac{4^0}{4^{90}} = 4^{0-90} = 4^{-90}$ ($4^0 = 1$ से)

इन प्रश्नों का अवलोकन करते हुए कीर्ति ने विचार किया कि यदि घातांक संख्याओं में हर को अंश के स्थान पर ले जाएँ तब उनके घात के चिह्न बदल जाते हैं, अर्थात् यदि हमारे पास

$\frac{1}{a^4}$ हो तब $\frac{1}{a} = \frac{a^0}{a^1} = a^{0-4} = a^{-4}$ होगा

यदि $\frac{1}{a^m}$ हो तब $\frac{1}{a^m} = \frac{a^0}{a^m} = a^{0-m} = a^{-m}$

अतः $\boxed{\frac{1}{a^m} = a^{-m}}$

परन्तु यदि अंश को हर में ले जाएँ तो क्या होगा, जैसा हमने ऊपर उदाहरणों में देखा है।

$\frac{1}{7^{-3}} = 7^3$ या $\frac{1}{a^{-1}} = a^4$ या $\boxed{a^{-m} = \frac{1}{a^{-m}}}$ इसका मतलब यह है कि जब घातांकों में अंश को हर में ले जाएंगे तब भी घात का चिह्न बदल जाएगा।

स्वयं करके देखिए

(i) $10^8 \div 10^3 = 10^{\square}$ (ii) $9^8 \div 9^7 = 9^{\square}$

(iii) $21^{15} : 21^{13} = 21^{\square}$ (iv) $b^{10} : b^5 = b^{\square}$

(v) $d^{100} \div d^{50} = d^{\square}$

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

8.3.3 एक घात की घात लेना

निम्न उदाहरणों पर ध्यान दीजिए—

(i) $(2^3)^2$ को सरल कीजिए—

हल : $(2^3)^2 = 2^3 \times 2^3$

$= 2^{3+3}$ (चूँकि $a^m \times a^n = a^{m+n}$ है।)

$= 2^6$

$= 2^{3 \times 2}$

(ii) $(3^4)^2$ को सरल कीजिए—

हल: $(3^4)^2 = 3^4 \times 3^4$

$= 3^{4+4}$

$= 3^8$

$= 3^{4 \times 2}$

(iii) $(a^m)^3 = a^m \times a^m \times a^m$

$= a^{m+m+m}$

$= a^{3m}$

$= a^{3 \times m}$

उपरोक्त से हम व्यापक रूप से कह सकते हैं कि किसी धनेतर पूर्णांक 'a' के लिए $(a^m)^n = a^{m \times n}$ होता है जहाँ m और n पूर्णांक हैं।

स्वयं करके देखिये

सरल करके उत्तर को घातांकीय रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) $(7^2)^3$ (ii) $(5^2)^{20}$ (iii) $(7^{20})^3$

(iv) $(a^3)^4$ (v) $(4^3)^3$ (vi) $(d^4)^8$

8.3.4 समान घातांकों वाली घातों का गुणन

निम्न उदाहरणों पर ध्यान दीजिए:

(i) $2^4 \times 3^4$ को सरल कीजिए।

$2^4 \times 3^4 = (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3)$

$= (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3)$

$= 6 \times 6 \times 6 \times 6$

$= 6^4$

यहाँ आधार 6, 2 और 3 का गुणनफल है।

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

(ii) $4^3 \times 3^3$ को सरल कीजिए।

$4^3 \times 3^3 = (4 \times 4 \times 4) \times (3 \times 3 \times 3)$

$= (4 \times 3) \times (4 \times 3) \times (4 \times 3)$

$= 12 \times 12 \times 12$

$= 12^3$

यहाँ 12 आधार 4 और 3 का गुणनफल है।

(iii) $3^3 \times a^3$ को सरल कीजिए।

$3^3 \times a^3 = (3 \times 3 \times 3) \times (a \times a \times a)$

$= (3 \times a) \times (3 \times a) \times (3 \times a)$

$= (3a)^3$ (यहाँ $3 \times a = (3a)^3$)

(iv) $a^3 \times b^3$ को सरल कीजिए।

$a^3 \times b^3 = (a \times a \times a) \times (b \times b \times b)$

$= (a \times b) \times (a \times b) \times (a \times b)$

$= (a \times b)^3$

$= (ab)^3$ (यहाँ $a \times b = ab$ है।)

व्यापक रूप में, किसी शून्येतर (Non-Zero) पूर्णांक के लिए $a^m \times b^m = (ab)^m$ होता है। जहाँ m एक पूर्णांक है।

उदाहरण–6. निम्नलिखित पदों को घातांकीय रूप में व्यक्त कीजिए–

(i) $(5 \times 4)^3$ (ii) $(4a)^5$ (iii) $(-3n)^3$

हल : (i) $(5 \times 4)^3 = (5 \times 4) \times (5 \times 4) \times (5 \times 4)$

$= (5 \times 5 \times 5) \times (4 \times 4 \times 4)$

$= 5^3 \times 4^3$

(ii) $(4a)^5 = 4a \times 4a \times 4a \times 4a \times 4a$

$= (4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4) \times (a \times a \times a \times a \times a)$

$= 4^5 \times a^5$

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

(iii) $(-3n)^3 = (-3\times n)^3$

$= (-3\times n)(-3\times n)(-3\times n)$

$= (-3\times -3\times -3)\times(n\times n\times n)$

$= -3^3\times n^3$

स्वयं करके देखिए

$a^m \times b^m = (ab)^m$ का प्रयोग करके हल कीजिए–

(i)	$5^3 \times 2^3$	(ii)	$3^2 \times b^2$	(iii)	$a^3 \times c^3$
(iv)	$2^6 \times (-2)^6$	(v)	$(-2^2) \times (-3)^2$	(vi)	$(ab)^3$
(vii)	$(-2p)^3$	(viii)	$(2c)^4$	(ix)	$(2\times3)^5$

8.3.5 परिमेय संख्याओं की घातें

परिमेय संख्याओं के कुछ घातांकों पर विचार कीजिए–

$\left(\frac{5}{7}\right)^4 = \frac{5}{7}\times\frac{5}{7}\times\frac{5}{7}\times\frac{5}{7}$

$= \frac{5\times5\times5\times5}{7\times7\times7\times7} = \frac{5^4}{7^4}$

$\left(-\frac{3}{11}\right)^5 = (-1)^5\times\left(\frac{3}{11}\right)^5$

$= -1\times\frac{3}{11}\times\frac{3}{11}\times\frac{3}{11}\times\frac{3}{11}\times\frac{3}{11} = -1\times\frac{3\times3\times3\times3\times3}{11\times11\times11\times11\times11}$

$= -1\times\frac{3^5}{11^5} = -\frac{3^5}{11^5}$

8.3.6 समान घातांकों वाली घातों से विभाजन

निम्न उदाहरणों पर ध्यान दीजिए–

(i) $\frac{3^5}{5^5} = \frac{3\times3\times3\times3}{5\times5\times5\times5} = \frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5} = \left(\frac{3}{5}\right)^5$

WEBCOPY © BSTBPC NOT TO BE PUBLISHED

(ii) $\frac{a^4}{b^5} = \frac{a\times a\times a\times a\times a}{b\times b\times b\times b\times b} = \frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^5$

व्यापक रूप में, $\boxed{a^m \div b^m = \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m}$ जहाँ, a और b कोई दो शून्येतर पूर्णांक है तथा m और n एक पूर्णांक है।

उदाहरण–7. निम्न का विस्तार में कीजिए :

(i) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ (ii) $\left(\frac{-2}{5}\right)^4$ (iii) $\left(\frac{p}{q}\right)^5$

हल : (i) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{2\times2\times2}{3\times3\times3}$

(ii) $\left(\frac{-2}{5}\right)^4 = \frac{(-2)^4}{5} = \frac{(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)}{5\times5\times5\times5}$

(iii) $\left(\frac{p}{q}\right)^5 = \frac{p^5}{q^5} = \frac{p\times p\times p\times p\times p}{q\times q\times q\times q\times q}$

8.4 विविध उदाहरण

उदाहरण–8. $(5^2)\times3$ और $(5^2)^3$ में बड़ा कौन है।

हल : $(5^2)\times3 = 5\times5\times3$ (5^2 को 3 से गुणा)

$= 75$

$(5^2)^3 = 5^2\times5^2\times5^2$ (5^2 का स्वयं से 3 बार गुणा)

$= 15625$

अतः $(5^2)^3 > (5^2)\times3$

WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

उदाहरण—9. $9\times9\times9$ के लिए आधार 3 लेते हुए, इसे घातांकीय रूप में लिखिए।

प्रश्न से, $9\times9\times9 = 9^3 = (3^2)^3$ $\quad 3^{2\times3}$ $\left(\because (a^m)^n = a^{mn}\right)$

3^6

उदाहरण—10. सरल कीजिए और उत्तर को घातांकीय रूप में लिखिए।

(i) $\left(\frac{3}{3^2}\right)\times3^7$ (ii) $2^3\times2^2\times5^5$ (iii) $\left\{(2^3)^2\times5^6\right\}\times3^6$

(iv) $8^7\div2^3$ (v) $(3^4\times3^3)\div3^2$

हल : (i) $\left(\frac{3}{3^2}\right)\times3^7 = (3^{7-2})\times3^1 \quad \left(\because \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}\right)$

$= 3^5\times3$

$= 3^{5+1} \quad \left(\because a^m\times a^n = a^{m+n}\right)$

$= 3^6$

(ii) $2^3\times2^2\times5^5 = (2^3\times2^2)\times5^5$

$2^5\times5^5 \quad \left(\because a^m\times a^n = a^{m+n}\right)$

$= (2\times5)^5 \quad \left(\because a^m\times b^m = (ab)^m\right)$

$= 10^5$

(iii) $\left\{(2^3)^2\times5^6\right\}\times3^6$

$(2^6\times5^6)\times3^6 \quad \left(\because (a^m)^n = a^{mn}\right)$

$\left\{(10)^6\times3^6\right\} \quad \left(\because a^m\times b^m = (ab)^m\right)$

$(10\times3)^6$

$= (30)^6$

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

(iv) $8^2 \div 2^3$

$\because 8 = 2\times2\times2 = 2^3$

$\therefore 8^2 = (2^3)^2$

$\therefore 8^2 \div 2^3 = (2^3)^2 \div 2^3$

$= 2^6 \div 2^3$

$= 2^{6-3} = 2^3$

(v) $(3^2\times3^4)\div3^3$

$= (3^{2+4})\div3^3 \quad (a^m\times a^n = a^{m+n})$

$= 3^6 \div 3^3 \quad (a^m \div a^n = a^{m-n})$

$= 3^{6-3} = 3^3$

उदाहरण—11. सरल कीजिए

(i) $\dfrac{2^2\times3^3\times4}{3\times32}$ (ii) $\dfrac{2\times3^4\times2^3}{9\times4^2}$ (iii) $\dfrac{12^2\times9^3\times4}{6^3\times8^2\times27}$

(iv) $2^3\times a^3\times5a^4$ (v) $\dfrac{4^5\times a^4b^3}{4^4\times a^3b^2}$ (vi) $\dfrac{2^4\times a^3}{8^3\times a^2}$

हल : (i) $\dfrac{2^2\times3^3\times4}{3\times32} = \dfrac{2^2\times3^3\times2^2}{3\times2^5} \quad (\because 4=2^2, 32=2^5)$

$= \dfrac{2^{2+2}\times3^3}{3\times2^5} = \dfrac{2^4\times3^3}{3\times2^5}$

$= 2^{4-5}\times3^{3-1} = 2^{-1}\times3^2$

$= 1\times27 = 27$

(ii) $\dfrac{2\times3^4\times2^3}{9\times4^2} = \dfrac{2\times3^4\times2^3}{3^2\times(2^2)^2} = \dfrac{2\times2^3\times3^4}{3^2\times2^{2\times2}}$

$= \dfrac{2^{1+3}\times3^4}{2^4\times3^2} = \dfrac{2^4\times3^4}{2^4\times3^2}$

$= 2^{4-4}\times3^{4-2} = 2^0\times3^2 = 4\times9 = 36$

WEBCOPY @BSTBPC NOT TO BE PUBLISHED

(iii) $\dfrac{12^4 \times 9^3 \times 7}{6^3 \times 8^2 \times 27}$ $= \dfrac{(2^2 \times 3)^4 \times (3^2)^3 \times 7}{(2 \times 3)^3 \times (2^3)^2 \times 3^3}$ $\dfrac{(2^2)^2 \times 3^4 \times 3^{2+3} \times 2^2}{2^3 \times 3^3 \times 2^{3+2} \times 3^3}$

$= \dfrac{2^8 \times 2^2 \times 3^7 \times 3^3}{2^3 \times 2^6 \times 3^3 \times 3^3}$ $= \dfrac{2^{8+2} \times 3^{4+6}}{2^{3+6} \times 3^{3+3}}$ $= \dfrac{2^{10} \times 3^{10}}{2^9 \times 3^6}$

$= 2^{10-9} \times 3^{10-6}$ $= 2^1 \times 3^4$ 2×81 162

(iv) $2^3 \times a^3 \times 5a$

$= 2^3 \times a^3 \times 5 \times a^1$

$2^3 \times 5 \times a^3 \times a^1$

$8 \times 5 \times a^{3+1}$

$= 40a^4$

(v) $\dfrac{4^5 \times a^3 b^3}{4^3 \times a^3 b^2}$

$= 4^{5-3} \times a^{3-3} \times b^{3-2}$

$= 4^2 \times a^0 \times b^1$

$= 1a^0 b$

$= a^0 b$

(v) $\dfrac{2^8 \times a^5}{4^3 \times a^3}$ $= \dfrac{2^8 \times a^5}{(2^2)^3 \times a^3}$ $= \dfrac{2^8 \times a^5}{2^6 \times a^3}$

$= 2^{8-6} \times a^{5-3}$ $2^2 a^2$ $= 4a^2$

WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED © BSTBPC

प्रश्नावली–8.2

1. सरल कीजिए और उत्तर को घातांकीय रूप में लिखिए:

(i) $7^2 \times 7^4 \times 7^3$ (ii) $3^{10} \div 3^6$ (iii) $d^2 \times d^3$

(iv) $5^4 \times 5^3$ (v) $(5^3)^7 \div 5^3$ (vi) $3^5 \times 5^5$

(vii) $a^7 \times b^7$ (viii) $(2^{10} \div 2^8) \times 2^3$ (ix) $9^8 : 9^3$

2. सरल कीजिए और घातांकीय रूप में उत्तर लिखिए:

(i) $\dfrac{2^3 \times 3^7 \times 4}{3^5 \times 32}$ (ii) $[(5^3)^2 \times 5^3] : 5^6$ (iii) $25^5 : 5^4$

(iv) $3^0 - 4^0 + 5^0$ (v) $3^0 \times 4^0 \times 5^0$ (vi) $(1^0 + 5^0) \times 2^0$

(vii) $\dfrac{11^0 \times 13^2 \times 3}{39 \times 11^2}$ (viii) $\dfrac{5^7}{5^4 \times 5^3}$ (ix) $(3^2 \times 3)^3$

(x) $\dfrac{5^8 \times a^5}{25^4 \times a^3}$

3. अभाज्य गुणनखंडों की घातों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) 1152 (ii) 64×81 (iii) 540

(iv) $27 \times 48 \times 72$ (v) $9 \times 6 \times 15 \times 4$

4. नीचे दिए गए कथनों में सही/गलत छाँटिए तथा अपने उत्तर का कारण भी दीजिए :

(i) $10^0 = (1000)^0$ (ii) $4^3 \times 3^4 = 12^3$ (iii) $2^5 = 5^2$

(iv) $10 \times 10^2 = 100^6$

5. सरल कीजिए :

(i) $\dfrac{(3^2)^5 \times 5^3}{9^4 \times 5^2}$ (ii) $\dfrac{9^2 \times 3^2 \times a^8}{3^7 \times a^3}$ (iii) $\dfrac{3^5 \times 10^5 \times 25}{5^7 \times 6^3}$

© BSTBPC WEBCOPY NOT TO BE PUBLISHED

8.5 दशमलव संख्या पद्धति

हम जानते हैं कि–

$$56832 = 5 \times 10000 + 6 \times 1000 + 8 \times 100 + 3 \times 10 + 2 \times 1$$

हम इसे 10 की घातों का प्रयोग करते हुए घातांकीय रूप में निम्न प्रकार लिख सकते हैं–

$$56832 = 5 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 2 \times 10^0$$

ध्यान दीजिए $10000 = 10^4$, $1000 = 10^3$, $100 = 10^2$, $10 = 10^1$ तथा $1 = 10^0$ है।

यहाँ 10 के घातांक 4 से एक–एक घटते हुए 0 तक आ जाते हैं।

8.6 बड़ी संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त करना

निम्नलिखित प्रतिरूप (Pattern) को देखिए–

1. $14335 = 1433.5 \times 10 = 1433.5 \times 10$
2. $14335 = 143.35 \times 100 = 143.35 \times 10^2$
3. $14335 = 14.335 \times 1000 = 14.335 \times 10^3$
4. $14335 = 1.4335 \times 10000 = 1.4335 \times 10^4$
5. $14335 = .14335 \times 100000 = .14335 \times 10^5$

उपरोक्त सभी में चौथा रूप संख्या का मानक रूप (standard form) है। जब किसी संख्या को 1.0 एवं 9.9 या इसके बीच की एक दशमलव संख्या और 10 की घात के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जाता है, तो संख्या के इस रूप को मानक रूप कहते हैं।

ऊपर के तीसरे रूप की संख्या $14335 = 14.335 \times 1000 = 14.335 \times 10^3$ मानक रूप में है? नहीं क्योंकि $14.335 > 1.0$ एवं 9.9 या इसके बीच की किसी भी दशमलव संख्या से। अब क्या संख्या $.14335 \times 10^5$ मानक रूप में है? नहीं क्योंकि $.14335 < 1.0$ एवं 9.9 या इसके बीच की किसी भी दशमलव संख्या से।

ध्यान दीजिए 14335 को 14.335×1000 या $.14335 \times 100000$ और 14.335×10^3 या $.14335 \times 10^5$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। परन्तु यह 14335 का मानक रूप नहीं है।

हमारी आकाश गंगा के केन्द्र से सूर्य की दूरी अर्थात–

300,000,000,000,000,000,000 मी. को 3.0×10^{20} मी. के रूप में लिखा जा सकता है।

इसी प्रकार पृथ्वी का द्रव्यमान

= 5,976,000,000,000,000,000,000,000 किग्रा.

$= 5.976 \times 10^{24}$

क्या आप इस बात से सहमत हैं कि पढ़ने, लाइन और तुलना करने की दृष्टि से मानक रूप में लिखी यह संख्या उस 25 अंकों की संख्या की अपेक्षा बहुत अधिक सरल या सुविधाजनक है?

अब यूरेनस ग्रह का द्रव्यमान

= 86,800,000,000,000,000,000,000,000 किग्रा.

8.68×10^{27} किग्रा. है।

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

अब, उपरोक्त दोनों व्यंजकों में केवल 10 की घातों की तुलना करके ही आप यह कह सकते हैं कि यूरेनस ग्रह का द्रव्यमान पृथ्वी से अधिक है।

उदाहरण—12. निम्नलिखित संख्याओं को मानकरूप में व्यक्त कीजिए।

(i) 725.34 (ii) 956,230 (iii) 434,000 (iv) 800,403,000

हल: (i) $725.34 = 7.2534 \times 100 = 7.2534 \times 10^2$

(ii) $956230 = 9.56230 \times 100000 = 9.5623 \times 10^5$

(iii) $434000 = 4.34000 \times 100000 = 4.34 \times 10^5$

(iv) $800403000 = 8.00403 \times 100000000 = 8.00403 \times 10^8$

ऊपर के उदाहरण से स्पष्ट है कि किसी संख्या को मानक रूप में व्यक्त करते समय 10 का घातांक निम्न प्रकार से ही प्राप्त कर सकते हैं:—

सर्वप्रथम, दशमलव बिन्दु से बाईं ओर के अंकों की संख्या गिनते हैं। दशमलव बिन्दु नहीं रहने पर बिन्दु की कल्पना संख्या के दाईं सिरे पर कर लेते हैं।

फिर प्राप्त संख्या में से 1 घटाकर जो प्राप्त होता है, वही 10 का घातांक होता है।

उदाहरण (1) में संख्या 725.34 है, इसमें दशमलव के बाएँ तरफ तीन अंक हैं अतः 10 की घात $3-1 = 2$ होगा।

अतः $725.34 = 7.2534 \times 10^2$

इसी प्रकार उदाहरण (2) में संख्या 956230 में दाईं सिरे पर दशमलव की कल्पना करने पर दशमलव के बाईं तरफ कुल 6 अंक है अतः 10 की घात $= 6-1 = 5$ होगा।

अतः $956230 = 9.5623 \times 10^5$

प्रश्नावली— 8.3

1. निम्नलिखित संख्याओं को विस्तारित रूप में लिखिए—

(i) 380505 (ii) 2005183 (iii) 230829 (iv) 30079 (v) 8324750

2. निम्नलिखित विस्तारित रूपों में से प्रत्येक के लिए संख्या ज्ञात कीजिए—

(i) $9 \times 10^4 + 5 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 4 \times 10^0$

(ii) $7 \times 10^7 + 8 \times 10^5 + 4 \times 10^2 + 7 \times 10^0$

© BSTBPC WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED

(iii) 6×10^{7} 5×10^{7} । 7×10^{11}

(iv) 8×10^{5} 3×10^{7} । 8×10^{7}

3. **निम्नलिखित संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त कीजिए—**

(i) 7,00,00,000 (ii) 8,000,000 (iii) 416,000,000

(iv) 456,234 (v) 9634.21 (vi) 72439.62

4. **निम्नलिखित कथनों में प्रकट होने वाली संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त कीजिए—**

(i) पृथ्वी का व्यास 12756000 मी. है।

(ii) वर्ष 2001 में भारत की जनसंख्या 1,027,000,000 थी।

(iii) सूर्य का व्यास 1,400,000,000 मी. है।

(iv) निर्वात स्थान में प्रकाश की चाल (या वेग) 300,000,000 मी./से. है।

(v) सौर मंडल 12,000,000,000 वर्ष पुराना आकलित किया गया है।

(vi) एक आकाश गंगा में औसतन 100,000,000,000 तारे हैं।

(vii) आकाश गंगा के मध्य से सूर्य की दूरी 300,000,000,000,000,000,000 मी. आंकलित की गई है।

(viii) 1.8 ग्राम भार वाली पानी की एक बूंद में 60,230,000,000,000,000,000,000 अणु होते हैं।

(ix) पृथ्वी पर 1,353,000,000 किमी.^{3} समुद्र जल है।

5. **निम्नलिखित कथनों में प्रकट होने वाली दूरियों को मानक रूप में व्यक्त करके घटते क्रम में सजायें।**

(i) सूर्य और शनि ग्रह के बीच की दूरी 1,433, 500,000,000 मी. है।

(ii) शनि और यूरेनस ग्रहों के बीच की दूरी 1,439,000,000,000 मी. है।

(iii) सूर्य और पृथ्वी के बीच की दूरी 149,600,000,000 मी. है।

(iv) पृथ्वी और चन्द्रमा के बीच की दूरी 384,000,000 मी. है।

© BSTBPC WEBCOPY NOT TO BE PUBLISHED

हमने सीखा

1. बड़ी संख्याओं को घातांकों के प्रयोग करके संक्षिप्त रूप में लिखते हैं, जिससे बड़ी संख्याओं को पढ़ने, समझने, तुलना करने और उन पर संक्रियाएँ करने में सरल व सुविधाजनक होता है।

2. संख्या $100000 = 10^5$; इसे 10 के ऊपर घात 5 पढ़ा जाता है। हम यह भी कहते हैं कि 10 की पाँचवीं घात 100000 है। यहाँ 10 आधार है तथा 5 इसका घातांक है।

3. घातांकीय रूप में संख्याएँ कुछ नियमों का पालन करती हैं, जो इस प्रकार हैं— किन्हीं शून्येतर पूर्णांकों a और b तथा पूर्ण संख्याओं m और n के लिए,

(i) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

(ii) $a^m \div a^n = a^{m-n}, m > n$

(iii) $(a^m)^n = a^{mn}$

(iv) $a^m \times b^m = (ab)^m$

(v) $a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

(vi) $a^0 = 1$

(vii) $(-1)^{\text{सम संख्या}} = 1$

$(-1)^{\text{विषम संख्या}} = -1$

WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED © BSTBPC