

## अध्याय-9

# बीजीय व्यंजक

### 9.1 गृणिका

हम  $x - 3$ ,  $y - 5$ ,  $1x - 5$ ,  $10y - 5$ , इत्यादि उस सरल बीजीय व्यंजकों से परिचित हो चुके हैं। लक्ष-6 में, हमने देखा था कि ये व्यंजक किस प्रकार नाइट्रिट और सनस्यातां को एक सूख्यपरिस्थिति प्रदान करने में राहायिक होते हैं। हम तारतम्य करते वाले अध्याय में भी व्यंजकों के उच्चेक उदाहरणों को देख चुके हैं।

बीजगणित में व्यंजकों (Expressions) को एक लंबायां अवधारणा माना जाता है। यह अध्याय बीजीय व्यंजकों से रांबड़ है। इस अध्याय में हम अव्ययन करेंगे, के बीजीय व्यंजक किसी प्रकार बनते हैं, इनके किसी प्रकार संयोजन (सिलाइ) जाती है, इनके मान हा केरो ज्ञात कर सकते हैं तथा इनका किस प्रकार उपयोग किया जा सकता है।

### 9.2 बीजीय व्यंजक

पिछले कक्षा में हमने देखा कि क्षेत्र चर एवं अवर को रांबोजिं (सिलाइ) कर बढ़ा व्यंजक बनाया था है। हम ऐसे अवयों को बनाने के लिए चर एवं अवर को जोड़, घटाव, गुणा एवं भाग संक्रियाओं द्वारा संयोजित किया जाता है। जैसे—

उदाहरण-(a)  $x+1$  के चर  $x$  में 1 जोड़कर  $x+1$  प्राप्त किया गया है।

(b)  $x-1$  के चर  $x$  में 1 घटाकर  $x-1$  प्राप्त किया गया है।

(c)  $2x+1$  अचर 2 में चर  $x$  से गुणा करके  $2x$  बनाया गया है किर  $2x$  में 1 जोड़कर  $2x+1$  बनाया गया है।

अतः हम कह सकते हैं कि  $x+1$ ,  $x-1$  एवं  $2x+1$  बीजीय व्यंजक हैं।

#### 9.2.1 बीजीय व्यंजक के पद:

एक व्यंजक  $9x + 7$  एवं विचार कीजिए। इस बनाने के लिए पहले  $x$  एवं 9 का गुणा करके  $9x$  बनाया गया है फिर  $9x$  ने 7 को जड़ देता गया है।

व्यंजक  $3x^2 + 7y$  ने  $3$ ,  $x$  और  $x^2$  को गुणा करके  $3x^2$  बनाया गया है फिर 7 को  $y$  से गुणा करके  $7y$  बनाया गया है जौर अंत में  $3x^2$  के  $7y$  से जुड़कर  $3x^2 + 7y$  व्यंजक बनाया गया है। एक अन्य उदाहरण लें  $7xy - 3x^2$ , इस व्यंजक में क्या किया गया है?

इस त्रिकार तम नहीं है कि किसी व्यंजक के छोटे-छोटे भाग होते हैं जो अलग से बनाये जाते हैं फिर आपर ने ने छोटे-छोटे भाग जोड़ दिये जाते हैं और व्यंजक बन जाता है। व्यंजक के ए छोटे-छोटे भाग ए उहल अलग से बनाये जाते हैं और फिर जाड़ दिये जाते हैं, व्यंजक के पद कहलाते हैं। उपरोक्त पहले उदाहरण में  $9x^2$  एवं 7 दो पद हैं, दूसरे उदाहरण में  $3x^2$  एवं  $7y$  पद हैं और तीसरे उदाहरण में  $7xy$  एवं  $(-3x^2)$  पद हैं।

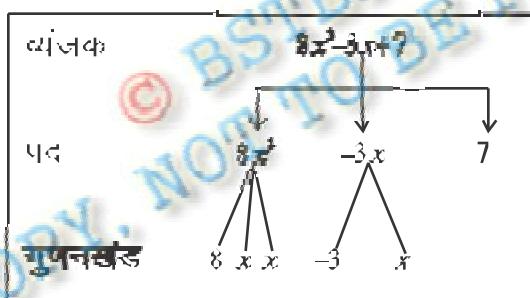
आइए कुछ करके देखें

व्यंजक	पद
$9x^2 - 2x - 3$	$9x^2, 2x, -3$
$6x^2$	
$8x - 7y$	
6	
0	
$7(x-y)+9$	

### 9.2.2 पद के गुणनखंड:

हमने देखा कि  $(4x^2 - 7xy)$  में दो पद हैं  $4x^2$  और  $-7xy$ । पद  $4x^2$  और  $x$  का गुणनफल है। यह  $4 \cdot x$  और  $x$  पद  $4x^2$  का गुणनखंड है। अतः इस चाहे है कि कोई पद अपने गुणनखंडों का उपानगल होता है।

व्यंजक के पदों का उपानखंड हाँ। रोक के लिये मैं यह आरेख विश्लिषण के द्वारा बिल्कुल नहीं हूँ।



### प्रयास कीजिए

व्यंजक	पद	पद के गुणनखंड	घर	अधर
$3x^2 + 2xy - 9y^2$	$3x^2, 2xy, 9y^2$	$3 \cdot x^2 = 3 \times x \times x$ $2xy = 2 \times x \times y$ $9y^2 = 9 \times y \times y$	$x, y$	3, 2, 9
$11x^2 - 7x + 5$				
$a^2 - b^2$				

### 9.2.3 गुणांक

हमने देखा कि व्यंजक के पद के उनके गुणनखंड के गुणनकल के रूप में लिख सकते हैं। आपने वह  $x^2$  देखा कि पद के गुणनखंड कोई अचर हो रहा है तथा उसके अलावा कोई बीजीय वर्ष हो सकता है जैसे  $9xyz$  एक पद है जिसका गुणनखंड  $9 \times x \times y \times z$  है। इसमें 9 अचर है और शेष  $x^2 \times y \times z$  है। इसी पद के राखात्मक ( $\text{अव्यक्त}$ ) गुणनखंड को पद के राखात्मक गुणांक वा केनल गुणांक कहते हैं। इसे शेष बीजीय घटों का गुणांक भी कहते हैं। जैसे  $-9xyz$  में  $xyz$  का गुणांक 9 है।  $-8x^2y^2z^2$  का गुणांक -8 है।

मिस्री पद का गुणांक 1 हो तो पद लिखते समय उसे नहीं लिखा जाता है। जैसे  $-1x^2$ ,  $1y$  के  $x^2$ ,  $y$  लिख जाते हैं। लेकिन यदि गुणांक -1 हो तो उसे केवल (-) चिन्ह, (-) के साथ दिखाया जाता है। जैसे  $-1x$  वा  $-x$  लिखते हैं।

### 9.2.4 समान एवं असमान पद

जब चरों के बीजीय गुणनखंड एक जैसे हों, तो वे पद समान पद (Like Terms) कहलते हैं। जब चरों के बीजीय गुणनखंड अभिन्न-निन्म हों, तो वे असमान पद (Unlike Terms) कहलते हैं। ऐसे— व्यंजक  $2xy - 3x + 5xy - 4$  में पदों  $2xy$  और  $5xy$  को देखिए।  $2xy$  के गुणनखंड  $2, x$  और  $y$  है।  $5xy$  के गुणनखंड  $5, x$  और  $y$  हैं। इस प्रकार, इनके बीजीय गुणनखंड एक ही हैं और इसीलिए ये समान पद हैं। इसलिए विपरीत, एवं  $2xy$  और  $-3x$  में मिना-निन्म बीजीय गुणनखंड हैं; ये असमान पद हैं। इसी प्रकार, पद  $2xy$  और  $4$  उसमान पद हैं। साथ ही,  $-3x$  और  $4$  भी असमान पद हैं।

### 9.2.5 व्यंजकों के प्रकार

- एकपदी व्यंजक**— वैसे व्यंजक जैसमें केवल एक पद हो एकादी व्यंजक कहलाता है। जैसे—  $9x$ ,  $3x^2$ ,  $y$ ,  $8xy$ ,  $8$ ,  $0$ ,  $3(x+y)$  आदि।
- द्विपदी व्यंजक**— वैसे व्यंजक जैसमें केवल दो पद होते हैं, द्विपदी व्यंजक कहलाते हैं। जैसे—  $3x+2y$ ,  $x^2-y$ ,  $a^2-ab$  आदि।
- त्रिपदी व्यंजक**— वैसे व्यंजक जैसमें केवल तीन पद होते हैं त्रिपदी व्यंजक कहलाते हैं। जैसे—  $9x^2-3x+2$ ,  $x-y+z$  आदि।
- बहुपद व्यंजक**— सानान्यतः वैसे व्यंजक जैसमें एक दूसरे एक से अधिक पद होते हैं बहुपद कहलाते हैं।

**उदाहरण-1.** पेड़ आरेख बिधे द्वारा (a)  $(3x-4)$  तथा (b)  $2x^2-4$  का गुणनखंड ज्ञात करें।

**हल :**

$$\begin{array}{c} \text{पेड़ आरेख } 3x-4 \\ \text{पद } 3x \quad -4 \\ \text{गुणनखंड } 3 \quad x \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{पेड़ आरेख } 2x^2-4 \\ \text{पद } 2x^2 \quad -4 \\ \text{गुणनखंड } 2 \quad x \quad x \end{array}$$

**उदाहरण-2.**  $9xyz - 3$  के  $x, xy, xyz, 9vy, 9xz, 9yz$  के बीच कीजिए।

**हल :**

$$\begin{array}{c} \text{पेड़ आरेख } 9xyz + 3 \\ \text{पद } 9xyz \quad 3 \\ \text{गुणनखंड } 9 \quad x \quad y \quad z \end{array}$$

- (a)  $x$  का गुणांक =  $x$  को छोड़कर शेष पद =  $9yz$
- (b)  $xy$  का गुणांक =  $xy$  को छोड़कर इष पद =  $9z$
- (c)  $xyz$  का गुणांक =  $xyz$  को छोड़कर शेष पद =  $3$
- (d)  $9xy$  को  $9xyz = 9xy$  को छोड़कर शेष पद =  $z$
- (e)  $9xz$  का गुणांक =  $9xz$  को छोड़कर शेष पद =  $y$
- (f)  $9yz$  का गुणांक =  $9yz$  को छोड़कर शेष पद =  $x$

**उदाहरण-3.** कारप के दो वर्ताव के पदों के नियन्त्रित समूहों के लिए—कोन से युग्म रूपानि पदों के हैं तथा कौन-कौन से सुम असमान पदों के हैं—

- (i)  $3ab, 3b$       (ii)  $3a, -21b$       (iii)  $17a, -6a$       (iv)  $3^2 b, 2ab^2$

**हल :**

क्र.	पद युग्म	गुणनखंड	वीजीय गुणनखंड	समान/असमान	कारण
(i)	$3ab, 3b$	$3 \times a \times b$	निच-भिन-	असमान	$\therefore a$ दूरारे पद में नहीं है
(ii)	$3a, -21b$	$3 \times a$	निच-भिन-	असमान	वीजीय गुण नहीं है तथा भिन-भिन है
(iii)	$17a, -6a$	$17 \times a$	सन्तत	सन्तत	दोनों वीजीय गुणाखंड सन्तत
(iv)	$3a^2b, 3ab^2$	$3 \times a \times a \times b$	निच-भिन-	असमान	चर ता एक जोस्ते है किन्तु उनकी घातें असमान हैं।

**उदाहरण-4.** निम्नलिखित व्यंजकों में से एकपदी, द्विपदी, त्रिपदी व्यंजकों को अलग करें।

$$6x+9, \quad x+y+1, \quad 9x, \quad 8x^2 + 7x + 2, \quad 2, \quad -5x-y, \quad 4-x, \quad 4-x^2, \quad 8y^2, \quad 2xy,$$

$$3x^2y-1$$

**हल :** एकपदी व्यंजक =  $9x, 2, 8y^2, 2xy$

द्विपदी व्यंजक =  $6x+9, -5x-y, 4-x, 4-x^2, 3x^2y-1$

त्रिपदी व्यंजक =  $x+y+1, 8x^2+7x+2$

### प्रश्नावली-9.1

**1. निम्नलिखित व्यंजकों में से चर एवं अचर राशियाँ ज्ञात करें।**

- (a)  $5x+2$       (b)  $2ab+1$       (c)  $2x^2y-1+2x$   
 (d)  $m^2-n^2-1$       (e)  $9x^2yz$

**2. निम्नांकित व्यंजकों के पदों को पहचानिए।**

- (a)  $x^2+2x+1$       (b)  $8x^2+11ab-2b^2$       (c)  $9p^2-4q$   
 (d)  $a^2b^2-9$       (e)  $5ab-3b$

उपर्युक्त प्रश्न में देखे गये सभी व्यंजकों के पदों का युग्मन्त्व के लिए जिसे सो प्राप्त करें। प्रत्येक स्थिति में वे भी बताइये कि व्यंजक का निर्गम कैसे किया ज्या है?

**3.  $12x^2y$  एवं (i)  $x^2y$ , (ii)  $x$  तथा  $y$  ला नुस्खे बताइए।**

**4. निम्नांकित पद युग्मों में से समान पदों के समूह लिखिए-**

$$9x^2y, 8xy^2, 3ab, -7ba, 7ab^2, -4b^2, 7a, 7, 11a, -11a^2, 2xy, -2xy, 8ab, -2a, -2, 1, -x, 3x, 8x, 8$$

**5. नीचे दी गई स्थितियों में चरों, अचरों और गणितीय संक्रियाओं का प्रयोग करते हुए शीर्षीय व्यंजक प्राप्त कीजिए। यह भी बताइये कि बना व्यंजक एकपदी है या त्रिपदी है।**

- (a)  $x$  के दुगुने से  $y$  का  
 (b)  $a$  में दसवां रो युग्म करके उत्तराय गया है तभी जिस उत्तर में  $a$  का ठीक युग्म बताया ज्या है।

- (c)  $m$  वाले  $n$  के मूलफल का तीन गुण  
 (d)  $a$  का स्वयं से गुणा करके  $b$  से गुणा किया गया और इसमें  $a$  का सात गुण घटाकर उसमें 6 का जोड़ा गया है।  
 (e)  $a^2$  के तीन गुण नं  $a$  का दो गुण घटाकर गया है।

### 9.3 बीजीय व्यंजकों पर संक्रियाएँ

अपना के वास जल्द के तीन डिल्स हैं, यदि प्रत्येक डिल्स में 2 कलम हों तो कलन की संख्या =  $2 + 2 + 2$

$$= 2 \times 3 = 3 \times 2 = 6$$

$$= 2 \times 3 = 3 \times 2 = 6$$

$$= 2 \times 3 = 3 \times 2 = 6$$

यदि डिल्स की संख्या 5 हो तो कलमों की कुल

$$\begin{aligned} \text{संख्या} &= 2 + 2 + 2 + 2 + 2 \\ &= 2 \times 5 \\ &= 10 \end{aligned}$$

यदि डिल्स की संख्या  $n$  हो तो कलमों की

$$\begin{aligned} \text{कुल संख्या} &= 2 + 2 + 2 + \dots n \text{ बार} \\ &= 2 \times n \\ &= 2n \quad \because (2n \text{ का मूलफल } 2 \times n) \end{aligned}$$

इसी प्रकार यदि एक डिल्स में  $n$  कलम हों तो 8 डिल्स में कलमों की कुल संख्या =  $8n$

अब यदि प्रत्येक डिल्स में  $n$  कलम वाले 3 डिल्स एवं प्रत्येक डिल्स में  $n$  कलम वाले 8 डिल्स के कुल कलमों को जोड़ा जा दी तो

$$\begin{aligned} \text{कुल कलमों की संख्या} &= 3n + 8n \\ &= (n + n + n) + (n - n + n + n + n - n + n + n) \\ &= 11n \end{aligned}$$

यहाँ सनन पदों  $3n$  एवं  $8n$  को जोड़ने पर ये कल  $11n$  आता है। यह  $3n$  का 3,  $8n$  का 8 एवं योगफल  $11n$  का गुणांक 11 है। इस देखते हैं कि यह के गुणांकों का जोड़ (3+8), योगफल के गुणांक 11 के बराबर होत है, इससे यह स्पष्ट होता है कि बीजीय लंबाल के योगफल में सनन यदों के गुणांक आपस में चुम्प जाते हैं। इसी प्रकार बीजीय व्यंजक के घटाने में सनन यदों के गुणांक घट जाते हैं। जैसे—  $7x$  में से  $3x$  घटाने के लिए  $7x$  के गुणांक 7 में से  $3x$  के गुणांक 3 को घटाकर जाये ताकि यह गुणनखंड के साथ हिलते हैं। यानी  $7x - 3x = 4x$

मिस्री घट को घटने का अर्थ होता है उत्तराके योज्य व्यापारीलोग का जोड़ना। यहाँ हम कह सकते हैं कि घटना सामान्यतः घटने की ही क्रिया है।

**उदाहरण—5.** (i)  $7x$  ने  $-3x$  का घटाया। (ii)  $-7x$  से  $-3x$  को घटाया।

**हल :**  $7x - (-3x)$   
 $\because -1 \times (-3) = 3$   
 $= 7x + 3x$   
 $= 10x$

**हल :**  $-7x - (-3x)$   
 $= -7x + 3x$   
 $(\because -1 + 3 = 2)$   
 $= -4x$   
 $(-3x \text{ का योज्य व्यापारीलोग } - 13x \text{ है})$

(iii)  $-7x$  में  $-3x$  को घटाया। (iv)  $8x, -3x, 7x$  को जोड़ा।

**हल :**  $-7x + (-3x)$   
 $\because + 1 \times (-3) = -3$   
 $= -7x - 3x$   
 $\because -7 - 3 = -10$   
 $= -10x$

**हल :**  $8x - (-3x) + 7x$   
 $= 8x + 3x + 7x$   
 $= 8x + 7x - 3x$   
 $= 15x - 3x$   
 $= 12x$

(v)  $-12m, 6m, -7m$  एवं  $4m$  का जोड़।

**हल :**  $-12m - 6m + (-7m) + 4m$   
 $= -12m + 6m - 7m + 4m$   
 $= -12m - 7m + 6m + 4m$   
 $= -19m + 10m$   
 $= -9m$   $(\because -12m - 7m = -19m)$   
 $(6m - 4m = 2m)$

अभी तक हमने सामान पदों वाले व्यंजकों के जोड़ एवं घटाव को जाना। अब जरा बढ़ाए गए संजन के ५x + ३ गायें एवं २ गैर हो, शौकत के गारा ४ गे एवं ५ गैर हो तो, संजन एवं शौकत के पास छुल जानवरों की संख्या

$$\begin{aligned}
 \text{संजन के जानवर} &= \text{शौकत के जानवर} \\
 &= (3 \text{ गायें} + 2 \text{ भैंसें}) \quad (4 \text{ गायें} + 5 \text{ भैंसें}) \\
 &- 3 \text{ गायें} + 2 \text{ भैंसें} = 4 \cdot 1 \text{ गे} - 5 \text{ गैरों} \\
 &- 3 \text{ गायें} - 4 \text{ गायें} = 2 \text{ भैंसें} + 5 \text{ भैंसें} \\
 &= 7 \text{ गायें} + 7 \text{ गैरों}
 \end{aligned}$$

यह लक्ष्य है कि संजन एवं शौकत के पास छुल 14 जानवर हैं जिनमें 7 गाय एवं 7 गैर हैं। हम यह नहीं कह सकते कि उनके गास 14 गर्दे हैं या 14 भैंसें हैं।

इस उदाहरण से यह स्पष्ट होता है कि जड़ना एवं घटने की क्रिया जमान पदों की वीज ही होती है। असमान पद छाँ पर जड़ना एवं घटाना वा दिए गदों वा जोड़ के चिह्न वा घटाव के विद्या के साथ लिखते हैं।

- वीजीय व्यंजकों वा जोड़ने-घटान के
1. सामान एवं असामान पदों की पहचान करते हैं।
  2. समान पदों को उनके चिह्न के साथ एक साथ लिखते हैं।
  3. सामान्य पूर्णांकों की तरह उन समान पदों को एक राध जड़ते-घटाते हैं।
  4. फिर यदि एक वा दो विकासान्वयिक असमान पद द्वयों हैं तो उन्हें उनके पूर्णांक ले विद्या के साथ संबोधित कर लिख देते हैं।

**उदाहरण ७)**  $5x + 6y$  में  $8x + 9y$  को जोड़ें।

**हल :**  $(5x + 6y) + (8x + 9y)$

$$\begin{aligned}
 &= 5x + 6y - 8x + 9y \\
 &- 5x + 8x - 6y + 9y \quad (\text{समान पदों को एक समान लिखकर पुनर्व्यवस्थित किया गया}) \\
 &= 13x + 15y \quad \text{हल ग्राह्य हुआ।}
 \end{aligned}$$

इन व्यंजकों को हग सामान्य स्तर वाले ज्ञेयों की तरह भी जड़ सकते हैं। इसके लिए हन व्यंजकों को एक के नीचे एक करके इस प्रलापर स्थित है कि  $\frac{5x - 6y}{8x - 9y}$  समान पद एक हो स्थित में हो।

(ii)  $7ab + 4a - a + 8ba$  के जोड़ें।

$$\text{हल} : (7ab + 4a) + (a - 8ba)$$

$$= 7ab + 4a + a - 8ba \quad (\because ab = a \times b = b \times a = ba)$$

$$= 7ab - 8ab + 4a + a \quad (a = 1a)$$

$$= 15ab - 5a$$

**दूसरी पिछि,**

$$\begin{array}{ccc} 7ab + 4a & 7ab + 4a & 7ab + 4a \\ \underline{a + 8ba} & \text{या} & \underline{8ba + a} \\ & \text{या} & \underline{8ab + a} \\ & & 15ab + 5a \end{array}$$

(iii)  $13m^2 - 4xy$  ने  $12xy + 4m^2$  को घटाये।

$$\text{हल} : (13m^2 - 4xy) - (12xy + 4m^2)$$

$$= 13m^2 - 4xy - 12xy - 4m^2 \quad [\because \text{कोष्ठक के पहले त्रैण चेहरे } \mid \text{कोष्ठक}$$

$$- 13m^2 - 4m^2 - 4xy - \underline{12xy} \quad \text{खाली पर प्रत्येक पद } = -1 \text{ से गुणा}$$

$$= 9m^2 - 16xy \quad \text{होता है जिससे पदों के चिह्न बदल जाते हैं।}$$

$$\begin{array}{c} \text{दूसरी पिछि} = \frac{13m^2 - 4xy}{4m^2 + 12xy} \\ \hline - - \\ 9m^2 - 16xy \end{array}$$

|मैल बदलने वाले

(iv)  $3x - y + 6$  में  $x - y$  का अद्वय।

$$\text{हल} : (3x - y - 6) - (x - y)$$

$$= 3x - y + 6 - x + y \quad \because \text{(प्रथम के पहले अपि निह है इसलिए}$$

$$= 3x - x - y + y - 6 \quad \text{अप्रथम खुलने पर पदों के चिह्न बदल देये।}$$

$$= 2x + 6 \quad (-y + y = 0)$$

(v)  $3a + 4b - 7 \neq 8a^2 + 4b^2$  के जोड़े।

**हल :**  $(3a - 4b - 7) - (8a^2 + 4b^2)$   
 $= 3a + 4b - 7 + 8a^2 - 4b^2$   
 $= 3a - 4b - 7 + 8a^2 + 4b^2 = 8a^2 + 4b^2 + 3a - 4b - 7$

यहाँ दोनों लंजकों में कोई पद समान नहीं है। अतः संखेका के बाद पदों की संख्या बढ़ जाती है।

## प्रश्नावली-9.2

### 1. निम्नलिखित व्यंजकों को जोड़ें—

- |  |                                 |
|--|---------------------------------|
| (a) $6ab - 4b + 7ba$                                   | (b) $8x^2y - 4x^2y$             |
| (c) $x$ एवं $y - 1$                                    | (d) $x - y, y - z$ एवं $z - x$  |
| (e) $3ab - b$ एवं $3b - ab$                            | (f) $x^2 - y^2$ एवं $y^2 - x^2$ |
| (g) $a^2 + 2ab + b^2$ एवं $a^2 - 2ab + b^2$            |                                 |
| (h) $a^2b + ab + a^2$ एवं $-ab + 2ba + 2a^2b^2$        |                                 |
| (i) $3x + 11$ एवं $5x - 7$                             |                                 |
| (j) $x^2 - y^2 - 1, y^2 - 1 - x^2$ एवं $1 - x^2 - y^2$ |                                 |

### 2. घटाइये—

- |  |                                    |
|--|------------------------------------|
| (a) $3a^2$ में से $-a^2$                           | (b) $a^2 + b^2$ में से $a^2 - b^2$ |
| (c) $a^2 + 2ab + b^2$ में से $a^2 - 2ab + b^2$     |                                    |
| (d) $b(3 - a)$ में से $a(b - 3)$                   |                                    |
| (e) $3xy - 2x^2 - 2y^2$ में से $5x^2 - 7xy - 5y^2$ |                                    |

### 3. सरल करें—

- (a)  $4xy - 7x^2y - 6xy + 2yz^2 - 4y^2z - 3yz^2$   
 (b)  $a^2 + ab + b^2 + a^2 + b^2 - ab + 3$

### 4. $x^2 + y^2$ प्राप्त करने के लिए $2x^2 + y^2 - 3$ में क्या जोड़ें।

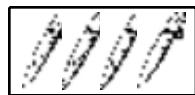
5.  $a+b+c$  प्राप्त करने के लिए  $7a-8b$  में क्या घटाना चाहिए।
6. यदि सुनील ने  $a$  रु. की दर से 5 कलम  $b$  रु. की दर से 7 पेसिलें एवं पुनः  $a$  रु. की दर से 10 कलमें एवं  $b$  रु. की दर से 3 पेसिलें खरीदीं तो उसने कुल कलम एवं पेसिल खरीदने में कितने रुपये खर्च किये?

#### 9.4 बीजीय व्यंजकों का गुण

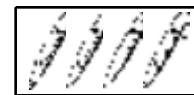
आलिनी के पत्त 3 डिब्बे हैं प्रत्येक  $\text{₹ } 2$  कलम है तो कुल कलमों की संख्या क्या होगी?



$$= 4$$



$$= 4$$



$$= 4$$

$$= 3 \times 4$$

डिब्बे की संख्या  $\times$  प्रत्येक डिब्बे में कलमों की संख्या

यदि शालिनी ले पास डिब्बों की संख्या  $x$  हो एवं प्रत्येक डिब्बे में  $y$  कला हो तो कुल कलम  $= x \times y$

$$= xy$$

पुनः यदि मान लें कि शालिनी के पास  $2x$  डिब्बे हैं एवं प्रत्येक डिब्बे में  $3y$  कला है तो कुल कला  $= 2x \times 3y$

$$= 2 \times 3 \times x \times y$$

$$= 6xy$$

परं यदि मान लें कि शालिनी के पास  $2m$  डिब्बे हैं एवं प्रत्येक डिब्बे में  $3m$  कलम है तो कुल कला  $= 2m \times 3m$

$$= 2 \times 3 \times m \times m$$

$$= 6m^2$$

इस प्रकार हमने देखा कि व्यंजकों का गुण यास्तर ने उनके बदल का गुण हता है जिसमें पदों के गुणांकों का गुण अपने में एवं वर्तों का गुण आपस में लोगा है।

- अब आप रोचिए कि हम दीजीय व्यंजकों के द्वारा का उपयोग कौन कहो-लगाए करते हैं?

## आइए कुछ करें

नीचे दिये गए व्यंजकों के गुणानुसार पैटर्न के आधार पर रिक्त स्थानों में इन्हें—

क्र.	प्रथम व्यंजक	द्वितीय व्यंजक	प्रथम व्यंजक × द्वितीय व्यंजक	द्वितीय व्यंजक × प्रथम व्यंजक	गुणनफल
1.	$x$	$y$	$x \times y$	$y \times x$	$xy$
2.	$x$	5			
3.	$a$	$2a$			
4.	$-3$	$3m$			

उपर्युक्त उदाहरण के ऊपर वर हैं। यह साधा ऐसे ही के व्यंजकों का गुणनफल के लिए ही लाभान्वयन है। इसने गुणा के सामान्य नियमों का वालन होता है।

व्यंजकों के गुणा करते समय यूनिकों के गुणों की नियम वाली पर ध्यान दिया जाना चाहिए।

(i) यदि दो यूनिकों को उन यूनिक से गुणा करने पर उन यूनिक प्राप्त होते हैं—

$$(+a) \times (+b) = +ab$$

(ii) यदि दो यूनिक के बीच यूनिक से गुणा करने पर उन यूनिक प्राप्त होता है—

$$(+a) \times (-b) = -ab$$

(iii) यदि दो यूनिक के बीच यूनिक से गुणा करने पर उन यूनिक प्राप्त होता है।

$$\text{यदि दो यूनिक के बीच यूनिक से गुणा करने पर उन यूनिक प्राप्त होता है।}$$

पहले व्यंजक के प्रत्येक वद से दूसरे व्यंजक के प्रत्येक वद में गुण किया जाना चाहिए।

$a \times (b+c)$  है तो  $a$  से व्यंजक  $(b+c)$  के जाने पद,  $b$  एवं  $c$  में गुण किया जाना चाहिए।

**उदाहरण—7.** गुणा करें—

- (a)  $a$  एवं  $(b+c)$  का  $\quad$  (b)  $a$  एवं  $(b-c)$  का  $\quad$  (c)  $-3m$  एवं  $(-6m-7n)$  का  $\quad$
- (d)  $xy$  एवं  $(9+8x)$  का  $\quad$  (e)  $-x$  एवं  $(4x-y)$  का  $\quad$

**हल :** (a)  $(a) \times (b + c) = a \times b + a \times c$   
 $= ab + ac$

(b)  $(a) \times (b - c) = a \times b - a \times c$   
 $= ab - ac$

(c)  $(-3m) \times (-6m - 7n) = (-3m) \times (-6m) - (-3m) \times 7n$   
 $= -18m^2 - 21mn$   
 $= 18m^2 + 21mn$

(d)  $(xy) \times (9 + 8x) = xy \times 9 + xy \times 8x$   
 $= 9xy + 8x^2y$

(e)  $(-x) \times (4x - y) = (-x) \times (4x) - (-x) \times y$   
 $= -4x^2 + xy$

### प्रश्नावली—9.3

1. नीचे दिए गए बीजीय व्यंजकों का गुण कीजिए—

- |  |                               |
|--|-------------------------------|
| (a) $(7a + 2b)(a + 4b)$                    | (b) $(x - 6)(4x - 9)$         |
| (c) $(5x - 1)(3y - 0)$                     | (d) $(a^3 - b^3)(a - b)$      |
| (e) $(0.7x - 0.2y)(1.5x - 3y)$             | (f) $(3a^2 + 5a - 9)(3a - 9)$ |
| (g) $(x - y)(x - y)$                       | (h) $(x^2 - 5x + 8)(x^2 + 3)$ |
| (i) $(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y)(x - y)$ | (j) $(3pq - 3q)(3q - 7pq)$    |

2 सरल करें—

- |  |
|--|
| (a) $(a + b)(a - b) + (a - b)(a^2 + ab - b^2)$ |
| (b) $a^3 - b^3 - (a - b)(a^2 - ab + b^2)$      |
| (c) $m^2 - n^2 - (m - n)(m + n)$               |
| (d) $(2a + 5b)(3b - 4a) - (7a + 3b)(2a + b)$   |

## हमने सीखा

1. अग्रात संख्या के उकार संकेतों द्वारा लिख जाते हैं जिन्हें चर कहते हैं। चरों के मान बदल सकते हैं।
2. अबरों के मान निश्चिक होते हैं।
3. इरों, अवरों या देरों के मणितीय रॉफ़िक्स द्वारा शीजीय लंगल द्वारा किये जाते हैं।
4. शीजीय लंगक वर्दों से निलकर बने होते हैं जो वर एवं ऊवर के मणितीय रॉफ़िक्याओं के द्वारा बने होते हैं।
5. वर्दों के सार्विक गुणनखंड के पद का गुणांक कहते हैं।
6. यांत्रे पर्दों का शीजीय गुणनखंड राशी हो तो वे राशी पद होते हैं।
7. यांत्रे पर्दों का शीजीय गुणनखंड ऊर गान हो तो वे ऊर गान पद होते हैं।
8. शीजीय लंगक में पर्दों की संख्या के आधार पर इन्हें छोपदी, द्विपदी, त्रिपदी या बहुपद के एकार में बोला जाता है।
9. लंगक वे बहुपद भी कहते हैं।
10. जिन लंगकों गं एक चर होते हैं वे एक चर वाले लंगक लहजाते हैं, जिन लंगकों गं दो चर होते हैं वे तो चर वाले लंगक होते हैं।
11. दो समान पदों का जोड़ (या घटाव) एक अन्य समान पद होता है जिसका गुणांक उन सनान पदों के गुणांकों का जोड़ (या घटाव) के बराबर होता है।
12. असमान पदों का जोड़ते (या घटाते) सनय उन्हें वैसे ही छड़ दिया जाता है।  
**जैसे—**  $3x + 2y = 3x + 2y$
13. जब हम दो या उचित लंगकों को जोड़ते हैं तो वर्तव में हम उनके राशीनपदों को जोड़ते या घटाते हैं एवं स्वामान पदों को उन्होंका लोड देते हैं।
14. लंगकों के गुणा में वरों के वरों के साथ एवं अवरों का अवर के साथ गुणा करते हैं।
15. यांत्रे किसी दो का ऊवर के साथ गुणा हो तो उन्हें उभया में गुण भिन्न के साथ लिख देते हैं जैसे  $2 \times x = 2x$ ।

गोर

## अध्याय-10

# राशियों की तुलना

### 10.1 भूमिका

हमें अपने दैनिक जीवन में अनेक बार ऐसे अवसर प्राप्त होते हैं जहाँ पर दो राशियों की तुलना करने की आवश्यकता पड़ती है।



मान लीजिए दो पेड़ों की ऊँचाई की तुलना कर रहे हैं हम पाते हैं कि

(i) खजूर, केले से 3 गुना लम्बा है।

अथवा

(ii) केले की ऊँचाई, खजूर की ऊँचाई की एक तिहाई है।



अतः केले के पेड़ और खजूर के पेड़ की ऊँचाई का अनुपात  $1:3$  है।

एक और उदाहरण पर विचार कीजिए जिसमें हम साइकिल व स्कूटर की चालों की तुलना करते हैं।



15 किमी./घंटा

(i) स्कूटर की चाल साइकिल के चाल की 4 गुना है।

(ii) या साइकिल की चाल स्कूटर की चाल का  $1/4$  वाँ भाग है।



60 किमी./घंटा

साइकिल एवं स्कूटर की चालों का अनुपात  $1:4$  है।

### प्रयास कीजिए

- रवीन्द्र एवं किशोर द्वारा गणित में प्राप्त अंक क्रमशः 65 एवं 62 हैं। इनके अंकों का अनुपात बताइए?
- 5:7 का व्युत्क्रम अनुपात क्या होगा?

**उदाहरण-1 :** एक बक्से की लम्बाई 2 मीटर एवं चौड़ाई 80 सेमी. है। इसकी लम्बाई एवं चौड़ाई में अनुपात ज्ञात कीजिए।

**हल:** पहले दोनों राशियों को एक ही इकाई में लिखते हैं।

$$\text{अतः } 2 \text{ मीटर} = 2 \times 100 \text{ सेमी.} = 200 \text{ सेमी.}$$

$$\text{इस प्रकार लम्बाई : चौड़ाई} = 200 \text{ सेमी.} : 80 \text{ सेमी.}$$

$$\boxed{\text{ध्यान रहे कि तुलना करते समय दोनों राशियों की इकाइयाँ भी समान होनी चाहिए।}} = \frac{200}{80} = \frac{5}{2} = 5:2$$

**उदाहरण-2 :** यदि प्रवीण की ऊँचाई 150 सेमी. तथा गुंजन की ऊँचाई 60 सेमी. है तब उनकी ऊँचाइयों का अनुपात क्या होगा?

**हल :** प्रवीण की ऊँचाई : गुंजन की ऊँचाई = 150 सेमी. : 60 सेमी.

$$= \frac{150}{60} = \frac{5}{2} \text{ (दोनों पदों में 30 से भाग देने पर)}$$

यदि उपर्युक्त दोनों उदाहरणों पर ध्यान दें तो आप पायेंगे कि दो विभिन्न स्थितियों में तुलना करने पर एक ही अनुपात भी मिल सकता है।

**अनुपात का सरलतम रूप (Simplest form of ratio):** अनुपात का सरलतम रूप तब होता है जबकि इसके पूर्व एवं उत्तर दोनों पदों में इन्हें विभाजित करने वाली कोई उभयनिष्ठ संख्या न हो।

**उदाहरण-3 :** 36 तथा 24 में क्या अनुपात है? इसका सरल अनुपात ज्ञात कीजिए।

**हल:** 36 तथा 24 में अनुपात = 36:24

36 तथा 24 का महत्तम समापवर्तक हेतु क्रिया

$$\begin{array}{r} \text{म.स.} = 2 \times 2 \times 3 = 12 \\ 2 \mid 36, 24 \\ 2 \mid 18, 12 \\ 3 \mid 9, 6 \\ 3, 2 \end{array}$$

$$(36 \div 12) : (24 \div 12) = 3:2$$

$$\text{सरल अनुपात} = 3:2$$

**सरलतम अनुपात प्राप्त करने के लिए अनुपात के दोनों पदों में इनके महत्तम समापवर्तक का भाग देते हैं। प्राप्त भागफल का अनुपात सरलतम अनुपात होता है।**

## 10.2 तुल्य अनुपात

विभिन्न अनुपातों की भी आपस में तुलना की जा सकती है, जिससे यह पता चल सके कि वे तुल्य हैं अथवा नहीं। ऐसा करने के लिए हमें अनुपातों को पहले भिन्नों के रूप में लिखना पड़ता है और फिर उन्हें समान हर वाली भिन्नों में बदलकर उनकी तुलना करते हैं। यदि ये भिन्ने समान हैं तब हम कहते हैं कि दिये हुए अनुपात तुल्य हैं।

**उदाहरण-4 :** क्या अनुपात  $2 : 3$  अनुपात  $3 : 5$  के तुल्य हैं?

**हल:** जाँच करने के लिए, हमें देखना होगा कि क्या  $\frac{2}{3} = \frac{3}{5}$  है?

$$\text{हम पाते हैं } \frac{2}{3} = \frac{2 \times 5}{3 \times 5} = \frac{10}{15} \quad \text{तथा } \frac{3}{5} = \frac{3 \times 3}{5 \times 3} = \frac{9}{15}$$

$$\text{हम देखते हैं कि } \frac{10}{15} > \frac{9}{15} \text{ है। अर्थात् } \frac{2}{3} > \frac{3}{5} \text{ है।}$$

अतः अनुपात  $2 : 3$  अनुपात  $3 : 5$  के तुल्य नहीं है।

**उदाहरण-5 :** क्या अनुपात  $5 : 6$  अनुपात  $25 : 30$  के तुल्य हैं?

**हल:** जाँच करने के लिए, हमें देखना होगा कि क्या  $\frac{5}{6} = \frac{25}{30}$  है?

$$\text{हम पाते हैं } \frac{5}{6} = \frac{5 \times 5}{6 \times 5} = \frac{25}{30} \quad \text{तथा } \frac{25}{30} = \frac{25 \times 1}{30 \times 1} = \frac{25}{30}$$

$$\text{हम देखते हैं कि } \frac{25}{30} = \frac{25}{30} \text{ है। अर्थात् } \frac{5}{6} = \frac{25}{30} \text{ है।}$$

अतः अनुपात  $5 : 6$  अनुपात  $25 : 30$  के तुल्य हैं।

**समानुपात (Proportion) :** इलेश ने एक आदमी का चित्र बनाया लेकिन इस चित्र में गड़बड़ी हुई। इसमें आदमी का सिर, धड़ की अपेक्षा अधिक बड़ा दिख रहा है। हम जानते हैं कि आदमी के सिर व उसके धड़ के चित्र में एक निश्चित अनुपात होता है वही अनुपात उसके चित्र में भी नजर आना चाहिए। अर्थात् चित्र का सिर व धड़ वास्तविक आदमी के सिर व धड़ के समानुपात में होना चाहिए।



$$\text{अर्थात् } \frac{\text{आदमी के सिर का आकार}}{\text{उसके धड़ का आकार}} = \frac{\text{चित्र में सिर का आकार}}{\text{चित्र में धड़ का आकार}}$$

ऐसा होने पर ही सही अनुपात में चित्र बनेगा।

अभी हमने देखा है कि दो अनुपात तुल्य भी हो सकते हैं। दो अनुपात यदि तुल्य हों तो वे एक समानुपात बनाते हैं।

आइए इसका एक उदाहरण लेते हैं—

यदि 10 कुर्सियों का मूल्य 3000 रुपये हैं तथा इसी प्रकार की 12 कुर्सियों का मूल्य 3600 रुपये हैं तो,

$$\text{कुर्सियों की संख्या में अनुपात} = 10:12 \text{ या } 5:6$$

$$\text{कुर्सियों के मूल्यों में अनुपात} = 3000:3600 \text{ या } 5:6$$

स्पष्ट है कि  $10:12 = 3000 : 3600$

अर्थात् कुर्सियों की संख्या में वही अनुपात है जो उनके मूल्यों में अनुपात है।

**यदि दो अनुपात परस्पर बराबर होते हैं तो उन्हें समानुपात कहते हैं। संख्याओं को समानुपात में होने पर दो अनुपातों के बीच :: चिह्न रखते हैं।**

अर्थात् यदि  $a:b$  तथा  $c:d$  आपस में बराबर हैं तो  $a:b = c:d$  को समानुपात कहते हैं।  $a,b,c$  तथा  $d$  को समानुपाती संख्याएँ (Numbers in Proportion) कहते हैं। संख्याओं को समानुपात में रखने पर  $a:b :: c:d$  लिखा जाता है। इन चारों पदों में पहला ( $a$ ) तथा चौथा ( $d$ ) पदों को बाह्य पद (Extreme Term) कहते हैं। दूसरे ( $b$ ) तथा तीसरे ( $c$ ) पदों को अंतः या मध्य पद (Middle Term) कहते हैं।

$$\text{यदि } a:b :: c:d \text{ हैं तो } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

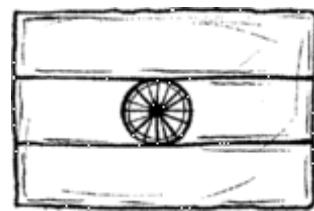
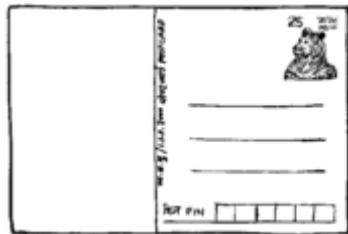
या  $a \times d = b \times c$  अर्थात् बाह्य पदों का गुणनफल = मध्य पदों का गुणनफल

यदि  $ad \neq bc$  तो  $a,b,c$  और  $d$  समानुपात में नहीं कहे जाते हैं।

वास्तविक जीवन में समानुपातों के व्यापक उपयोग ऐकिक नियम, नक्शा का चित्रांकन, समानुपातिक चित्रांकन इत्यादि में किया जाता है।

क्या आप जानते हैं कि राष्ट्रीय झंडे, पोस्टकार्ड इत्यादि लम्बाई एवं चौड़ाई के एक निश्चित अनुपात में ही बनाये जाते हैं, वह अनुपात अलग-अलग देशों के लिए भिन्न हो सकता

हैं ऐसा इसलिए क्योंकि जब सही अनुपात में कोई चित्र बनाया जाता है तभी वह देखने में मोहक एवं आकर्षक लगता है।



चित्र-10.2

हमने कक्षा-6 में एकिक विधि द्वारा प्रश्न हल करना सीखा है। इस विधि द्वारा पहले हम अनेक से एक और फिर वांछित संख्या के लिए मान ज्ञात करते हैं। आइए हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

**उदाहरण-6 :** यदि 6 बल्बों की कीमत 78 रु. है, तो ऐसी ही 9 बल्बों की कीमत क्या होगा?

**हल:** इसे राजेश व सुनील ने अलग-अलग तरीकों से हल किया-

**प्रथम विधि : (राजेश)**

$$\text{चूंकि } 6 \text{ बल्बों की कीमत } = 78 \text{ रु.}$$

$$\text{अतः } 1 \text{ बल्ब की कीमत} = \frac{78}{6}$$

$$\text{अतः, } 9 \text{ बल्बों की कीमत} = \frac{78}{6} \times 9 = 117 \text{ रु.}$$

**दूसरी विधि : (सुनील)**

कीमत	78	$x$
बल्बों की संख्या	6	9

माना कि 9 बल्बों की कीमत  $x$  रु. है।

$$\text{तो } 78 : x :: 6 : 9 \quad \text{या, } \frac{78}{x} = \frac{6}{9} \quad \text{या, } 78 \times 9 = 6 \times x$$

$$\text{या, } \frac{78 \times 9}{6} = x \quad \text{या, } x = 117 \text{ रु.}$$

अतः 9 बल्बों की कीमत = 117 रु.

दूसरी विधि में पहले समानुपात बनाकर फिर एक समीकरण प्राप्त किया और हल निकाला। पहली विधि में पहले 1 वस्तु की कीमत निकालकर फिर वांछित वस्तुओं की कीमत ज्ञात की। इस प्रकार इसमें ऐकिक विधि का प्रयोग किया गया।

आइए, एक अन्य उदाहरण लेते हैं :-

**उदाहरण-7 :** एक मजदूर 15 दिनों में 1815 रु. कमाता है। यदि वह 8 दिनों तक ही काम करना चाहे तो उसे कितनी मजदूरी प्राप्त होगी?

**हल:** **पहली विधि:** चूँकि 15 दिनों की मजदूरी = 1815 रु.

$$\text{अतः } 1 \text{ दिन की मजदूरी} = \frac{1815}{15} = 121 \text{ रु.}$$

$$\text{अतः } 8 \text{ दिनों की मजदूरी} = 121 \times 8 \text{ रु.} = 968 \text{ रु.}$$

**दूसरी विधि :**

मजदूरी (रु. में)	1815	$x$
दिनों की संख्या	15	8

माना कि मजदूरी  $x$  रु. है

$$\text{तो } 1815:x::15:8 \Rightarrow \frac{1815}{x} = \frac{15}{8} \Rightarrow 1815 \times 8 = x \times 15$$

$$\Rightarrow \frac{1815 \times 8}{15} = x \Rightarrow x = 968 \text{ रु.}$$

### प्रश्नावली-10.1

#### 1. अनुपात ज्ञात कीजिए—

- |                                |                              |
|--------------------------------|------------------------------|
| (a) 3 किग्रा. का 600 ग्रा. से। | (b) 2 घंटे का 30 मिनट से।    |
| (c) 340 सेमी. का 4 मीटर से।    | (d) 75 रुपये का 200 पैसे से। |

#### 2. निम्नलिखित अनुपातों का सरलतम रूप लिखिए—

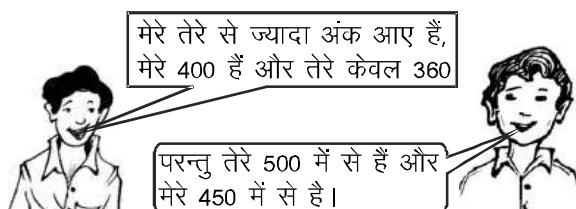
- |           |            |            |
|-----------|------------|------------|
| (a) 45:60 | (b) 144:84 | (c) 184:12 |
|-----------|------------|------------|

3. उपेन्द्र का वेतन 42000 रु. प्रतिमाह है और वह प्रतिमाह 6000 रु. आयकर में जमा करते हैं। ज्ञात कीजिए—
- आय का आयकर के साथ अनुपात
  - आयकर का आय के साथ अनुपात
  - क्या ये दोनों अनुपात तुल्य हैं?
4. एक रिबन (Ribbon) की लम्बाई 10 मीटर एवं इसकी चौड़ाई 25 सेमी. है। निम्न का अनुपात ज्ञात कीजिए—
- लम्बाई का चौड़ाई के साथ
  - चौड़ाई का लम्बाई के साथ
  - क्या दोनों अनुपात तुल्य हैं?
5. निम्नलिखित अनुपातों का दो तुल्य अनुपात ज्ञात कीजिए—
- 3:7
  - 4:9
6. यदि किसी समानुपात के प्रथम तीन पद 3, 5 तथा 12 है तो चौथा पद ज्ञात कीजिए।
7. यदि  $3:x::9:15$  हो तो  $x$  का मान ज्ञात कीजिए।
8. बाजार में केले 18 रु. प्रति दर्जन बिक रहे हैं, तो 10 केलों का मूल्य क्या होगा?
9. मिठाई बनाने में चीनी और खोये का अनुपात  $3:7$  रखा जाये तो 12 किग्रा. चीनी की मिठाई बनाने हेतु कितने खोये की आवश्यकता होगी?
10. एक मोटरसाइकिल 2 ली. में 120 किमी. दूरी तय करता है। बताइए 300 किमी. दूर तक जाने में कितने लीटर पेट्रोल की आवश्यकता होगी?
11. एक मकान का 4 माह का किराया 10,000 रुपये हैं तो पूरे वर्ष का किराया बताइए।

### 10.3 प्रतिशतता (Percentage)

अभिषेक व अनवर के आज परीक्षाफल आये हैं। वे दोनों अपना परीक्षाफल देखकर बात करते हैं।

	अभिषेक	अनवर
पूर्णांक	500	450
प्राप्तांक	400	360



आप बताइए किसका परीक्षाफल अच्छा रहा?

दोनों अनवर की बड़ी बहन शबनम के पास जाते हैं। शबनम ने कहा बिना कुल अंक देखे इस तरह तुलना नहीं की जा सकती है।

इसमें हम पूर्णांकों के एक समान आधार पर प्राप्तांकों की तुलना करनी होगी। आधार समान करने के लिए हमने ऐकिक नियम भी पढ़ा है।

$$\text{अनवर के } 450 \text{ में से प्राप्त अंक} = 360 \quad \text{अभिषेक के } 500 \text{ में से प्राप्त अंक} = 400$$

$$\text{अनवर के } 1 \text{ में से प्राप्त अंक} = \frac{360}{450}$$

$$\text{अनवर के } 500 \text{ में से प्राप्त अंक} = \frac{360}{450} \times 500 = 400$$

इस प्रकार दोनों के अंकों की एक समान आधार 500 पर तुलना करने पर हमें पता चला कि दोनों का परीक्षाफल समान हैं।

इस प्रकार तुलना करने के लिए आधार रूप में 100, 1000, 10000 या किसी भी अन्य सुविधाजनक संख्या का प्रयोग कर सकते हैं।

$$\text{पुनः अभिषेक के } 500 \text{ में से प्राप्त अंक} = 400$$

$$\text{अभिषेक के } 1 \text{ में से प्राप्त अंक} = \frac{400}{500}$$

$$\text{अभिषेक के } 100 \text{ में से प्राप्त अंक} = \frac{400}{500} \times 100 = 80$$

$$\therefore \text{अनवर के } 450 \text{ में से प्राप्त अंक} = 360$$

$$\text{अनवर के } 1 \text{ में से प्राप्त अंक} = \frac{360}{450}$$

$$\text{अनवर के } 100 \text{ में से प्राप्त अंक} = \frac{360}{450} \times 100 = 80$$

इस प्रकार दोनों के 100 में से प्राप्त अंक क्रमशः 80, 80 हैं।

इस प्रकार तुलना करने के लिए यदि समान आधार 100 लेते हैं तब इसे प्रतिशत कहते हैं।

"प्रतिशत एक भिन्न है जिसका हर सदा 100 रहता है और अंश प्रतिशत की संख्या होती है।"

प्रतिशत को संकेत में % द्वारा प्रदर्शित करते हैं। जैसे — 50 प्रतिशत का अर्थ है प्रत्येक 100 में 50। इसे संकेत में 50% लिखते हैं। इसका भिन्न रूप  $\frac{50}{100}$  है तथा इसको दशमलव में 0.5 लिखते हैं। इस प्रकार "प्रतिशत को साधारण भिन्न या दशमलव के रूप में भी प्रकट किया जा सकता है।"

### 10.3.1 भिन्न संख्याओं को प्रतिशत में बदलना—

भिन्न संख्याओं में हर कोई भी संख्या हो सकती है। उनकी तुलना करने के लिए हमें उनके हरों को समान करना पड़ता है, और देख चुके हैं कि जब उनमें प्रत्येक का हर 100 हो तो तुलना करना ज्यादा आसान होता है यानी हम भिन्नों को प्रतिशत में बदल रहे हैं। आइए अब हम कुछ भिन्नों को प्रतिशत में बदलने का प्रयत्न करें।

**उदाहरण—8.**  $\frac{3}{5}$  को प्रतिशत रूप में लिखिए।

$$\text{हल : } \frac{3}{5} \text{ का प्रतिशत रूप} = \frac{3 \times 100}{5 \times 100} = \frac{3 \times 20}{100} = \frac{60}{100} = 60\%$$

**उदाहरण—9.** किसी कक्षा के 32 विद्यार्थियों में से 8 अनुपस्थित हैं। अनुपस्थित विद्यार्थियों का प्रतिशत क्या है? विद्यार्थियों की प्रतिशत उपस्थिति भी ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल : } \text{कक्षा के कुल विद्यार्थियों की संख्या} = 32$$

$$\text{अनुपस्थित विद्यार्थियों की संख्या} = 8$$

$$\text{अनुपस्थित विद्यार्थियों का प्रतिशत} = \left( \frac{8}{32} \times 100 \right)\% = \frac{1}{4} \times 100$$

$$= \frac{100}{4} = 25\%$$

$$\text{अथवा, उपस्थित विद्यार्थियों का प्रतिशत} = 100 - \text{अनुपस्थित विद्यार्थियों का प्रतिशत}$$

$$= (100 - 25)\% = 75\%$$

### प्रयास कीजिए

1. निम्नलिखित भिन्नों को प्रतिशत में बदलिए।

$$(i) \frac{8}{25} \quad (ii) 5\frac{1}{4} \quad (iii) \frac{4}{4} \quad (iv) \frac{49}{50}$$

2. एक दुकान में विभिन्न आकारों के निम्नलिखित जोड़े जूते उपलब्ध हैं—

आकार	2	3	4	5	6
जूतों की संख्या	20	30	28	14	8

प्रत्येक आकारों में उपलब्ध जूते का प्रतिशत क्या है?

### 10.3.2 दशमलव भिन्न को प्रतिशत में बदलना—

आइए कुछ उदाहरण लें—

**उदाहरण—10.** दिए गए दशमलव को प्रतिशत में बदलिए—

$$(a) 0.49 \quad (b) 3.75 \quad (c) 0.009$$

हल : (a)  $0.49 = \frac{0.49 \times 100}{100} = \frac{49}{100} = 49\%$

(b)  $3.75 = \frac{3.75 \times 100}{100} = \frac{375}{100} = 375\%$

(c)  $0.009 = \frac{0.009 \times 100}{100} = \frac{0.9}{100} = 0.9\%$

अतः स्पष्ट है कि यदि कोई दशमलव का प्रतिशत में बदलना हो तो हर को 100 रखते हुए दशमलव को भिन्न में बदलते हैं।

### स्वयं करके देखिए

निम्नलिखित दशमलवों को प्रतिशत में बदलिए।

$$(a) 0.33 \quad (b) 4.5 \quad (c) 6.75$$

### **10.3.3 प्रतिशत को साधारण भिन्न या दशमलव में बदलना—**

अभी तक हमने साधारण या दशमलव भिन्न को प्रतिशत में बदला। सोचिए क्या हम इसके विपरीत किसी प्रतिशत को साधारण या दशमलव भिन्न में बदल सकते हैं।

आइए कुछ उदाहरण लेकर देखें—

**उदाहरण-11.** निम्न प्रतिशत को साधारण भिन्न में बदलिए-

- (a) 75%      (b) 20%      (c)  $3\frac{1}{5}\%$

**हल :** (a)  $75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$  (b)  $20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$

$$(c) \quad 3\frac{1}{5}\% = \frac{16}{5}\% = \frac{16}{5 \times 100} = \frac{4}{125}$$

हमने देखा कि एक प्रतिशत को भिन्न में बदलते समय संख्या का हर 100 रखते हुए लिखते हैं और इस भिन्न का लघुतम रूप प्राप्त करते हैं।

**उदाहरण-13.** प्रतिशत को दशमलव में बदलिए-

- (a) 40%  (b)  12  $\frac{1}{5}\%$  (c) 10.2%

$$\text{हल : } (a) \quad 40\% = \frac{40}{100} = 0.40$$

$$(b) \quad 12\frac{1}{5}\% = 12.2\% = \frac{12.2}{100} = 0.122$$

 (c)  $10.2\% = \frac{10.2}{100} = 0.102$

स्पष्ट है कि प्रतिशत को भिन्न में बदलते समय सर्वप्रथम हर को 100 रखते हैं और तब इस भिन्न के अंश को 100 से भाग देकर दशमलव में बदलते हैं।

#### 10.3.4 अनुमान के साथ मनोरंजन

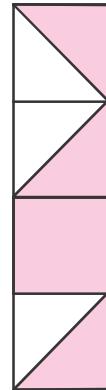
प्रतिशत्ता एक दिए गए क्षेत्रफल के किसी भाग का अनुमान लगाने में भी सहायता करती है।

### आइए, कुछ उदाहरण लें

- (a) हमें दी गई आकृति में पूर्ण आकृति का कितना भाग छायांकित है, ज्ञात करना है। इसके लिए सबसे पहले भिन्न से छायांकित भाग की प्रतिशतता ज्ञात कर लेते हैं।

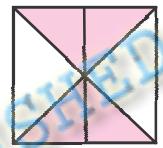
$$\text{चित्र में } \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{1+1+2+1}{8} = \frac{5}{8}$$

तथा  $\frac{5}{8} = \left( \frac{5}{8} \times 100 \right)\% = \frac{500}{8}\% = 62.5\%$  इस प्रकार 62.50% छायांकित भाग है।



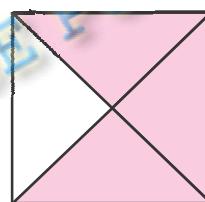
- (b) चित्र से स्पष्ट है कि पूर्ण आकृति का आधा भाग छायांकित है।

$$\text{अतः } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 100\% = 50\% \quad \text{इस प्रकार } 50\% \text{ छायांकित भाग है।}$$



### प्रयास कीजिए

निम्न चित्रों में रंगीन भाग आकृति के कुल क्षेत्र का कितना प्रतिशत हिस्सा है।



(i)



(ii)

### 10.4 प्रतिशतता के उपयोग

10.4.1 अभी तक हमने यह देखा कि तुलना करने के लिए प्रतिशत कितना उपयोगी है। हमने साधारण एवं दशमलव भिन्नों को प्रतिशत में बदलना भी सीखा। अब निम्न कथनों पर विचार कीजिए—

- शिवम् अपनी आय का 10% बचत करता है।
- जहाँगीर को प्रत्येक पुस्तक बेचने पर 15% का लाभ मिलता है।
- बिहार राज्य की विकास दर 11% पहुँच चुकी है।
- बाजार में खादी वस्त्रों पर 25% की छूट दी गई है।

इन प्रत्येक कथनों से आप क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?

पहले कथन में हमारा तात्पर्य है 100 में से 10 भाग तथा इसे हम लिखते हैं  $\frac{10}{100}$ ।  
इसका अर्थ है कि शिवम् अर्जित किए गए प्रत्येक 100 रु. में से 10 रु. बचाता है। इसी प्रकार आप भी अन्य कथनों के अर्थ लगाइए।

#### 10.4.2 प्रतिशतता से संख्या ज्ञात करना—

आइए एक उदाहरण लें—

**उदाहरण—13.** वर्ग VII के 60 बच्चों के सर्वेक्षण से पता चला कि 30% मध्याह्न भोजन के समय चावल—कढ़ी खाना पसंद करते हैं। तो कितने बच्चों को चावल—कढ़ी खाना पसंद है।

**हल :** वर्ग VII में बच्चों की कुल संख्या 60 है। इनमें से 30% चावल कढ़ी भोजन पसंद करते हैं। कक्षा के अनुपम एवं राखी ने ऐसे बच्चों की संख्या ज्ञात करने के निम्न तरीकों का प्रयोग किया।

#### अनुपम

$$100 \text{ में से चावल कढ़ी भोजन करने वालों की संख्या} = 30$$

$$\therefore 1 \text{ में से चावल कढ़ी भोजन करने वालों की संख्या} = \frac{30}{100}$$

$$\text{अतः } 60 \text{ में से चावल कढ़ी भोजन करने वालों की संख्या} = \frac{30}{100} \times 60 = 18$$

#### राखी

$$60 \text{ का } 30 \text{ प्रतिशत अतः} = 60 \times 30\%$$

$$= 60 \times \frac{30}{100}$$

$$= \frac{60 \times 30}{100} = 18$$

इस प्रकार 60 बच्चों में से 18 बच्चे चावल—कढ़ी भोजन करना पसंद करते हैं।

ऊपर के उदाहरण को ध्यान से देखने पर पता चलता है कि अनुपम ने बच्चों की संख्या ज्ञात करने के लिए ऐकिक विधि का प्रयोग किया। जबकि राखी ने सर्वप्रथम दिए गए प्रतिशत को साधारण भिन्न में बदला है। फिर उसने दी गई राशि को इस साधारण भिन्न से गुणा कर अभीष्ट संख्या प्राप्त की है। आप भी इन विधियों का प्रयोग कर निम्न प्रश्नों को हल करें।

- (a) 400 का 8%      (b) 350 का 20%      (c) 40 का 40%
- दक्ष पूरे वर्ष में 240 दिन चलने वाली पाठशाला में 80% उपस्थित रहा, तो ज्ञात कीजिए कि वह कितने दिन पाठशाला गया?

**उदाहरण—14.** शुभम अपने पिताजी की मासिक आय का 15% बचत करके 450 रुपये जमा कर लेता है। ज्ञात कीजिए कि शुभम के पिताजी की मासिक आय क्या थी?

**हल :** इन प्रश्नों का हल कक्षा में निकालने के लिए शिवम एवं हिना प्रयास करते हैं। आइए देखें दोनों ने शुभम के पिताजी की मासिक आय कैसे ज्ञात किया?

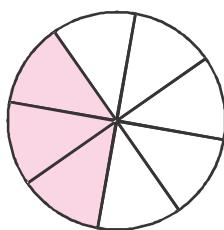
शिवम	हिना
वास्तविक आय का 15% = 450 रु.	$\therefore 15\text{रु. की बचत प्रत्येक } 100\text{रु. पर होती है।}$
माना कि वास्तविक आय $x$ रु. है।	तब 1 रु. की बचत होगी $\frac{100}{15}$
अतः $x$ का 15% = 450	तब 450 रु. पर बचत होगी
अर्थात् $x \times \frac{15}{100} = 450$	$\frac{100}{15} \times 450 = 3000$ रु.
या, $x = \frac{450 \times 100}{15} = 3000$	
अतः $x = 3000$ रु।	

## प्रश्नावली—10.2

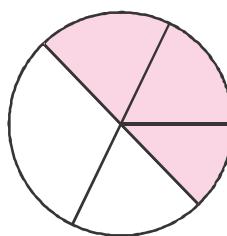
- दी गई भिन्न संख्याओं को प्रतिशत में बदलिए।
  - $\frac{3}{10}$
  - $\frac{2}{5}$
  - $\frac{3}{5}$
  - $\frac{5}{8}$
  - $\frac{7}{12}$
- दी गई दशमलव भिन्नों को प्रतिशत में बदलिए।
  - 0.45
  - 1.25
  - 3.2
  - 0.375
- दिए गए प्रतिशत को साधारण व दशमलव भिन्नों में बदलिए और अपने उत्तर को सरलतम रूप में लिखिए।
  - 25%
  - 18%
  - $12\frac{3}{4}\%$
  - 60%

4. नीचे दिए गए चित्रों का कितना प्रतिशत भाग छायांकित है?

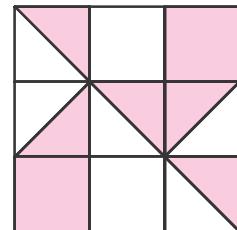
(a)



(b)



(c)



5. एक व्यक्ति की मासिक आय 7000 रु. है तथा वह 1400 रु. प्रतिमाह बचाता है तो वह अपनी आय का कितना प्रतिशत वह खर्च करता है ?
6. एक आदमी अपनी आय का चौथाई भाग भोजन पर, 15% शिक्षा पर तथा 22% किराया पर खर्च करता है। यदि वह 266 रु. बचाता है तो उसकी आय क्या है ?
7. एक शहर की जनसंख्या प्रतिवर्ष 5% बढ़ जाती है। यदि उसकी वर्तमान जनसंख्या 5,14,700 है तो अगले वर्ष इसकी जनसंख्या क्या होगी ?
8. किसी विद्यालय के छात्र संघ के निर्वाचन में अध्यक्ष पद के लिए दो छात्रों में सीधी टक्कर थी। यदि विजयी छात्रा को कुल 55% वोट मिले और वह 70 मतों से विजयी हुआ तो कुल कितने वैध मत पड़े और पराजित प्रत्याशी को कितने वोट मिले ?
9. एक कुर्सी और एक टेबल दोनों की कुल कीमत 2800 रु. है। यदि कुर्सी की कीमत टेबल की कीमत से 40% कम है तो कुर्सी की कीमत बताइए।

#### 10.4.3 अनुपातों से प्रतिशत

कभी—कभी किसी वस्तु या राशि के भाग अनुपात के रूप में दिए होते हैं और हमें उन्हें प्रतिशत के रूप में बदलना पड़ता है। आइए हम एक उदाहरण लेते हैं—

**उदाहरण-15.** गुंजन ने बताया कि खीर बनाने के लिए 1 भाग चावल की मात्रा, 2 भाग चीनी एवं 10 भाग दूध की आवश्यकता होती है। खीर के ऐसे मिश्रण में चावल, चीनी एवं दूध का प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

**हल :** मिश्रण को अनुपात रूप में इस प्रकार लिखा जाएगा।

$$\text{चावल} : \text{चीनी} : \text{दूध} = 1 : 2 : 10$$

अब कुल भाग =  $1 + 2 + 10 = 13$  अर्थात् मिश्रण में  $\frac{1}{13}$  भाग चावल  $\frac{2}{13}$  भाग चीनी

एवं  $\frac{10}{13}$  भाग दूध है।

अतः चावल का प्रतिशत होगा  $\frac{1}{13} \times 100 = \frac{100}{13} = 7\frac{9}{13}\%$

चीनी का प्रतिशत होगा  $\frac{2}{13} \times 100 = \frac{200}{13} = 15\frac{5}{13}\%$

दूध का प्रतिशत होगा  $\frac{10}{13} \times 100 = \frac{1000}{13} = 76\frac{12}{13}\%$

**उदाहरण—16.** यदि 500 रु. को रवि, मुकेश एवं सुरेश में इस प्रकार बाँटे कि रवि को दो भाग मुकेश को तीन भाग एवं सुरेश की पाँच भाग मिले। इस बँटवारे में प्रत्येक को कितना धन मिला तथा उनका प्रतिशत कितना था?

**हल :** प्रत्येक के भाग को अनुपात रूप इस प्रकार लिखा जाएगा।

$$\begin{array}{rcl} \text{रवि} & : & \text{मुकेश} & : & \text{सुरेश} \\ 2 & : & 3 & : & 5 \end{array}$$

सभी भागों का योग  $2 + 3 + 5 = 10$

कुल राशि में प्रत्येक का प्रतिशत

रवि को मिला  $\frac{2}{10} \times 100 = 20\%$

मुकेश को मिला  $\frac{3}{10} \times 100 = 30\%$

सुरेश को मिला  $\frac{5}{10} \times 100 = 50\%$

प्रत्येक को मिली राशि

रवि को मिला  $\frac{2}{10} \times 500 \text{ रु.} = 100 \text{ रु.}$

मुकेश को मिला  $\frac{3}{10} \times 500 \text{ रु.} = 150 \text{ रु.}$

सुरेश को मिला  $\frac{5}{10} \times 500 \text{ रु.} = 250 \text{ रु.}$

### स्वयं कीजिए

- यदि किसी त्रिभुज के कोणों में अनुपात  $2 : 3 : 5$  है तब उसके प्रत्येक कोण की माप क्या होगी?
- 20 वस्तुओं को मोनू एवं सोनू में इस प्रकार बाँटिए कि उन्हें कुल का क्रमशः 30% एवं 70% मिले।

#### 10.4.4 बढ़त या घटत प्रतिशत रूप में

कभी—कभी हमें किसी राशि में हुई बढ़त या घटत को प्रतिशत रूप में ज्ञात कर समझना ऐसे समझने से अधिक उपयुक्त दिखता है।

उदाहरण के लिए यदि किसी शहर की जनसंख्या 2,20,000 से बढ़कर 2,42,000 हो गई तब ऐसी स्थिति में जनसंख्या की वृद्धि को प्रतिशत के रूप में समझना अधिक आसान होता है जैसे यह कहें कि प्रदेश की जनसंख्या 10% बढ़ गई। किसी राशि के बढ़ने या घटने को कुल राशि के प्रतिशत के रूप में गणना करने के लिए आइए एक उदाहरण लें—

**उदाहरण—17.** बढ़त या घटत का प्रतिशत ज्ञात करें, यदि

- (a) किसी कमीज का मूल्य 280 रु. से घटकर 250 रु हो जाता है।
- (b) प्रवीण को जाँच परीक्षा में अंक 40 से बढ़कर 70 हो जाता है।

**हल :** (a) कमीज का सही मूल्य = 280 रु.

कमीज का घटा मूल्य = 250 रु.

मूल्य में कमी =  $(280 - 250)$  रु. = 30 रु.

$$\text{मूल्य में प्रतिशत कमी} = \frac{\text{मूल्य में कमी}}{\text{आधार मूल्य}} \times 100$$

$$= \frac{30}{280} \times 100 = \frac{300}{28} = \frac{75}{7} = 10\frac{5}{7}\%$$

अतः घटने का प्रतिशत  $10\frac{5}{7}\%$  है।

(b) प्राप्तांक में बढ़त =  $70 - 40 = 30$

$$\text{प्राप्तांक में प्रतिशत बढ़त} = \frac{\text{बढ़ा हुआ प्राप्तांक}}{\text{प्रारंभ का प्राप्तांक}} \times 100$$

$$= \frac{30}{40} \times 100 = 75\%$$

अर्थात् प्राप्तांक में 75% की वृद्धि हुई।

### स्वयं करके देखिए

1. किसी शहर की जनसंख्या वर्ष 2005 में 7,00,000 (सात लाख) थी जो कि वर्ष 2010 में 10,00,000 (दस लाख) हो गई। तो जनसंख्या में हुई बढ़त प्रतिशत में ज्ञात कीजिए।
2. किसी विद्यालय के एक विद्यार्थी की फीस 200 रु. प्रतिमाह से बढ़ाकर 250 रु. प्रतिमाह कर देता है। फीस में हुई बढ़त प्रतिशत में ज्ञात कीजिए।
3. किसी देश में पिछले 10 वर्षों में अशिक्षितों की संख्या 125 लाख से घटकर 100 लाख रह गई। घटने का प्रतिशत कितना रहा?

## 10.5 किसी वस्तु से संबंधित मूल्य अर्थात् क्रय तथा विक्रय मूल्य

हमें अपने दैनिक जीवन में अनेक बार वस्तुओं को खरीदने या बेचने की आवश्यकता पड़ती है। एक दुकानदार वस्तुओं को थोक विक्रेता (Whole Seller) के यहाँ से खरीदकर लाता है और कुछ अधिक मूल्य लेकर वह ग्राहक को वस्तुएँ देता है। वस्तुओं को थोक विक्रेता के यहाँ से अपने दुकान तक लाने में उसे वस्तुओं का माल ढोने या कर चुकाने इत्यादि पर भी व्यय करना पड़ता है। आइए, दैनिक जीवन में प्रयोग होने वाले कुछ कथनों को समझने का प्रयत्न करें।

- (i) एक साइकिल 2000 रु. में दुकानदार द्वारा खरीदा गया और 50 रु. रिक्षा भाड़ लगाकर उसे अपने दुकान में लाया फिर उसे 2550 रु. में ग्राहक को बेच दिया।
- (ii) एक फल के दुकानदार ने एक टोकरी सेब 500 रु. में खरीदा और उसे 390 रु. में बेच दिया।

अब पहले कथन पर विचार करते हैं। क्या आप बता सकते हैं कि दुकानदार द्वारा साइकिल खरीदने में कितना मूल्य अदा किया गया? निश्चित रूप से दुकानदार द्वारा साइकिल खरीदने में अदा किया मूल्य =  $(2000 + 50)$  रु. = 2050 रु.

जिस मूल्य पर कोई वस्तु खरीदी जाती है। वह उसका क्रय मूल्य (Cost Price) कहलाता है। इसे संक्षिप्त में क्र. मू. (C.P) लिखा जाता है। वस्तुओं को खरीदने के लिए क्रयमूल्य के अतिरिक्त जो भी व्यय करना पड़ता है यह सभी उपरिव्यय कहलाते हैं और वस्तु के क्रय मूल्य का ही भाग बन जाते हैं।

अतः वस्तु का वास्तविक क्रय मूल्य = क्रय मूल्य + उपरिव्यय

जिस मूल्य पर कोई वस्तु बेची जाती है, वह उसका विक्रय मूल्य (Selling Price) कहलाता है और उसे संक्षिप्त में वि. मू. (S.P) लिखा जाता है।

अब स्पष्ट है कि साइकिल का क्रय मूल्य 2050 रु. एवं विक्रय मूल्य 2550 रु. है। इसी प्रकार सेब का क्रय मूल्य 500 रु. एवं विक्रय मूल्य 390 रु. है।

ऊपर के कथनों पर गौर करने के बाद स्पष्ट है कि जहाँ साइकिल का क्रय मूल्य से विक्रय मूल्य अधिक है वही सेब का क्रय मूल्य से विक्रय मूल्य कम है।

अतः यदि किसी वस्तु का विक्रय मूल्य उस वस्तु के क्रय मूल्य से अधिक हो तो (बेचने वाले को) **लाभ** होता है।

यदि क्रय मूल्य < विक्रय मूल्य

$$\text{तब लाभ (Profit)} = \text{विक्रय मूल्य} - \text{क्रय मूल्य}$$

यदि किसी वस्तु का विक्रय मूल्य उस वस्तु के क्रय मूल्य से कम हो तो (बेचने वाले की) **हानि** होता है।

यदि क्रय मूल्य > विक्रय मूल्य

$$\text{तब हानि (Loss)} = \text{क्रय मूल्य} - \text{विक्रय मूल्य}$$

यदि किसी वस्तु का विक्रय मूल्य उस वस्तु के क्रय मूल्य के बराबर हो तो (बेचने वाले को) ना लाभ तथा ना हानि होता है।

यदि क्रय मूल्य = विक्रय मूल्य हो तब ना लाभ तथा ना हानि होगी।

### 10.5.1 लाभ या हानि, प्रतिशत में

लाभ या हानि को प्रतिशत रूप में भी ज्ञात किया जा सकता है। हमें यह ध्यान में रखना होगा कि लाभ या हानि की गणना सदैव वास्तविक क्रय मूल्य पर ही करते हैं।

आइए उपर्युक्त उदाहरणों में हम प्रतिशत लाभ या प्रतिशत हानि भी ज्ञात कर सकते हैं।

(i) साइकिल का क्रय मूल्य = 2050 रु.

साइकिल का विक्रय मूल्य = 2550 रु.

लाभ = विक्रय मूल्य – क्रय मूल्य

=  $(2550 - 2050)$  रु.

= 500 रु.

प्रतिशत लाभ के लिए रश्मि एवं आलोक ने निम्न विधियाँ काम में ली।

रश्मि	आलोक
$\text{लाभ प्रतिशत} = \frac{\text{लाभ}}{\text{क्रय मूल्य}} \times 100$ $= \frac{500}{2050} \times 100$	$\therefore 2050 \text{ रु. पर } 500 \text{ रु. का लाभ होता है।}$ $\therefore 1 \text{ रु. पर लाभ } \frac{500}{2050} \text{ रु.}$
$\text{अतः लाभ \%} = 24\frac{16}{41}\%$	$\text{अतः } 100 \text{ रु. पर लाभ} = \frac{500}{2050} \times 100$
	$\text{अतः लाभ \%} = 24\frac{16}{41}\%$

(ii) इसी प्रकार आप दूसरे प्रश्न में भी हानि प्रतिशत ज्ञात कर सकते हैं।

यहाँ क्रय मूल्य = 500 रु.      विक्रय मूल्य = 390 रु.

$$\begin{aligned} \text{अतः हानि} &= \text{क्रय मूल्य} - \text{विक्रय मूल्य} \\ &= 500 \text{ रु.} - 390 \text{ रु.} = 110 \text{ रु.} \end{aligned}$$

रश्मि	आलोक
$\text{हानि प्रतिशत} = \frac{\text{हानि}}{\text{क्रय मूल्य}} \times 100$ $= \frac{110}{500} \times 100$	$500 \text{ रु. पर हानि} = 110 \text{ रु.}$
$= 22\%$	$\text{अतः } 100 \text{ रु. पर हानि}$ $= \frac{110}{500} \times 100 = 22 \%$
	$\text{अतः हानि प्रतिशत } 22 \text{ है।}$

**उदाहरण—18.** रामू ने एक पुरानी मोटरसाइकिल 12000 रु. में खरीदी और उसकी मरम्मत इत्यादि में 3000 रु. व्यय किए। उसने यह मोटरसाइकिल 18500 रु. में बेच दी। उसका लाभ या हानि प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

**हल :** पहला तरीका— मोटरसाइकिल का क्रय मूल्य = 12000 रु.  
मरम्मत पर व्यय = 3000 रु.

$$\text{वास्तविक क्रय मूल्य} = (12000 + 3000) \text{ रु.} = 15000 \text{ रु.}$$

$$\text{मोटरसाइकिल का विक्रय मूल्य,} = 18500 \text{ रु.}$$

यहाँ वि. मू. > क्र. मू.

$$\text{अतः लाभ} = \text{वि. मू.} - \text{क्र. मू.} = 18500 \text{ रु.} - 15000 \text{ रु.} = 3500 \text{ रु.}$$

$$\text{लाभ \%} = \frac{3500}{15000} \times 100 \% = 23\frac{1}{3} \%$$

**हल :** दूसरा तरीका—

$$15000 \text{ रु. पर लाभ होता है} = 3500 \text{ रु.}$$

$$1 \text{ रुपये पर लाभ होगा} = \frac{3500}{15000}$$

$$\text{तो } 100 \text{ रुपये पर लाभ होगा} = \frac{3500}{15000} \times 100 \% = 23\frac{1}{3} \%$$

**उदाहरण—19.** एक व्यापारी ने एक किवण्टल गेहूँ 1200 रु. में खरीदा। पानी में भीग जाने के कारण उसे 9 रु. प्रति किलोग्राम के भाव से गेहूँ बेचना पड़ा। ज्ञात कीजिए उसे कितने प्रतिशत लाभ या हानि हुई।

$$\text{हल : यहाँ 1 किवण्टल (100 कि. ग्रा.) गेहूँ का क्रय मूल्य} = 1200 \text{ रु.}$$

$$100 \text{ कि. ग्रा. गेहूँ का विक्रय मूल्य,} = 100 \times 9 = 900 \text{ रु.}$$

यहाँ वि. मू. < क्र. मू.

**पहला तरीका:**

$$\text{अतः हानि} = \text{क्रय मूल्य} - \text{विक्रय मूल्य}$$

$$= 1200 - 900 = 300 \text{ रु.}$$

$$\text{हानि \%} = \frac{\text{हानि}}{\text{क्रय मूल्य}} \times 100$$

$$= \frac{300 \times 100}{1200} = 25$$

$$\text{हानि \%} = 25\%$$

**दूसरा तरीका:**

$$1200 \text{ रुपये पर हानि होती है} = 300$$

$$1 \text{ रुपये पर हानि होगी} = \frac{300}{1200}$$

$$100 \text{ रुपये पर हानि} = \frac{300}{1200} \times 100$$

$$= 25\%$$

**उदाहरण-20.** एक व्यापारी 1 टिन तेल 780 रुपये में खरीदता है। वह उसे प्रति लीटर किस भाव से बेचे कि उसे पूरे में 20% का लाभ हो? (1 टिन में 15 लीटर तेल आता है।)

**हल :** पहला तरीका—

$$\begin{aligned}
 \text{यहाँ } 1 \text{ टिन तेल का क्रय मूल्य} &= 780 \text{ रु.} \\
 \text{लाभ} &= 20\% \\
 \text{अतः लाभ } 780 \text{ रु. का } 20\% &= \frac{780 \times 20}{100} = 156 \text{ रु.} \\
 \text{विक्रय मूल्य} &= \text{क्रय मूल्य} + \text{लाभ} \\
 &= 780 \text{ रु.} + 156 \text{ रु.} = 936 \text{ रु.} \\
 \text{अतः } 1 \text{ टिन तेल का विक्रय मूल्य} &= 936 \text{ रु.} \\
 \text{अर्थात् } 15 \text{ लीटर तेल का विक्रय मूल्य} &= 936 \text{ रु.} \\
 \text{विक्रय मूल्य प्रति लीटर} &= 936 \div 15 = 62.40 \text{ रु. प्रति लीटर}
 \end{aligned}$$

**हल :** दूसरा तरीका—

$$\begin{aligned}
 20\% \text{ लाभ का अर्थ है} \\
 100 \text{ रु क्रय मूल्य है तो } \text{लाभ} &= 20 \text{ रुपये} \\
 \text{अतः विक्रय मूल्य} &= 100 + 20 = 120 \text{ रुपये} \\
 \text{जब क्रय मूल्य } 100 \text{ रु., तब विक्रय मूल्य} &= 120 \text{ रु.} \\
 \text{जब क्रय मूल्य } 1 \text{ रु., तब विक्रय मूल्य} &= \frac{120}{100} \text{ रु.} \\
 \text{जब क्रय मूल्य } 780 \text{ रु., तब विक्रय मूल्य} &= \frac{120}{100} \times 780 \text{ रु.} = 936 \text{ रु.} \\
 \text{विक्रय मूल्य प्रति लीटर} = 936 \div 15 &= 62.40 \text{ रु. प्रति लीटर}
 \end{aligned}$$

**उदाहरण-21.** एक टेलिविजन को 9000 रुपये में बेचने पर 10 प्रतिशत की हानि होती है। उसे कितने रुपये में बेचा जाए कि 15 प्रतिशत लाभ हो जाए?

**हल :** पहला तरीका— हानि = क्रय मूल्य का 10%

विक्रय मूल्य = क्रय मूल्य – हानि

$$= \text{क्रय मूल्य} - \text{क्रय मूल्य का } 10\% = \text{क्रय मूल्य} - \text{क्रय मूल्य} \times \frac{10}{100}$$

$$\text{या, } 9000 = \text{क्रय मूल्य} - \text{क्रय मूल्य} \times \frac{1}{10} \quad \left| \begin{array}{l} \text{अतः } 15\% \text{ लाभ } \times 10000 \text{ का } 15 \\ \times 10000 \text{ का } \frac{15}{100} \\ \times 1500 \text{ रु} \\ \therefore 15\% \text{ लाभ के लिए विक्रय मूल्य } \\ \times 10000 + 1500) \text{ रु.} \\ \times 11500 \text{ रु} \end{array} \right.$$

$$\text{या, } 9000 = \left(1 - \frac{1}{10}\right) \text{ क्रय मूल्य}$$

$$\text{या, } 9000 = \left(\frac{9}{10}\right) \text{ क्रय मूल्य}$$

$$\therefore \text{क्रय मूल्य} = 9000 \times \frac{10}{9} = 10,000 \text{ रु.}$$

**हल :** दूसरा तरीका—

$$\text{टेलीविजन का विक्रय मूल्य} = 9000 \text{ रु.}$$

$$\% \text{ हानि} = 10\%$$

$$\text{माना कि टेलीविजन का क्रय मूल्य } = 100 \text{ रु. हो}$$

$$(10\% \text{ हानि पर बेचने पर}) \text{ प्रथम विक्रय मूल्य} = 100 - 10 = 90 \text{ रु.}$$

$$\text{जब विक्रय मूल्य } 90 \text{ रु. हो तो क्रय मूल्य} = 100 \text{ रु.}$$

$$\text{जब विक्रय मूल्य } 1 \text{ रु. हो तो क्रय मूल्य} = \frac{100}{90}$$

$$\text{जब विक्रय मूल्य } 9000 \text{ रु. हो तो क्रय मूल्य} = \frac{100}{90} \times 9000 = 10000 \text{ रु.}$$

$$\% \text{ लाभ} = 15\%$$

$$\text{अतः लाभ} = 10,000 \text{ का } 15\% = 10000 \times \frac{15}{100} = 1500 \text{ रु.}$$

$$15\% \text{ लाभ के लिए विक्रय मूल्य} = 10,000 + 1500 = 11,500 \text{ रु.}$$

अतः 15% लाभ कमाने के लिए दुकानदार को टेलीविजन 11,500 रु. में बेचनी चाहिए।

## प्रश्नावली 10.3

**1. निर्देशानुसार रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए—**

क्र.सं.	क्रय मूल्य	विक्रय मूल्य	लाभ या हानि (रु. में)	लाभ या हानि (%) में
(i)	420 रु.	450 रु.	लाभ = 30 रु.	लाभ % = $7\frac{1}{7}\%$
(ii)	700 रु.	679 रु.		
(iii)	300 रु.	324 रु.		
(iv)	110 रु.	88 रु.		

**2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए—**

क्र.सं.	क्रय मूल्य	हानि/लाभ	विक्रय मूल्य	लाभ या हानि प्रतिशत में
(i)	1200 रु.	90 रु. लाभ	1290 रु.	लाभ % = $7\frac{1}{2}\%$
(ii)	500 रु.	25 रु. लाभ		
(iii)	630 रु.	70 रु. हानि		
(iv)	400 रु.	40 रु. हानि		

**3. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:**

क्र.सं.	विक्रय मूल्य (रु. में)	लाभ/हानि (रु. में)	क्रय मूल्य (रु. में)	लाभ या हानि (% में)
(i)	1500	हानि 350	$1500 + 350 = 1850$	$18\frac{34}{37}\%$ हानि
(ii)	1400	लाभ 280		
(iii)	950	हानि 50		
(iv)	375	लाभ 25		

4. एक वस्तु का क्रय मूल्य 80 रु. है और वह वस्तु 25% के लाभ पर बेची गई तो लाभ और विक्रय मूल्य बताइए।
5. कोई मशीन 7% की हानि पर 837 रु. में बेची गई तो उसका क्रय मूल्य निकालिए।
6. किसी वस्तु की 72 रु. में बेचने से 10% की हानि होती है। बताइए कि उस वस्तु को कितने में बेचने 20% का लाभ होगा?
7. एक रेडियो को 880 रु. में बेचने से 10% लाभ होता है तो बताइए कि यदि उसे 760 रु. में बेचा जाय तो बेचने वाला कितने प्रतिशत के लाभ या हानि में रहेगा?
8. एक कुर्सी 20% हानि पर 240 रु. में बिकती है। यदि विक्रय मूल्य 10% बढ़ जाए तो बताइए कि कितने प्रतिशत की हानि होगी ?
9. एक व्यापारी ने 1 रुपये के 5 की दर से 1000 नींबू खरीदकर एक रुपये के 4 की दर से बेच दिया तो उसका लाभ प्रतिशत ज्ञात कीजिए।
10. एक दुकानदार ने दो साइकिलें 1100 रु. प्रति साइकिल के हिसाब से बेची। एक पर उसे 10% का लाभ एवं दूसरे पर उसे 20% की हानि हुई। बताइए उसे लाभ हुआ कि नहीं? लाभ या हानि प्रतिशत में ज्ञात कीजिए।

## 10.6 उधार दिए गए धन पर शुल्क अर्थात् साधारण ब्याज

दैनिक जीवन में हमें घरेलू खर्च के लिए व्यवसाय को बढ़ाने के लिए या अन्य कई कार्यों के लिए कुछ अतिरिक्त धन की आवश्यकता होती है। इसके लिए हमें बैंक या अन्य व्यक्तियों से धन उधार लेना पड़ता है। उधार लिए गए धन को **मूलधन** (Principal) कहते हैं।

यह धन, वापस करने से पहले ऋण प्राप्त करने वाले व्यक्ति द्वारा कुछ समय तक इसका उपयोग किया जाता है। अतः एक निश्चित अवधि तक धन को उपयोग में लाने के बदले कुछ अतिरिक्त धन बैंक या उधार देने वाले व्यक्तियों को देना होता है। उधार लिए गए धन के उपयोग के बदले जो अतिरिक्त धन चुकाना पड़ता है, यह अतिरिक्त धन **ब्याज** (Interest) कहलाता है।

एक निश्चित अवधि के बाद आपको मूलधन और ब्याज दोनों को मिलाकर पूरा धन, ऋण प्राप्त करने वाले को वापस करना होता है जिसे **मिश्रधन** कहते हैं।

$$\text{अर्थात् मिश्रधन} = \text{मूलधन} + \text{ब्याज}$$

ब्याज एक निश्चित दर पर परिकलित किया जाता है जो प्रायः प्रत्येक 100 रु. के लिए एक वर्ष के लिए निर्धारित होता है। इसे इस प्रकार लिखा जा सकता है, 8 प्रतिशत प्रतिवर्ष या 8 प्रतिशत वार्षिक।

8 प्रतिशत वार्षिक का अर्थ है कि प्रत्येक 100 रु. पर प्रतिवर्ष 8 रु. ब्याज के रूप में अतिरिक्त देने होंगे।

आइए एक उदाहरण लेकर देखें कि ब्याज की गणना कैसे की जाती है।

**उदाहरण—22.** सुरेश 5500 रु. का ऋण, कृषि कार्य हेतु 5% वार्षिक की दर से ब्याज पर लेते हैं। ज्ञात कीजिए कि एक वर्ष बाद उसे कुल कितना धन वापस करना होगा।

$$\text{हल : } \text{उधार ली गई राशि} = 5500 \text{ रु.}$$

$$\text{ब्याज की दर} = 5 \text{ प्रतिशत प्रतिवर्ष}$$

इसका अर्थ है कि यदि वह 100 रु. उधार लेता है तब उसे एक वर्ष बाद 5 रु. ब्याज के रूप में भी देने होंगे।

$$\text{अतः } 5500 \text{ रु. के उधार पर उसे 1 वर्ष बाद देने होंगे : } \frac{5}{100} \times 5500 \text{ रु.} = 275 \text{ रु.}$$

अर्थात् एक वर्ष बाद उसे ब्याज मिलाकर मिश्रधन देना होगा

$$= 5500 \text{ रु.} + 275 \text{ रु.} = 5775 \text{ रु.}$$

एक वर्ष का ब्याज ज्ञात करने के लिए हम एक संबंध या सूत्र भी प्राप्त कर सकते हैं।

यदि हम मूलधन को P से तथा दर R% वार्षिक को R से प्रदर्शित करते हैं तो हमें प्रत्येक 100 रु. के लिए एक वर्ष का R रु. ब्याज देना होगा।

अतः P रु. उधार लेने पर एक वर्ष का ब्याज I होगा।

$$I = \frac{R \times P}{100} = \frac{P \times R}{100}$$

### 10.6.1 अनेक वर्षों के लिए ब्याज

अगर धन एक वर्ष से अधिक समय के लिए उधार लिया जाता है तब ब्याज की भी उतने समय के लिए गणना की जाती है जितने समय के लिए धन रखा गया है। उदाहरण के लिए यदि सुरेश वही धन उसी दर पर 2 वर्ष बाद वापस करता तब उसे ब्याज भी दुगुना अर्थात् 275

सर्व शिक्षा : 2013-14 (नि:शुल्क)

पहले वर्ष के लिए तथा 275 दूसरे वर्ष के लिए। मूलधन वही रहता है, बदलता नहीं और ब्याज भी प्रत्येक वर्ष के लिए समान ही रहता है। इस प्रकार को साधारण ब्याज कहते हैं। जिस प्रकार वर्षों की संख्या बढ़ती जाती है उसी प्रकार ब्याज की राशि, भी।

उदाहरण के लिए – 3 वर्षों के लिए 100 रु. 12% प्रतिशत वार्षिक दर से उधार लेने पर 3 वर्षों बाद ब्याज देना होगा

$$12 + 12 + 12 = 3 \times 12 = 36 \text{ रु.}$$

हम एक वर्ष से अधिक समय के लिए साधारण ब्याज ज्ञात करने के लिए सूत्र प्राप्त कर सकते हैं।

ऊपर हम देख चुके हैं कि  $P$  रु. मूलधन के लिए  $R\%$  वार्षिक की दर से 1 वर्ष बाद ब्याज देना होता है  $\frac{R \times P}{100}$

अतः  $T$  वर्षों के लिए दिया गया, साधारण ब्याज ( $I$ ) होगा:

$$I = \frac{T \times R \times P}{100} = \frac{P \times R \times T}{100} \quad \text{या } \frac{PRT}{100}$$

और  $T$  वर्षों बाद मिश्रधन  $A$  होगा  $A = P + I$

## Lo; adjds nf[k,

### 1. सारणी में दिए गए विकृत स्थानों की पूर्ति कीजिए

क्र.सं.	मूलधन	ब्याज	मिश्रधन
1.	625 रु.	125 रु.	750 रु.
2.	350 रु.	.....	700 रु.
3.	3200 रु.	320 रु.	.....
4.	.....	1750.00	2895.00

### 2. साधारण ब्याज की गणना कीजिए –

- (i) मूलधन 4000 रु., दर 6%, समय 3 वर्ष
- (ii) मूलधन 900 रु., दर 5.5%, समय 4 वर्ष

### 3. मिश्रधन की गणना कीजिए –

- (i) मूलधन 4000 रु., दर 5%, समय 2 वर्ष
- (ii) मूलधन 1000 रु., दर 7.25%, समय 8 माह
- (iii) मूलधन 1500 रु., दर 6.5%, समय 146 दिन

#### 10.6.2 मूलधन, दर तथा समय की गणना

साधारण ब्याज के प्रश्नों में मूलधन (P), दर (R) एवं समय (T) ज्ञात होने पर हम ब्याज (I) की गणना करते हैं। अब यदि इन चार राशियों में से कोई तीन का मान ज्ञात हो तो क्या चौथी राशि का मान ज्ञात कर सकते हैं?

आइए एक उदाहरण पर विचार करते हैं।

**उदाहरण-23.** एक व्यक्ति ने बैंक से 1800 रु. उधार लिया। कुछ दिन बाद वह बैंक में जाता है तो उसे बताया गया कि मूलधन के अतिरिक्त उसे 324 रु. और देना पड़ेगा। यदि ब्याज दर 6% हो तो वह व्यक्ति कितने दिन बाद बैंक गया था?

**हल :** यहाँ मूलधन (P) = 1800 रु.

दर (R) = 6 %

ब्याज (I) = 324 रु.

समय = ?

$$\text{हमें मालूम है, साधारण ब्याज (I)} = \frac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{100}$$

$$324 = \frac{1800 \times 6 \times \text{समय}}{100}$$

$$\text{समय} = \frac{324}{18 \times 6} = 3 \text{ वर्ष}$$

सर्व शिक्षा : 2013-14 (नि:शुल्क)

**उदाहरण-24.** अनवर ने एजाज से 5000 रु. उधार लिया। 2 वर्ष पश्चात् उसने 6225 रु. देकर एजाज से अपना हिसाब कर दिया। ब्याज की दर ज्ञात कीजिए।

**हल :** यहाँ मूलधन = 5000 रु. मिश्रधन = 6225 रु. समय = 2 वर्ष

यहाँ साधारण ब्याज नहीं दिया गया है परन्तु मिश्रधन दिया गया है इसलिए पहले ब्याज की गणना करनी चाहिए।

$$\begin{aligned}\text{साधारण ब्याज} &= \text{मिश्रधन} - \text{मूलधन} \\ &= 6225 - 5000 = 1225 \text{ रु.}\end{aligned}$$

$$\text{ब्याज} = \frac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{100}$$

पहला तरीका

$$1225 = \frac{5000 \times \text{दर} \times 2}{100}$$

$$1225 = 100 \times \text{दर}$$

$$\text{दर} = \frac{1225}{100}$$

$$= 12.25\%$$

दूसरा तरीका

$$\text{दर} = \frac{\text{ब्याज} \times 100}{\text{मूलधन} \times \text{समय}}$$

$$\text{दर} = \frac{1225 \times 100}{5000 \times 2}$$

$$= 12.25\%$$

**उदाहरण-25.** 10 % वार्षिक गणना पर किस धन का 26 मार्च 2009 से 19 अगस्त 2009 तक का ब्याज 140 रु. होगा?

**हल :** यहाँ दर = 10%, ब्याज = 140 रु.

मार्च	अप्रैल	मई	जून	जुलाई	अगस्त	कुल
5	30	31	30	31	19	146

समय = 146 दिन =  $146/365$  वर्ष =  $2/5$  वर्ष मार्च - 05 दिन (26 मार्च को छोड़कर)

$$\begin{aligned} \text{मूलधन} &= \frac{\text{साधारण ब्याज} \times 100}{\text{दर} \times \text{समय}} \\ &= \frac{140 \times 100}{10 \times \frac{2}{5}} = \frac{140 \times 100 \times 5}{10 \times 2} = 3500 \text{ रु.} \end{aligned}$$

**उदाहरण—26.** कितने समय में 550 रुपये 10 प्रतिशत वार्षिक साधारण ब्याज की दर से 660रु. हो जाएंगे।

**हल :** यहाँ मूलधन = 550 रु., मिश्रधन = 660 रु., दर = 10 % समय = ?

$$\begin{aligned} \text{ब्याज} &= \text{मिश्रधन} - \text{मूलधन} \\ &= 660 - 550 = 110 \text{ रु.} \\ \text{समय} &= \frac{\text{ब्याज} \times 100}{\text{दर} \times \text{समय}} \\ &= \frac{110 \times 100}{10 \times 550} = 2 \text{ वर्ष} \end{aligned}$$

### Ques: adjds nſ[k,

1. किसी धन का 12.5 प्रतिशत वार्षिक दर से 4 वर्ष का ब्याज 250 रु. है। तो वह धन ज्ञात कीजिए।
2. कितने प्रतिशत वार्षिक ब्याज की दर से 600 रु. 3 वर्षों में 744 रु. हो जाएगा?
3. कितने समय में कोई धन 10 प्रतिशत वार्षिक ब्याज की दर से दुगुना हो जाएगा?

### प्रश्नावली—10.4

1. 750 रु. का 9 % वार्षिक ब्याज की दर से 6 वर्षों का ब्याज ज्ञात कीजिए तथा मिश्रधन भी निकालिए।
2. 500 रु. का 1 रु. 50 पैसे प्रति सैकड़े प्रतिमाह की दर से 15 महीने का ब्याज ज्ञात करें।

3. कितने प्रतिशत वार्षिक ब्याज की दर से कोई मूलधन 4 वर्षों में अपना सवा गुना हो जाएगा?
4. कितने प्रतिशत ब्याज की दर से 450 रु. तीन वर्षों में 504 रु. हो जाएगा?
5. यदि कोई मिश्रधन 5 वर्षों में मूलधन का  $5/4$  हो जाता है तो ब्याज की दर ज्ञात कीजिए।
6. कितने वर्षों में 5% वार्षिक ब्याज की दर से 600 रु. का मिश्रधन 700 रु. हो जाएगा?
7. कितने समय में  $6\frac{1}{2}\%$  वार्षिक ब्याज की दर से कोई धन दुगुना हो जाएगा?
8. 12% वार्षिक ब्याज की दर से कौन सा धन 5 वर्षों में 400 रु. हो जाएगा?
9. कितना धन 5% वार्षिक ब्याज की दर से 8 वर्षों में 560 रु. हो जाएगा?
10. कितने धन का 6% वार्षिक ब्याज की दर से 2.5 वर्ष में वही ब्याज होगा जो 400 रु. का 5 वार्षिक ब्याज की दर से 3 वर्षों में होगा?

## हमने सीखा

1. अपने दैनिक जीवन में हमें प्रायः दो राशियों के बीच तुलना करनी पड़ती है। ये राशियों ऊँचाई, भार, वेतन, प्राप्तांक आदि हो सकती है।
2. दो राशियाँ a और b की तुलना करने पर हम इसे अनुपात रूप में a : b लिखते हैं।
3. दो अनुपातों की तुलना उन्हें समान हर वाली भिन्नों से बदलकर की जा सकती हैं। यदि दोनों समान हर वाली भिन्न समान है तब हम कहते हैं कि दोनों अनुपात भी तुल्य अनुपात हैं।
4. यदि दो अनुपात तुल्य है तब उनके चारों पद एक समानुपात बनाते हैं। उदाहरण के लिए दो अनुपात a : b एवं c : d तुल्य हैं। अतः a,b,c तथा d समानुपात में हैं।
5. तुलना करने की एक विधि प्रतिशत भी है। भिन्न जिनके हर 100 होते हैं उनके अंश प्रतिशत प्रकट करते हैं। प्रतिशत का अर्थ होता है प्रत्येक सौ पर। उदाहरण के लिए  $5/100$  को 5% भी कहा जाता है।
6. भिन्नों को प्रतिशत में बदला जा सकता है तथा प्रतिशत को भिन्नों में। दशमलव भिन्न को भी प्रतिशत में बदला जा सकता है तथा प्रतिशत को दशमलव में बदला जा सकता है।

7. प्रतिशत के हमारे दैनिक में व्यापक उपयोग हैं।
- (i) जब हमें किसी राशि का प्रतिशत ज्ञात हो तो हम वह सम्पूर्ण राशि ज्ञात कर सकते हैं।
  - (ii) यदि हमें किसी राशि के भागों में अनुपात दिया हो तो हम उन्हें प्रतिशत में भी बदल सकते हैं।
  - (iii) किसी राशि का घटना या बढ़ना भी प्रतिशत में दर्शाया जा सकता है।
  - (iv) किसी वस्तु का क्रय मूल्य में हुए लाभ या हानि को भी प्रतिशत में दर्शाया जा सकता है।
  - (v) उधार लिए गए धन पर ब्याज परिकलन के लिए उसकी दर प्रतिशत में ही दी जाती है।
8. (i) किसी अनुपात को प्रतिशत में बदलने के लिए अनुपात को भिन्न के रूप में बदलते हैं।
- (ii) किसी अनुपात को प्रतिशत में बदलने के लिए भिन्न को  $100$  से गुणा करके प्रतिशत का चिह्न (%) इसके साथ लगाकर गणना करते हैं।

## अध्याय-11

## सदल समीकरण

## 11.1 बौद्धिक खेल

अंजू आफसाना, मुनताज एवं मुकर छप्टे थे कक्ष में साइंस के स्थ इक ऐक-खेल खेल रहे थे। खेल में अंजू ने गुपाज रो कोई रास्ता देखने को कहा। सोची हुई संख्या में 5 रु गुण करके गुणनखंड में 4 लोड़न और परिपाम बताने को लहा।

मुनताज न कहा परिपाम 29 है।  
अंजू ने दूसरे बदला कि सोची गई संख्या 1 है। गुपाज ने लहा गैने 5 ही देता था।

गुपाज और वह के सभी छात्र आपको कित रह गए और रोने ले लिए कि कि अंजू जातू जानती है? आखिर अंजू में मुनताज के गन गें रोची गई रास्ता को लैरे जान लिया? आफसाना का कुछ शंका हुई। उसने अंजू से लहा मैंगे एक ओर संख्या 5 ची है, उसे बता दो। अंजू ने बड़ी उम्हिया दोहराई। और परिणाम जानना चाहा। आफसाना न लहा परिपाम 154 है। अंजू ने पुस्तक का सोची गई संख्या 30 है।

प्रत्येक ल्याते यह जनना चाहता था कि आखिर अंजू ने सोची गई संख्या को कैसे इस चर लिया। क्य आप वहा जानते हैं अंजू ने अशार रास्ता (रोची गई रास्ता) को कैरे इस किया।

आइटे हम इसी साज़ने का प्रयास करें।

गुपाज ने कोई रास्ता सोची लो रास्ता 1, 2, 3..... गें रो कुछ भी हो जाए है। वह संख्या हमें ज्ञात नहीं है। अतः एसे संख्या के लिए हन एक चर ( $x$ ) लेने हैं (चर के लिए हम कोई अक्षर संलग्न ले सकते हैं)। अब  $x$  ने 5 से गुण छरल 4 लोड़ने पर प्रप्त व्यंजक ( $5x-4$ ) है, जो 29 के बराबर है।



$$\text{लक्ष्य} \quad 5x + 4 = 29$$

माना  $(5x+4)$  का मान यदि 1 हो। तो

$$\text{बंजक} = 5 \times 1 + 4$$

$$= 5 + 4$$

$$= 9$$

यदि  $x = 2$  तो बंजक  $= 5 \times 2 + 4 = 14$

यदि  $x = 3$  तो बंजक  $5 \times 3 + 4 = 19$

यदि  $x = 4$  तो बंजक  $= 5 \times 4 + 4 = 24$

यदि  $x = 5$  तो बंजक  $= 5 \times 5 + 4 = 29$

अतः सबत चरित्ति न हम देखत हैं कि प्रत्येक अल्प  $x$  के नन के लिए परिणाम अल्प आता है और तुमताज के द्वारा सेवी गई संख्या 5 के लिए परिणाम 29 है द्वेषा। संभवत यह ऐसा क्लिपो समय जैसा ने इन परिणामों का जल्द देख रखा होगा। हमने अब तक दो बंजक के  $5x + 4$  एवं 29 देखे हैं और ने आपस में वराता भी हैं। ऐसे दो बंजक जिनके बीच अंतर (-) का छिह्न होता है समीकरण कहलाता है। समीकरण में याँ के दाईं ओर के बंजक को समीकरण का दाय়ে पक्ष (Left Hand Side) एवं याँ के बीच बंजक को समीकरण का दाय়ে पक्ष (Right Hand Side) कहलाता है। यदि LHS एवं RHS के बीच अंतर (-) के अलापा कोई अन्य व्यंजक नहीं होता है। जैसे—  $5x - 4 < 29$  यह समीकरण नहीं है। समीकरण के लिए अन्य अधिकारियों द्वारा यह होता है कि दोनों पक्षों में एक विकल्प एवं एक अन्तर दाशि अवश्य होनी चाहिए। समीकरण के RHS एवं LHS को आपस में बदल देने पर समीकरण वह हो रहत है। जैसे—  $5x + 4 = 29$  यह  $29 = 5x + 4$

## 11.2 एक चर वाले (रैखिक) समीकरण

इस प्रकार देखते हैं कि समीकरण वास्तव में बंजकों के दायें पर एक इच्छा है और चर के विरास नाम के लिए समीकरण के दोनों पक्ष आपस में बदलते हैं। इन बंजक बनाना जानत हैं, शाइये बंजकों का कुछ शर्त स नोडकर समीकरण बनाते हैं।

१. एक संख्या का 6 गुना 30 है।

यदि मान लें कि वह संख्या  $x$  है तो

$$\text{संख्या का } 6 \text{ गुना} = 6x$$

$$\text{संख्या का } 6 \text{ गुना } 30 \text{ के बराबर है}$$

$$\text{अतः } 6x = 30 \quad (\text{यह एक समीकरण हुआ})$$

2. किसी संख्या का दोगुना उस संख्या के 5 गुण से 21 कम है।

यदि मान ले कि संख्या  $x$  है तो

$$\text{संख्या का } 2 \text{ गुना} = 2x, \quad \text{संख्या का } 5 \text{ गुण} = 5x$$

$$\text{संख्या के } 5 \text{ गुना से } 21 \text{ कम} = 5x - 21$$

संख्या का दो गुना यानी  $2x$ , संख्या के 5 गुणी से 21 कम के बराबर है।

$$\text{अतः } 2x = 5x - 21 \text{ (इस एक समीकरण है।)}$$

### आइये कुछ समीकरण जार्जें

- (a) किसी संख्या का तिहाई 17 के बराबर है।
- (b) सुनील की पतेनन् उम्र उसके 2 साल पहले के उब्र की तिगुनी है।
- (c) अजुन एवं उसके भाई के उम्र का योग 23 है। यदि अजुन की उम्र 10 है तो उसके भाई की उम्र को  $m$  मानो तो कथन को समीकरण में लिखिये।
- जिन समीकरणों में एक वर्ष छहमासी है वह एक चर वाला समीकरण कहलाता है, या तीन वर्ष होने पर वह दो वा तीन चर वाला समीकरण कहलाता है।

### 11.3 रामीकरण के हल

आइये हाँ। तुम सुमित्राज के लक्षाहरण के लें। तुम ताज के द्वारा जीवी इस संख्या को  $x$  नगरे पर बना समीकरण  $5x + 4 = 29$  है। यह समीकरण  $x - 1$  के लिए L.H.S.  $\neq$  R.H.S.

$$\therefore \text{LHS} = 5 \times 1 + 4 = 9$$

$$\text{RHS} = 29$$

इसके लिए  $x = 2, 3$  या इसके लिए

LHS / RHS है?

किंतु  $x = 5$  के लिए L.H.S.  $= 5x + 4 = 5 \times 5 + 4$

$$= 25 + 4$$

$$= 29$$

$$= \text{RHS}$$

यानी  $x - 5$  के लिए दोनों पक्ष बराबर हैं। अतः  $x$  के ऐसे मान जिसके लिए समीकरण का न अपकर्ता होना पक्ष बराबर होता है रागीकरण का हल होता है।

रागीकरण का हल, रागीकरण के वर्णों की रूख्या एवं उनके धार पर वी निर्भर करता है।

एक भरत वाले रागीकरण में चर का गहराना भात 1 है। ऐसे रागीकरण के ऐसिक समीकरण भी कहते हैं। अतः यह साप्त हाता है कि उज्जाहरण में रैखिक समीकरण का हल निकलकर मुनहज कहारा सोची गई संख्या का पत्ता लगा लिछ।

### प्र॒ना॒वली—11.1

- संजू और कैलाश कंचे खेल रहे थे। संजू के पास  $x$  कंचे थे जबकि कैलाश के पास उसके बुगुने से 5 अधिक थे।

$$\text{संजू के कंचे} = x$$

$$\text{कैलाश के कंचे} = 2x + 5$$

वताइट—

- यदि संजू के पास 5 कंचे हो तो कैलाश के यास कितना कंचे होंगे?
- यदि संजू के 6 कंचे हो तो कैलाश के कंचों की संख्या क्या होगी?
- यदि संजू के 17 कंचे हों तो कैलाश के कंचों की संख्या क्या होगी?
- यदि कैलाश के पास 23 कंच हों तो संजू के कंचों की संख्या क्या होगी?
- यदि कैलाश के यास 55 कंच हो तो संजू के पास कितने कंचे होंगे?
- इन स्वयंओं को करण के बाद तुन क्या निकल सकते हैं?

- निम्न में जो समीकरण है, उस पर धेरा लगाइये।

$$x + 2 = 5$$

$$3x$$

$$x - 5$$

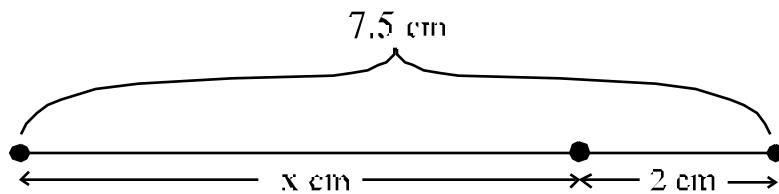
$$x^{-2} + 5$$

$$4y - x$$

$$4x - 5 > 50$$

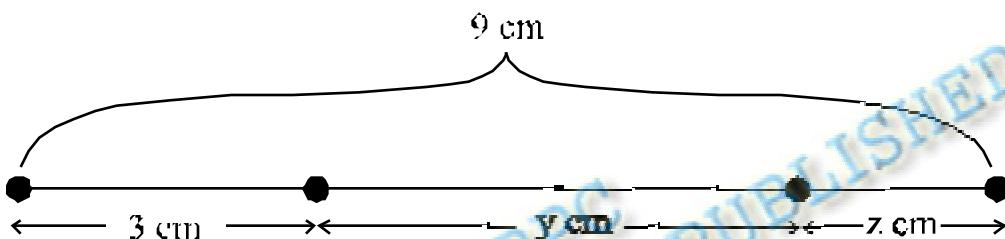
**3. एक विकल्प पर सही का निशान (✓) लगाइये।**

(i)



दिए गए रेखाखण्ड के लम्बाई में से कौन सा होगी?

- (a)  $x - 2$
- (b)  $x + 2$
- (c)  $7.5$
- (d)  $x - 7.5$
- (e)  $x + 7.5$
- (f)  $7.5 - x$

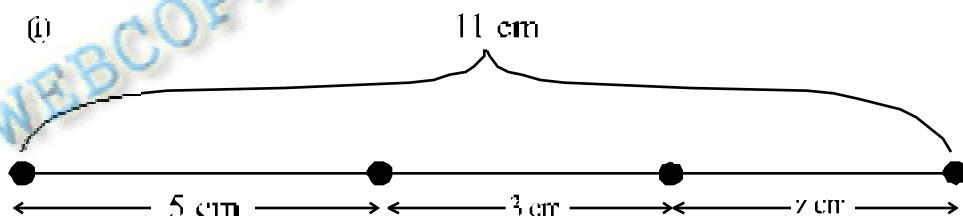


(ii) उपर्युक्त चित्र के आधार पर बताइये निम्न में से कौन सा सम्बन्ध सही है?

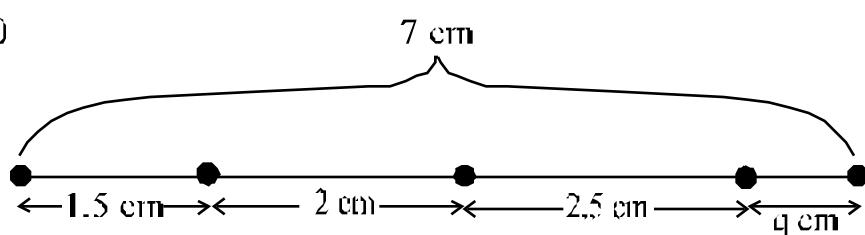
- (a)  $3 + y - z = 9$
- (b)  $3 + y + z > 9$
- (c)  $3 + y + z < 9$
- (d)  $3 + y + z = 9$

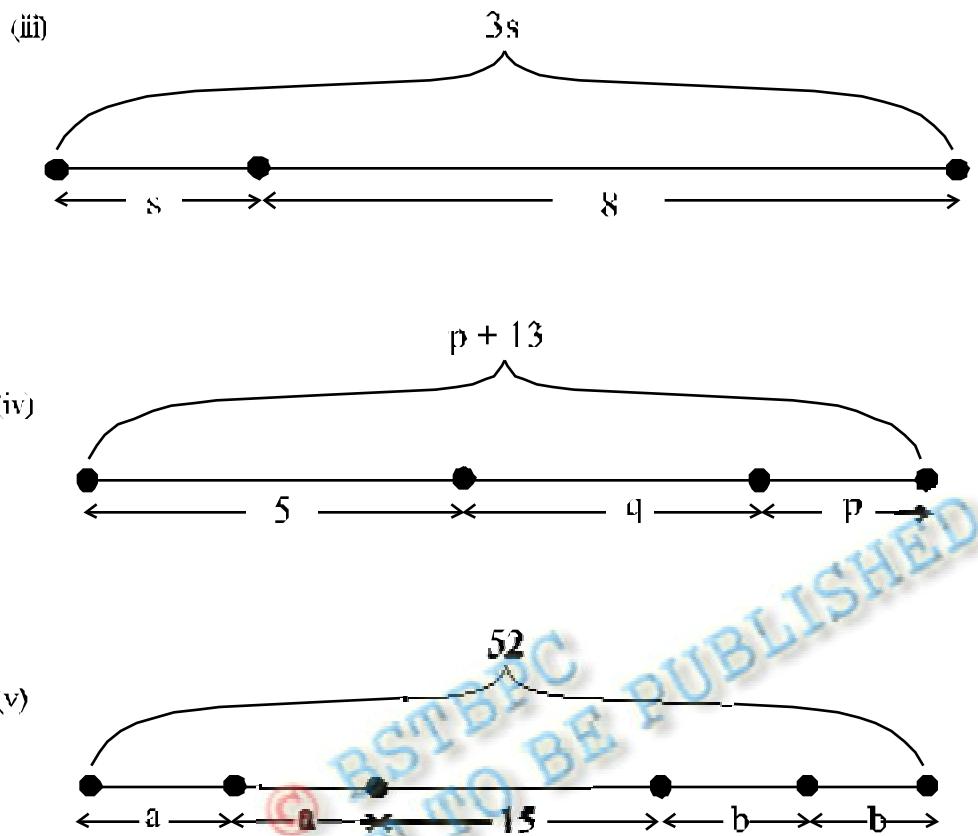
**4. नीचे दिए गए स्थानांशों के लिए समीकरण बनाइये।**

(i)



(ii)





### 5. निम्न कथनों के समीकरण रूप में लिखिये।

- किसी संख्या ने 6 उड़ने पर 37 प्रपत होत है।
- किसी संख्या ने 9 उड़ने पर 25 प्रपत होत है।
- किसी संख्या में  $\frac{\square}{\square}$  बढ़ाना पर  $\frac{\square \square}{\square}$  ग्रात होता है।
- किसी संख्या के दुगुने में से 1 का करने पर 13 प्राप्त होता है।
- किसी संख्या के पाँचवें चय में से 5 घटाने पर 35 प्राप्त होता है।
- किसी संख्या के एक शिहाई हेतु में से 10 जोड़ने से दुगुनी संख्या प्राप्त होती है।

6. नीचे दिए गए समीकरणों के सामने दिए गए  $x$  के मान से समीकरण संतुष्ट है अथवा नहीं लिखिये।

$x = 5$

है / नहीं

(i)  $x + 2 = 7$        $x = 5$       \_\_\_\_\_

(ii)  $\frac{7x}{2} = 21$        $x = 8$       \_\_\_\_\_

(iii)  $2x - 3 = 19$        $x = 4$       \_\_\_\_\_

(iv)  $\frac{5x - 2}{4} = 2$        $x = 2$       \_\_\_\_\_

आपने साथियों से चर्चा भी कीजिए कि  $x$  के केस मान से समीकरण संतुष्ट होता है।

7. सारणी में दिए गए मान से निम्न समीकरण उल कीजिये तथा इसाइये कि किस मान के लिए समीकरण के दोनों पक्ष बराबर हैं?

$$x - 2 = 3x - 8$$

$x$ का मान	बायाँ पक्ष $x - 2$	दायाँ पक्ष $3x - 8$
0		
1		
2		
3		

$x =$  \_\_\_\_\_

8. समीकरण के सामने दिए  $x$  के विभिन्न मान समीकरण में रख कर जाँच कीजिये कि सही हल क्या है और उस पर गोला लगाइये।

(i)  $3x - 1 = -4$        $\rightarrow$   $x = -1, 0, -1, 2$

(ii)  $4x = -12$        $\rightarrow$   $x = -3, -2, -3, 1$

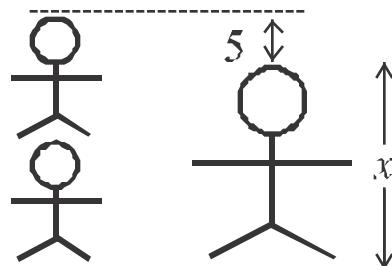
(iii)  $\frac{3x - 1}{2} = 1$        $\rightarrow$   $x = -1, -5, -4, 1$

$$(iv) \quad 9x - 9 \rightarrow x = 1, -1, 2, 3$$

$$(v) \quad -2x + 5 = 13 \rightarrow x = 1, -1, 2, -2$$

### 9. नीचे दी गई परिस्थितियों के लिए उपयुक्त समीकरण बनाइये

- (i) नेशु का कद 80 रोपी है। उसकी पत्ताजी उत्तक कद के दुगुने रु 5 तरीका है।



- (ii) सरोज के घर से डाकघर की दूरी 250 मीटर है। वह अपनी साइकिल पर घर से डाकघर के लिए गिरजाते हैं। प्रथम के 2 मिनट तक वह अपनी साइकिल 40 मीटर प्रति एवं अगले 3 मिनट सुक 5 मीटर प्रति मिनट की गति से बढ़ती है। इसके बाद भी 50 मीटर की दूरी बचती है।



### 10. निम्न समीकरण को कथन रूप में लिखिये—

$$(i) \quad x - 5 = 7 \quad (ii) \quad x + 2 = 3 \quad (iii) \quad 2x = 4$$

$$(iv) \quad \frac{x}{3} = 5 \quad (v) \quad \frac{x+1}{8} = 5$$

### 11.4 एक समीकरण को हल करना या हल ज्ञात करना

आइये हम गी जानने का प्रयत्न करें कि कौन से अंजूने के ज्ञात संख्या इस लिये। समीकरण का हल ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित तथ्यों का ध्यान न रखना चाहिए। इस

- (i) संख्या ताक सभि का पर विवार कीजिए—

$$7 - 4 = 2 + 1$$

इस सत्य है क्योंकि दोनों पक्षों का मान बराबर है अथात् दोनों ओर छल करने पर 3 प्राप्त होता है।

आइए दोनों पक्षों में 5 जोड़पे हैं। तब कोई अन्तर पड़े?

$$7 - 4 - 5 = 2 - 1 + 5$$

$$6 \stackrel{?}{=} 6 \quad 7 - 4 - 5 = 2 - 1 + 5$$

याहॉ पक्ष  $2 - 1 - 5 = 8$

निःसंदेह कोइं अंतर नहीं अचूकि समीकरण भी एक समेका है है तथा चम्ले ही जीव पद ऐसी न किसी राशि के निलिपि कहते हैं। अतः समीकरण का दोनों पक्षों में हा राशि संख्या जोड़ या बरा राखे हैं, इससे परिणाम प्रगतिरा नहीं होते हैं।

(ii) क्या दोनों ओर गुणा लगने से अन्तर पड़ेगा?

$$(7 - 4) \times 2 = (2 - 1) \times 2$$

दोनों पक्ष  $3 \times 2 = 6$ , दोनों पक्ष  $3 \times 2 = 6$ , स्पष्ट है गुणा करने से भी अन्तर नहीं आया, ले पराया करके देखें। अतः समीकरण में राश्य के अलावा कोई अन्य राश्या नहीं दोनों पक्षों में गुणा या  $\times$ , कर सकते हैं। इससे समीकरण के दोनों पक्षों का नन समान ही रहता है।

मान लेंजिए हम नियन का प्राप्तन नहीं करते और निना-भिना संख्या जोड़ते हैं तब क्या होगा—

$$7 - 4 + 3 = 2 + 1 + 5$$

दोनों पक्ष =  $7 - 4 + 3 = 3 - 3 = 6$  एवं दोनों पक्ष  $2 + 1 - 5 = 3 + 5 = 8$  जो कि बराबर नहीं है। अतः अलग-अलग राश्या नहीं जोड़ सकते।

इस एक तरफ जोड़ य दूसरी तरफ घटा कर सकते हैं, जाँच कीजिए।

और इस प्रक्रिया पर का न ज्ञात लगता है उसको वर्णन यह के एवं रूप लगता है।

उपर्युक्त नियन के बाहर ले लेकर हा अंजू द्वारा किये गये लल के देखें।

अंजू के समग्रे एक समीकरण है  $5x - 4 = 29$

समीकरण के दोनों पक्षों में से हा 4 बरा ते हैं।

इस प्रकार नया बायें पक्ष =  $5x + 4 - 4 = 5x$

$$\text{नया दर्थों पदा} = 29 - 4 = 25$$

दोनों पदों में सामान राशि घटाई गई है। अतः नया राशीकरण  $5x = 25$

अब दोनों पदों में 5 से भाग करेंगे।

$$\text{इस प्रकार नया राशीकरण} \quad 5x : 5 = 25 : 5$$

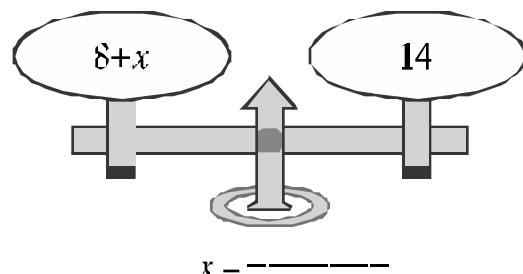
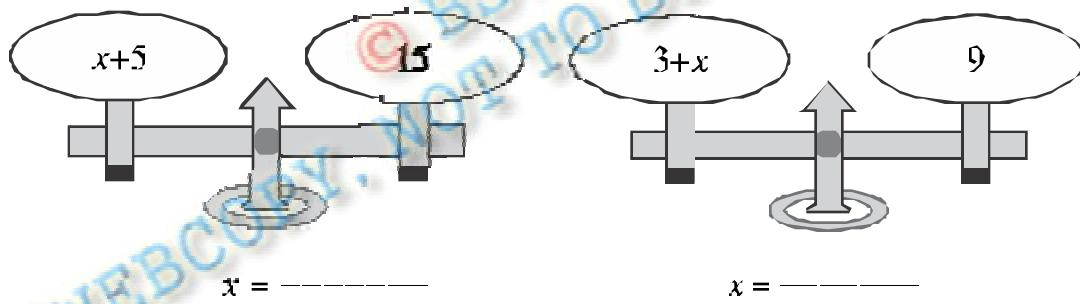
$$\therefore x = 5$$

(क्योंकि दोनों पदों में शून्य के अलावा सभी चाहिए 5 से भाग किया गया है।)

यही अइ प्रारंभिक गुणाले ने रोबर्ट बी. अंजु ने देखे। ए कथन से एक राशीकरण बनाया तथा उपर्युक्त विधि से उसका हल ज्ञात किया। वह आप अब यह बता सकते हैं कि उन्हें किसी न गरिमाम में 69 बताया हो तो उसका हमार सोची नहीं संख्या क्या होगी?

### प्रश्नावली-11.2

1. तुला संतुलन में है तो  $x$  का भार बताओ?



2.  $x + 5 = 8$



अगर हमें  $x$  का नाम पता करना है, तो क्या करेंगे?

हम उतनी ही संख्या दोनों पक्षों में जोड़ेंगे / घटाएँगे कि एक तरफ केवल चर और दूसरी तरफ केवल अंचर राशि ही शेष रहे।



$$x + 5 - 5 = 8 - 5$$

अतः  $x = 0 = 3$

अतः  $x = \underline{\hspace{2cm}}$

नीचे यिए समीकरण को हल कीजिये—

(i)  $x - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}$

(ii)  $x - 8 = 2$

(iii)  $x - 1 = 5$

(iv)  $x + 3 = -5$

3.



लेकिन अगर समीकरण इस रूप में हुआ तो?

$$\frac{x}{3} - 6$$

(i) आप बताइये, लैप्टॉप एक तरफ वर र.शि लगाने के लिए क्या करेंगे?

\_\_\_\_\_

(ii) समीकरण का हल करने पर  $x$  का मान क्या होगा?

\_\_\_\_\_

हमें चर राशि का मान चाहिए तो दोनों पक्षों में 3 से गुणा कर देंगे।



**4.** कॉलम 'अ' में दिए गए समीकरणों को हल करने के लिए कॉलम 'ब' में दी गई फिस संक्रिया को अपनाएँगे? सही मिलान कीजिये—

कॉलम 'अ'

कॉलम 'ब'

(i)  $x - 5 = 7$

दोनों पक्षों में 3 से जुटा।

(ii)  $x + 2 = 3$

दोनों पक्षों में 4 से जुटा।

(iii)  $2x = 4$

दोनों पक्षों में 2 घटाना।

(iv)  $\frac{x}{3} = 5$

दोनों पक्षों में 5 बोढ़ना।

(v)  $\frac{x}{8} = 2$

दोनों पक्षों में 2 का गुणा।

**5. (अ)** नीचे दिए गए समीकरणों को हल कीजिए व रिक्त स्थान भरिए—

(i)  $\frac{x}{4} = 2$

$$4 \times \frac{x}{4} = 2 \times 4$$

$$\therefore x = \underline{\hspace{2cm}}$$

(ii)  $3x = 15$

$$\frac{3x}{3} = \frac{15}{3}$$

$$\therefore x = \underline{\hspace{2cm}}$$

(iii)  $9x = 15$

$$\therefore x = \underline{\hspace{2cm}}$$

(iv)  $\frac{l}{2} = 7$

$$\therefore l = \underline{\hspace{2cm}}$$

(v)  $\frac{l-5}{2} = 3$

$$\frac{l-5}{2} \times 2 = 3 \times 2$$

$$l+5=6$$

$$l = \underline{\hspace{2cm}}$$

(२) समीकरणों को हल कीजिए—

(i)  $3x + 4 = 10$

(ii)  $\frac{5x + 10}{4} = 20$

(iii)  $\frac{3x - 8}{2} = 2$

6. बायीं ओर लिखे समीकरण का एक चरण हल कर बायीं ओर लिखा गया है। परन्तु ये ऊपर नीचे हो गए हैं। आप सही जोड़े मिलाइये—

(i)  $3x + 5 = -5$

(a)  $x = \left( \frac{-7}{5} \right) \times \frac{1}{5}$

(ii)  $5x - 7 = 2$

(b)  $x = \frac{9}{3}$

(iii)  $\frac{x}{5} = 2$

(c)  $5x = 2 + 7$

(iv)  $3x = 9$

(d)  $x + 3 = 3 \times 5$

(v)  $3 = 9x$

(e)  $x - 3 = \frac{9}{3}$

(vi)  $5x = \frac{-7}{5}$

(f)  $3x = -5 - 5$

(vii)  $3(x - 3) = 9$

(g)  $y^2 = (-6) \left( \frac{4}{3} \right)$

(viii)  $\frac{3}{x} = 7$

(h)  $3 = 7 \times x$

(ix)  $\frac{3y^2}{4} = -6$

(i)  $\frac{3}{9} = x$

(x)  $\frac{x-1}{5} = 3$

(j)  $x = 2 \times 5$

अब हन एसे समीकरणों को हल करने की कोशिश करते हैं जिनमें हनें दो समीकरण हनें की आवश्यकता होती है, जैसे— निम्न समीकरणों को देखें—

$$(a) \quad 3p - 10 = 5 \quad (b) \quad 2q - 6 = 0 \quad (c) \quad \frac{3p}{10} - 6$$

$$(d) \quad 2y + \frac{5}{2} - \frac{37}{2} \quad (e) \quad \angle = 5(p - 2)$$

**हल :** (a)  $3p - 10 = 5$

दोनों पक्षों में 10 जोड़े हैं। (ज्योंकि हाँ तो को उत्तर दर्शाना है।)

नया समीकरण  $3p - 10 + 10 = 5 + 10$

या,  $3p = 15$

अब दोनों पक्षों में 3 रो भाग करते हैं (ज्योंकि हमें चर को अकेला बरना है।)

$$\frac{3p}{3} = \frac{15}{3}$$

या  $p = 5$ , यह समीकरण का उत्तर है।

(b)  $2q - 6 = 0$

दोनों पक्षों में 6 जोड़ने पर  $2q - 6 + 6 = 0 + 6$

या  $2q = 6$

या  $\frac{2q}{2} = \frac{6}{2}$  (दोनों तरफ 2 से भाग देना पर)

या  $q = 3$  (अब रासायनिक हल है।)

(c)  $\frac{3p}{10} - 6$

या  $\frac{3p}{10} \times 10 - 6 \times 10$  (दोनों तरफ 10 रो भाग करने पर)

व)  $3p = 60$

ग)  $\frac{3p}{3} = \frac{60}{3}$  (दोनों ओर 3 से भाग करने पर)

घ)  $p = 20$  (इस समीकरण का हल है)

(d)  $2y - \frac{5}{2} - \frac{37}{2}$

घ)  $2y - \frac{5}{2} - \frac{5}{2} = \frac{37}{2} - \frac{5}{2}$  (दोनों पक्षों में  $\frac{5}{2}$  घटाना जरूरी)

व)  $2y - \frac{37-5}{2} - \frac{32}{2} = 16$

ग)  $2y = 16$

घ)  $\frac{2y}{2} = \frac{16}{2}$  (दोनों पक्षों में 2 से भाग करना जरूरी)

घ)  $y = 8$  (इस समीकरण का हल है।)

(e)  $4 = 5(p-2)$

घ)  $5(p-2) = 4$  (दोनों पक्षों का पराम्पर बदलने पर)

घ)  $\frac{5(p-2)}{5} = \frac{4}{5}$  (दोनों पक्षों में 5 से भाग करने पर)

घ)  $p-2 = \frac{4}{5}$

घ)  $p-2 + 2 = \frac{4}{5} + 2$  (दोनों पक्षों में 2 जोड़ने पर)

घ)  $p = \frac{4}{5} + 2 = \frac{4+10}{5} = \frac{14}{5}$  (इस समीकरण का हल है।)

## 11.5 समीकरण के छल की जाँच

हमना यदि किसी ज्ञानीकरण का छल ज्ञात किया है तो यह सूत्र संदर्भ बना रहता है कि यह सती है या नहीं। इसकी जाँच के लिए हम छल की स्वत्ता की जाँच कर सकते हैं। हम जानते हैं कि समीकरण के छल में दो के जगह वर या न न (छल) रख कर उत्तर देखते हैं, यदि उस नान के लिए वार्षा व दार्शा पक्ष बराबर है तो वह का वह नान समीकरण का छल होता है।

**उदाहरण—1.**  $3p - 10 = 5$  तो  $p = 5$  के लिए

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= 3 \times 5 - 10 \\ &= 15 - 10 \\ &= 5 \end{aligned} \quad \text{RHS} = 5$$

अतः  $x = 5$  ऐसे गए समीकरण का छल सत्त्व है।

**उदाहरण—2.**  $\frac{2}{5}(m - 10) = 2m + 3$

हल पहली विधि

4  $\frac{2}{5}(m + 10) = 2m - 3$

4  $\frac{2}{5}m + \frac{2}{5} \times 10 = 2m - 3$  (दोनों पक्षों में कोषिक हटाने पर)

4  $\frac{2}{5}m + 4 = 2m - 3$

य-  $\frac{2}{5}m + 4 - \frac{2}{5}m = 2m - 3 - \frac{2}{5}m$  (दोनों पक्षों में  $\frac{2}{5}m$  घटाने पर)

4  $4 - 2m - \frac{2}{5}m = 3$

4  $4 - \frac{10m - 2m}{5} = 3$

य-  $4 = \frac{8m}{5} + 3$

य  $4 - 3 - \frac{8m}{5} + 3 - 3$  (दोनों पक्षों में से 3 हटाने पर)

य  $1 = \frac{8m}{5}$

य  $1 \times 5 = \frac{8m}{5} \times 5$  (दोनों पक्षों में 5 से गुणा करने पर)

य  $5 = 8m$

व  $\frac{5}{8} = \frac{8m}{8}$  (दोनों पक्षों में 8 से भाग देने पर)

व  $\frac{5}{8} = m$

व  $m = \frac{5}{8}$  (दोनों पक्षों का अपरिवर्तन होता है)

[दोनों पक्षों का अपरिवर्तन होता है]

**दूसरी विधि :**  $\frac{2}{5}(m+10) = 2m+3$

य  $\frac{2}{5}m + \frac{2}{5} \times 10 = 2m+3$  (बर्द्दू पक्ष में लोटक हटाने पर)

व  $\frac{2}{5}m + 4 = 2m+3$  (उमान पद ( $m$ ) की एक पक्ष में छोड़ते,  $2m$  की एक बदलने पर या दोनों ओर  $2m$  छाना)

य  $\frac{2}{5}m - 2m = 3 - 4$

व  $\frac{2}{5}m - 2m = -1$  (1 का पक्ष बदलने पर के दोनों ओर 1 घटाने पर)

य  $\frac{2m - 10m}{5} = -1$

या  $2m - 10m = -1 \times 5$  (5 का पक्ष बदलने पर अर्थात् दोनों ओर 5 से गुण करने कर)

या  $-8m = -5$

या  $m = \left( -5 \times \frac{1}{-8} \right)$  (-8 का पक्ष नहीं बदलने पर अर्थात् दोनों ओर -8 का गान करने पर)

या  $m = \frac{5}{8}$  (समीकरण का इलाज)

### समीकरण की जाँच

$\text{LHS} = -\frac{2}{5}(m - 10)$ $= -\frac{2}{5}\left(\frac{5}{8} + 10\right)$ $= \frac{2}{5}\left(\frac{5 + 80}{8}\right)$ $= \frac{2}{5} \times \frac{85}{8}$ $= \frac{17}{4}$	$\text{RHS} = 2m + 3$ $= 2 \times \frac{5}{8} + 3$ $= \frac{10}{8} + 3$ $= \frac{10 + 24}{8}$ $= \frac{34}{8} = \frac{17}{4}$
---	---

अतः  $m = \frac{5}{8}$  के विशेष दोनों बहुओं का गान स्वगत हैं अतः इस समीकरण का गान  $\frac{5}{8}$  है।

### 11.6 स्थानहारिक समस्याओं को हल करने में समीकरण का अनुप्रयोग

अब तक हमने सरल समीकरण का हल करना सीख लिया है। हमना यह भी जान लिया कि दिए गये लक्षण ऊ अनुसार अनु न किस प्रकार समीकरण बनाए और उसका इल निकाल कर रानी को देंगे ऊ दिया। अझे कृष्ण ऐसे लक्षण पर आधारित समीकरण का हल देखें।

**उदाहरण—3.** 64 रु. को ऐसे दो भागों में बांटिए कि बड़ा भाग छोटे भाग का तीन गुना हो।

**हल :** नना कि बड़ा भाग x रु.

छोटा भाग  $64 - x$  रु.

प्रश्न से, बड़ा भाग छोटे भाग का तीन गुना है।

$$\text{अतः } x = 3 \times (64 - x)$$

$$\text{या } x = 192 - 3x$$

$$\text{या } x + 3x = 192 \quad (3x \text{ का पहले बदलने पर})$$

$$\text{या } 4x = 192$$

$$\text{या } x = \frac{192}{4} \quad (4x = 192 \text{ है अतः उसे बदलने पर वह नाजिक के रूप में आ जायगा। वास्तव में यह क्रिया दहनों तक 4 से भाग लेने के समान है।)$$

$$\text{या } x = 48$$

$$\text{तो भाग } x = 48$$

$$\text{इति हि } 64 - x = 64 - 48 = 16$$

अभेड भाग 48 रु. एवं 16 रु. हैं।

**उदाहरण-4.** पिता, पुत्र एवं पुत्री का उम्र का योग 120 है। पिता का उम्र, पुत्र एवं पुत्री के उम्र के योग के बराबर है एवं पुत्री का उम्र पुत्र के उम्र का आधा है तो तीनों की उम्र अलग-अलग शाकी करें।

**हल :** नना कि पुत्र का उम्र  $x$  है।

$$\text{पुत्री की उम्र} \quad \frac{x}{2} \quad (\text{पुत्र के उम्र की आधी})$$

$$\text{पुत्र एवं पुत्री के उम्र का योग} = x + \frac{x}{2}$$

प्रश्न से,

$$\text{पिता की उम्र} = x + \frac{x}{2}$$

तीनों के उम्र का योग

$$\text{या } \frac{x}{2} + x + x + \frac{x}{2} = 120$$

य  $\frac{x}{2} - \frac{x}{2} + 2x = 120$

य  $x + 2x = 120$

$$\left( \because \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = x \right)$$

य  $3x = 120$

य  $x = \frac{120}{3}$

य  $x = 40$

पूर्ण रूपी उम्र  $= 40$  वर्ष

पूर्णी की उम्र  $= \frac{x}{2} = \frac{40}{2} = 20$  वर्ष

पिता की उम्र  $= x - \frac{x}{2} = 40 + \frac{40}{2} = 40 + 20 = 60$  वर्ष

**सदाहरण-5.** एक व्यक्ति ने अपने दून का आधा नाग पत्ती को,  $\frac{1}{4}$  भाग पुत्री को,  $\frac{1}{5}$  भाग पुत्र को तथा शेष 20,000 रु. जैसे लेगवाने के लिए एक समेति के दान में दे दिए। उस व्यक्ति के पास कुल कितना धन था?

**हल :** नाना के उपरोक्त पात्र कुल धन  $x$  है।

$$\text{पत्ती का धन} = x \text{ का आधा} = x \times \frac{1}{2} = \frac{x}{2}$$

$$\text{पुत्री का धन} = x \text{ का } \frac{1}{4} = x \times \frac{1}{4} = \frac{x}{4}$$

$$\text{पुत्र का धन} = x \text{ का } \frac{1}{5} = x \times \frac{1}{5} = \frac{x}{5}$$

रामेश दान  $= 20,000$  रु.

कुल धन  $=$  रामेश के धनों का योग

य  $x = \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} + 20,000$

या  $x - \frac{x}{2} - \frac{x}{4} - \frac{x}{5} = 20,000$  ( $\frac{x}{2}, \frac{x}{4}, \frac{x}{5}$  का पद बराबर)

या  $\frac{20x - 10x - 5x - 4x}{20} = 20,000$

या  $\frac{20x - 19x}{20} = 20,000$

या  $\frac{x}{20} = 20,000$

या  $x = 20,000 \times 20 = 4,00,000$  रु.

अतः कुल धन = 4,00,000 रु.

### प्रश्नावली—11.3

निम्नलिखित समीकरण का हल करें एवं ग्राफ डल का जैब करें।

1.  $\frac{x}{3} - \frac{x}{5} = -2$

2.  $\frac{3x+2}{3} = \frac{17}{6}$

3.  $x - 4 = 4(129-x)$

4.  $\frac{x-19}{5} = 8$

5.  $\frac{x}{2} + 6 = \frac{x}{3} + \frac{2x}{7}$

6.  $\frac{2y-1}{3} = \frac{y-2}{2}$

7.  $10 - 4 - 3(x+2) =$

8.  $4x - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - x$

9.  $3(x+1) - 2(x+1) = 10$

10.  $5(5x+2) = 40$

11.  $\frac{x-19}{5} = 8$

12.  $\frac{5x}{2} - 7 = \frac{11}{2}$

13. दोनों लगातार पूँजी को का योग 21 है तो दोनों पूँजी के ज्ञात कीजिए।

14. तीन क्रम में उन्हें यात्री संख्याएँ का योग 39 है तो वे संख्यायें ज्ञात कीजिए।

15. किसी सनद्वितीय त्रिभुज का एक लंब 50° का है तो त्रिभुज के शेष दानों ओणों की नमूना बताइये।

16. निम्नी आधुनिक के लम्बाई एवं चौड़ाई के अनुपात 3 : 2 है। यदि आधुनिक की परिमिति 90 नीटर है तो उसकी लम्बाई एवं चौड़ाई ज्ञात कीजिये।

17. रालगा की उम्र उराके दिनों के अन्तर के एक त्रिभाई से 5 वर्ष का है। यदि रालगा की उम्र 20 वर्ष है तो उसके दिनों की उम्र ज्ञात करें।

18. विक्रम ने 8 कुर्सी एवं 2 मेंज खरीदने नं कुल 2900 रु. खर्च किय। यदि 1 नंज की कैमत 450 रु. है तो 8 कुर्सी के कौमत इत लीजिए।
19. दे पूरफ कोणों के अंतर  $20^\circ$  है तो दोनों कोण ज्ञात करें।
20. कोइ फोग अपने पूरक लोण का एक वैथाश है तो कोण का मान ज्ञात करें।
21. एक वर्गीचे में आम ल गेड़, अम्लद के पड़ ते 43 कन है। यदि उस वर्गीचे में दगों मिल जरु कुल 133 गेड़ हा तो दोनं प्रकर के पड़ ले अलग—अलग संख्या बतउ।
22. एक व्यक्ति के 55 उराके पुत्रों के उम्र 75 वर्षों ते 16 वर्ष बाट वह 55नी पुत्रों के सम्र के दुनुगा हो जायेग। पुत्रों की उन्न ज्ञात लीजिए।

## हमने सीखा

1. एक समीकरण अंजक क चरं नर एक ग्राहिक्ष्म हता है जिसमं चर ल मज्ज के लिए सनीकरण क दोनों पक्षों ल लिए सनीकरण के दोनों पक्षों का मान समान छोना चाहिए।
2. 75 75 वह गान जिसके लिए सामीकरण  $x^2 + y^2 = 1$  है अर्थात् यार्थी च यार्थी पक्ष बर बर होत हैं समीकरण का हल या नुल कहलाता द्वे।
3. सामीकरण के दोनों पक्षों के पर समीकरण नहीं पदलपा है।
4. सनीकरण क दोनों पक्षों में समान संख्या (या चर) को जोड़ने पर सनीकरण नहीं बदलता है।
5. किसी सनीकरण क दोनों पक्षों में सूक्ष्म के अलावा किसी इन्य संख्या स (या चर स) गुणा या भजन सूक्ष्म पर समीकरण नहीं बदलता है।
6. उपर्युक्त नियमों का सहयोग कर हा सामीकरण के एक पटे में उस पृष्ठ कर सकते हैं जिससे चर का मान ज्ञात जरु सनीकरण का हल निकाला जा सक।
7. पदों के स्थानापन (पद का पक्ष परिवर्तन) द्वारा अरानी रो हा सामीकरण को हल करने की प्रक्रिया में आगे बढ़ते हैं।
8. किसी पद का गुणांक या भाजक पदा परिवर्तन के बद क्रनशः भाजक इयं गुणांक में बदल जाता है। उनके विष्ट नहीं बदलते।
9. संख्या पहलियां लो हल करने के लिए उहल कठनानुसार समीकरण बनाते हैं एवं उसका हल ज्ञात जरते हैं।
10. सनीकरण में चर का मन रखकर सनीकरण के हल को जारी की जा सकती है।

३०४

## अध्याय-12

# परिमेय संख्याएँ

### 12.1 गूणिका

हमने प्राकृत संख्या, पूर्ण संख्या, पूर्णांक और भिन्न संख्याओं के बारे में जाना है।

भिन्न संख्याएँ ने हम लोगों ने स्थानीय अंक लिखने में दूर ही विचार किया। भिन्न के बारे में हम आनंद हैं कि  $\frac{\text{अंक}}{\text{हर}}$  रूप में लिखी रखने को भिन्न संख्या कहते हैं जिसमें अंक सूचना है।

या कोई भी भगात्मक पूर्णांक है तक है परन्तु हर सदैव एक भगात्मक पूर्णांक भी हो सकता है। इस अध्याय में हम ऐसी संख्याएँ के बारे में भी जड़ने जिनका उद्देश वह हर भगात्मक पूर्णांक भी हो सकता है। इस अध्याय ने हम संख्या पद्धति का और टिप्पोर करेंगे जिसमें हम प्राकृतका न अपार तरफ भिन्नों के रूप में उनकी जाति में लकड़ियाँ सीखेंगे।

### 12.2 परिमेय संख्या

हमने पूर्णांक संख्या ने देखा है कि किसी वस्तु के मूल्य में 50 रुपये वृद्धि को +50 से व्यक्त किया जा सकता है तो 50 रुपये को -50 से व्यक्त किया जा सकता है, इसी प्रकार किसी स्थान से दार्ढी और की दूरी 10 किमी. को +10 से दार्ढी और की दूरी 10 किमी. -10 से व्यक्त किया जा सकता है।

इसी प्रकार की इनके विवरियाँ भिन्न तरक्की संख्याएँ होती हैं। जैसे—हम रासुद तल रे उपर 800 मीटर की ऊँचाई को 1 किमी. से जल्द करने पर  $\frac{800}{1000}$  किमी. =  $\frac{4}{5}$  किमी.

होता है। जैसे  $\frac{1}{5}$  किमी. से जल्द किया जाता है। क्या हम रासुद तल रे से  $\frac{-4}{5}$  किमी. की ऊँचाई को लेकर तरक्की कर सकते हैं? क्योंकि रासुद तल रे से नीचे  $\frac{4}{5}$  किमी. की ऊँचाई को

$\frac{-4}{5}$  से लेकर ऊपर तक होती है। अब हम देखते हैं कि  $\frac{-4}{5}$  ने कैसे एक पूर्णांक है और न ही एक

मिन्न। इसी संख्याओं के समेलित करने के लिए हमें संख्या पद्धति के विस्तृत करने की आवश्यकता है। ये जाइए हम एक नये प्रकार की संख्या एवं विवर करते हैं, जिसे परिमेय संख्या कहते हैं।

अर्थात् ऐसी संख्या जो  $\frac{p}{q}$  के रूप में हो जहाँ  $p$  और  $q$  पूर्णांक हैं, लेकिन  $q \neq 0$  हो

तो  $\frac{p}{q}$  को परिमेय संख्या कहते हैं, जिसनं  $p$  अंश तथा  $q$  हर कहलाता है।

$\frac{-4}{15}$  एल परिमेय संख्या है, इसमें उन्नर की संख्या -1 को अंश तथा नीचे की संख्या 15 का हर कहते हैं।

क्या सभी प्राकृत संख्या परिमेय संख्या हैं?

हाँ, (क्योंकि सभी प्राकृत संख्या के  $\frac{p}{q}$  के रूप में लिखा जा सकता है।

जैसे—  $1 = \frac{1}{1}, 2 = \frac{2}{1}, \dots$  आदि)

क्या सभी पूर्ण संख्या परिमेय संख्या हैं?

हाँ, (क्योंकि सभी पूर्ण संख्या के  $\frac{p}{q}$  के रूप में लिखा जा सकता है।

जैसे—  $0 = \frac{0}{1}, 1 = \frac{1}{1}, 2 = \frac{2}{1}, \dots$  आदि)

क्या सभी यूर्धीक वरिन्य संख्या हैं?

हाँ, (क्योंकि सभी दूषांक का  $\frac{p}{q}$  के रूप में लिखा जा सकता है।

जैसे—  $\dots -3 = \frac{-3}{1}, -2 = \frac{-2}{1}, -1 = \frac{-1}{1}, 0 = \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \dots$  आदि)

क्या सभी नेचा वरिन्य संख्या हैं?

हाँ, (क्योंकि सभी मिन्न  $\frac{p}{q}$  के रूप में हैं)

क्या  $\frac{5}{0}$  एक परिमेय संख्या है ?

नहीं, (क्योंकि इस शून्य है)

क्या 0 एक नियन्त्र संख्या है ?

हाँ क्योंकि इस  $\frac{0}{1}$  के लिए में निख सकते हैं।

### 12.3 समतुल्य परिमेय संख्याएँ

एक नियन्त्र संख्या को उलग-अलग अंशों और दूरों का प्रयोग करते हुए लिख जा सकता है।

परिमेय संख्या  $\frac{-5}{8}$  कर चैवार करें :-

$$\frac{-5}{8} = \frac{-5 \times 2}{8 \times 2} = \frac{-10}{16}, \text{ इन देखते हैं कि } \frac{-5}{8} \text{ बहुत हो जा } \frac{-10}{16} \text{ है।}$$

$$\text{साथ ही, } \frac{-5}{8} = \frac{-5 \times 3}{8 \times 3} = \frac{-15}{24}, \text{ अतः } \frac{-5}{8} \text{ बहुत हो जा } \frac{-15}{24} \text{ है।}$$

$$\text{पुनः } \frac{-5}{8} = \frac{-5 \times 4}{8 \times 4} = \frac{-20}{32}, \text{ अतः } \frac{-5}{8} \text{ बहुत हो जा } \frac{-20}{32} \text{ है।}$$

$$\text{इस प्रकार } \frac{-5}{8} = \frac{-10}{16} = \frac{-15}{24} = \frac{-20}{32} \text{ है।}$$

**अर्थात् ऐसी परिमेय संख्याएँ जो परस्पर बराबर हों एक दूसरे के समतुल्य या तुल्य (Equivalent) परिमेय कही जाती हैं।**

|Note :| इसी परिमेय संख्या का सन्तुल्य भिन्न ग्राहक लिए परिमेय संख्या के अंश और हर नं समान (शून्य को छोड़कर) संख्या से गुणा या भाग करते हैं, जैसा कि ऊन्नर बताया गया है।

$$\text{परं } \frac{5}{-7} = \frac{-5}{7} \text{ है ? } \text{ पूँछो } \frac{5}{-7} = \frac{5 \times \boxed{\phantom{0}}}{-7 \times \boxed{\phantom{0}}} = \frac{-5}{7} \quad \text{अर्थात् } \frac{5}{-7} = \frac{5 + \boxed{\phantom{0}}}{-7 + \boxed{\phantom{0}}} = \frac{-5}{7}$$

अपरं  $\frac{5}{-7}$  और  $\frac{-5}{7}$  दोनों एक दूसरे के बराबर हैं। अर्थात्  $\frac{5}{-7} = \frac{-5}{7}$  होगी।

ऐसे  $\frac{5}{-7}$  को  $-\frac{5}{7}$ ,  $\frac{-5}{7}$  को  $-\frac{5}{7}$  इत्यादि लिखते हैं।

### स्वयं करके देखिए

परिमेय संख्या	$\frac{5}{4}$	$-\frac{8}{9}$	$\frac{7}{-8}$	$\frac{7}{9}$
धनात्मक परिमेय संख्याएँ	$\frac{10}{8}, \frac{15}{12}, \frac{20}{16}, \frac{25}{20}$			

ग्रन्थिलिखित पर विचार जरूर-

$$\frac{12}{9}, \frac{20}{12}, \frac{25}{18}, \frac{15}{-8}, \frac{-5}{12}, \frac{-6}{7}$$

$\frac{12}{9}, \frac{20}{12}, \frac{25}{18}$  धनात्मक परिमेय संख्याएँ हैं।  $\frac{15}{-8}, \frac{-5}{12}, \frac{-6}{7}$  ऋणात्मक परिमेय संख्याएँ हैं।

अतः स्पष्ट है कि किसी परिमेय संख्या का अंश और हर दोनों धनात्मक हो तो धनात्मक परिमेय संख्या कहलाती है। और यदि किसी परिमेय संख्या का अंश और हर में से कोई एक ऋणात्मक पूर्णांक हो तो ऐसी परिमेय संख्या ऋणात्मक परिमेय संख्या कहलाती है।

यद्या  $\frac{-3}{-5}$  एक ऋणात्मक परिमेय संख्या है?

हम जानते हैं कि  $\frac{-3}{-5} = \frac{-3 \times -1}{-5 \times -1} = \frac{3}{5}$  होता है। अतः  $\frac{-3}{-5}$  एक धनात्मक परिमेय संख्या है।

[Note : यदि परिमेय संख्या का अंश और हर दोनों धनात्मक पूर्णांक जो शा दनों ऋणात्मक पूर्णांक हो तो वह धनात्मक परिमेय संख्या कहलाती है।]

सुविभागी टूर्सिट से नरिनद संख्याओं को लगात सरलतम रूप में संकिया की जाती है। परिमेय संख्या का यह सरलतम रूप निम्न अंक व हर में काढ़ सार्वभूत बर्धण न हो तथा हर धनात्मक हो। यदि है तो उसा सार्वभूत बर्धण जो दोनों अंक व हर में भाग देलक्ष भारतीय रूप प्राप्त करते हैं। इस प्रकार परिमेय संख्याओं का मानक रूप प्राप्त होता है जैसे :

$\frac{\boxed{-3}}{\boxed{4}}$  आदि।

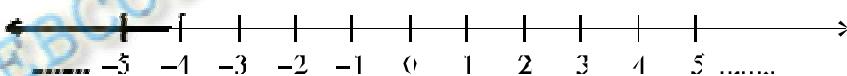
### स्वयं करके देखिए

निम्नलिखित परिनय संख्या में कौन ऋणात्मक है, कौन धनात्मक और कौन न धनात्मक न ऋणात्मक सही लॉलम् ने निशान (✓) लगाइए।

परिनय संख्या	ऋणात्मक परिनय	धनात्मक परिनय	न धनात्मक न ऋणात्मक
$\frac{15}{18}$			
$\frac{-40}{27}$			
$\frac{-28}{-17}$			
$\frac{56}{-19}$			
$\frac{0}{5}$			
0			

### 12.4 परिगेय संख्याओं का संख्या रेखा पर निरूपण

आइए संख्या रेखा को बढ़ें—

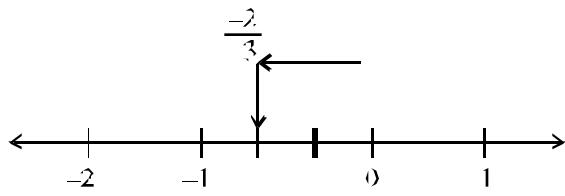


संख्या रेखा में शून्य के दो ओर बनार का पूर्णांक है जिन्हें — निह के र श लिखते हैं और शून्य के दो ओर ऋणात्मक पूर्णांक है जिन्हें — चिन्ह ल स्थ लिखते हैं। संख्या रेखा नर हन लगाने पूर्व की कहाने न मिनों ल निरूपण को देखा है।

आइए अब हनलोग संख्या रेखा पर नरिनय संख्याओं को निरूपित करें।

एक परिगेय संख्या  $\frac{-2}{3}$  को संख्या रेखा पर निरूपित करें। यूके  $\frac{-2}{3}$  अपात्मक परिगेय संख्या है, इस लिए इसका स्थान '0' (शून्य) के बायें ओर होगा।  $\frac{-2}{3}$  संख्या ऐसे कि

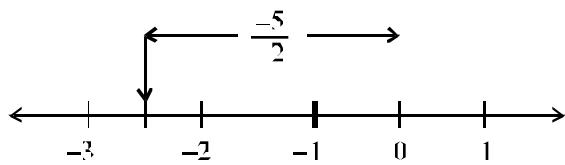
'0' और -1 के बीच होगी। अतः 0 और -1 के बीच '0' न बराबर लंब करते हैं। पिछे '0' शून्य की तरफ से दूसरे लंब पर  $-\frac{2}{3}$  का स्थान होगा।



**उदाहरण-1.**  $-\frac{5}{2}$  को संख्या रेखा पर दर्शाइए।

**हल :** ऐसे जानते हैं  $-\frac{5}{2}, -2\frac{1}{2}$

अतः  $-\frac{5}{2}$  का स्थान '0' से वार्षी



ओर (ऋणात्मक पूर्णांक तरफ) -2 और -3 के बीच ही इसे संख्या रेखा पर इस प्रकार दर्शाया जात है।

-2 और -3 के बीच का स्थान का जो बराबर भागों में बांटते हैं वयोंकि  $-2\frac{1}{2}$  में हर दो है और -2 के तरफ का एहता भाग पर  $-2\frac{1}{2}$  का स्थान होगा वयोंकि अंश 1 है, जैसे कि ऊपर के चित्र से समझ सकते हैं। इसी प्रकार अन्य परिमेय संख्या का संख्या रेखा पर दिखाया जा सकता है।

रीना ने  $-\frac{5}{2}$  को संख्या-रेखा पर दिखाने के लिए निम्न कार्य किए : -

- (i) अन्य चिह्न अर्थात् 6 ई ओव।
- (ii) हर 2 अर्थात् इकाई के दो हिस्से।
- (iii) अन्य छ अर्थात् एसो-ऐसो 5 टुकड़े।

वया अपने  $\frac{2}{3}$  के संख्या रेखा पर दर्शाएँ।

### स्वयं करके देखिए

निम्न को संख्या-रेखा पर दिखाएँ

- (i)  $-\frac{5}{2}$  (ii)  $-\frac{7}{2}$  (iii)  $\frac{5}{3}$  (iv)  $-\frac{4}{3}$  (v)  $\frac{2}{5}$

## 12.5 परिमेय संख्याओं की तुलना

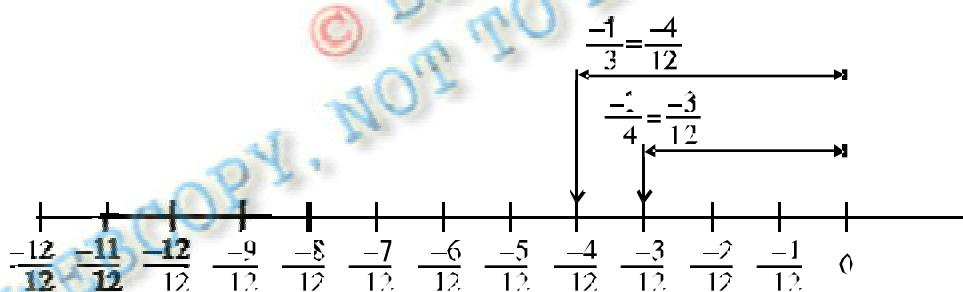
हमने देखा है कि दो पूँछों द्वारा दो भिन्नों की तुलना किस प्रकार की जाती है तथा यह भी कि इनमें लोग बड़ा और कौन छटा है। आइए उब इन लोग दो परिमेय संख्याओं की तुलना पर ध्वनि लें।

$\frac{5}{4}$  और  $\frac{6}{11}$  जैसी दो धनात्मक परिमेय संख्याओं की तुलना अंतिम तरिके प्रकार की जा सकती है, जैसा कि इन भिन्नों की स्थिति के लिए पहले ही कर दिए हैं।

आइए दो ऋणात्मक परिमेय संख्याओं की तुलना संख्या रेखा पर देखें—

एम लोगों ने पूर्णांक संख्याओं की तुलना ले संदर्भ में देखा है कि संख्या-रेखा पर दायी तरफ की पूँछ वार्षीय तरफ ली गूणांक से बड़ी होती है। उसी प्रकार  $\frac{-1}{2}$  और  $\frac{-1}{3}$  को संख्या रेखा पर निम्नोंके करके पहचान की जा सकती है। दोनों की ऐसी दूल्हा परिमेय संख्या जो जिए तिनके हर साथ होंगी। जैसे—

$$\text{फिर, } -\frac{1}{4} = -\frac{1 \times 3}{4 \times 3} = -\frac{3}{12} \text{ और } -\frac{1}{3} = -\frac{1 \times 4}{3 \times 4} = -\frac{4}{12}$$



वैसे के  $-\frac{1}{4}, -\frac{1}{3}$  से संख्या रेखा पर दर्शी तरक है। अतः  $\frac{-1}{4}, \frac{-1}{3}$  से बड़ा होगा।

इस प्रकार 5, 5 से बड़ा है तरह -8, -5 से छोटा है।

यदि  $\frac{1}{3} > \frac{1}{6}$  है, परंतु  $\frac{-1}{3} < \frac{-1}{6}$

हम भिन्नों के अन्तर्गत अध्ययन से यह जानत हैं कि  $\frac{1}{2} < \frac{1}{3}$  है। स्थ ही संख्या रेखा

से हन्त  $\frac{-1}{4}$  व  $\frac{-1}{3}$  के लिए क्या प्राप्त किया? क्या यह इसका ठीक विपरीत नहीं था।

आप देखते हैं कि  $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$  है, तरंतु  $-\frac{1}{3} < -\frac{1}{4}$  है।

क्या आप  $-\frac{3}{4}$  और  $-\frac{2}{3}$  तथा  $-\frac{1}{2}$  और  $-\frac{1}{5}$  के लिए भी इसी प्रकार का परिणाम देखते हैं?

ऐसों को बाद आता है कि लगाने पूर्वीकों में पढ़ा था कि  $4 > 3$  है, तरंतु  $-4 < -3$  है;  $5 > 2$  है, तरंतु  $-5 < -2$  इत्यादि।

— अध्यात्मिक परिग्रेध संख्याओं के युग्मों की स्थिति यीक इसी प्रकार है। दो ऋणात्मक परिमित संख्याओं की तुलना उसके के लिए, हम लगकी तुलना उनके विषयों को छाड़ते हुए करते हैं और बाद में उसमेंका (inequality) ल चिह्न को सुलझा कर (बदल) देते हैं।

उत्तराहरणार्थ,  $-\frac{7}{5}$  और  $-\frac{5}{3}$ , जो तुलना करने के लिए पहले हन  $\frac{7}{5}$  और  $\frac{5}{3}$  की तुलना करते हैं।

हमें  $\frac{7}{5} < \frac{5}{3}$  ग्राह करता है और इससे हम निष्कर्ष निकालते हैं कि  $-\frac{7}{5} > -\frac{5}{3}$  है।

ऐसे जौद युग्म और लीनिंग और किर जूली तुलना की गिए।

**जौन यहाँ है—**  $-\frac{3}{8}$  या  $-\frac{2}{7}$ ,  $-\frac{4}{3}$  या  $-\frac{3}{2}$

एक अध्यात्मिक और धन याक परिग्रेध संख्या की तुलन सुरक्षित है। संख्या रेखा पर, एक अध्यात्मिक परिग्रेध संख्या शून्य के बाईं ओर स्थित होती है (अ. ५७) धनात्मक परिग्रेध संख्या शून्य के दाईं ओर स्थित होती है। अतः, एक ऋणात्मक परिग्रेध संख्या सदैव एक धनात्मक परिग्रेध संख्या से छाटी होती है।

इसी त्रिकार  $\frac{-2}{7} < \frac{1}{2}$  है।

**उदाहरण-2.**  $\frac{-5}{6}$  और  $\frac{-4}{5}$  की तुलना लीजिए।

**हल :** सर्वप्रथम चिह्न के बिना तुलना करते हैं।

$$\frac{5}{6} \text{ और } \frac{4}{5}$$

$$6 \text{ और } 5 \text{ के लगभग } 6 \times 5 = 6 \times 5 = 30$$

$$\frac{5}{6} = \frac{5 \times 5}{6 \times 5} = \frac{25}{30}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \times 6}{5 \times 6} = \frac{24}{30}$$

$$\Rightarrow \frac{25}{30} > \frac{24}{30} \quad \text{यानी } 25 > 24$$

$$\therefore \frac{5}{6} > \frac{4}{5}$$

अब  $\frac{-5}{6}$  और  $\frac{-4}{5}$  के सिद्ध असमिका के चिह्न को छल्ला कर देते हैं।

$$\therefore \frac{-5}{6} < \frac{-4}{5}$$

एक उन्नतमक परिमेय संख्या जैसा ताक परिमेय संख्या रे बड़ी होती है।

जैसे:  $\frac{5}{4} > -\frac{8}{5}$

$\frac{-4}{-5}$  और  $\frac{-7}{-8}$  की तुलना ले लिए गहल उन्हें मानक रूप में बदलें और इस उनकी तुलना करें।

दो परिमेय संख्याओं जी तुलना के लिए एक अन्य चौथी पर विवर करें-

**उदाहरण-3.**  $-\frac{5}{4}$  और  $-\frac{2}{3}$  की तुलना करें।

**हल :**  $-\frac{5}{4}$  और  $-\frac{2}{3}$  का वर्जन लगते हैं।

### कार्यविधि :

- ⇒ ग्रेड वर्द के हर का ल० ल० निकालते हैं।
- ⇒ ग्रेड पद के हर ले ल० स० के बराबर करते हैं।
- ⇒ इस प्रकार राह गिन ग्राउ हो जाती है।
- ⇒ ऐसे दोनों परिमेय संख्याओं की तुलन कर छेदा या गृह गिन ज्ञात करते हैं।

i)  $-5 \times 3$  और  $-2 \times 4$   $-15$  और  $-8$

$$\Rightarrow -15 < -8 \quad \text{तो} \quad \frac{-5}{4} < -\frac{2}{3}$$

### Ques 10; adjdsnf[k,

तीनों विधि से निम्नलिखित वृत्त तुलना करें।

(i)  $\frac{-3}{5}$  और  $\frac{-3}{10}$  (ii)  $-\frac{5}{8}$  और  $-\frac{3}{1}$

**उदाहरण-4.**  $\frac{-1}{2}, \frac{-2}{3}, \frac{3}{-4}$  और  $\frac{-2}{-3}$  ज्ञारोही क्रम (बढ़ते क्रम) में लिखें।

**हल :** सबसे पहल दी गयी परिमेय संख्याओं को मानक रूप में लिखें।

मानक रूप :-  $\frac{-1}{2}, \frac{-2}{3}, \frac{-3}{4}, \frac{2}{3}$  हर्ये 2, 3, 4, 3 का लcm से = 12

उपर्युक्त करने पर,  $\frac{-6}{12}, \frac{-8}{12}, \frac{-9}{12}, \frac{8}{12}$

$$\therefore \frac{-9}{12} < \frac{-8}{12} < \frac{-6}{12} < \frac{8}{12} \quad \text{तो} \quad -\frac{3}{4} < -\frac{2}{3} < \frac{-1}{2} < \frac{-2}{-3}$$

### Ques 11; adjdsnf[k,

$-\frac{2}{3}, \frac{5}{-8}, \frac{-7}{-6}$  को उवरोही क्रम (बढ़ते क्रम) में लिखें।

## 12. दो परिमेय संख्याओं के बीच की परिमेय संख्याएँ

निम्नलिखित पर गौद करें—

5 और 12 के बीच पूर्णांक संख्याएँ हैं 6, 7, 8, 9, 10, 11

-3 और 3 के बीच पूर्णांक संख्याएँ हैं : -2, -1, 0, 1, 2

इब हाँ किसी दो परिमेय संख्याओं के बीच की परिमेय संख्या ज्ञात करत हैं।

**उदाहरण-5.** नना कि  $\frac{-3}{10}$  और  $\frac{7}{10}$  के बीच की परिमेय संख्या मालूम करनी है, हमें पता है कि  $\frac{-3}{10}$  तथा  $\frac{7}{10}$  के बीच ने कम-से-कम 9 परिमेय संख्याएँ तो हैं दी

$\frac{-2}{10}, \frac{-1}{10}, \frac{0}{10}, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{5}{10}, \frac{6}{10}$  क्योंकि -3 तथा 7 के बीच 9 पूँछी हैं। यह क्या  $\frac{-3}{10}$  तथा  $\frac{7}{10}$  के बीच और गीणार संख्याएँ हैं?

$$\text{देखते हैं जौह } \frac{-3}{10} = \frac{-3 \times 5}{10 \times 5} = \frac{-15}{50}; \quad \text{इसी प्रकार } \frac{7}{10} = \frac{7 \times 5}{10 \times 5} = \frac{35}{50}$$

$$\text{अब } \frac{-15}{50} \text{ और } \frac{35}{50} \text{ के बीच की परिमेय संख्याएँ हैं : } -\frac{14}{50} < \frac{-13}{50} < \frac{-12}{50} < \dots < \frac{34}{50}$$

अब और अधिक संख्याएँ शार करने के लिए हम  $\frac{-3}{10}$  और  $\frac{7}{10}$  को  $\frac{100}{100}$  तो पूँछ कर और अधिक परिमेय संख्याएँ इतने कर सकते हैं।

**Ques:** adjdsnf[k,

$$-\frac{4}{5} \text{ व } \frac{3}{5} \text{ जीवन्य संख्याएँ के बीच में 7 परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।}$$

**उदाहरण-6.**  $\frac{2}{5}$  और  $\frac{5}{6}$  के बीच की परिमेय संख्याएँ लिखिए।

$$\text{हल : पहले हमके द्वारा लम्बन करते हैं } \frac{2}{5} = \frac{2 \times 6}{5 \times 6} = \frac{12}{30}, \quad \frac{5}{6} = \frac{5 \times 5}{6 \times 5} = \frac{25}{30}$$

अतः इनके बीच की परिमेय संख्याएँ ज्ञाती जा सकती हैं—

$$\frac{13}{30} < \frac{14}{30} < \frac{15}{30} < \frac{16}{30} < \dots < \frac{24}{30}$$

अंशों के अन्तर को जौह और अधिक बढ़ा कर उनके बीच में जौह अधिक परिनेय संख्याएँ लिखी जा सकती हैं।

$$\text{तो } -\frac{12}{30} = \frac{12 \times 2}{30 \times 2} = \frac{24}{60};$$

$$\frac{25}{30} = \frac{25 \times 2}{30 \times 2} = \frac{50}{60}$$

अब  $\frac{24}{60}$  और  $\frac{50}{60}$  के बीच जौन अंडिल रांझा है। इसकी जा सकती है। जैसे—

$$\frac{25}{60} < \frac{26}{60} < \frac{27}{60} < \dots < \frac{49}{60}$$

इसी प्रकार इसके समूह के बढ़ाकर, उनके बीच जानना परिसेय संख्याएँ ज्ञात की जा सकती हैं।

**उदाहरण—7.**  $-2 \text{ और } -1$  के बीच जीन परिसेय संख्याएँ लिखें।

**हल :** आइए  $-1$  और  $-2$  को हर 5 वाली परिसेय संख्याओं के रूप में लिखें।

$$\text{इस ग्रन्ति } -1 = \frac{-1}{1} = \frac{-1 \times 5}{1 \times 5} = \frac{-5}{5};$$

$$-2 = \frac{-2}{1} = \frac{-2 \times 5}{1 \times 5} = \frac{-10}{5}$$

$$\text{अतः } \frac{-10}{5} < \frac{-9}{5} < \frac{-8}{5} < \frac{-7}{5} < \frac{-6}{5} < \frac{-5}{5} \quad \text{या,} \quad -2 < \frac{-9}{5} < \frac{-8}{5} < \frac{-7}{5} < \frac{-6}{5} < -1$$

$-2$  और  $-1$  के बीच ~~सीमा परिसेय संख्याएँ~~  $\frac{-9}{5}, \frac{-8}{5}, \frac{-7}{5}$  होंगे।

[ Note—2 और  $-1$  के बीच ~~इसी प्रकार सामान्य परिसेय संख्याएँ ज्ञात कर सकते हैं। ]~~

### स्वयं करके देखिए

निम्नलिखित लंबीच की गरिनट संख्या इत्त करें।

$$(i) \quad \frac{1}{2} \text{ और } \frac{1}{4} \qquad (ii) \quad \frac{-5}{8} \text{ और } \frac{7}{16}$$

**12.7** दो संख्याओं के बीच की परिसेय संख्याओं को नाय ज्ञात करके भी पता कर सकते हैं।

अध्याय—4 में इमने पढ़ा है कि दो संख्याओं का नाय उन दो संख्याओं के बीच में होता है। निम्न उदाहरण पर ध्यान दीजिए:

संख्या  $\frac{1}{4}$  और  $\frac{3}{4}$  के बीच परिनट संख्या इत्त कीजिए—

हल : मध्य  $= \frac{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}{2} = \frac{1+3}{2 \times 2} = \frac{4}{8}$  यूके मध्य  $\frac{4}{8}$  देनों संख्याओं  $\frac{1}{4}$  व  $\frac{3}{4}$  के बीच होगा।

$$\text{दूसरी परिमेय संख्या } \frac{1}{4}, \frac{4}{8} \text{ का मध्य} = \frac{-\frac{1}{4} + \frac{4}{8}}{2} = \frac{2 - 1}{8 \times 2} = \frac{1}{16}$$

$$\text{तीसरी परिमेय संख्या } \frac{4}{8} \text{ व } \frac{6}{16} \text{ का मध्य} = \frac{\frac{4}{8} + \frac{6}{16}}{2} = \frac{8+6}{16 \times 2} = \frac{14}{32}$$

इसी प्रकार अन्य परिमेय संख्याएँ निकाला जा सकता है। इह निकाली गयी पहली परिमेय संख्या को दी गयी तूसरी परिमेय संख्या के साथ इसी ग्राहार की क्रिया कर आगे परिमेय संख्याएँ निकाला जा सकता है।

$$\frac{\frac{3}{4} + \frac{4}{8}}{2} = \frac{6+4}{8 \times 2} = \frac{10}{16}, \quad \frac{\frac{4}{8} + \frac{10}{16}}{2} = \frac{8+10}{16 \times 2} = \frac{18}{32}, \quad \frac{\frac{10}{16} + \frac{18}{32}}{2} = \frac{20+18}{32 \times 2} = \frac{38}{64}$$

इसी त्रिकार अन्य परिमेय संख्याएँ निकाली जा सकती है। चाना कि  $a$  और  $b$  दो परिमेय संख्या हैं तो उनके बीच की परिमेय संख्या  $= \frac{ak+b}{k+1}$ ; जहाँ  $k$  = प्राकृत संख्याएँ

### स्वयं करके देखिए

निन्मलिखित के बीच की छह परिमेय संख्या माध्य दिखि से ज्ञात कीजिए।

$$(i) \quad \frac{1}{2} \text{ और } \frac{3}{4} \quad (ii) \quad \frac{-1}{4} \text{ और } \frac{3}{8}$$

### प्रश्नावली—12.1

#### 1. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं के बीच चार परिमेय संख्याएँ लिखिए :

$$(i) \quad -3 \text{ और } -1 \quad (ii) \quad -2 \text{ और } 0 \quad (iii) \quad -1 \text{ और } 0$$

$$(iv) \quad \frac{-4}{5} \text{ और } \frac{2}{5} \quad (v) \quad \frac{-4}{5} \text{ और } \frac{-5}{7} \quad (vi) \quad \frac{-1}{2} \text{ और } \frac{2}{3}$$

- 2.** निम्नलिखित प्रत्येक प्रतिरूप में पौँच और परिमेय संख्याएँ लिखिए :
- (i)  $\frac{-1}{2}, \frac{-2}{4}, \frac{-3}{6}, \dots$  (ii)  $\frac{-2}{5}, \frac{-4}{10}, \frac{-6}{15}, \dots$
- (iii)  $\frac{-8}{9}, \frac{-16}{18}, \frac{-24}{27}, \dots$  (iv)  $\frac{1}{4}, \frac{2}{8}, \frac{3}{12}, \dots$
- 3.** नीचे दी गयी परिमेय संख्याओं में प्रत्येक के लिए पौँच समतुल्य परिमेय संख्या लिखिए।
- (i)  $\frac{1}{8}$  (ii)  $\frac{-2}{3}$  (iii)  $\frac{-5}{9}$
- 4.**  $\frac{-5}{12}$  की चार ऐसी समतुल्य परिमेय संख्या लिखिए, जिसका वर क्रमशः 80, 84, 108 और -24 हो।
- 5.** परिमेय संख्या  $\frac{-8}{11}$  के छुल्य परिमेय संख्याएँ लिखें, जिसका अंश निम्नलिखित हो—
- (i) -24 (ii) 40 (iii) 72 (iv) -96 (v) -120
- 6.** निम्नलिखित परिमेय संख्या को संख्या रेखा पर निरूपित करें—
- (i)  $\frac{4}{5}$  (ii)  $\frac{-4}{5}$  (iii)  $\frac{5}{8}$  (iv)  $\frac{-8}{3}$  (v)  $-2\frac{1}{2}$
- 7.** निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को सरलतम रूप में लिखिए—
- (i)  $\frac{-24}{32}$  (ii)  $\frac{-55}{22}$  (iii)  $\frac{-45}{72}$  (iv)  $\frac{-4}{-5}$  (v)  $\frac{5}{-4}$
- 8.** निम्नलिखित वर्गाकार खानों में उपयुक्त चिह्नों ( $>$ ,  $<$ ,  $=$ ) को भरिए—
- (i)  $\frac{-5}{4} \square \frac{2}{5}$  (ii)  $\frac{2}{7} \square \frac{-1}{5}$  (iii)  $\frac{-4}{-7} \square \frac{1}{2}$
- (iv)  $\frac{-8}{11} \square \frac{-24}{33}$  (v)  $\frac{-3}{8} \square \frac{-5}{8}$  (vi)  $\frac{1}{-2} \square \frac{-1}{2}$
- 9.** निम्नलिखित को आरोही क्रम में लिखें—
- (i)  $\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{-5}{4}$  (ii)  $\frac{-5}{8}, \frac{-3}{8}, \frac{-1}{8}, \frac{1}{8}$

(iii)  $\frac{1}{3}, \frac{-2}{9}, \frac{-5}{4}$

(iv)  $-2, 0, \frac{-2}{15}, \frac{7}{15}, \frac{-7}{11}$

#### 10. निम्नलिखित को अवरोधी क्रम में लिखें-

(i)  $\frac{15}{28}, \frac{-17}{28}, \frac{-1}{28}, \frac{5}{28}$  (ii)  $\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-5}{6}, \frac{4}{-3}$  (iii)  $\frac{1}{2}, \frac{-2}{3}, \frac{-3}{4}, \frac{-5}{-6}$

(iv)  $\frac{-5}{6}, \frac{-8}{9}, \frac{-11}{12}, \frac{1}{6}$

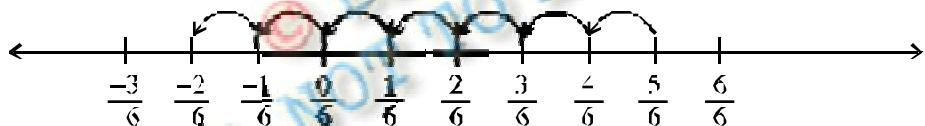
#### 12.8 परिमेय संख्याओं पर संक्रियाएँ

आप जानते हैं कि मूण्डिले तथा बिन्नों के केवल प्रकरणों द्वारा, दृष्टिया, गुणा और भागिन्या जाता है, आइए इन आधुनिक संख्याओं को परिमेय संख्याओं के लिए रखें।

##### 12.8.1 परिमेय संख्याओं का योग

आइए हम परिमेय संख्याओं  $\frac{5}{6}$  और  $\frac{-7}{6}$  का योगफल संख्या-खेत्र से प्राप्त करें हैं।

हम  $\frac{5}{6} - \frac{-7}{6}$  ज्ञात करें।



दो क्रमागत चिन्हों के बीच ली दूसी  $\frac{1}{6}$  है। अतः  $\frac{5}{6} + \frac{-7}{6}$  जोड़ने का अर्थ है

कि  $\frac{5}{6}$  के बायीं ओर 7 कदम बढ़ें। तब जहाँ पहुँचते हैं? तब  $\frac{-2}{6}$  पर पहुँचते हैं।

अतः  $\frac{5}{6} + \left(\frac{-7}{6}\right) = \frac{-2}{6}$  है।

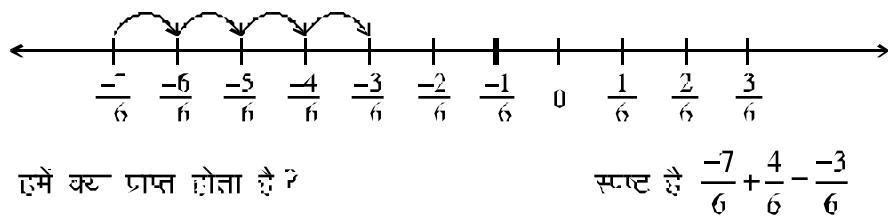
आइए, इसे दूसरी विधि से करने का प्रयास जरूर है।

$$\frac{5}{6} + \left(\frac{-7}{6}\right) = \frac{5 + (-7)}{6} = \frac{-2}{6}$$

हमें कही उत्तर प्राप्त होता है।

(प्रिमेय वा योग अंक के लिए उनक हर समान होने चाहिए।)

इसी प्रकार  $\frac{-7}{6} + \frac{4}{6}$  को निम्नलिखित रूप में दिखाया जा सकता है।



दूसरी विधि व देखें :  $\frac{-7}{6} + \frac{1}{6} = \frac{-7 - 1}{6} = \frac{-8}{6} = \frac{-4}{3}$  हमें वही उत्तर पाया होता है।

इस प्रकार हम देखते हैं कि सनन हर वाली प्रिमेय संख्याओं का जोड़ समान हर को वही रखत हुए अंशों को जोड़ जते हैं।

$$\text{उदाहरण-8. } \frac{-4}{5} - \left( \frac{-7}{5} \right) = \frac{-4 - (-7)}{5} = \frac{-4 + 7}{5} = \frac{3}{5} = 2\frac{1}{5}$$

$$\text{उदाहरण-9. } \frac{2}{9} + \frac{7}{9} - \left( \frac{-5}{9} \right) = \frac{2+7+(-5)}{9} = \frac{9+(-5)}{9} = \frac{4}{9}$$

$$\text{उदाहरण-10. } \text{निम्नलिखित का सामान ज्ञात करें : } \frac{5}{8} + \frac{3}{4} - \frac{7}{16}$$

$$\text{हल : } \frac{5}{8} + \frac{3}{4} + \frac{-7}{16}$$

$$= \frac{5 \times 2 - 3 \times 4 + (-7) \times 1}{16}$$

$$= \frac{10 - 12 + (-7)}{16}$$

$$= \frac{-22}{16} - \frac{15}{16}$$

### कार्यविधि :

यदि हर असमान हो, तो उन्हें समान करने के लिए उसे का ल० रा० ज्ञात करते हैं। प्रत्येक वद के L.R.A. के अनुराग र महर बनाते हैं। इसके लिए प्रत्येक वद के हर से L.S. में वग देते हैं तथा ग्राह भागावल लो प्रत्येक संगत वद के उंच से उपा करते हैं। इस प्रकार प्राप्त समान पदों का योगफल ज्ञात करते हैं।

सर्वप्रथम ल ० स ० नेक्टर हैं। सभी पदों में इर लो ल ० ज्ञ के बराबर कहते हैं।

$$\frac{5}{8} \times \frac{2}{2} - \frac{3}{4} \times \frac{4}{4} = \frac{-7}{16};$$

$$\frac{10}{16} + \frac{12}{16} - \frac{-7}{16};$$

$$\frac{10+12-7}{16} = \frac{22-7}{16}$$

### इन्हें देखिए

$$\frac{-3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{-3+3}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

$$\text{साथ है } \frac{5}{4} + \left( \frac{-3}{4} \right) = \frac{5-(-3)}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{-3}{4} - \frac{3}{4} = \left( \frac{-3}{4} \right)$$

### स्वयं करके देखिए

राशि रेखा पर दिख ये:

$$(i) \quad \frac{-1}{2}, \frac{5}{2} \quad (ii) \quad \frac{5}{4}, \frac{-3}{4}$$

अतः परिमेय संख्याओं में भी ये ज्या प्रतिलोम का गुण देता है। इनमें  $\frac{-3}{4}$  का योज्य

प्रतिलोम  $\frac{3}{4}$  है तथा  $\frac{3}{4}$  का योज्य प्रतिलोम  $\frac{-3}{4}$  है।

### स्वयं करके देखिए

परिमेय संख्या	$\frac{-5}{20}$	$\frac{-8}{16}$	$\frac{4}{6}$
योज्य प्रतिलोम			

### 12.8.2 परिमेय संख्याओं का व्यवकलन (घटाना)

हम इन्हों और पूर्ण संख्याओं के व्यवकलन के बारे ने यहाँ ऊपर युक्ते हैं। यहाँ परिमेय संख्याओं के व्यवकलन की विधि लिखी गई है।

आइए हम निम्न पूर्णांक संख्या के बटन पर घटाना करते हैं—

$$5 - 3 = 5 + (-3) = 2$$

$$5 - (-3) = 5 + (3)$$

अतः स्पष्ट है कि लेसे पूर्णांक संख्या ज घटाने वा तत्कां सम्म योज्य प्रतिलोम को लोड़ना है।

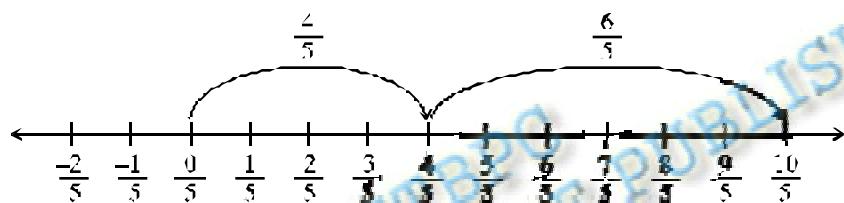
आद्य परिमेय संख्याओं के संबंध में विवर करते हैं—

$$\frac{4}{5} \text{ ने से } \frac{-6}{5} \text{ को घटाएँ}$$

हल :  $\frac{4}{5} - \left( \frac{-6}{5} \right)$

$$\begin{aligned} &= \frac{4}{5} + \frac{6}{5} \quad \left( \because \frac{-6}{5} \text{ का योज्य प्रतिलोम } \frac{6}{5} \right) \\ &= \frac{10}{5} \end{aligned}$$

अब हमें राश्य रेखा पर देखें—



दो प्राकृतिक संख्याओं के बीच की दूरी  $\frac{1}{5}$  है। अब  $\frac{4}{5}$  वे  $\frac{-6}{5}$  को घटाने के अर्थ है

कि  $\frac{4}{5}$  ने  $\frac{-6}{5}$  को योज्य प्रतिलोम  $\left( \frac{6}{5} \right)$  का उठाना है। जैसा कि संख्या रेखा से लिया है—

$$\frac{4}{5} - \left( \frac{-6}{5} \right) = \frac{4}{5} + \left( \frac{6}{5} \right) = \frac{10}{5}$$

**उदाहरण-11.**  $\frac{5}{8}$  ने से  $\frac{-7}{8}$  को घटाएँ।

हल :  $\frac{5}{8} - \left( \frac{-7}{8} \right) = \frac{5}{8} + \frac{7}{8}$  (ज्योकि  $\frac{-7}{8}$  का योज्य प्रतिलोम  $\frac{7}{8}$  है)

$$\frac{5+7}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

उदाहरण-12.  $\frac{-5}{4} \text{ तथा } \frac{-3}{8}$  को जोड़ें।

हल : 4, 8 का लcm = 8

अब प्रत्यक्ष पद के द्वारा का लcm सम (8) के बराबर करते हैं।

( $\because$  परिणाम के हर को बराबर करने के बाद ही जाँच/घटय जाता है।)

$$\begin{aligned} \therefore \frac{-5}{4} - \frac{-5 \times 2}{4 \times 2} - \frac{-10}{8}, \quad \frac{-3}{8} = \frac{-3 \times 1}{8 \times 1} = \frac{-3}{8} \\ \frac{-5}{4} - \left( \frac{-3}{8} \right) = \frac{-10}{8} + \frac{3}{8} \quad (\because \frac{-3}{8} \text{ का द्वज्य ग्रन्तिलोन } \frac{3}{8} \text{ है।}) \\ -\frac{-10+3}{8} = \frac{-7}{8} \text{ Ans.} \end{aligned}$$

उदाहरण-13.  $\frac{-2}{9} - \left( \frac{-5}{18} \right) + \frac{7}{6}$

हल :  $\frac{2}{9} - \left( \frac{-5}{18} \right) + \frac{7}{6}$

$$\frac{-2}{9} + \frac{5}{18} - \frac{7}{6} \quad (\text{प्रत्येक विए के 6 के बले पद का योज्य प्रत्येक लिखकर तब किया जाता है।})$$

9, 18, 6 का लcm = 18 मिनों को 3456 में जगते हैं।

$$= \frac{-2 \times 2}{9 \times 2} - \frac{5 \times 1}{18 \times 1} + \frac{7 \times 3}{6 \times 3} = \frac{-4}{18} + \frac{5}{18} + \frac{21}{18}$$

$$= \frac{-4+5+21}{18} = \frac{-1+26}{18} = \frac{22}{18} = \frac{11}{9} = 1\frac{2}{9}$$

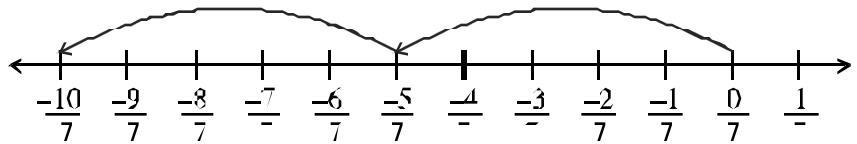
### स्वयं करके देखिए

(i)  $\frac{9}{7} - \left( \frac{-5}{12} \right) \quad$  (ii)  $\frac{5}{18} - \left( \frac{-7}{24} \right)$

### 12.8.3 परिणाम संख्याओं का गुणन (Multiplication of Rational Numbers):

हमने उद्धाय 2 में भिन्न संख्याओं का गुणन सीखा था।

आइए, वरिष्ठ संख्या  $\frac{-5}{7}$  और 2 के गुणनफल यही  $\left( \frac{-5}{7} \times 2 \right)$  पर विचार करें।



$$\frac{-5}{7} \times 2 \text{ का मूल्य है } \frac{-5}{7} \text{ दो बार अर्थात् } \left( \frac{-5}{7} \right) - \left( \frac{-5}{7} \right) = \frac{-5}{7} - \frac{5}{7}$$

अतः  $\frac{-5}{7}$  पर खड़े होकर लौट और  $\frac{5}{7}$  चलना अर्थात्  $\frac{-10}{7}$

$$\text{आदूए हाँ दूसरे दूसरी प्रकार से हल ज्ञात करें :- } \frac{-5}{7} \times 2 = \frac{-5 \times 2}{7} = \frac{-10}{7}$$

इस प्रकार हाँ उसी परिणय तत्व पर पड़ते हैं। अतः हाँ देखते हैं कि एक परिमेय संख्या को एक ऐनलक गूणांक जैसा गुण करना गर अंश को गूणांक से गुजार कर देते हैं तथा इसे घटाते हैं।

$$\text{मिन को देखें :- } \frac{-5}{8} \times -3 = \frac{-5 \times -3}{8} = \frac{15}{8}$$

इस इस प्रकार भी इन नियमों का लिखा जा सकता है।

$$\frac{-5}{8} \times \frac{-3}{1} \quad (\text{यहाँ } -3 = \frac{-3}{1} \text{ लिखा जा सकता है})$$

$$\frac{-5 \times -3}{8 \times 1} = \frac{15}{8}$$

$$\text{इसी प्रकार } \frac{-8}{7} \times -4 = \frac{-8}{7} \times \frac{-4}{1} = \frac{-8 \times -4}{7 \times 1} = \frac{32}{7} \text{ है।}$$

अतः उपर्युक्त ऐकानों के अन्दर पर इन ज्ञात करते हैं कि  $\frac{-11}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{-11 \times 3}{5 \times 4} = \frac{-33}{20}$

है।

$$\text{मिन को देखें :- } \frac{-2}{5} \times \frac{3}{10} \times \frac{-3}{4} = \frac{-2 \times 3 \times -3}{5 \times 10 \times 4} = \frac{18}{200} = \frac{9}{100}$$

### कार्यविधि—

1. परिसेय संख्याओं के संतुलन का नुमा नमूद है।
2. परिसेय संख्याओं के हरों का गुण करते हैं।
3. अभीष्ट नुमानम्  $\frac{\text{अंशों का नुमानम्}}{\text{हरों का गुणनफल}}$

### रवयं कीजिए

गिमालिंगित का नुमानफल ज्ञात करें।

$$(i) \frac{-11}{7} \times 4 \quad (ii) \frac{-1}{5} \times \frac{-8}{11}$$

### 12.8.4 परिसेय संख्याओं का भाग

उम्मे भेना संख्याओं का व्युत्कर्ष के बारे में देखा है।  $\frac{5}{4}$  का व्युत्कर्ष क्या है? यह  $\frac{4}{5}$  है। यह अवधारपा परिसेय संच्चातं का व्युत्कर्मों के लिए भी लान् है। इस प्रकार  $\frac{-5}{4}$  का व्युत्कर्म  $\frac{4}{-5}$  या  $\frac{-4}{5}$  हाना तथा  $\frac{-8}{9}$  का व्युत्कर्म  $\frac{-9}{8}$  या  $\frac{9}{-8}$  होगा।

आइए निम्नलिखित को देखें— यह जानते हैं कि  $4 \times 5 = 20$

इसे दो पारीके रे भाग के सम्बन्ध में लिखा जा सकता है :—  $20 : 4 = 5$  या  $20 \div 5 = 4$

$$\begin{aligned} & \rightarrow \frac{20}{4} = 5 & \left| \begin{array}{c} \frac{20}{5} = 4 \\ 20 \times \frac{1}{5} = 4 \end{array} \right. \\ & \Rightarrow 20 \times \frac{1}{4} = 5 \end{aligned}$$

स्पष्टपूर्वक प्रैक्षणी से निष्कर्ष निकलता है कि भाज्य नं भाजक से भाग करते हैं तो भागकसे ग्राहक होते हैं तथा भाज्य में भाजक के व्युत्कर्म से नुपा करते हैं तो भाजक के ही व्युत्कर्म संख्या प्राप्त होता है। इतः स्पष्ट होता है कि भाग की क्रिया नुपा के लिए विदला दी जाती है।

$$\text{आइए इसे देखें} - \frac{-25}{14} : \frac{7}{5} = \frac{-25}{14} \times \frac{5}{7} \quad (\because \frac{7}{5} \text{ का व्युत्कर्म } \frac{5}{7} \text{ है})$$

$$= \frac{-125}{98} \text{ Ans.}$$

निन्न पर विवार करें—

$$(i) \frac{-5}{4} : \frac{-5}{4} = \frac{-5}{4} \times \frac{4}{-5} = \frac{-20}{-20} = 1$$

उत्तर: एक अर्थ उद्दहरण सतत है—

$$(ii) \frac{-20}{8} : \frac{-20}{8} = \frac{-20}{8} \times \frac{8}{-20} = 1$$

अतः उपर्युक्त उद्दहरणों से स्पष्ट होता है कि किसी परिनय संख्या में उसे परिमेय संख्या से भाग करते हैं तो नगण्य उद्देश्य प्रप्त होता है अथवा किसी संख्या का उसके भूक्ता रो मूलनकल भी राशि 1 होता है।

निन्न को देखें और इसके लिए—

$$\frac{-15}{8} : \frac{4}{7} : \frac{-2}{5} \quad (iii), \quad \frac{-15}{8} \times \frac{7}{4} \times \frac{-5}{2} = \frac{-15 \times 7 \times -5}{8 \times 4 \times 2} = \frac{525}{64}$$

### स्वयं करके देखिए

शब्द लिखिए—

$$(i) \frac{-11}{7} \times 4 \quad (ii) \frac{-4}{5} \times \frac{-8}{11}$$

## प्रश्नावली-12.2

### 1. नीचे दी गई परिमेय संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए—

$$(i) \frac{15}{4} + \frac{5}{4}$$

$$(ii) \frac{13}{5} + \left( \frac{-2}{5} \right)$$

$$(iii) \frac{-8}{15} - \frac{-16}{30}$$

$$(iv) \frac{-3}{2} + \left( \frac{-3}{4} \right)$$

$$(v) \frac{-8}{19} + \frac{3}{76}$$

$$(vi) \frac{5}{4} - \left( \frac{-3}{8} \right) - \frac{5}{6}$$

$$(vii) \frac{-8}{-2} + 0$$

$$(viii) -2\frac{1}{2} + \left( -3\frac{1}{2} \right)$$

### 2. ज्ञात करें—

$$(i) \frac{5}{2} - \frac{7}{4}$$

$$(ii) \frac{5}{8} - \left( \frac{-4}{5} \right)$$

$$(iii) \frac{-12}{13} - \frac{5}{26}$$

$$(iv) \frac{-8}{3} - \frac{7}{6}$$

$$(v) -2\frac{1}{2} - 4$$

$$(vi) 5 - \frac{1}{2} - \left( \frac{-3}{4} \right)$$

### 3. गुणनफल ज्ञात कीजिए—

(i)  $\frac{12}{17} \times 5$

(ii)  $\frac{8}{7} \times -2$

(iii)  $\frac{-5}{4} \times \frac{7}{3}$

(iv)  $\frac{-25}{16} \times \frac{2}{3}$

(v)  $\frac{-4}{5} \times \frac{-3}{5}$

(vi)  $\frac{-15}{18} \times \frac{5}{6} \times \frac{21}{5}$

### 4. निम्नलिखित का भान ज्ञात करें—

(i)  $\frac{-5}{4} : 2$

(ii)  $\frac{-12}{9} \div \left( \frac{-2}{6} \right)$

(iii)  $\frac{19}{21} \div \left( \frac{-3}{38} \right)$

(iv)  $-5 : \left( \frac{-25}{7} \right)$

(v)  $\frac{-27}{5} : \left( \frac{-54}{10} \right)$

(vi)  $\frac{-1}{2} : \frac{2}{3}$

(vii)  $\frac{-5}{4} \div \frac{15}{8} \div \frac{7}{16}$

(viii)  $\frac{5}{16} \div \frac{-20}{32} \div \frac{4}{13} + \frac{1}{2}$

## 12.9 परिमेय संख्याओं का दशमलव निरूपण

### 12.9.1 रांगा दशमलव

हमना ज्ञाना कि  $\frac{p}{q}$  लकड़ों की संख्याएँ जहाँ  $q \neq 0$  एवं  $p, q$  पूर्णांक हैं, परिमेय संख्याएँ

फूहलाती हैं।  $\frac{p}{q}$  का अर्थ है  $p$  का  $q$  के बर्दाहन अर्थात्  $\frac{p}{q}$  कह संख्या है जो  $p$  के  $q$  रो विभाजित करने पर प्राप्त होती है।

अब  $\frac{5}{8}$  परिमेय संख्या का अर्थ है 5 के छवें भाग, यह 5 के 8 रो विभाजित करने पर प्राप्त होती है—

अतएव  $\frac{5}{8} = 0.625$

$$\begin{array}{r} 0.625 \\ 8 \overline{) 50} \\ 48 \\ \hline 20 \\ 16 \\ \hline 40 \\ 40 \\ \hline 0 \end{array}$$

आइए, एक और उदाहरण लेते हैं—

$$\begin{array}{r} 2.25 \\ \hline 4) 09 \\ 08 \\ \hline 10 \\ 08 \\ \hline 20 \\ 20 \\ \hline 00 \end{array}$$

अतः उनके उदाहरण में सभी कोटि के परिमेय राशियाँ  $\frac{5}{8}$  और  $\frac{9}{4}$  को प्राप्त हैं।

0.625 और 2.25 के रूप में निरूपित किया जा सकता है, जिसे दशमलव निरूपण कहते हैं।

### Ques: adjdsnf[k]

निम्नलिखित परिमेय राशियाँ को दशमलव में निरूपित करें—

- (i)  $\frac{5}{6}$
- (ii)  $\frac{19}{4}$
- (iii)  $\frac{20}{3}$
- (iv)  $\frac{15}{8}$
- (v)  $\frac{16}{9}$

#### 12.9.2 असांत दशमलव

इन उदाहरणों पर गौरव करें।

$\frac{16}{3}$  और  $\frac{17}{4}$  को दशमलव में निरूपित करते हैं।

$$\begin{array}{r} 5.333... \\ \hline 3) 16 \\ -15 \\ \hline 10 \\ -09 \\ \hline 10 \\ -09 \\ \hline 10 \\ \times 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4.25 \\ \hline 4) 17 \\ -16 \\ \hline 10 \\ -08 \\ \hline 20 \\ -20 \\ \hline 00 \end{array}$$

उपर्युक्त उदाहरण लो दख्ता से पता चलता है कि परिमिय संख्या  $\frac{16}{3}$  का दशमलव

सर्व शिक्षा : 2013-14 (निःशुल्क)

निरूपण 5.333... होता है, किर ये 6 पूरी तरह 3 से विभाजित नहीं हो पता है। इसे उन्नत तक पढ़ें देखें तो यो गाम की क्रिया पूरी नहीं होती है। अर्थात् इकाई के दशमलव निरूपण को अरांत दशगलव कहते हैं।

परियोग रखा  $\frac{17}{4}$  का दशगलव निरूपण 4.25 है। जो युक्ति है पर्वों में यानि की क्रिया पूरी हो जाती है। इसे उन्नत दशमलव कहते हैं।

### Lo; adjdsnf[k,

निम्नलिखित में से असांत निरूपण वाली परिमेय संख्या छाँटिएँ :

- (i)  $\frac{1}{6}$
- (ii)  $\frac{24}{9}$
- (iii)  $\frac{31}{11}$
- (iv)  $\frac{31}{4}$
- (v)  $\frac{5}{8}$

### 12.9.3 असांत आवर्ती दशमलव का निरूपण—

$$(i) \quad \begin{array}{r} 1 \\ 7 \end{array} \quad 7) \overline{10} \quad \begin{array}{r} 0.14285714\dots \\ -7 \\ \hline 30 \\ -28 \\ \hline 2 \\ -14 \\ \hline 60 \\ -56 \\ \hline 40 \\ -35 \\ \hline 50 \\ -49 \\ \hline 10 \\ -7 \\ \hline 30 \\ -28 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$(ii) \quad \begin{array}{r} 2 \\ 9 \end{array} \quad 9) \overline{20} \quad \begin{array}{r} 0.222\dots \\ -18 \\ \hline 20 \\ -18 \\ \hline 2 \end{array}$$

अतः  $\frac{2}{9} = 0.222\dots$  असांत दशमलव है।

अतः  $\frac{1}{7} = 0.14285714\dots$  असांत दशगलव है।

उपर्युक्त उदाहरणों ले देखने से पता चलता है कि दशनलय के बाद का अंक या अंक

रामूँह पे लुराय जा रहा है वह किया अनंत तक चलती है। इनमें भाग की छोटी कभी ठूँणी नहीं होती है। दूँके एक या एक से अधिक छंकों के रामूँह के मुन्ह वृति बह-बार होती है इसलिए इन्हें संसार आवर्ती दशानलव संख्याएँ भी कहते हैं।

दशानलव के बाद यदि संख्याएँ के अंक दोहराए जाते हैं तब जो अंक दोहराये जाते हैं उनके ऊपर “-” या (.) का विष्णु लगा देते हैं। ऐसे—

$$\frac{1}{7} = 0.14285714\dots = 0.\overline{142857} \quad \text{या } 0.1\overline{42857}$$

$$\frac{2}{9} = 0.222\dots = 0.\overline{2}$$

### Lo; adjdsnf[k,

निन का असांत आवर्ती दशानलव को संकेतिक रूप में लिखें—

$$(i) \quad \frac{2}{11} = 0.1818\dots$$

$$(ii) \quad \frac{1}{6} = 0.1\overline{666\dots}$$

$$(iii) \quad \frac{7}{13} = 0.5384615\dots$$

### 12.94 निम्नलिखित उदाहरणों को अकाल से देखें

$$\frac{5}{8}, \frac{24}{25}, \frac{3}{10}, \frac{9}{4}, \frac{17}{4} \quad \text{इनका दशमलव निरूपण सांत है।}$$

$$\frac{16}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{2}{11}, \frac{7}{13}, \frac{1}{15} \quad \text{इनका दशमलव निरूपण असांत है।}$$

(इन परिशेष संख्याओं का हल ऊनर के उदाहरणों में लिखा है।)

गिन सांत भिन्न के डरों के अन्त्य गुणाखाल दखें—

उपरावत सांत दशानलव निरूपण के भिन्नों के हरों ऊ अभज्य गुण छगड़ हैं—

$$8 = 2 \times 2 \times 2$$

$$25 = 5 \times 5$$

$$10 = 2 \times 5$$

$$4 = 2 \times 2$$

इन दोनों के ज्ञानी अन्तर्ज्य तुग्गखण्ड का तो 5 या 2 का दोनों हैं।

क्या लोहे ऐरी रात दशमलव रांझा आप सोब राकरो हैं तेहर की परिमेय रांझा (१८लाख रुपये) के हर में 2 या 5 के अलाना और कोई गुणनखंड है?

उपर्युक्त उदाहरणों ने सात दशनलव के परिमेय रांझाओं के हरां के अभाज्य गुणनखंडों को देखने से पता चलता है कि इनके अभाज्य गुणनखंड नं 2 या 5 या दोनों हैं।

पुनः उपर्युक्त उदाहरण में उत्तम दशनलव के परिमेय संख्याओं के हरां के अन्तर्ज्य गुणनखंड हैं—

$$3 = 3 \times 1$$

$$7 = 7 \times 1$$

$$6 = 2 \times 3$$

$$11 = 1 \times 11$$

$$13 = 1 \times 13$$

$$15 = 3 \times 5$$

इनके अभाज्य गुणनखंड में 2 या 5 के अतिरिक्त अन्य अभाज्य गुणनखंड भी हैं।

अतः स्पष्ट है कि जिन परिमेय संख्याओं के हरां के अभाज्य तुग्गखंडों ने सिर्फ 2 या 5 या दोनों हो तो उस परिमेय संख्या का दशमलव निरूपण सात दशनलव निरूपण होता है। तथा जिन परिमेय रांझाओं के हरां के अभाज्य गुणनखंडों में 2 वा 5 के अलांसे का अन्य अन्तर्ज्य रांझाएं भी हैं तो उस परिमेय रांझे का दशनलव निरूपण अरांत दशमलव निरूपण होता है।

### संख्याकरकों देखिए

पिछा में जिन वरिनर संख्याओं जो दशमलव निरूपण सात हैं उनके किन परिमेय संख्याओं जो असंत हैं।

(इनके अभाज्य गुणनखंड के आधार पर बताएं)

- (i)  $\frac{16}{125}$
- (ii)  $\frac{1}{15}$
- (iii)  $\frac{5}{18}$
- (iv)  $\frac{11}{8}$
- (v)  $\frac{4}{9}$

$\frac{-5}{4}$  को दशमलव में निरूपित करें।

$\frac{-5}{4}$  का दशमलव निरूपण के लिए एहते  $\frac{5}{4}$  का दशमलव निरूपण करते हैं।

$$\begin{array}{r} 1.25 \\ 4) \overline{5} \\ \underline{-4} \\ 10 \\ \underline{-8} \\ 20 \\ \underline{-20} \\ \times \times \end{array} \quad \text{या, } \frac{5}{4} = 1.25$$

अतः  $\frac{-5}{4} = -1.25$

इसी प्रकार अन्य त्रिमात्रक संख्याओं का दशमलव निरूपण करते हैं।

आइए निम्न उदाहरणों को देखें—

$$0.24 = \frac{0.24 \times 100}{100} = \frac{24}{100} = \frac{6}{25}$$

$$2.235 = \frac{2.235 \times 1000}{1000} = \frac{2235}{1000} = \frac{447}{200}$$

$$2.4 = \frac{2.4 \times 10}{10} = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}$$

$$4.625 = \frac{4.625 \times 1000}{1000} = \frac{4625}{1000} = \frac{37}{8}$$

उपर्युक्त उदाहरणों से यह स्पष्ट है कि यदि दशमलव संख्याओं के परिमेय संख्या में परिवर्तित करने के लिए संख्या के डर में 1 के बाद इसने शून्य लिखे हैं तो वह ने दशमलव के बाद संख्या एं हैं जो कि रो दशमलव है। देखें परिमेय संख्याएं प्राप्त हो जाएँगी। तो—

$$5.426 = \frac{5426}{1000}$$

$$5.24 = \frac{524}{100}$$

### रवर्य कीजिए

नीचे दी गई दशमलव संख्याओं को परिमेय संख्याओं में बदलिए—

- (i) 2.18    (ii) 7.326    (iii) 8.35    (iv) 0.2548

आइए निम्न उदाहरण को देखें—

**उदाहरण—14.**  $0.\overline{4}$  का परिनिय संख्या के रूप में लिखें।

**हल :** न ना  $x = 0.\overline{4}$

$$\text{या } x = 0.444\ldots \quad (\text{i})$$

दोनों पक्षों में 10 से गुणा करने पर

$$10x = 4.\overline{44} \quad (\text{ii})$$

समीकरण (ii) से समीकरण (i) का घटने पर

$$10x = 4.444$$

$$\begin{array}{r} x = 0.444 \\ \hline 9x = 4 \end{array}$$

$$\therefore x = \frac{4}{9}$$

$$\text{अतः } 0.\overline{4} = \frac{4}{9}$$

**उदाहरण—15.**  $0.\overline{345}$  का परिनिय संख्या के रूप में लिखें।

**हल :** न ना  $\Rightarrow x = 0.\overline{345}$

$$\text{या, } x = 0.345345345\ldots \quad (\text{i})$$

दोनों पक्षों में 1000 से गुणा करने पर

$$1000x = 345.345345345\ldots \quad (\text{ii})$$

समीकरण (ii) में दोनों पक्षों (i) के बराबर हैं।

$$1000x = 345.345345345\ldots$$

$$\begin{array}{r} x = 0.345345345\ldots \\ \hline 999x = 345 \end{array}$$

**कार्य विधि—** उपर्युक्त उदाहरणों को हल करने के लिए निम्न टिप्पी अपनाएं।

- (a) दो गई दशा दल संख्या को  $x$  के विवर मना
- (b) दशमलव के बाद जिस अंक की पुनरावृत्ति हो जाए है, उसे दो या तीन तार लिखें हैं। इसे सार्वकरण (i) कहते हैं।
- (c) पुनरावृत्ति वाले अंकों (आवर्तिलों) को गिनकर 1 के बाद लितने

$$\therefore x = \frac{345}{999}$$

$$\text{अतः } 0.\overline{345} = \frac{345}{999} = \frac{115}{333}$$

हे छून्हा लालकर दोनों पद्धति में गुणा करते हैं तथा इसे समीकरण (ii) लिखते हैं।

(i) समीकरण (ii) ने से समीकरण  
(i) को घटाकर  $x$  का मान बताया जाता है।

~~इस~~ असांत आवर्ति दशमलव का सन्निकट परिमेय प्राप्त होता है।

निम्न उदाहरणों को देखें—

**उदाहरण—16.**  $4.3\overline{25}$  के परिमेय संख्या में परिवर्तन करें—

हल : न.ना  $\Rightarrow x = 4.3\overline{25}$

$$\text{या } x = 4.32555\dots \text{ (i)}$$

दोनों पद्धति में 100 से गुणा करते पर (1 के बाद छठना शुरू करते हैं जिसना दशमलव के बाद अनावर्तीक है और उसे छोड़नी यहाँ से गुणा करते हैं)

$$100x = 432.555\dots \text{ (ii)}$$

पुनः समीकरण (i) में 1000 से गुणा करने पर

$$1000x = 4325.555\dots \text{ (iii)}$$

समीकरण (ii) में से समीकरण (iii) को घटाने पर

$$\begin{array}{r} 1000x = 4325.555 \\ 100x = 432.555 \\ \hline 900x = 4325 - 432 \end{array}$$

$$x = \frac{4325 - 432}{900}$$

$$\text{अतः } 4.3\overline{25} = \frac{4325 - 432}{900} = \frac{3893}{900}$$

**उदाहरण—17.**  $0.15\overline{23}$  का परिमेय संख्या में परिवर्तन करें।

हल : न.ना  $\Rightarrow x = 0.15\overline{23}$

या  $x = 0.15232323\dots$  (i)

दोनों पक्षों ने 100 से गुणा कर

$100x = 15.232323\dots$  (ii)

पुनः 2 गीजरप (i) में 10000 से गुणा करने पर

$10000x = 1523.232323\dots$  (iii)

सनीकरण (iii) में से सामीकरण (ii) के छोड़ने पर

$$10000x = 1523.232323$$

$$\frac{100x}{9900} = \frac{15.232323}{9900}$$

$$9900x = 1523 - 15$$

$$x = \frac{1523 - 15}{9900} = \frac{1508}{9900} = \frac{377}{2475}$$

$$\text{अतः } 0.1\overline{523} = \frac{1523 - 15}{9900} = \frac{377}{2475}$$

### कार्यविधि-

1. सबसे पहले दी इ दशमलव आवृत्तक संख्या के  $x$  होना।
2. दशमलव के बाद आवृत्तक को दो चा तीन भाग लिखते हैं। इसे समीकरण (i) मानते हैं।
3. दशमलव के बाद आवृत्तक को गिनकर उतना इत्य 1 (एक) पर डालकर समीकरण (i) के दोनों पक्षों में गुणा कर लिखते हैं, इस सनीकरण (ii) मानते हैं।
4. पुनः दशमलव के 6 दो अंकों (आवृत्तक की छोटी उन्नतर्त्त्विक) को गिनकर उतना इत्य 1 (एक) पर डालकर समीकरण (i) के दोनों पक्षों में गुणा कर लिखते हैं। इस समीकरण (iii) मानते हैं।
5. उपर्याप्त सनीकरण (iii) में से 2 गीजरप (ii) को घटा कर  $x$  का मान ज्ञात करते हैं।

उपर्युक्त उदाहरण से स्पष्ट होता है कि आवृत्तक वल दशमलव संख्या का संक्षेप में अध्यक शीघ्र परिवर्तन संख्या में परिणत छलो के लिए दी गयी आवृत्तक दशमलव संख्या को बिना आवृत्तक छिप के एवं उन दशलव के उत्तरांख्या को लिखते हैं, फिर उसमें से यूपॉल और अनावॉकों से बनी रांख्या को घटाकर उसके बदूद में जिन आवृत्तक है उतना उ और दशमलव के दोहिने तराव जितना उन्नतर्त्त्विक है उतना 0 (शून्य) लिखत है।

$$\text{तो } 4.3\overline{256} = \frac{43256 - 432}{9900} = \frac{42824}{9900}$$

$$5.\overline{42} = \frac{542 - 54}{90} = \frac{488}{90}$$

### रवयं कौनिए

निम्नलिखित को परिमेय संख्याओं में रूपीकृत करें।

- (i)  $4.3\overline{86}$       (ii)  $0.3\overline{256}$       (iii)  $5.84\overline{65}$

इन्हें पहले विस्तार से परिमेय संख्या नं बदलें तिर संखेप टिभि से परिगण्य संख्या नं बदलें।

### प्रश्नावली—12.3

1. निम्नलिखित को दशमलव में बदलिए।

- (i)  $\frac{5}{4}$       (ii)  $\frac{8}{7}$       (iii)  $\frac{15}{16}$       (iv)  $\frac{25}{24}$

2. निम्नलिखित दशमलव संख्या को परिमेय संख्या में बदलें।

- (i) 4.32      (ii)  $12.\overline{32}$       (iii) 5.486      (iv) 2.842

3. निम्न को दशमलव में बदलें।

- (i)  $\frac{-5}{8}$       (ii)  $\frac{-25}{16}$

4. निम्न भिन्न संख्याओं को दशमलव में बदले जिन बताइए कि कौन—कौन सांत दशमलव है और कौन—कौन असांत दशमलव है।

- (i)  $\frac{5}{3}$       (ii)  $\frac{7}{6}$       (iii)  $\frac{8}{5}$       (iv)  $\frac{17}{24}$       (v)  $\frac{15}{8}$

5. निम्नलिखित को परिमेय संख्या के रूप में विस्तार से लिखिये—

- (i)  $4.\overline{32}$       (ii)  $5.3\overline{456}$       (iii)  $8.2\overline{4}$       (iv)  $0.\overline{2}$

**6. निम्न को परिमेय संख्या के रूप में संकेत में लिखें—**

- (i)  $5.1\bar{3}\bar{6}$     (ii)  $12.\overline{325}$     (iii)  $9.3\bar{8}\overline{65}$     (iv)  $0.\overline{325}$

**7. निम्न असांत दशमलव संख्या को संकेत में लिखें।**

- (i)  $1.3151515\dots$     (ii)  $82.325555\dots$   
 (iii)  $0.2543543543\dots$     (iv)  $2.32145145145\dots$

### हमारे रीति

- प्रैरिया राज्य के नियम  $\frac{p}{q}$  के रूप में व्यक्त की जा सके, जहाँ  $p$  और  $q$  पूर्णांक हैं तथा  $q \neq 0$  है, परिवेश रास्ता कहलाती है। जैसे :  $\frac{-7}{9}, \frac{3}{4}, \frac{5}{2}, \sqrt{4}$  इत्यादि परिमेय राज्य हैं।
- राष्ट्रीय भाकृत रास्ताएँ, राष्ट्रीय पूर्ण संख्या, सभी पूर्णांक रास्ताएँ और राष्ट्रीय राज्य हैं।
- सभी परिवेश संख्याएँ नियम संख्याएँ नहीं हैं।
- किसी भी परिमेय संख्या में कठपर की संख्या को अंश तथा नीचे की संख्या को हर कहते हैं। जैसे—  $\frac{-5}{8}$  में अंश  $-5$ , हर  $-8$  है।
- यदि परिमेय संख्या का अंश और हर दोनों धनात्मक पूर्णांक हो अथवा दोनों अधारात्मक पूर्णांक हो, तो वह परिमेय संख्या, धनात्मक परिवेश संख्या कहलाती है। जैसे—  $\frac{5}{4}, \frac{-4}{-9}$  आदि।
- यदि परिमेय संख्या का अंश और हर दोनों में एक कोई एक अधारात्मक पूर्णांक हो तो वह परिवेश संख्या, अधारात्मक परिमेय राज्य कहलाती है। जैसे—  $\frac{-12}{5}, \frac{7}{-4}$  आदि।

7. यदि किसी परिमेय संख्या के अंश और हर को एक इन्वर्टर पूर्वक से गुण किए जाय या भाग देना जाए तो फिर एक परिमेय संख्या प्राप्त होती है, जो वीं दुष्कृ परिमेय संख्या के युल्य समतुल्य परिमेय संख्या की जरी है। जैसे :  $\frac{-9}{5} = \frac{-9 \times 2}{5 \times 2} = \frac{-18}{10}$  है। उत्तर कहते हैं कि  $\frac{-18}{10}$  संख्या  $\frac{-9}{5}$  का एक समतुल्य परिमेय संख्या है। साथ ही,  $\frac{-18}{10} = \frac{-18 \div 2}{10 \div 2} = \frac{-9}{5}$  है, तो  $\frac{-9}{5}$  संख्या  $\frac{-18}{10}$  का लम्बतुल्य परिमेय संख्या है।
8. संख्या 0 न हो धनात्मक परिमेय है और न ही एक ऋणात्मक परिमेय संख्या है।
9. एक परिमेय संख्या को अपने मानक रूप (समन्वय रूप) & Standard form में दर्शाया जाता है, जब उत्तक हर भनात्मक गूणीक होता अंश और हर में कोई सार्वगुणनखंड न हो। जैसे :  $\frac{-5}{4}, \frac{2}{7}$  इनके मानक रूप में हैं।
10. दो परिमेय संख्याओं के बीच असमिकाय संख्याओं दर्शायी होती है।
11. दो परिमेय संख्याओं के बीच की परिमेय संख्या निकालने के तरीके की सीधी।
12. सनन हर वाली दो परिमेय संख्याओं के योग इत करने के लिए उनके अंशों को जड़ा जात है तथा हर दोनों इकायर योगफल इत किया जाता है। भिन्न-भिन्न हरों वाली दो परिमेय संख्याओं के जड़े हुए के लिए, पहले दोनों हरों का लब सब सह जाह किया जाता है और फिर दोनों परिमेय संख्याओं को लब सब के बराबर रामान हुए वली दो समतुल्य परिमेय संख्याओं में बदलकर जोड़ लिया जाता है। जैसे :
- $$\frac{-5}{2} + \frac{6}{4} = \frac{-10}{4} + \frac{6}{4} = \frac{-10+6}{4} = \frac{-4}{4} = -1 \text{ है। इन } 2 \text{ और } 4 \text{ के लब सब } = 4 \text{ है।}$$
13. दो परिमेय संख्याओं का व्यवकलन करने के लिए हम इताइं जानेवाली परिमेय संख्या का योज्य प्रतिलिपि को अन्त वरिनय संख्या में जोड़ते हैं। जैसे—
- $$\frac{6}{7} - \frac{5}{14} - \frac{6}{7} - \left( \frac{-5}{14} \right) = \frac{12 + (-5)}{14} - \frac{7}{14} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ है।}$$
14. दो परिमेय संख्याओं का गुण के लिए अंशों को अंशों के साथ तथा हरों को हरों के

राशि गुणा कर अग्रीज. गुणनफल =  $\frac{\text{उंची का गुणनफल}}{\text{दूरी का गुणनफल}}$  प्राप्त होते हैं। हैरो—

$$\frac{-5}{4} \times \frac{-2}{3} = \frac{-5 \times -2}{4 \times 3} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

15. एक परिमेय संख्या को एक अन्य शून्योत्तर परिमेय संख्या से भाग देने के लिए, हम वहली परिमेय संख्या को अन्य परिमेय संख्या के व्युत्कृश से भाग देते हैं। इस प्रकार

$$\text{से परिनिय संख्याओं वा अर्थात् भनाफल प्राप्त कर लते हैं। जैसे: } \frac{-15}{8} \div \frac{30}{24} = \frac{-15}{8} \times \frac{24}{30}$$

$$= \frac{-3}{2}.$$

16. दशमलव संख्याएँ को दशमलव में निरूपण।  
 17. दशमलव संख्या के परिमेय संख्या में निरूपण।  
 18. रासां दशमलव एवं अरासां दशमलव की जानकारी।  
 19. असांत आवर्ती दशमलव संख्या को सांकेतिक आवर्ती निरूपण उसे— 4.2354545... को सांकेतिक रूप तं 2.2354 लिखा जाता है।  
 20. जित परिमेय संख्या के हरी का दशमलव गुणनखंड सिकं 2 या 5 ह त उस परिमेय संख्या का दशमलव निरूपण संत दशमलव निरूपण होता है।  
 21. जित परिमेय संख्या के हरी का अभाय गुणनखंड 2 या 5 के अतिरिक्त अन्य अभाय संख्याएँ भी हैं त उस परिमेय संख्या का दशमलव निरूपण करात दशमलव निरूपण होता है।  
 22. ब्रह्मात्मक परिनेट संख्या का दशमलव निरूपण।  
 23. असांत आवर्ती दशमलव (Recurring Decimal number) को परिनेट संख्या में निरूपण (विशुद्ध रूप से तथा संशोध रूप से)।

## गोल

## अध्याय-13

# ज्यामितीय आकृतियों की एचना

### मूलिका

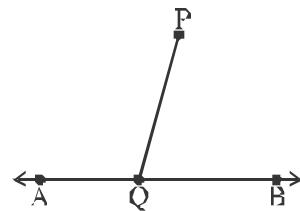
अब तक आप ट्रिभिन्- १ कृपियों एवं आकारों से परेवेत हुए हैं। कुछ आकृतियों को रचना जिनमें ऐसे खंड खींचना तथा उन्हें सगड़ियों लिपि करना, लगवट् रेखा खींचना, कोण बनाना, कण समद्विभागित करना तथा वृत्त उन्दि की रचना करना आप सीख चुके हैं। इस अध्ययन में हम एक रेखा के समान्तर रेखा खींचने एवं बिभिन्न त्रिभुजों की रचना प्रकार एवं स्केल ले सकता है।

**13.1 दी गई रेखा के बहु स्थिति किसी बिन्दु से उस रेखा के समान्तर दूसरी रेखा खींचना।**

$\overleftrightarrow{AB}$  एक सरल रेखा है। इस सरल रेखा  $\overleftrightarrow{AB}$  से बाहर स्थित एक बिन्दु P दिया गया है। अब इसी P बिन्दु से गुजरती  $\overleftrightarrow{AB}$  के समान्तर एक सरल रेखा खींचनी है।

रचना के वरण-

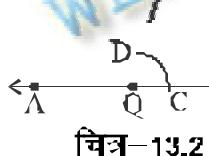
वरण-1 : ऐसा  $\overleftrightarrow{AB}$  पर छोड़ बिन्दु Q दीजें। तथा  
इसे P बिन्दु से जोड़।



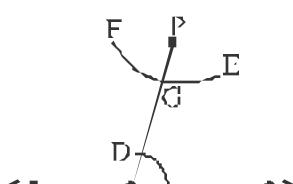
चित्र-13.1

वरण-2 : बिन्दु Q को केन्द्र मानकर  
लिंगी गी त्रिज्या का चाप खींचें।

यह चाप रेखा  $\overleftrightarrow{AB}$  के बहाँ काटता  
है उसे C तथा  $\overleftrightarrow{PQ}$  को जहाँ काटता  
है उसे D नाम दीजें।



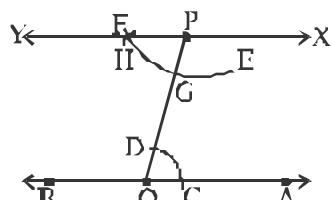
चित्र-13.2



चित्र-13.3

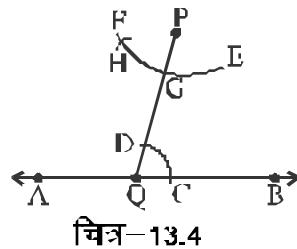
वरण-3 : अब P बिन्दु को केन्द्र मानते हुए उसी त्रिज्या का एक वाप EF खींचें। यह वाप PQ के बीचा बिन्दु पर काटता है उसे G नाम दीजिए।

**वरण-४ :**  $CD \parallel XY$  की लम्बाई के बहुत रुप वापि G बिन्दु को केन्द्र न हो (स्फीक्सर छाया में) खोचिए जो EF रेखा को जिस बिन्दु पर छाटे उसे H नम दीजिए।



चित्र-13.5

**चरण-५ :** इब पर H जो छेत्र द्वारा एक रखा  $XY$  खोचिए। (धेत्र-13.5) दें।  $\angle PQA = \angle QPY$  जो अंतःएकांतर कोण है तथा हाँ जानते हैं कि जब अंतःएकांतर बनाए गये बनाए गये होते हैं तो रेखाएँ समान्तर होती हैं, अतः  $AB \parallel XY$



चित्र-13.4

### कृष्ण करें

1. धेत्र-13.5 में P बिन्दु से गुजरने वाली कुछ और रेखाओं के लिये। अतः रेखा  $XY$  के अंतिरेख आपने क्या और कोई और रेखा लियी जो  $AB$  के समान्तर है, यदि नहीं तो  $XY$  के अंतिरेख P बिन्दु से गुजरने वाली रेखाएँ रेखा  $AB$  के लिए कैसी रेखाएँ होंगी?
2. ऊपर की व्यापार में एकांतर अंतर्कोण के अलावा और कौन कौन कोण बनाकर  $AB$  के समान्तर रेखा लिये सकते हैं?

### प्रश्नावली-13.1

1. R,  $MN$  रेखा के बाहर दूर एक बिन्दु है। R से गुजरती  $MN$  के समान्तर एक दूसरी रेखा लियें।
2. प्रकार एवं त्केल की सहायता से  $60^\circ$  का एक काण  $\angle ABC$  बनाइए। कोण के शीर्ष B से भुजा AB पर 4 सेनी दूर भुजा BC के समान्तर एक रखा खोचिए।
3. L एक रेखा लियें। इसके A बिन्दु पर m एक लम्बवर्ती रेखा लियें।  $m$  पर इथे किसी B पर एक लम्बवर्ती रेखा n लियें, जिसके बाहर  $m$  रेखा L के समान्तर है यदि हाँ तो कैसे?
4. AB एक रेखा लियें। AB से 5 सेनी दूर एक ऐसी रेखा CD लियें जो AB के समान्तर हो।

## 13.2 त्रिगुज की रचना

रचना का गोलाने पढ़ा है कि त्रिभुज के कोइ दो अवधार शास्त्र होने पर समांग त्रिभुज बनाया जा सकता है। इस अनुच्छेद में हाँ उनीं प्रतिवेदनों के साथ त्रिभुज की रचना करेंगे। एहले एक बार उन्हें तुम्हें लगाकर दें—

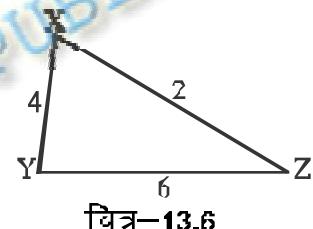
- त्रिभुज की तीनों भुजाओं की लम्बाई (SSS प्रतिवेदन)
- दो भुजाओं की लम्बाई व उनके बीच लगाकर कर्त्ता (SAS प्रतिवेदन)
- एक भुजा और उसे वर बनाने वाले दोनों कोण (ASA प्रतिवेदन)
- समकोण त्रिभुज में कर्त्ता प कोइ उच्च उक्त भुजा (RHS प्रतिवेदन)

उम्मे यह भी दखा दें कि इन प्रतिवेदनों के उत्तिरिक्त अन्य प्रतिवेदनों ने एक उद्विर्तीय रचना त्रिभुज नहीं बना सकता है। अझ इन्हें अवधारणाओं के आधार पर त्रिभुज की रचना करेंगे।

### 13.2.1 एक त्रिभुज की रचना जब तीनों भुजाओं की लम्बाईयाँ दी गई हों। (SSS प्रतिवेदन)

**उदाहरण—1.** एक त्रिभुज  $XYZ$  की रचना कीजिए जिसमें  $XY = 4$  सेमी.,  $YZ = 6$  सेमी. परं  $XZ = 7$  सेमी. दिया गया है।

**हल :** वरण—1 : वहले हाँ ती यही भाष्यों के साथ पर एक एक आकृति खींचते हैं।



चित्र—13.6

**उदाहरण—2 :** 6 सेमी. लम्बाई का एक रेखांशु खींचें।

चित्र—13.7

वरण—3 : दूसरे रेखांशु के बीच में

$X, Y$  से 4 सेमी. दूर हो अपरि  $Y$

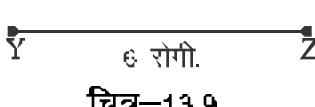
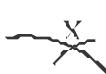
को केन्द्र नन्दित 4 सेमी. त्रिज्य लगाते हुए चाप खींचिए।  $X$

विन्दु इसी चाप लग कर कहीं स्थित हुआ।  $X$  विन्दु चाप पर लगाते स्थित है इसका पता लगाने हेतु अपरि चाप



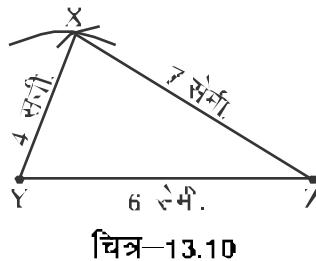
चित्र—13.8

की ओर बढ़ेंगे।



चित्र—13.9

वरण—4 :  $X$  विन्दु इस वर्ष पर लगाते हैं, इसके परि करने हेतु  $Z$  को केन्द्र बनाकर 7 सेमी. के चाप खींचें (किसीके विन्दु  $X, Z$  से 7 सेमी. दूर हैं) जो पूर्व न बन चाप के एक विन्दु जरूर प्रतिच्छेद करेगा। यही  $X$  विन्दु है।



चित्र-13.10

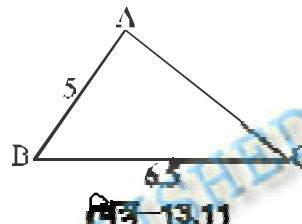
वरण-5 : अब बिन्दु X को छापाशः Y पर Z से मिलाए। यह अधीक्ष त्रिभुज XYZ है।

(SSS उपर्युक्त के अनुरूप त्रिभुज की रचना कर्त्ता साध्य हमें यह हमेशा ज्ञान रखना होगा कि किसी त्रिभुज में दो भुजाओं की लम्बाई का योग हमेशा तीसरी भुजा से ज्यदा होता है, अन्यथा त्रिभुज की रचना सम्भव नहीं है।

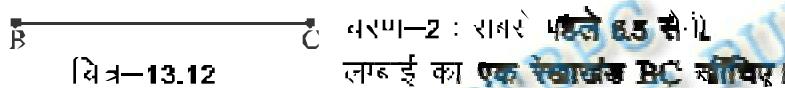
### 13.2.2 जब दो भुजाएँ एवं उनके बीच के कोण की माप ज्ञात हो (SAS प्रतिबंध)

**उदाहरण-2.** एक त्रिभुज ABC की रचना करें जब AB = 5 सेमी, BC = 6.5 सेमी, तथा  $\angle B = 75^\circ$  दिया है।

**हल :** चरण-1 : सर्वग्रन्थि एक रुप चित्र बनाएँ।



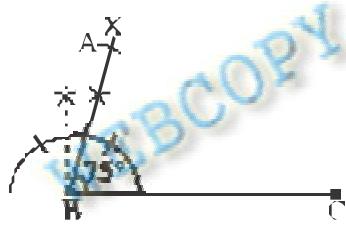
चित्र-13.11



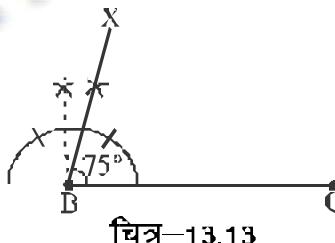
चित्र-13.12

वरण-2 : राखरे 5 सेमी 6.5 सेमी। लाइंस का एक रेखाखण्ड BC सीधे।

वरण-3 : फिर रेखाखण्ड के B बिन्दु पर  $75^\circ$  का कोण बनाते हैं। त्रिभुज का A बिन्दु कोण बनाने वाली इसी भुजा BX पर स्थित होगा।



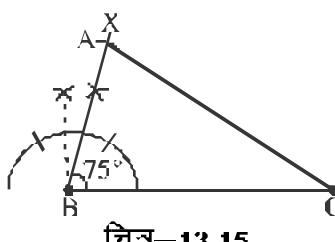
चित्र-13.14



चित्र-13.13

चरण-4 : कोण बनाने वाली इस भुजा पर स्थित बिन्दु A का पता लगाने के लिए B को केन्द्र नाम कर 6 सेमी. ला वाप लीजा। ऐसे BX के जिस बिन्दु पर काटता है वही बिन्दु A है।

वरण-5 : बिन्दु A को बिन्दु C से मिलाइए। इस त्रिकार अधीक्ष त्रिभुज ABC बना।



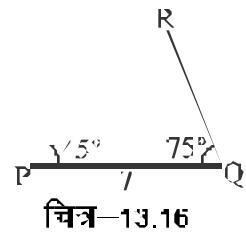
चित्र-13.15

13.2.3 त्रिभुज की रचना जब उसके दो कोण एवं उनके बीच की गुजारी पाय दी गई है। ( $\Delta S\Delta$  प्रतिक्रिया)

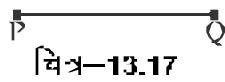
**उदाहरण-3** एक त्रिभुज PQR की रचना कीजिए जहाँ  $\overline{PQ} = 7$  सेमी,  $\angle P = 45^\circ$  तथा  $\angle Q = 75^\circ$  हो।

त्रिभुज PQR की रचना के निम्न चरण हो सकते हैं—

**चरण-1** : एक सफे चिन बनाए।



चित्र-13.16

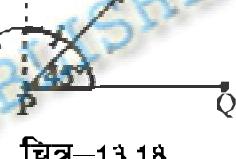


चित्र-13.17

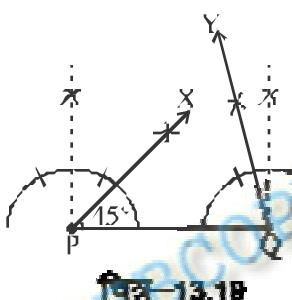
**चरण-2** : 7 सेमी. की लम्बाई का एक रेशु लगाए।

$\overline{PQ}$  लींगिय।

**चरण-3** : रेशुखंड  $PQ$  के P बिन्दु पर  $45^\circ$  का कोण बनाइए। काग बनावाली किरण  $\overrightarrow{PX}$  पर फी बिन्दु R लेंग।

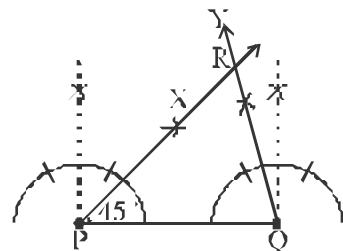


चित्र-13.18



चित्र-13.19

**चरण-4** : PQ रेखाखंड के Q बिन्दु पर  $75^\circ$  का कोण बनाइए। कोण बनावाली किरण  $\overrightarrow{QY}$  पर ही बिन्दु R लेखत हगा।



चित्र-13.20

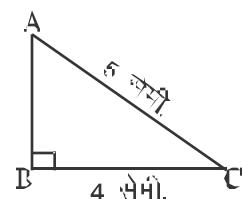
**चरण-5** : R बिन्दु कोण 60° ने बाली दोनों फेरणों पर स्थित है अर्थात् यह उनके प्रत्येक हेन्डु पर स्थित है। प्रत्येक बिन्दु ग्रात्त करने के लिए  $\overrightarrow{PR}$  और  $\overrightarrow{QR}$  को आपसीकतानुसार बढ़ाइए। उनका प्रतिच्छेद बिन्दु ही R है। इस प्रकार अन्यैष्ट त्रिभुज PQR की रचना हुई।

13.2.4 एक समकोण त्रिभुज की रचना जिसमें उसके कथा एवं समकोण बनाने वाली किसी एक भुजा की लाई दी हो। (RHS प्रक्रिया)

**उदाहरण-4.** एक समकोण  $\triangle ABC$  की रचना कीजिए जिसमें  $\angle B$  समकाण है तथा समकाण बनाने वाली दो भुजाओं में से एक  $BC = 4$  सेमी. तथा कथा  $AC = 5$  सेमी. है।

समकाण  $\triangle ABC$  की रचना का निम्न चरण हो सकत है।

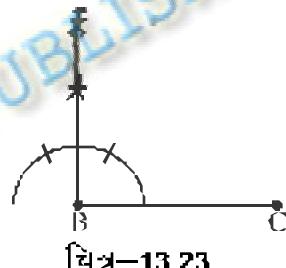
चरण-1 : पहले हम देख गए गाँपों के आधार पर एक  $45^\circ$  आकृति बनाते हैं।



चित्र-13.21

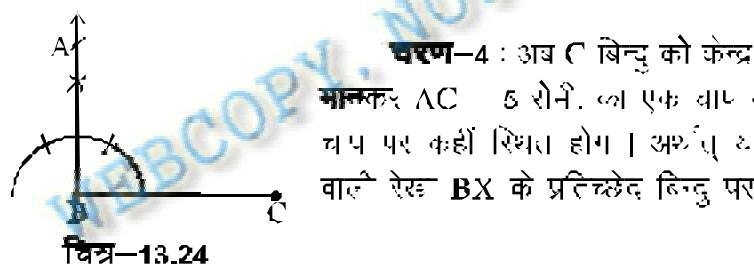
चरण-2 : 4 रोपी. का एक रेखांक BC लें।  
चित्र-13.22

चरण-3 : रेखांक BC के B बिंदु पर  $45^\circ$  का कोण बनाइए। काग बनाने वाले इसी भुजा पर त्रिभुज का A बिंदु स्थित होगा।

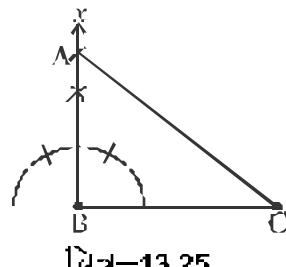


चित्र-13.23

चरण-4 : अब C बिंदु को केन्द्र मानकर  $\angle AC$  = 5 सेमी. का एक वाप बीजिए। वृत्त के A बिंदु इसी वाप पर कहीं स्थित होग। अर्थात् इह वाप एवं समकोण बनाने वाले रेखा BX के प्रतिक्रिया हिन्दु पर होना।



चरण-5 : बिंदु A ले बिंदु C से स्तिर्या। इस प्रकार अभीष्ट समकोण  $\triangle ABC$  की रचना हुई।



चित्र-13.25

## प्रश्नावली — 13.2

1. एक विषुज  $\triangle ABC$  की रचना कीजिए जिसमें हुआ  $AB = 5$  सेमी., भुज  $BC = 4$  सेमी. तथा  $AC = 5$  सेमी. हो।
2. एक विषुज  $\triangle ABC$  की रचना कीजिए जिसमें हुआ  $BC = CA = 5$  सेमी. तथा  $AB = 6$  सेमी. हो।
3. एक त्रिकोण की रचना कीजिए जिसकी तीन गुणाएँ  $5.5$  सेमी. हैं।
4. एक त्रिकोण  $PQR$  की रचना कीजिए जिसमें  $\angle R=30^\circ$  हुआ  $QR = 4$  सेमी. तथा  $RP = 5$  सेमी. हो।
5.  $\triangle ABC$  त्रिकोण की रचना कीजिए जिसमें भुजा  $AB = AC = 6$  सेमी. हो तथा  $\angle BAC=60^\circ$  हो।
6. एक त्रिकोण की रचना कीजिए जिसकी दो गुणाएँ इस प्रकार:  $7$  सेमी. एवं  $5$  सेमी. हों तथा उनके बीच का काण्डा  $120^\circ$  हो।
7. विषुज  $\triangle ABC$  की रचना कीजिए जिसमें  $\angle B=\angle C=40^\circ$  हुआ  $BC = 5$  सेमी. हो।
8. विषुज  $\triangle PQR$  की रचना कीजिए जिसमें  $\angle P=40^\circ$ ,  $\angle Q=60^\circ$  तथा  $PQ = 7$  सेमी. हो।
9. त्रिकोण  $XYZ$  की रचना कीजिए जहाँ  $\angle X=30^\circ$ ,  $\angle Y=40^\circ$  रखा गुजा  $XY = 7$  सेमी. हो।
10. विषुज  $\triangle ABC$  की रचना कीजिए जिसकी  $BC = 5$  सेमी. तथा कोण  $\angle B = 60^\circ$ ,  $\angle C=60^\circ$  हो।
11. विषुज  $\triangle DEF$  की रचना कीजिए जिसमें  $\angle D=45^\circ$ ,  $\angle E=45^\circ$  तथा  $DE = 10$  सेमी. हो।
12. एक ऐसो रगकोण विषुज की रचना कीजिए जिसका कर्ण  $5$  सेमी. तथा रगकोण मनाने वाली दो गुजाएँ गें से एक की लंबाई  $3$  सेमी. हो।
13. संगलेण त्रिकोण  $\triangle PQR$  बनाये जिसमें कर्ण  $PQ = 7$  सेमी.,  $QR = 6$  सेमी.।

4. संगत प्रियुज  $\triangle ABC$  की रचना कीजिए जिसमें सभी कोण हनने वाली ताओं भुजाओं की लम्बाई 6 सेमी. एवं 8 सेमी. है।
5. एक लम्बविहु सनकार त्रिभुज की रचना कीजिए जिसमें सभी भुजाओं की लम्बाई 6 सेमी. है।
6.  $\triangle ABC$  की रचना करें जिसमें  $\angle A = \angle B = \angle C$  एवं  $AB = BC = CA$  सेमी.।

## हमने सीखा

इस अध्याय में हमने शैगाना (स्केल) और परामर्श की राहायता रे द्वारा रचनाओं की गिरियों का अध्ययन किया है।

1. किसी रेखा के बाहर स्थित किसी बिंदु से उस रेखा के रूपान्तर रेखा लियने के लिए सनन एकान्तर कोणों की अवधारणा का उपयोग किया है।
2. त्रिभुजों की रचना में हमने त्रिन्जुं की सर्वांगसमता की संकलना का अध्ययन इन से संपर्क किया है। संकलनाएँ निम्नान्त हैं।
  - (i) SSS : त्रिभुज की तीन भुजाओं की लम्बाई दी द्युई है।
  - (ii) SAS : किन्हीं दो भुजाओं को लम्बाई और इन भुजाओं वे नद्य स्थित कोण का माप दिया द्युआ है।
  - (iii) ASA : दो कोणों की माप उनके मध्य स्थित भुज की लम्बाई दी द्युई है।
  - (iv) RHS : समकोण त्रिभुज के कपां एवं ओष दो भुजाओं में से एक भुज की लम्बाई दी द्युई है।

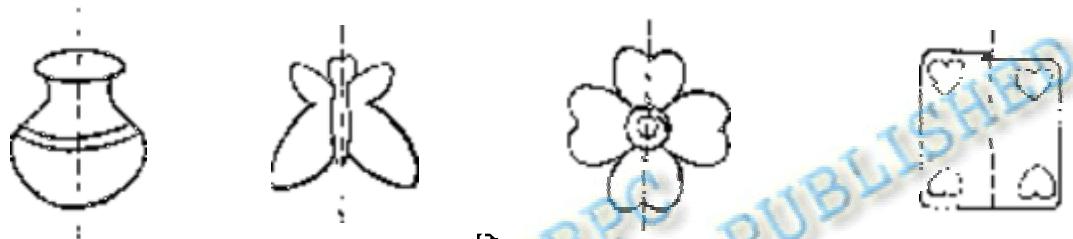
३०८

## अध्याय-14

# समसिति

### गूणिका

आपने ३ रा-८ रा हम ६हुं रासी वरपुओं को देखे हैं। इन वरपुओं में से हमें ज्यामिति दिखाई नहीं है, क्योंकि इनांक हैं = कई तारतम्यता व संतुलित अनुग्रात हम देख पाते हैं। दिखायी नहीं वाली लुँग आकृतियां को ३-४ चित्र तंख्या 14.1 में देखिए।



क्रम-14.1

इन आकृतियों को नीक गोलों गोल और गोल रेखा के गरिमा गोला जरूर या काना जाये तो दोनों हिस्से एक दूसरे को पूरी तरह से ढंक लेते हैं। इन आकृतियों को हम समसिति आकृति कहते हैं। समसिति आकृतियों तथा समसिति के बारे में निछली कक्षा में इनका जाना है। इस अध्ययन में हम वरापर्तीन समसिति द्वारा घूर्णन समसिति के बारे में रीखेंगे।

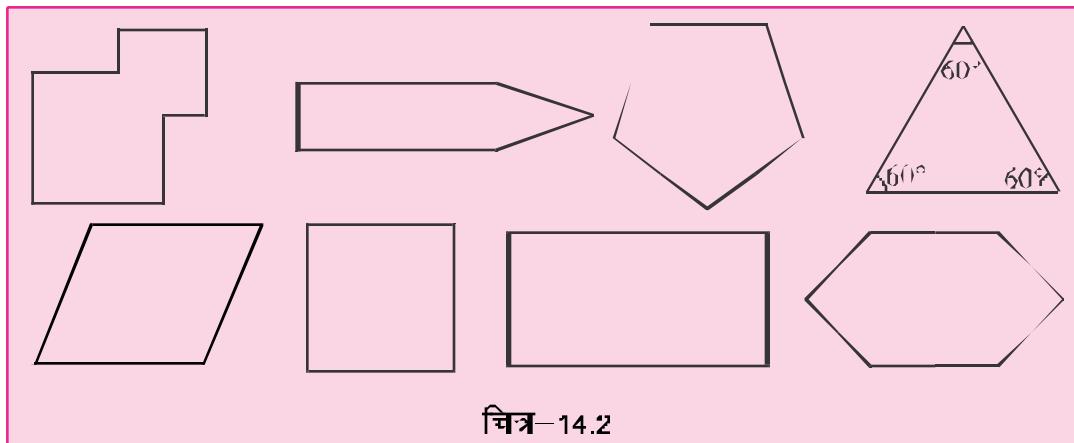
### 14.1 रेखिक समसिति

क्रम-14.1 में आपने लगानी देखी, यह रेखिक समसिति है। इन चित्रों में एक ऐसी सरल रेखा है जिसके उन्नुदिश आकृतियों को मङ्ग से आकृति के दर्गों भान संपत्ती हा जाते हैं।

### कुछ करें

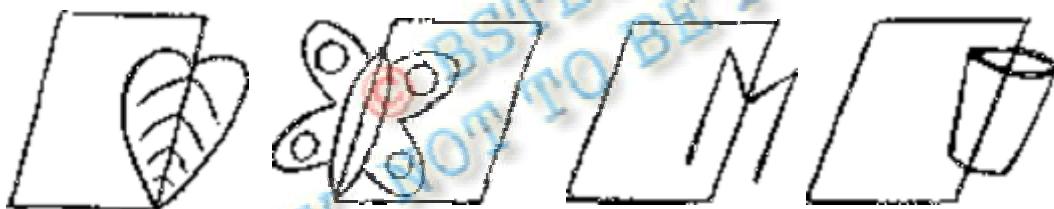
नीचे बने चिनों में रा गोली अद्य कोने-





## 14.2 परावर्तन रागगिति

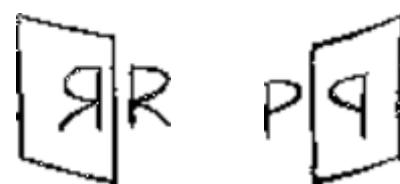
एक सम्पूर्ण दर्पण लीजिए। तथा उसके सामने चेन्निन पस्तुओं को बाँध-बासी से रखें। आप यार्डेंगे वस्तुओं का प्रतिरिक्षण दर्पण में कैसा रहा है। युझे बनने वाले प्रतिरिक्षण का छविलोकन चित्र रांगड़ा 14.3 में कियें।



चित्र-14.3

चित्र में आधा हिरण्या दर्पण के रूप में है तथा इस दर्पण में दोनों के गिलने रे चेन्न के पूरा होने का आकर मिलता है। यह परावर्तन समिति है। दर्पण प्रतिरिक्षण में आला भाग है तथा दर्पण का किनारा सममिति अह ल रूप में है। इस प्रकार रेखिक सममिति को उद्घाटन का दर्पण प्रतिरिक्षण से निकट का संबंध है। दर्पण रेखा इनमें एक सममिति रेखा ज्ञात करने में सहायता करती है।

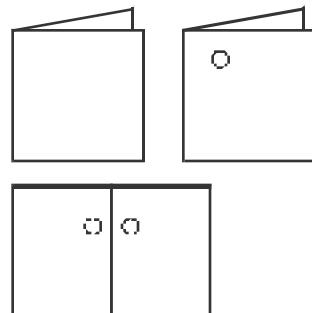
चित्र-14.4 में R और P का दर्पण परावर्तन विळाया गया है। यहाँ आकृति के दर्पण परावर्तन में पारदर्शन परिवर्तन द्वारा अभिमुख्य में दायें-बायें परिवर्तन हो जाता है।



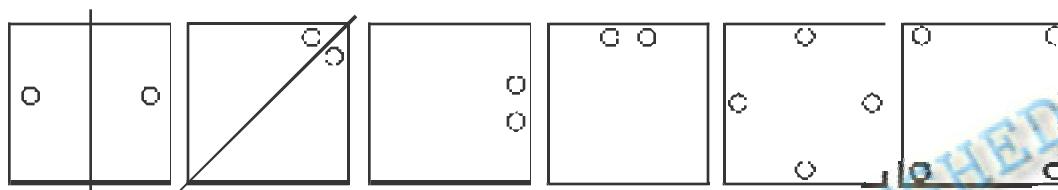
चित्र-14.4

## कुछ करें

चौकोर सादा कागज लोडिए। उसे बीच से चित्र नं देखाए अनुसर मालें। अब कागज में एक छेद जीजिए। उब कर्ज को उलिया कागज का नेह सामिन रखा है। उब कर्ज में बन भेद सामिन आकृति के रूप में है। आइए इस तरह बने अन्य छेद की हुई आकृतियों नं समनित रखा ढूँढ़ने क प्रयास करें।



चित्र-14.5

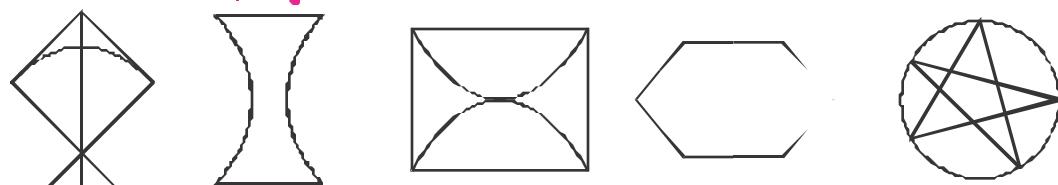


## प्रश्नावली-14.1

- नीचे दी गई आकृति में जो बिंदु रेखा दर्शायी गई है, वह उस आकृति की सममित रेखा है या नहीं? बताइए।



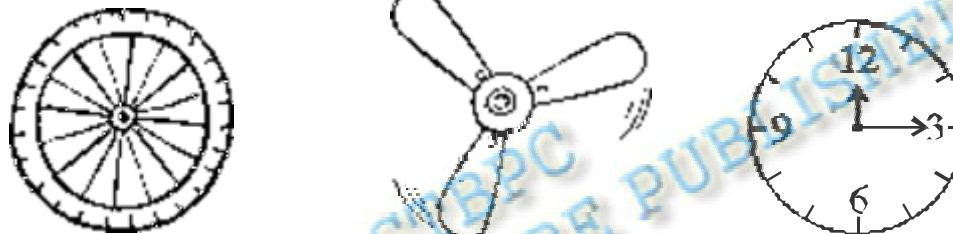
- नीचे दी गई आकृति में सममित रेखा स्पीषिए।



3. नीचे दी अवूरी आकृति को सममित रेखा के अनुदिश पूरा कीजिए।



### 14.3 धूर्णन सममिति



क्रि. 14.4

घड़ी की सुइयाँ, राइफल का पट्टिमा यथा छप या लगे चंचों आदि को आप तब गतिशील कहते हैं जब वे सूक्ष्म हैं या धूर्णन करते हैं। कुछ वस्तुओं में यह धूर्णन दर्जों तरफ हाता है, लेकिं घड़ी की सुइयाँ में यह केवल एक दिशा में होता है। घड़ी की सुइयाँ, लिस दिशा नं सूची है यह घड़ी जो दिश में (जहिंगवर्त) धूर्णन करताता है। शेष धूर्णों को घड़ी की विपरीत दिशा में (वानवर्त) धूर्णन कहते हैं। राइफल का पट्टिमा दोनों दिशाओं में धूर्णन करता है।

### स्वयं से करें

1. घड़ी की दिशा नं धूर्णन के तीन उत्ताहरण दीजिए।

2. घड़ी की विपरीत दिशा में धूर्णन के तीन उत्ताहरण दीजिए।

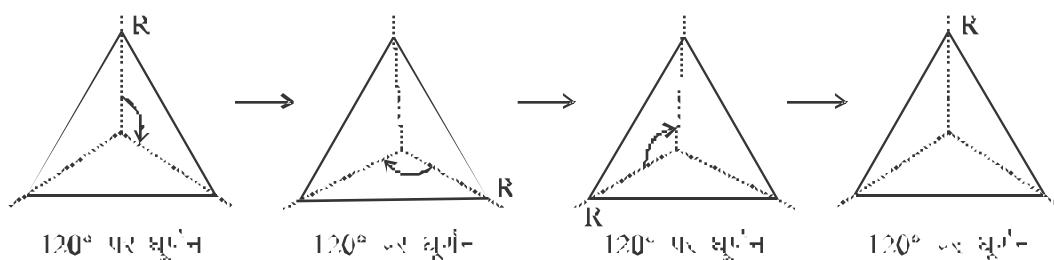
सोचिए। जाइकिल का पहिया, घड़ी ली सूझ्याँ जैसी उस्तुएँ धूर्ण करते हैं तो क्या उनके आकर एवं माप में कोई परिवर्तन है? नहीं। उ लाल लौर मास में परिवर्तन है, बिना नरम हरे निश्चय हिंदू के बारे वृषभ वृषभ है। यह निश्चय बिंदु भूर्णन का केन्द्र कहलाता है। धूर्णन ल हौलन घूरा गये कोण का भूर्णन कोण कहते हैं। नीच घड़ी गें घंटा ले जुई द्वारा केन्द्र पर भिन्नत की जुई ल साढ़ बगावते कोण वा दिखाया गया है।

घड़ी की स्थिति					
समय	12 बजे अपर ह	3 बजे अपर ह	6 बजे अपर ह	9 बजे अपर ह	12बजे पूरा
दोनों सुईयों के बीच का कोण एवं क्रम	$0^\circ$ क्रम-1	$90^\circ$ क्रम-2	$180^\circ$ क्रम-3	$270^\circ$ क्रम-3	$360^\circ$ क्रम-4

यहाँ हारा वर्णा दखते हैं। 12 घण्टे अपराह्न से 12 घण्टे पूर्वाह्न के बीच हड्डों ली गईटं के बीच ली खिते समान है तथा बाजों स्थिति एक समर्थित आकृति बनाती हैं, इस घूर्णन समित कहते हैं। घड़ी नं घंट की सुई पूरे अवधर में चार स्थितियों नं दिखाई नहीं हैं,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$ ,  $360^\circ$  के केंद्र पर धुमाने या घूर्णन करने के बाद वह पुनः वहले ऐसी दिखने लगती है। अपः हारा कहते हैं कि अबू में घूर्णन दा गिरि हे।

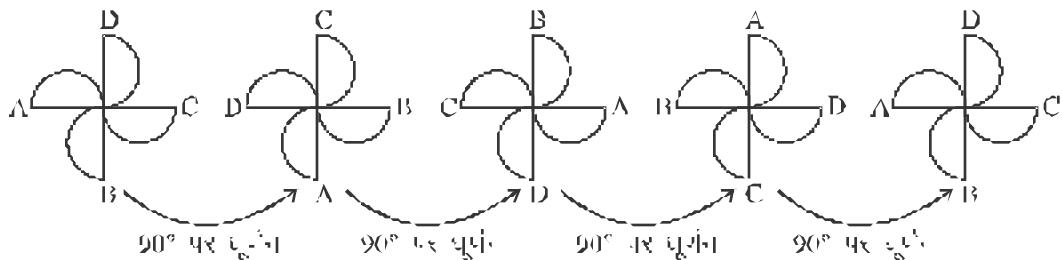
## धूपन के असर चलाकरण

समयानुक्रमित जिम्मेवाले द्वारा एक पूर्ण चक्कर में त्रिभुज तीन बार आगे प्रारम्भिक स्थिति में आता है इसे तीन कठन का घूण्ड कहते हैं। यद्यपि त्रिभुज अपनी प्रारम्भिक स्थिति से  $120^\circ$  दूरमें के बाद दूनः अपनी पहले धारी स्थिति में आ जाता है उसके दूरमें घूण्ड की दूरी  $120^\circ$  है।



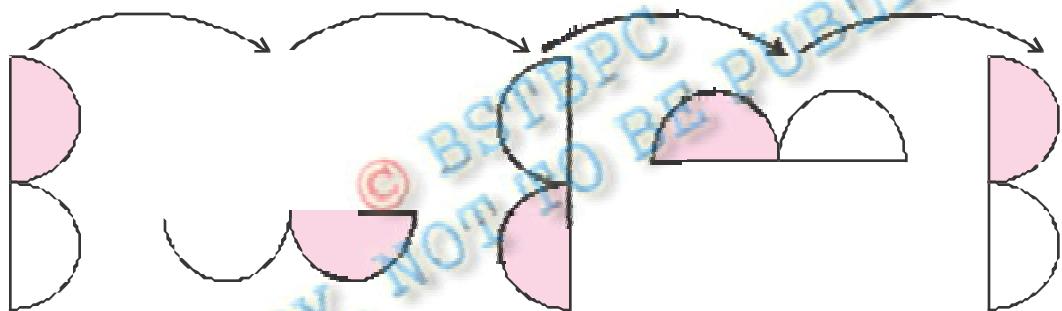
सर्व शिक्षा : 2013-14 (निःशुल्क)

वक्री का धूर्णन— वक्री को देखें। वक्री नापने एक धूर्णन में जार बार लापने प्रारंभिक अवस्था में आती है तभी प्रत्येक  $90^\circ$  वर वह अपनी पहले गाली अवस्था में आती है। अत चक्री का धूर्णन लेण  $90^\circ$  है।

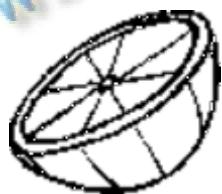


### स्वयं कीजिए

B का धूर्णन की प्रिश्ना, धूर्णन कोण व धूर्णन क्रम बताइए—



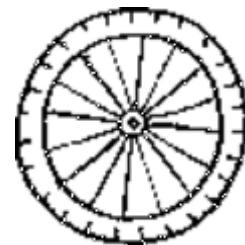
फलों के अनुप्रस्थ काढ वालायात रांकेता पहिया आदि ऐ वी धूर्णन समिति को देखिए।



फल का अनुप्रस्थ काढ



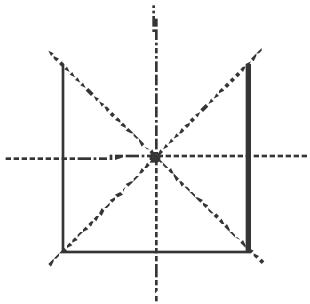
राडिक रांकेता



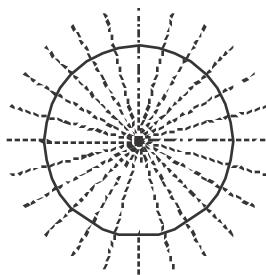
पहिया

#### 14.4 रैखिक सममिति और घूर्णन सममिति में संबंध

विभिन्न प्रकार के आकृतरूप उच्च सममिति को हम देखते आ रहे हैं। युछ आकृतरूप में रैखिक सममिति तो कुछ ने घूर्णन सममिति तो कुछ में रैखिक तथा घूर्णन दोनों प्रकार की सममिति होती है।



उपर वर्ती में रैखिक एवं घूर्णन दोनों प्रकार की सममिति है।

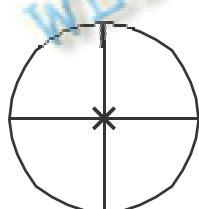


दूसरी में अपरिणित रूप से घूर्णन सममिति एवं रैखिक सममिति है। केंद्र के परिधि जाड़ी प्रत्येक कोण के लिए एक घूर्णन सममिति है जिस प्रत्येक व्यास एक रैखिक सममिति है।

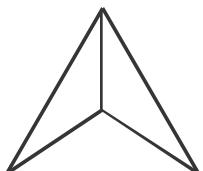
इस प्रकार रैखिक एवं घूर्णन सममिति में इन संबंध स्पष्ट कर सकते हैं।

#### प्रश्नावली – 14.2

- नीचे दी आकृतियों में से किन में घूर्णन सममिति का क्रम एक से अधिक है?



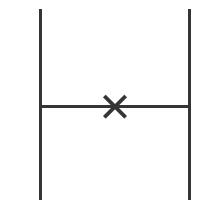
(i)



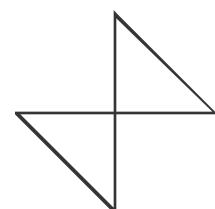
(ii)



(iii)



(iv)



(v)

- दो वैसी आकृतियों के नाम बताइए, जिसमें रैखिक सममिति और क्रम 1 से अधिक की घूर्णन सममिति दोनों ही है।

3. यदि किसी आकृति की दो दो से अधिक समांमेता रेखाएँ हों, तो क्या यह आवश्यक है कि उसमें क्रम 1 से अधिक की घूणन रानीमेता होगा?
4. ऐसे चतुभुजों के गान बताइए जिसमें रेखिक समांमेता और लम 1 से अधिक की घूणन समांमेता दोनों हो।
5. किसी आकृति का सर्वके परिमाण  $60^\circ$  के कार्य तर घूणन पर वह उसकी प्रभाविक स्थिति नैसी दिखाई पड़ते हैं। और किन-लिए कार्य के लिए इसे स्थिति बनायी?

## हमने शीखा।

1. समांमेता आकृतियों के टीक बीच खीची गई रखा जा परितः मोड़ने या काढ़ने पर ग्राह दण्डों द्विस्त उक दूसर जा पूरे तरह ढैंज लेत है। खोंची गई रखा समांमेता अब कहल ती है।
2. दर्शन परावर्तन से भी रखिक समांमेता ग्राह होते हैं, जिसमें दर्शन का किनारा समांमेता अवधि का कर्य लगता है। दर्शन परावर्तन में पार्श्व परावर्तन या दार्थ-दार्थ अभिमुखों का ध्यान रखना होता है।
3. यदि घूणन के बाद वस्तु स्थिति के अनुसार घटने जैसी ही दिखाई दती है तो हम कहते हैं कि उसने पूरी समांमेता है। जिस दिन्दु के परित वस्तु घूणन करते हैं वह घूणन का केन्द्र कहलता है। जिस कौप पर वस्तु घूनती है, उसे घूणन का कोप कहते हैं। पूरे वर्कर का कर्त्ता  $360^\circ$  का घूणन, आधा वर्कर का कर्त्ता  $180^\circ$  का घूणन, एक चैथाई चक्रकर जा कर  $90^\circ$  का घूणन है।
4. घूणन अब घटी की सूर्द के बलने की पिशा में हो तो दिन वह अन्धा बानाता होता है।
5. एक पूरे चक्रम से एक वस्तु जितनी बर स्थिति के अनुसार, जहल जैसी ही दिखाई देती है, वह संख्या उस घूणन सामांमेता का क्रम कहलती है। एक वर्ग की घूणन सामांमेता का क्रम 4 है तभ्या एक ता 6 मुनिषुज की घूणन सामांमेता का क्रम 3 है।

४०८

## अध्याय-15

# परिमाप और क्षेत्रफल

### 15.1 गूगिका

आगे नज़, किट्ठ ल पने, जरवर डैर खेड़की के गल्ले, चकले, छमरे के कर्र, छ्लैक्लबड़, बैच आदि को देखा है। इन्हें चात्तां आर के लगारी छिनारां का नामें। इनके चरं और के किन्नरे की लन्धाई के कुल नाम को परिनप या परिमिति कहते हैं। इन घट्टूओं के प्रारा किसी पाल के धेरे परे याम को उस का क्षेत्रफल कहते हैं। आइए कुछ पाल की आकृतियें के परिमाप और क्षेत्रफल के बारे में चर्चा करें।

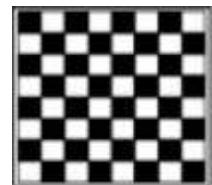
### 15.2 पुनरवलोकन

निहाल के गार 3 रोगी, गुज़ा वाले बुझ से कले व सफेद चर्चा हैं वह वर्ग को लकड़ी के बोड़ पर चिनकाकर एक शतरंज बोर्ड बनाना चाहते हैं।

शतरंज बोर्ड बनाने के लिए कितने काले व सफेद चर्चा की लकड़त होगी? इन चर्चा रोगी शतरंज बोर्ड बनाने के लिए कितने बड़े लकड़ी के बर्ड की जारी होगी? सफेद चर्चा की लन्धाई चौकूर्ड़ी क्या होगी? यदि निहाल इस शतरंज बोर्ड के चारों आर 3 समी. चौड़ा क्रम भी लगा दे तो शतरंज बोर्ड कितने जगह घेरेगा?

वूँके एक शतरंज बोर्ड में 64 खाने होते हैं और ब्रावर संख्या में जाले य सफेद खाने होते हैं। अतः 32-32 प्रभाशः 64 ले व 32 फेद जाने होते। मुनः थदि प्रथेष्व उना ६४ वर्ग रोगी। का ई ते उरो 64 वर्ग रोगी, तब बोर्ड की आवश्यकता होगी? हरने कक्षा-6 में क्षेत्रफल के बारे नं पढ़ा है। अतः 64 वर्ग सेमी. क्षेत्रफल वाले बोर्ड के भुजा 8 सेमी. है।

शतरंज बोर्ड कितनों जगह घेरेगा इसके लिए हनं क्षेत्रफल ज्ञात करना होगा और क्रम की लम्ब इंजान के लिए परिमाप ज्ञात करना होगा।



आकृति-15.1

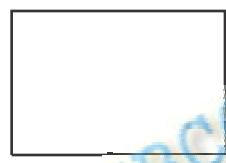
### स्वयं करके देखिए

नीच दिए गए प्रश्नों को हल करने के लिए आपका क्षत्रिय उत्तरांश नं से किसकी आवश्यकता होगी।

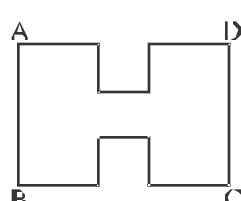
1. श्यामलाल कितनी ज़मीन धरता है?
2. एक लंबाकार लाम के 6 बीघे के बारे और लंबाई लेने के लिए आवश्यक तार की लंबाई क्या है?
3. एक टेकोने पल के चर्चा और दो बार चक्कर लगान पर उन्हें कितनी दूरी तय करेंगे?
4. एक आयताकार स्तंभेण पूल को छैंकने के लिए आपको कितनी प्लास्टिक शीट की आवश्यकता होगी?

क्या आप जानते हैं,

$$\begin{aligned}
 \text{समबहुभुजा का परिमाप} &= \text{भुजाओं की संख्या} \times \text{एक भुजा की लंबाई} \\
 \text{र्ता का परिमाप} &= 4 \times \text{भुजा} \\
 \text{आयत का परिमाप} &= 2 \times (\text{ल.} + \text{बी}) \\
 \text{आयत का क्षेत्रफल} &= \text{ल.} \times \text{बी} \\
 \text{र्ता का क्षेत्रफल} &= \text{भुजा} \times \text{भुजा}
 \end{aligned}$$



आकृति-15.2

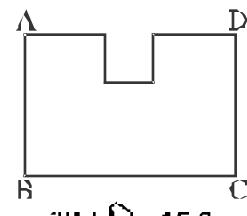


आकृति-15.4

आकृति-15.2 को एक कोलाज (collage) तूरा करने के लिए कौन सी भुजा बाले वर्गों की अपश्यकता थी। उसके बारे 28 रोपौ, लंबाई 26 रोपौ, चौड़ाई बाली रुक आयताकर शीट थी (आकृति-15.2)। उसने इस आयताकर शीट नं से एक 4 स्मी. भुजा बाले एक वर्ग का काटा। उसकी बाली ने शीट के शेष भाग को देखा (आकृति-15.3) और उन्होंने यह पूछा, "क्या इसका परिमाप अब बढ़ गया है या लग हो रहा है?"

व्या क्षत्रिय बड़ गया है या कम हो रहा है? व्या भुजा की लंबाई लंबाई, वर्ग काटने के बाद बढ़ गई है?

पान्या र मुख भुज ने यह एक और वर्ग काटती है (आकृति-15.4)।



आकृति-15.3

क्या शीट के शेष भाग का चरिन्प चाले से और अधिक हो जाएगा या कम हो जाएगा?  
 क्या शैट का क्षेत्रफल पहल से और अधिक बढ़ेगा या कम होगा?  
 अतः यहाँ से हम क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?  
 परन्तु यह स्पष्ट है कि वरिन्प के बड़ाए जाने पर क्षेत्रफल का बढ़ना अवश्यक नहीं है।

### सदयं करके देखिए

- परिन्प शीटां पर आकृति—15.3 उरे 15.4 लेसी आलग—आलग आकृतियों का बनाकर उसक चरिन्प और क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। क्या चरिन्प बढ़ने पर क्षेत्रफल भी बढ़ता है? पाठ्य।
- दो एस लदाहरण दीजिए (आकृति बगालर भी बताएँ) जहाँ परिनाम के बढ़ने पर उसका क्षेत्रफल भी बढ़ जाए।
- ऐस दो लदाहरण दीजिए (आकृति बगालर भी बताएँ) जहाँ परिनाम के बढ़ने पर उसके क्षेत्रफल में भी बढ़ोत्तरी न हो।

**उदाहरण—1.** एक वर्ग का क्षेत्रफल 121 वर्गमीटर है। तो उस वर्ग का परिमाण ज्ञात कीजिए।

**हल :** यदि वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा  $\times$  भुजा = भुजा<sup>2</sup>

$$\therefore \text{भुजा} = \sqrt{\text{वर्ग का क्षेत्रफल}} \quad \text{अब वर्ग का परिमाण} = 4 \times \text{भुजा}$$

$$= \sqrt{121 \text{मी}^2} = 11 \text{ मी.} \quad - 4 \times 11 \text{ मी.} = 44 \text{ मी. उत्तर}$$

**उदाहरण—2.** 10 समी. चौड़ाई वाल एक आयत लाइ लोहे के शीट का क्षेत्रफल 400 वर्ग सेमी. है। तो उसकी परिमिति इत करें।

**हल :** चौड़ाई = 10 सेमी. क्षेत्रफल = 400 वर्ग सेमी.

आयत कार शीट का क्षेत्रफल = ल.  $\times$  बै.

$$400 \text{ सेमी.} = \text{ल.} \times 10 \text{ सेमी.}$$

$$\text{ल.} = \frac{400}{10} = 40 \text{ सेमी.}$$

अब, आयताकार इंट की परिमेत्रि  $2(l + b)$

$$2(10 + 10) \text{ रोपी.} = 2 \times 20 \text{ रोपी.} = 100 \text{ रोपी.}$$

**उदाहरण-3 :** 12 मी.  $\times$  11 मी. माल एक दीवार में 3 नी.  $\times$  2 मी. माल बले एक दरवाजे का एक बौखट लगाया या है। यदि दीवार पर पेंट करने का खर्च 2.50 रु. त्रिभुजाकार हो तो 50 दीवार पर पेंट कराने का खर्च ज्ञात करें।

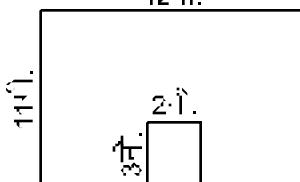
12मी.

**हल :** दीवार पर पेंट, दीवार के क्षेत्रफल को छोड़कर होगा।

$$\text{दरवाजे का क्षेत्रफल} = l \times b.$$

$$= 3 \text{ नी.} \times 2 \text{ मी.} = 6 \text{ वर्गमीटर}$$

$$\text{दरवाजे साथी दीवार का क्षेत्रफल} = l \times b.$$



आफूरि-15.5

$$= 12 \text{ मी.} \times 11 \text{ मी.} = 132 \text{ मी.}^2$$

$$\text{दरवाजे को छोड़कर, दीवार का क्षेत्रफल} = 132 \text{ मी.}^2 - 6 \text{ मी.}^2 = 126 \text{ मी.}^2$$

$$\text{दीवार पर पेंट कराने का लुप्त ऊर्जा} = 126 \text{ मी.}^2 \times 2.50 \frac{\text{रु.}}{\text{मी.}^2} = 315 \text{ रु. लक्षर}$$

**उदाहरण-4 :** एक आयत का क्षेत्रफल एक वर्ग के क्षेत्रफल के बराबर है। यदि आयत का क्षेत्रफल 100 वर्ग मीटर हो तो वर्ग की कुजा ज्ञात करें।

**हल :** वर्ग का क्षेत्रफल = आयत का क्षेत्रफल = 100 वर्ग रोपी.

$$\text{एवं वर्ग का क्षेत्रफल} = \text{कुजा}^2$$

$$100 \text{ मी.}^2 = \text{कुजा}^2$$

$$\therefore \text{कुजा} = \sqrt{100 \text{ मी.}^2} = 10 \text{ मी.}$$

**उदाहरण-5 :** एक ८ र 20 रोपी. कुजा ८ ले १० की आकृत का है। यदि ८ र को दूर र गोड़ कर एक 24 सर्पी. लाबाई वाले एक आयत बनाय जात है, तो इसकी चौड़ई ज्ञात कीजिए तथा यह भी बताइए कि किसका क्षेत्रफल अधिक होगा?

**हल :** वर्ग की एक कुजा = 20 सर्पी. तथा क्षेत्रफल =  $20 \times 20 = 400$  वर्ग सर्पी.

$$8 \text{ र की लाबाई} = \text{वर्ग का परिमाप} = 4 \times \text{कुजा} = 4 \times 20 = 80 \text{ रोपी.}$$

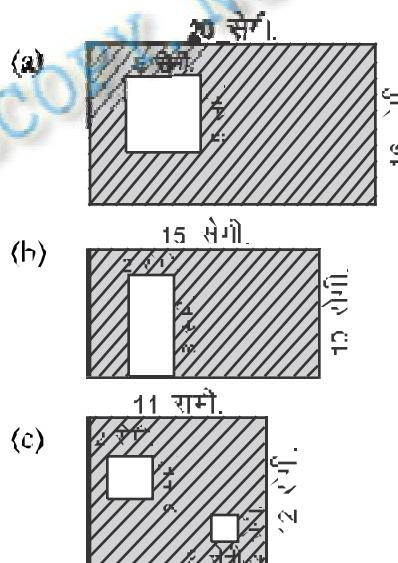
एवं आयत की लम्बाई = 24 सर्पी., चौड़ई = ? (चूंकि उसी तर का नड़कर आयत बनाते हैं। अतः इस आयत के लम्बा का परिमाप नी 80 रोपी. ही होगा।)

ए आयत का परिमाप = 2 (ल. + चौ.)

- $80 \text{ समी.} = 2 (24 \text{ सेमी.} + \text{चौ.}) \rightarrow \frac{80}{2} \text{ सेमी.} = 24 \text{ समी.} + \text{चौ.}$
  - $\text{चौ.} = 40 \text{ सेमी.} - 24 \text{ सेमी.} = 16 \text{ सेमी.} \rightarrow \text{आयत की चैम्फाइ} = 16 \text{ सेमी. है।}$
- पुनः आयत का तार का क्षेत्रफल = लं.  $\times$  चौ. =  $24 \text{ सेमी.} \times 16 \text{ सेमी.} = 384 \text{ सेमी.}^2$   
अतः स्पष्ट है कि १२ रोडों वाले ८' का क्षेत्रफल अधिक होगा।

## प्रश्नावली 15.1

1. एक आयताकार फ्रेम की लम्बाई 15 सेमी. और ऊँचाई 10 सेमी. हैं। त उसकी परिमेत्रियाँ और क्षेत्रफल ज्ञात करें। यदि फ्रेम को बारों ओर 12 रोडों प्रांतीय गाली लेकर लगानी है तो लेर की कीट बराइर।
2. एक अग्रताकार बाय के बागन की जारिमिति 100 भी. है तथा लम्बाई 30 मी. सौ वैङ्गाई ज्ञात कीजिए।
3. एक बगांकार मैदान का क्षेत्रफल 44 घाँटा भौदर है। तो इस मैदान की परिमेत्रि ज्ञात कीजिए।
4. (i) नीचे दिए गए चित्रों में छानीकृत भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।




---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

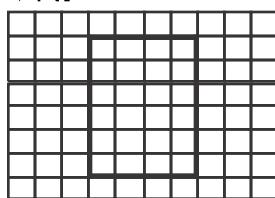
---

---

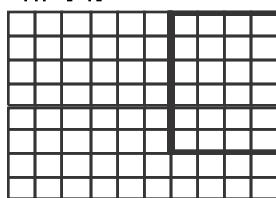
---

- (ii) किसी एक वित्र के लिए यह भी बताइए कि छवांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए आपने क्या किया?
5. कदा ने रियाक ने छात्रों को एक गतिविद्या करने को दी। छवें के 10 सेमी. लम्बे व 8 सेमी. ऊँचे थे। वे 6 रोमी. लम्बा व 4 सेमी. ऊँचा टुकड़ा काढ़ा था। रमेश, नाजिया, दीना व अब्दुल हाफिज ने इसी नीचे दिखाए अनुराग अलू-कला तरीके से लाठा।

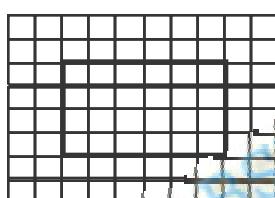
रमेश



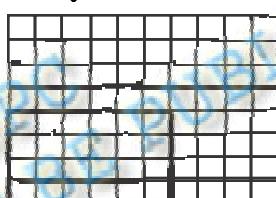
नाजिया



दीना



अब्दुल हाफिज



- (i) चरण छात्रों के जूदे क्षेत्रफल की गणना कीजिए।

रमेश : \_\_\_\_\_

नाजिया : \_\_\_\_\_

दीना : \_\_\_\_\_

अब्दुल हाफिज : \_\_\_\_\_

आपने क्या किया?

6. 20 सेमी. वैली बले एक आयताकृ रॉट का क्षेत्रफल 600 वर्ग सेमी. है। उसकी परिमिति ज्ञात करें।
7. 6 मी. x 2 मी. + 14 वाली एक दीवार में 3 मी. x 2 मी. 14 वाले एक दरवाजे का एक चैखना लगाया जाना है। यदि एक वर्ग नीलाली दीवार पर गैल कराने का खर्च 3.50 रु. हो तो यूरी दीवार पर गैल कराना का खर्च ज्ञात करें।

8. एक तार जायता के आकार के है। इसकी लम्बाई 50 नी. और चौड़ाई 30 नी. है। यदि उसी तार के दोनों ओर कर 80 वर्ग मीटर का आयत बनाया जाता है तो ग्रेडेक भूजा की आप क्या होगी? वह भी ज्ञात कीजिए तो किस आकार का क्षेत्रफल अधिक होगा?

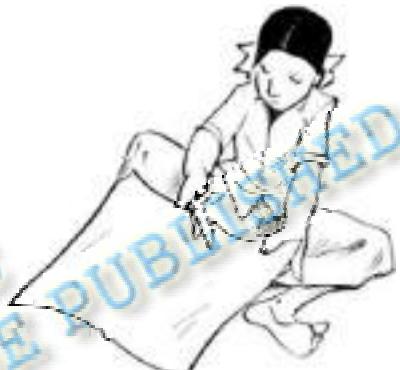
9. एक आयत का क्षेत्रफल एक वर्ग के क्षेत्रफल का व्याप्त है। यदि आयत का क्षेत्रफल 3600 वर्ग सेमी. है तो वर्ग की भूजा ज्ञात कीजिए।

10. एक वर्ग का दोनों क्षेत्रफल इतने कीजिए जिसका घेरा उस आयत के दोनों के बरबर है जिसकी लम्बाई 80 मीटर है पथ लम्बाई, उसकी गोडाई की तीन गुनी है।

11. बताइए कि एक  $10 \times 10$  रोडी के एक के ऊपर है। इस शीट से चित्र बनाने के लिए वह  $5 \times 6$  सेमी. की शीट लटना चाहती है।

(i) बताइए शीट काटने के बाद वही हुई कार्डशीट का क्षेत्रकल कितना होगा चाहिए?

(ii) शीट काटने के बाद उसे लगा कि उसके बड़ा वर्ग काट लिया है तो किसके नास सिफ़ 64 खां सेमी. शीट ही रखी। बताइए, उसने किस भूजा का वर्ग रखा?



आकृति-15.6

12. दिए गए ग्रेड 55 14 रोडी परिमाप के आप जितना चाहें उसना आयत बनाइए। बरा उनकी लम्बाई व चौड़ाई पूरी संख्या में हों। लदाहरण के तौर पर इस आयत पहले ही बनाया गया है।

(i) अब ग्रहणक आयत का क्षेत्रकल यत्ता जीजिए और उसे दी गई सरणी में लिखिए। उदाहरण में १० तुर आयत का क्षेत्रकल 10 वर्ग रोडी. है।

आयत	लम्बाई	चौड़ाई	परिमाप	क्षेत्रफल
(a)	5 सेमी.	2 सेमी.	14 सेमी.	10 वर्ग सेमी.
(b)				
(c)				
(d)				

(ii) जिस अचत का क्षेत्रफल सबसे कम है, इसकी दोनों भुजाओं का माप क्या है?

---

(iii) जिस आयत का क्षेत्रफल सबसे अधिक है, उसकी दोनों भुजाओं की माप क्या है?

---

### 15.3 त्रिभुज का क्षेत्र (Area of Triangle)

एक आयताकार कागज का एक टुकड़ा लेते हैं, उसे बिन्दुनों के अनुदिश ऐसा काटें कि दो त्रिभुज बनते हैं (आकृति 15.7)

अब एक का तूसरे पर रखिए। क्या ये दोनों  $\Delta$  एक दूसरे का पूर्णतया ढंग लेते हैं?

उमेर देखते हैं कि हम, दोनों  $\Delta$  एक-दूसरे के पूर्णतया ढंग लेते हैं। अतः दोनों राशियाँ बराबर हैं। (आकृति 15.7)

इस लिए प्रदेश के द्वारा आपस में समाप्त होता। आकृति—15.7

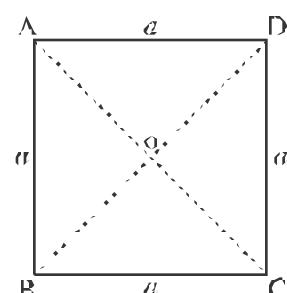
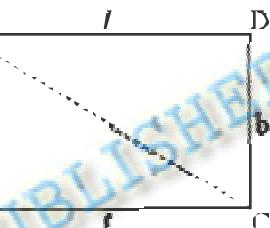
$\Delta ABC$  का क्षेत्रफल, आयत के क्षेत्रफल का आधा होगा।

$$\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \text{ आयत } ABCD \text{ का क्षे.}$$

$$= \frac{1}{2} (l \times b) \quad (\text{यहि } l \text{ आधार, } b \text{ ऊँचाई है})$$

**अतः त्रिभुज का क्षेत्रफल =  $\frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}$**

इसी प्रकार कोई वर्ग लेकर उसे त्रिभुजों में बांटिए तथा प्रत्येक त्रिभुज का क्षेत्रफल जाता जाए।  $a$  भुज का  $ABCD$  एक वर्गाकार लागज ला एक टुकड़ा लै, उसे दिक्कर्ण के अनुदिश गोङ्कर काट ले, तिर त्रिभुजों को एक-दूसरे पर रखिए। क्या ये त्रिभुज एक-दूसरे का पूर्णतया ढंग लेते हैं? इन देखते हैं कि सभी त्रिभुज एक दूसरे के पूर्णतया ढंग लेते हैं। अतः वारों त्रिभुज स्वरूप हैं। पुर लें। त्रिभुजों का क्षेत्रफल तरह हो।।।



आकृति—15.8

अतः वर्ग ABCD का क्षेत्रफल = चतुर्भुज का क्षेत्रफल

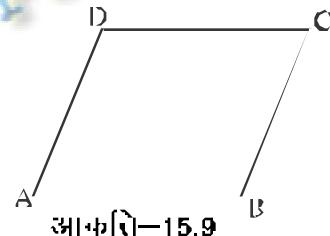
$$\text{प्रत्येक त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{4} \times \text{वर्ग का क्षेत्रफल}$$

### स्वयं करके देखिए

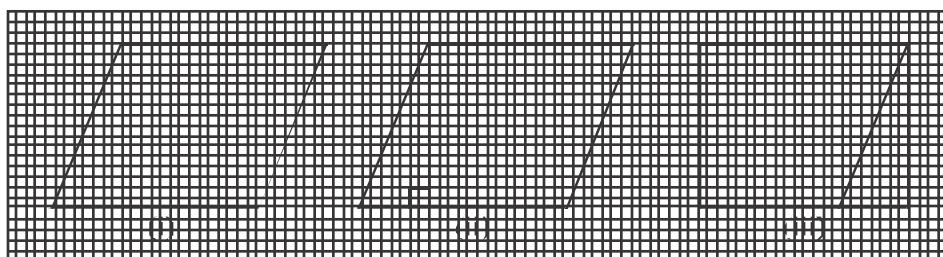
आयत का क्षे.	लम्बाई	चौड़ाई	त्रिभुज का क्षे. = $\frac{1}{2}$ आयत का क्षे.
24 वर्ग सेमी.	6 सेमी.	$\frac{24}{6} = 4$ सेमी.	$-\frac{1}{2} \times 24 = 12$ सेमी.
		8 सेमी.	36 वर्ग सेमी.
50 वर्ग सेमी.	10 सेमी.		
		20 सेमी.	15 वर्ग सेमी.

### 15.4 रागान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल (Area of a Parallelogram)

एक किसान वित्र ने दी गई आकृति और समान्तर चतुर्भुज का लंब खीदता है। इसके चारों ओर बाहु जगाने में मिलने वाले चाहिए इरकी गणना जगाने कर दी। परन्तु किसने वर्ग मीटर क्षेत्रफल यह प्लॉट घोषित किया। इसकी गणना वह नहीं कर पा। आइए ऐसी आकृतियां के क्षेत्रफल के गणना करें।



ग्राफ पैपर पर एक समान्तर चतुर्भुज बनाइए जैसा कि आकृति [15.10(i)] में दिखाया गया है। इस समान्तर चतुर्भुज को लाइटें। समान्तर चतुर्भुज के एक शीर्ष से इसकी सम्मुख भुजा पर एक लंब खींचें अकृति [15.10(ii)]। इस त्रिभुज के काट लीजिए और इस त्रिभुज का रागान्तर चतुर्भुज के दुसरी त्रिभुज के रथ लें आकृति [15.10(iii)]।



आकृति-15.10

आप कैसी आँखों प्राप्त करते हैं? आप एक ज्यात प्राप्त करते हैं।

क्या समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल बनाए गए आयत के क्षेत्रफल के छह गुने हैं?

हाँ, समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = बनाए गए आयत का क्षेत्रफल

आयत की लंबाई और ऊँचाई क्या हैं?

हमने देख कि बनाए गए आयत की लंबाई, समांतर चतुर्भुज के आधार की लंबाई के बीच है और आयत की ऊँचाई, समांतर चतुर्भुज की ऊँचाई के बीच है। [आँखों (iii)]।

अब, एवं तिथे चतुर्भुज का क्षेत्रफल = अधार का क्षेत्रफल

— लंबाई  $\times$  ऊँचाई

—  $b \times h$

लेकिन अधार की लंबाई / तथा ऊँचाई  $b$

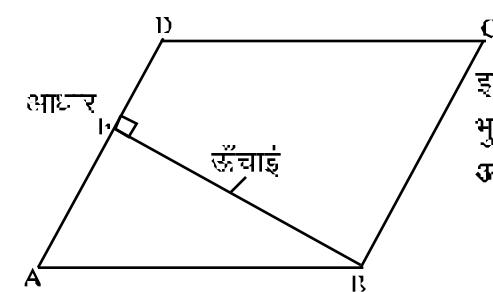
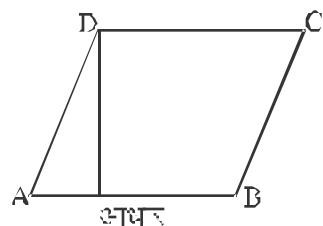
क्रमशः समांतर चतुर्भुज का अधार  $b$  और ऊँचाई  $h$  ही हैं।



आँखों-15.11

इस प्रकार, समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार  $\times$  ऊँचाई =  $b \times h$

समांतर चतुर्भुज की किसी भी भुजा को आधार ल सकते हैं। इस भुजा पर समुख शीर्ष से डाला गया लंब, इसकी ऊँचाई कहलाती है। समांतर चतुर्भुज ABCD में DE, AB पर लंब है। यहॉं AB अधार तथा DE समांतर चतुर्भुज की ऊँचाई है।



इस समांतर चतुर्भुज ABCD में, BF समुख भुजा AD पर डाला गया लंब है। यहॉं AT आधार तथा BF ऊँचाई है।

## 15.5 एक त्रिभुज का क्षेत्रफल

एक माली एवं पूरे हिलने पार्क पर चास लगाने का व्यय जानना चाहता है। १५.५ ग्रेडपि में उसी त्रिभुजाके रूपों का क्षेत्रफल ज्ञात करने की अधिकतम है। आइए एक त्रिभुज के क्षेत्रफल को प्राप्त करना की विधि ज्ञात करें।



आकृति-15.12

कागज के एक टुकड़े पर एक विषमबाहु त्रिभुज बनाइए। इस त्रिभुज को लाट लीजिए। इस त्रिभुज का दूसरे कागज पर चिखिए और रामन माप ले। एक त्रिभुज काटिए। इसका क्षेत्रफल आपके पार रामन माप के दो वेशाल हुए त्रिभुज हैं। क्या दोनों त्रिभुज समान रूप नहीं हैं?

एक त्रिभुज का दूसरे पार रखिए जिससे वे एक दूसरे को पूरे तरह ढँक लें। आप जोगों नं से एक त्रिभुज को घुमा भी सकते हैं।

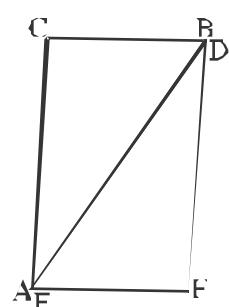
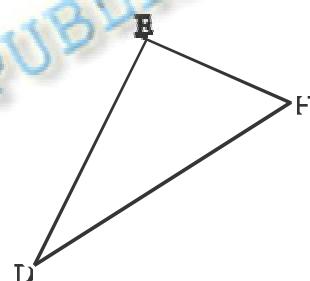
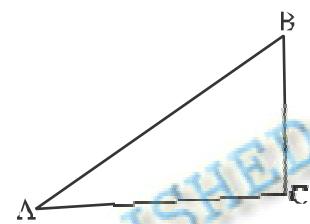
अब दोनों त्रिभुजों का दूसरे प्रकार आपस में रखिए जिससे उनकी गति भूजाएँ लापरा में भिन्न जाएँ (जैसे आकृति 15.13 में दिखाया गया है)।

क्या इस प्रकार से दोनों आकृति १५.५ गति रामन चतुर्भुज हैं?

एक त्रिभुज के क्षेत्रफल की तुलना रामन चतुर्भुज के क्षेत्रफल से कौनिए?

त्रिभुजों के आधार तथा ऊँचाई की तुलना रामन चतुर्भुज के आधार तथा ऊँचाई से कौनिए।

आप देखेंग कि जोगों त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का यानकल स्मान चतुर्भुज के क्षेत्रफल के बराबर है। त्रिभुज का उद्धार तथा ऊँचाई प्रकार: रामन चतुर्भुज के आधार तथा ऊँचाई के बराबर है।



आकृति-15.13

प्रत्येक त्रिभुज का क्षेत्रफल =  $\frac{1}{2}$  ( सन्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल)

$= \frac{1}{2} ( \text{अंतर } \times \text{ऊँचाई})$  (क्षेत्रफल, अंतर चतुर्भुज का क्षेत्र—आ.  $\times$  ऊँचाई)

$= \frac{1}{2} ( b \times h ) ( \text{मा. } \frac{1}{2} b h , \text{ ऊँचाई } )$

### स्वयं करके देखिए:

1. ऊपर दिए गए क्रियाकलापों के अलग—अलग प्रकार के त्रिभुज लेकर लीजिए।
2. अलग—अलग प्रकार के समांतर चतुर्भुज लीजिए। प्रत्येक समांतर चतुर्भुज के त्रिभुजों में एक वैकर्ण के अनुदेश काटिए। क्या ये त्रिभुज सर्वांगसम हैं।

आकृति—15.14 में एक त्रिभुज, आधर AB = 6 सेमी. वर्ष स्थित है।

आधर AB का प्रत्येक त्रिभुज की ऊँचाई ऊँचाई के बारे में आप क्या ज्ञान सकते हैं?

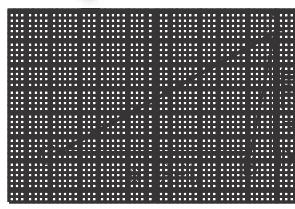
क्या हम कह सकते हैं कि सभी त्रिभुजों के क्षेत्रफल निम्नरूप हैं? हाँ।



आकृति—15.14

क्या निम्न उत्तरांश और नहीं।

उम्मीद करते हैं कि सभी सर्वांगसम त्रिभुजों का क्षेत्रफल बराबर होता है लेकिन यह आवश्यक नहीं है कि वे त्रिभुज जिनका क्षेत्रफल बराबर होता है वे सर्वांगसम हैं।



आधर 6 सेमी. नाले एक अधिक कोण त्रिभुज ABC बनाये तथा इसके ऊँचाई (आकृति—15.15)।

इसकी ऊँचाई AD ऊर्ध्वा A से CB का लंब है जो त्रिभुज के दूसरे स्थित है। क्या आप इस त्रिभुज का क्षेत्रफल जान कर सकते हैं?

अतः किसी भी त्रिभुज का क्षेत्रफल =  $\frac{1}{2} \times \text{आधर} \times \text{ऊँचाई}$  होता है।

### इन्हें याद रखिए

1. आयत का क्षेत्रफल =  $l \times b$
2. त्रिभुज का क्षेत्रफल =  $\frac{1}{2} \times (\text{आधार} \times \text{ऊँचाई})$
3. समानांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल =  $\text{आधार} \times \text{ऊँचाई}$

**उदाहरण-6.** एक समानांतर चतुर्भुज का आधार 8 रोपी. और संगत ऊँचाई 6 रोपी. है तो समानांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल कितना है।

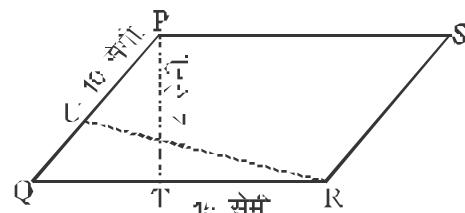
हल : आधार = 8 रोपी.                            ऊँचाई = 6 रोपी.  
 समानांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार  $\times$  ऊँचाई  
 $= 8 \text{ रोपी.} \times 6 \text{ रोपी.}$   
 $= 48 \text{ वर्ग रोपी.}$

**उदाहरण-7.** एक समानांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल 108 वर्ग मीटर है तथा उसका आधार 18 नो. है तो संगत ऊँचाई क्या होगी।

हल : क्षेत्रफल = 108 वर्ग मी.          एवं          आधार = 18 मी.  
 अब समानांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार  $\times$  ऊँचाई  
 $108 \text{ मी.}^2 = 18 \text{ मी.} \times \text{ऊँचाई}$   
 अतः ऊँचाई =  $\frac{108}{18} = 6 \text{ मी.}$  जारी

**उदाहरण-8.** एक समन्तर चतुर्भुज PQRS के दो भुजाओं की लम्बाइयाँ 10 सेमी. और 15 सेमी. हैं। आधार QR की संगत ऊँचाई 4 रोपी. है तो आधार PQ की संगत ऊँचाई ज्ञात करें। (दि. इस अद्यती को देखें)

हल : समानांतर चतुर्भुज PQRS का क्षेत्रफल =  $QR \times PT$   
 $= 15 \text{ सेमी.} \times 4 \text{ सेमी.} = 60 \text{ सेमी.}^2$



पूँजी भेत्रफल = 60 सेमी.<sup>2</sup>, आधार  
समतल चतुर्भुज PQRS का क्षेत्रफल  
= 60 सेमी.<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} & - PQ = 15 \text{ सेमी.}, UR = ? \\ & = PQ \times UR \\ & = 10 \text{ सेमी.} \times UR \end{aligned}$$

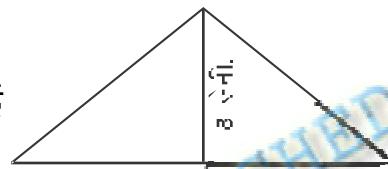
$$\therefore UR = \frac{60 \text{ सेमी.}^2}{10 \text{ सेमी.}} = 6 \text{ सेमी.}$$

अतः जमतल चतुर्भुज PQRS ने PQ की संगत ऊँचाई 6 सेमी. होगी।

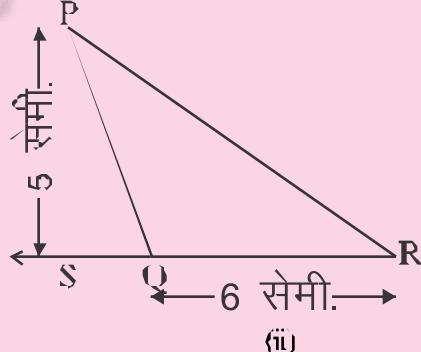
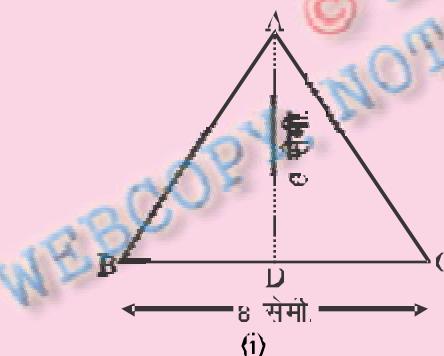
**उदाहरण-9.** एक त्रिभुज का क्षेत्रफल इतना कीनिए, जिसका आधार 20 सेमी. और ऊँचाई 8 सेमी. है।

हल :- त्रिभुज का क्षेत्रफल =  $\frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}$

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2} \times 20 \text{ सेमी.} \times 8 \text{ सेमी.} \\ & = 80 \text{ सेमी.}^2 \text{ या } 80 \text{ सेमी.}^2 \end{aligned}$$



**स्वयं कीजिए :** निम्न आकृति का क्षेत्रफल छात खींचिए।



**उदाहरण-10.** बिल्ली त्रिभुज का क्षेत्रफल 48 वर्ग सेमी. है तथा इसके शीर्ष लाल की ऊँचाई 8 सेमी. है वे आधार की लाल ही बताइए।

हल :- क्षेत्रफल = 48 वर्ग सेमी. = 48 सेमी.<sup>2</sup> एवं ऊँचाई = 8 सेमी.

$$\text{अतः } 48 \text{ सेमी.}^2 = \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times 8$$

$$\text{अतः आधार} = \frac{48 \times 2 \text{ सेमी.}^2}{8 \text{ सेमी.}} = 12 \text{ सेमी.}$$

**उदाहरण-11.** त्रिभुज ABC में BC = 16 सेमी.

AE = 8 सेमी. तथा AC = 24 सेमी. तो BD ज्ञात करें।

**हल :** AE = 8 सेमी. BC = 16 सेमी.

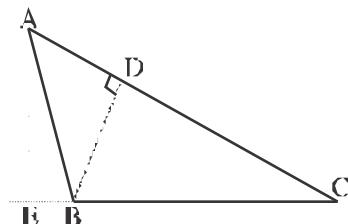
$$\text{त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल } \frac{1}{2} \times BC \times AE$$

$$= \frac{1}{2} \times 16 \times 8 = 64 \text{ वर्गसेमी।}$$

$$\text{या, क्षेत्रफल } \triangle ABC = \frac{1}{2} \times AC \times BD$$

$$64 \text{ सेमी}^2 = \frac{1}{2} \times 24 \text{ सेमी.} \times BD$$

$$\therefore BD = \frac{64 \times 2}{24} = \frac{16}{3} = 5.33 \text{ सेमी।}$$



### प्रश्नावली 15.2

- एक समांतर चतुर्भुज का आधार 16 सेमी. और संतुल ऊँचाई 10 सेमी. है तो समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
- एक समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल 180 वर्ग मीटर है तथा उसका अधार 20 मी. है तो आधार की संगत ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

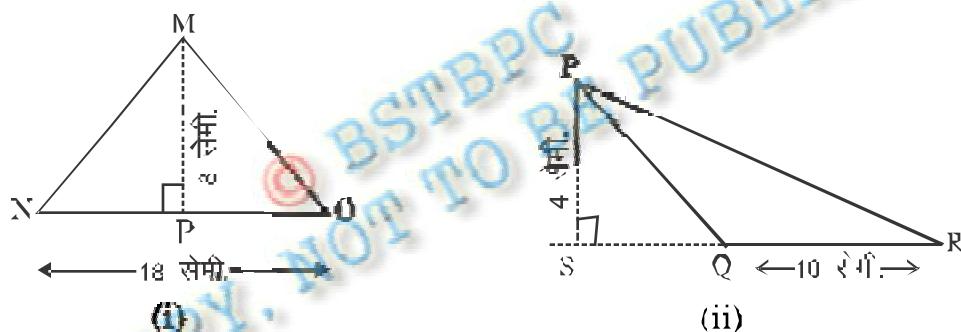
#### 3. दिक्षिण स्थानों को भरिए।

समांतर चतुर्भुज	आधार	ऊँचाई	क्षेत्रफल
(i)	200 मी.	150 मी.	
(ii)	50 सेमी.	70 सेमी.	
(iii)	60 सेमी.		1800 वर्ग सेमी.
(iv)		90 सेमी.	3600 वर्ग सेमी.

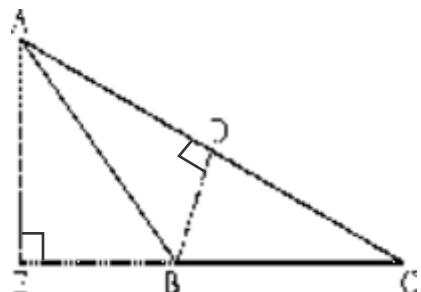
4. सनात्र चतुर्भुज PQRS की दो द्विजाओं की लम्बाइयाँ PQ=20 सेमी. और QR=10 सेमी. है आवाह PQ की लंबाई कॉम्पूट 6 रोपी. है। QR की लंबाई कॉम्पूट ज्ञात करें।
5. एक नियुज के क्षेत्रफल 120, जिसके घार 16 रोपी. और कॉम्पूट 12 रोपी. है।
6. रेखा द्वारा त्रिभुज को तीनों

त्रिभुज	आधार	ऊँचाई	क्षेत्रफल
(i)	50 समी.	30 समी.	
(ii)	40 मी.	60 मी.	
(iii)	90 मी.		1290 वन मीटर
(iv)		20 मी.	300 वन मीटर

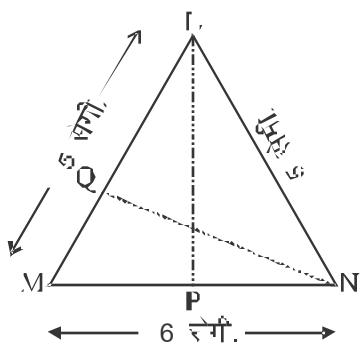
7. निम्न आकृतियों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



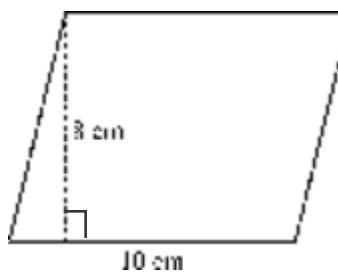
8. किसी त्रिभुज का क्षेत्रफल 45 वन समी. है तथा आधार से शीर्षलम्ब की ऊँचाई 9 सेमी. है तो आधार की लम्बाई बताइए।
9. त्रिभुज ABC में BC=20 cm, AC=14 समी. तथा AC=28 सेमी. तो BD ज्ञात करें।



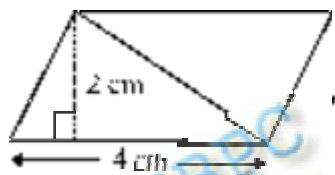
10. त्रिभुज  $LMN$  एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें  $LM=LN=5$  सेमी. और  $MN = \boxed{?}$  सेमी. है (बगल की संख्या को देखें)।  $LP = \boxed{?}$  सेमी. त्रिभुज  $LMN$  का श्रेष्ठतम् इकाई तथा  $N$  से  $LM$  तक के ऊर्ध्वांश  $NQ$  ज्ञात करें।



11. नीचे दिए गए समानांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



(i)

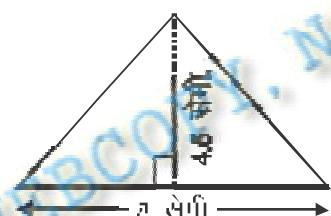


(ii)

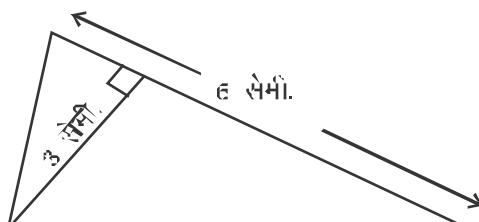


(iii)

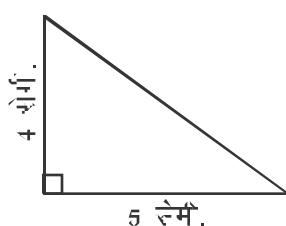
12. नीचे दिए गए त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



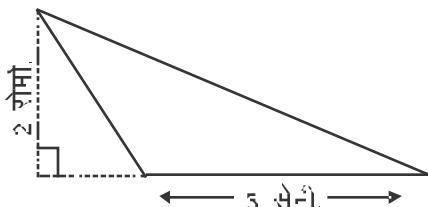
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

### 15.6 वृत्त (Circle)

निशा अपनी घूँड़ी पर चालोले बनी लगाना परहूँ है। उसे पता करना है कि पन्नी की उम्माइ वर्त है? क्या आग बत्त सकत हैं कि घूँड़ी की परिभ्रेति क्या हाँ?

आप एक मैन्जे (खलूल) के स्थयता से बक्र सतह के गहरी नव सकते क्योंकि वे आकृति सीधे नहीं हैं। आप क्या करेंगे?

आकृति 15.16 में दिए गए गाकार की आवश्यक किनारे की

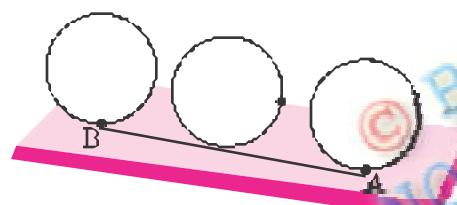
ल० ई शारा करने के लिए कार्ड के किनारे पर एक बिन्दु अंकेता लीजिए और इसे एक टेबुल पर लेफ्ट। बिन्दु की स्थिति पर टेबुल

पर भी अंकित कीजिए। (आकृति-15.17)



उब वृत्त कार कार्ड को एक सरल रखा के दिशा ने आकृति-15.17 टेबुल पर तब तक पुनाड़िए लब तक अंकित बिन्दु

आकृति-15.18 टेबुल के तुलार स्पर्श न जह जाए। इस दूरी को रेखा के अनुपरि में



आकृति-15.18

मापिए। यह वावश्यक किनारे की लंबाई है। यह कार्ड के अंकित किए 15 बिन्दु ऐ कार्ड के किनारे-किनारे वपस उसी बिन्दु को तूरी है।

अब एक धारा का वृत्ताकार वस्तु के चारों ओर किनारे-किनारे रखल भी दूरी जात कर सकते हैं।

**एक वृत्ताकार क्षेत्र के चारों ओर की दूरी उसकी परिधि कहलाती है।**

#### स्तरां करके देखिए

एक बोल का जोका, एक घूँड़ी या लोई अन्य वृत्ताकार वस्तु लीजिए और दराकी परिधि इप कीदिए।

अब, क्या उप इस विधि से एक वावक द्वारा एक वृत्त का पथ पर उप की दूरी जाप कर सकते हैं?

अभी भी, पथ के चारों ओर की दूरी जात करना या अन्य किसी वृत्ताकार वस्तु के धारे से नपाना बहुत हो मुश्किल होगा। तथापि यह नप सही नहीं हाँ।

अतः इसके लिए हमें एक सूत्र की अवश्यकता है जोसा के रूप की आकृति या आकारों के लिए हमारे पास है।

आइए देखें व्यापूरों के व्यास और परिधि के बीच में कोई संबंध है?

निम्न तालिका पर ध्येय कीजिए। अलग-अलग विज्याओं के 6 गुण लिंगियों और अन्य की सहायता से उनकी परिधि ज्ञात कीजिए। परिधि और व्यास के अनुपात के ज्ञात कीजिए।

वृत्त	त्रिज्या	व्यास	परिधि	परिधि और व्यास का अनुपात
1.	3.5 रुपये।	7.0 रुपये।	22.0 रुपये।	$\frac{22}{7} = 3.14$
2.	7.0 रुपये।	14.0 रुपये।	44.0 रुपये।	$\frac{44}{14} = 3.14$
3.	10.5 रुपये।	21.0 रुपये।	66.0 रुपये।	$\frac{66}{21} = 3.14$
4.	21.0 रुपये।	42.0 रुपये।	132.0 रुपये।	$\frac{132}{42} = 3.14$
5.	5.0 रुपये।	10.0 रुपये।	31.4 रुपये।	$\frac{31.4}{10} = 3.15$
6.	15.0 रुपये।	30.0 रुपये।	94.0 रुपये।	

छपर की गाई तालिका से आप क्या निष्कालन हैं? क्या यह अनुपात लगभग रागान है? हाँ क्या आप कह सकते हैं कि एक वृत्त की गणिती हमेशा इसके व्यास की लगभग तीन गुना है? हाँ।

यह अनुगात स्थिर है और इस 'π' (पाई) से प्रदर्शित करता है। इसका मान  $\frac{22}{7}$  या 3.14 है।

$$\text{अतः लगभग है} - \frac{\text{परिधि}}{\text{व्यास}} = \pi$$

$$C = \pi d$$

$$\text{अतः परिधि} = \pi \times \text{व्यास}$$

$$\text{यदि परिधि} = C, \text{ व्यास} = d$$

या  $C = \pi \times 2r$  (चूंकि  $d = 2r$ , जहाँ  $r$  = त्रिज्या है)

या  $C = 2\pi r$  अर्थात् वृत्त की परिधि =  $2\pi r$

### गुण्य सूत्र से निकाले गये सूत्र

$$(i) C = \pi d$$

$$(ii) d = \frac{C}{\pi}$$

$$(iii) d = 2r$$

$$(iv) r = \frac{d}{2}$$

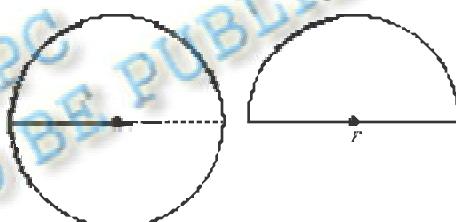
$$(v) C = 2\pi r$$

$$(vi) r = \frac{C}{2\pi}$$

### स्वयं करके देखिए

[ट्रिपोन आकर्ष की छूड़ी, एक वृत्त लेट, नेपल का लकड़ान और 1 रुपया का सेवक लैं और उसका परिधि और व्यास का नप, फिर उनका संतुत अनुपात निकाल।]

आइए वृत्त को हरबर भाग ने नींवकर देढ़ता तो प्रत्येक भाग एक अर्धवृत्त लहलाता है। जैसे—



आकृति-15.20

चित्र से लेखा है।

$$\text{अर्धवृत्त की परिधि} = \frac{2\pi r}{2} + 2r$$

### स्वयं करके देखिए

क्र.सं.	त्रिज्या	व्यास	$\pi = \frac{22}{7}$ परिधि
1.	4 सेमी.		
2.		16 मी.	
3.	21 सेमी.		
4.			308 सेमी.
5.		32 सेमी.	

**उदाहरण-12.** 8 सेने व्यास वाले एक दृत की परिधि ज्ञात कीजिए। ( $\pi = 3.14$ )

**हल :** यहाँ वृत्त का व्यास (d) = 8 समी.

$$\therefore \text{वृत्त की परिधि} = \pi d$$

$$= 3.14 \times 8 = 25.12 \quad \text{अतः उपरीका दृत} = 25.12 \text{ समी.}$$

**उदाहरण-13.** 28 मीटर की नियंत्रित वाले वृत्ताकार गैदान के भास्तु 3520 मीटर लंबी दौड़ पूरी करने के लिए लिपने चक्कर लगाने की जुरूरत क्षेत्र है?

**हल :** वृत्ताकार गैदान की परिधि

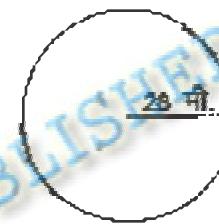
$$= 2\pi r = 2 \times \frac{22}{7} \times 28 \text{ मी.} = 176 \text{ मीटर}$$

$\therefore 176 \text{ मी. दौड़ के लिए } 1 \text{ चक्कर लगाना } \text{ चाहिए है।}$

$$\therefore 1 \text{ मी. दौड़ के लिए } \frac{1}{176} \text{ चक्कर लगाना } \text{ चाहिए है।}$$

$$\therefore 3520 \text{ मी. दौड़ के लिए } \frac{1}{176} \times 3520 = 20 \text{ चक्कर}$$

अतः 3520 मीटर दौड़ पूरी करने के लिए 20 चक्कर लगाने पड़ते हैं।



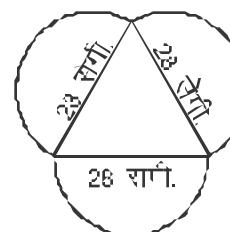
**उदाहरण-14.** दी गई आकृति का परिमाप ज्ञात कीजिए।  $\pi = \frac{22}{7}$

**हल :** इस आकृति की परिमिति इस छेने के लिए हमें प्रत्येक अर्धवृत्त की परिधि को ज्ञात करने की आवश्यकता है। क्या उपरोक्त त्रिभुज के परिमाप लोटे ज्ञात करना की आवश्यकता है? नहीं। इस आकृति की बाहरी परिसीन अध्यवृत्त से मिलकर बनी है। प्रत्येक अर्धवृत्त का व्यास 28 सेमी है।

एम जानते हैं कि, वृत्त की परिधि =  $\pi d$

$$\text{अर्धवृत्त की परिधि} = \frac{\pi d}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times 28 = 44 \text{ समी.}$$



अतः दी गई आकृति की परिमिति =  $3 \times 44 = 132$  समी.

**उदाहरण-15.** 6 सेमी. ब्रेज़ याले अधृत की परिसरों ज्ञात करें।

**हल :** अधृत की परिमिति

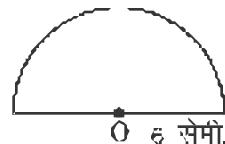
$$= \frac{2 \times 22 \times 6}{2 \times 7} = 2 \times 6$$

$$= 18.857 + 12 = 30.857 \text{ सेमी.}$$

$$= \frac{2\pi r}{2} + 2r$$

$$= \frac{132}{7} - 12$$

$$= 30.86 \text{ सेमी.}$$



**उदाहरण-16.** एक गाड़ी 35 मीटर के रास्ते दूर चलना चाहती है। वह इससे 5 रुपये के लिए चलना चाहता है, इसके लिए वह कितना लन्दी रस्सी छरेंगा। यदि रस्सी 5 रुपये मीटर की दर से बिकती हो तो छरोद गये कुल रस्सी की कीमत ज्ञात कीजिए।

**हल :** यहाँ, बगीचे का व्यास = 35 मी.

चूंकि परिधि

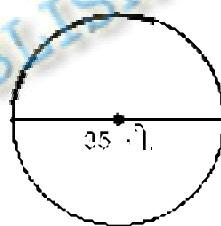
$$= \frac{22}{7} \times 35 = 110 \text{ मी.}$$

$$\therefore 1 \text{ घेरा } \text{में } 5 \text{ रुपये } \text{ की } \text{लम्बाई } = 110 \text{ मीटर}$$

$$2 \text{ घेरा } \text{में } 5 \text{ रुपये } \text{ की } \text{लम्बाई } = 110 \times 2 = 220 \text{ मीटर}$$

∴ मीटर रस्सी की कीमत 5 रुपये है।

$$220 \text{ मीटर } 5 \text{ रुपये } \text{ कीमत } = 220 \times 5 = 1100 \text{ रुपये}$$



### प्रश्नवाली 15.3

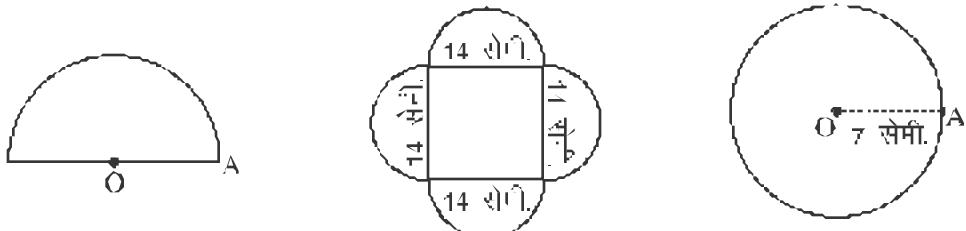
1. निम्नलिखित त्रिज्याओं वाले कृतों की परिधि ज्ञात कीजिए ( $\pi$  का मान  $\frac{22}{7}$  लीजिए)

- (i) 56 मिमी. (ii) 7 सेमी. (iii) 21 सेमी. (iv) 28 मिमी.

2. निम्नलिखित परिधि वाले कृतों की त्रिज्या ज्ञात करें।

- (i) 154 मी. (ii) 308 सेमी. (iii) 352 सेमी. (iv) 220 मी.

**3. निम्नलिखित आयुर्तियों की परिभिति ज्ञात कीजिए।**



**4. निम्नलिखित व्यास वाले दूर्तों की परिभि ज्ञात कीजिए।**

- 14 सेमी.
  - 28 सेमी.
  - 56 मिनी.
  - 12 सेमी.
5. एक दृत्ताकार एल्युमिनियम शीट जो वरोंडे 220 नेटर है तो शीट की त्रिज्या तथा व्यास ज्ञात कीजिए।  $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$
6. एक दृत्ताकार धधी की मिनट की चूँकी लम्बाई 8 सेमी है। मिनट की चूँकी की नोक वर्टें में लितानी दूरी तय करती है। ( $\pi = 3.14$ )
7. 14 नेटर त्रिज्या वाले एक पठिङ्ग को 204 मीटर दूरी तय करने के लिए कितनी बार घूमान पड़ेग ?  $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$
8. 21 सेमी. की त्रिज्या में एक तार की लम्बाई जो दृत्ताकार रूप में गोळा जाता है उस तार की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
9. 28 मीटर व्यास वाले एक दृत्ताकार नोंचे के साथ ओर गाली बाल लगाना चाहता है। उरीजे जाने वाले आवश्यक रस्स की लम्बाई इत कीजिए, यदि वह 3 गुणे चक्कर की बाढ़ लगाता चाहता है। 5 रुपये प्रति मीटर जी दर से रस्से जर व्य ज्ञात कीजिए।  $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$
10. 14 सेमी. और 21 सेमी. त्रिज्या वाले दो दूर्तों की परिभिति का अनुपर वर्णाली।  $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

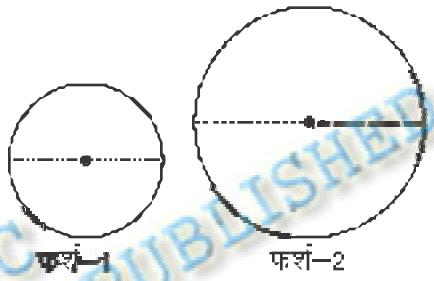
11. एक तार पगालार कूटति ने है, जिसकी भुजा 22 सेमी. है, उसे मोड़कर एक वृत्त बनाया जाता है तो उस दूरी के लिया तथा परिधि क्या है।
12. खूबी के पास एक वृत्त लार पार है, जिसकी परिधि 7 सेमी. है। यहा उसके 11 सेमी. गुजा ताले वर्ग बनाए जा सकते हैं? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।
13. 21 मीटर के लिया वले वृत्त लार मैदान के बाहर के 1850 मीटर के लाली दौड़ चुरी करने के लिए कितने चक्रकर लगाने की जरूरत हड़ेगी।

### 15.7 वृत्त का क्षेत्रफल (Area of Circle)

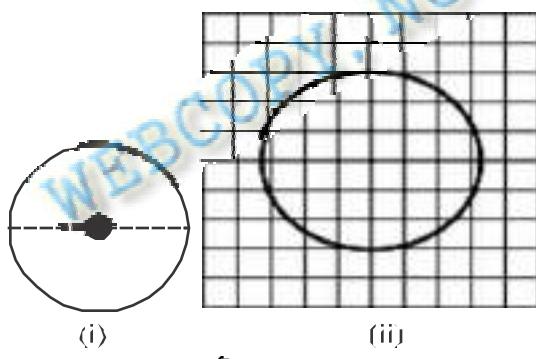
दो कमरे की छवि की आकृति गोलाकर है।

एक कमरे के कर्ण का लम्बा 17 मीटर है और दूसरे कर्ण के फर्श का लम्बा 21 मीटर है। फर्श में दरी विघ्नानी है जैसा कि चित्र 15.21 में दिखाया गया है।

तो हमाइए कि किस फर्श में बड़ी दरी की जरूरत हाई। स्पष्ट है कि दूसरे फर्श में अधिक बड़ी दरी लगानी ल्योकि छवि-2 अधिक जगह छोक रखा है ताकि दोनों के क्षेत्रफल अधिक है। तो आइए अब वृत्त के क्षेत्रफल ८५ चूम्बी करें।

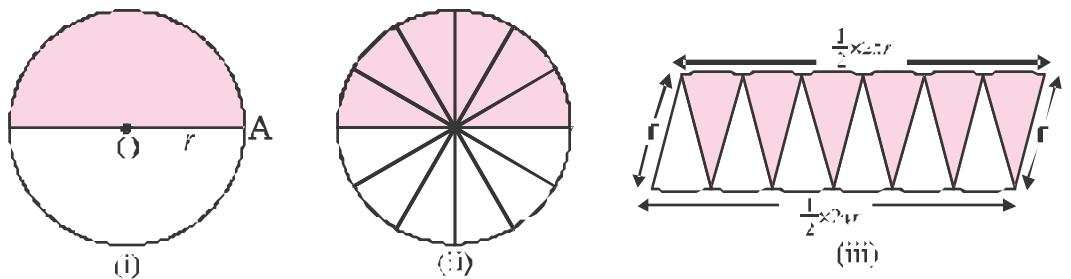


आकृति-15.21 पर पारदर्शी ग्राफ पेपर लेन्स चित्रानुसार रखें। अब इस आकृति के अन्दर के वर्गों को निकल इसका क्षेत्रफल ज्ञात करें। इस विधि से वर्ग का क्षेत्रफल का एक अनुमान हो जाएगा लेकिन वास्तविक क्षेत्रफल होता है ज्योकि वृत्त के केनारे सीधे नहीं हैं। अतः इही क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए एक और दिभी पर विचार करते हैं—



आकृति-15.22

आधे भाग को रेंग देते हैं, मुन्ह इसे 12 छोड़ी में चित्रानुसार काठ लेते हैं। अब इत्येक ग्रिज्यखण्ड को उच्चारिता किए के लिए दोनों के अनुसार व्यावरण्यक लें लेते हैं। जो खूब रुप से एक समानतर चतुर्भुज का दर्शाता है।



आकृति-15.23

यदि हम वृत्त को ओर अधिक त्रिज्यखण्डों ने विभाजित करें और उन्हें सम्पूर्ण वित्तानुजार वैरिएशन करें तो  $\pi \cdot r^2$  का आयत प्राप्त हो। और आयत की वैकल्पिक वृत्त की तिल्ला होगी तथा लंबई वृत्त की वैरिएशन के आधी ( $\text{लंबी } \pi r$ ) होगी क्योंकि वृत्त की वैरिएशन आयत के लंबाने वाले वर्षाचार थागों में हैं जो बाहर से देखा जाता है।

$$\begin{aligned} \text{आयत का क्षेत्रफल} &= \text{सम्पूर्ण आयत का क्षेत्रफल} \\ &- \text{लम्बाने वाले थागों का क्षेत्रफल} \\ &= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r = \pi r^2 \end{aligned}$$

इस प्रकार  $\text{वृत्त का क्षेत्रफल} = \pi r^2$  प्राप्त हुआ

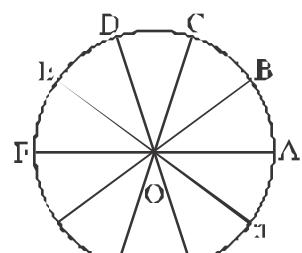
आइए वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए एक और वैरिएशन नौ तरह-

मान लिया कि "O" केंद्र का एक दूर है, जिसके n वर्षाचार त्रिज्यखण्डों AOB, BOC, COD, DOF, FOE, EOD, DOP, POA, AOB, आदि बॉटे। यदि n का मान अधिक हो तो प्रत्येक त्रिज्यखण्ड उक्त रामके त्रिभुज होगी, इस प्रकार हमें n र मकोण त्रिभुज प्राप्त होंगे तथा वृत्त की परिधि का n वर्षाचार लंबाने में विपाक हो जाएगी।

$$n \text{ वर्षाचार का } n \text{ लम्बाने } = 2\pi r$$

$$n \text{ वर्षाचार का } n \text{ लम्बाने } = \frac{2\pi r}{n} = AB$$

(क्योंकि वर्षाचार का प्रत्येक चाप समान लम्बाने है)



आकृति-15.24

वृत्त का क्षेत्रफल  $\pi \times$  सम्लोण त्रिभुज  $AOB$   
का क्षेत्रफल

$$\begin{aligned} & n \times \frac{1}{2} \times OA \times AB \\ & = n \times \frac{1}{2} \times r \times \frac{2\pi r}{n} \quad \left( \because OA = r, AB = \frac{2\pi r}{n} \right) \\ & = \pi r^2 \end{aligned}$$

अतः दृत का क्षेत्रफल  $= \pi r^2$

पुनः दृत का क्षेत्रफल  $\pi r^2$

$$r = \sqrt{\frac{\text{क्षेत्रफल}}{\pi}}$$

### स्वंसद करके देखिए

1. निमित्त त्रिभुज का तूत बनाएं और ग्राफ पनार की सहायता से घण्टा के संख्या के विचार द्वेष्ट्रफल इत फैजिए तथा दृत के रूप से द्वेष्ट्रफल वर्त कर दोनों उत्तरों की पुलन कीजिए।
2. कागज की एक वृत्ताकार चक्रती लें बरावर त्रिज्यखंडों ने मोड़कर काटें फिर उस त्रिज्यखंड को एक आयत के रूप में अवस्थित कर दृत का क्षेत्रफल छात करें।

उदाहरण-17. 7 सेमी. त्रिज्या वाले वृत्त का क्षेत्रफल छात कीजिए।  $\left( \pi = \frac{22}{7} \right)$

हल : त्रिज्या  $r = 7$  सेमी. वृत्त का क्षेत्रफल  $= \pi r^2$

$$\begin{aligned} & = \frac{22}{7} \times (7)^2 - \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \\ & = 154 \text{ वर्ग सेमी. } 40 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

उदाहरण-18. 20 सेमी. त्रिज्या वाले वृत्त का क्षेत्रफल छात कीजिए। (जबकि  $\pi = 3.14$ )

हल : त्रिज्या  $r = 20$  सेमी.

$$\begin{aligned} \text{पुनः का क्षेत्रफल} \quad \pi r^2 & = 3.14 \times (20)^2 \\ & = 3.14 \times 400 \\ & = 1256.00 \text{ वर्ग सेमी.} \end{aligned}$$

**उदाहरण-19.** एक घूतकर नैदन का व्यास 14 मीटर है। इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

**हल :** व्यास  $d = 14$  मीटर

$$r = \frac{d}{2} = \frac{14}{2} = 7 \text{ मीटर}$$

$$\text{वृत्त का क्षेत्रफल} = \pi r^2$$

$$= \frac{22}{7} \times (7)^2 = \frac{22}{7} \times 7 \times 7 = 154 \text{ वर्गमीटर का मी.}$$

**उदाहरण-20.** एक पृथ्वी की परिधि 62.8 सेमी. हो तो इस पृथ्वी की त्रिज्या तथा क्षेत्रफल ज्ञात करें। ( $\pi = 3.14$ )

**हल :** वृत्त की परिधि =  $2\pi r$

$$62.8 \text{ सेमी.} = 2 \times 3.14 \times r$$

$$\text{या, } \frac{62.8}{2 \times 3.14} \text{ सेमी.} = r \text{ या, } \frac{62.8}{2 \times 3.14} \text{ सेमी.} = r$$

$$\text{या, } \frac{20}{2} \text{ सेमी.} = r \quad \text{या, } r = 10 \text{ सेमी.}$$

$$\text{वृत्त का क्षेत्रफल} = \pi r^2$$

$$3.14 \times (10)^2 = 3.14 \times 100 = 314 \text{ वर्ग सेमी.} = 314 \text{ वर्ग सेमी.}$$

**उदाहरण-21.** बगल की आँखों में दिए गए दो स्लेचरीय घूत की त्रिज्या 12 सेमी और 8 सेमी हैं तो उनके बीच का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

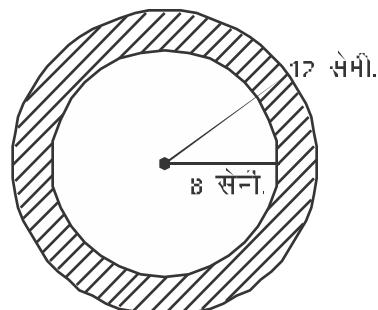
**हल :** बड़े वृत्त की त्रिज्या = 12 सेमी

$$\text{बड़े वृत्त का क्षेत्रफल} = \pi r^2$$

$$= 3.14 \times (12)^2 = 3.14 \times 12 \times 12$$

$$= 452.16 \text{ वर्ग सेमी.} = 452.16 \text{ सेमी.}^2$$

$$\text{छोटे वृत्त की त्रिज्या} = 8 \text{ सेमी.}$$



छोटे दूर का क्षेत्रफल  $\pi r^2$

$$= 3.14 \times 8^2 = 3.14 \times 8 \times 8$$

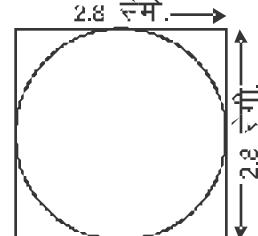
$$= 200.96 \text{ वर्ग सेमी}.$$

अतः छायाकेत माग का क्षेत्रफल =  $452.16 - 200.96$

$$= 251.20 \text{ वर्ग सेमी}.$$

## प्रश्नावली—15.4

- 1. दूर का क्षेत्रफल ज्ञात करें, जिसकी त्रिज्या निम्नलिखित है— ( $\pi$  का मान  $\frac{22}{7}$  लेंजिए)**
  - (i) 14 सेमी.
  - (ii) 20 सेमी.
  - (iii) 2.8 सेमी.
  - (iv) 35 सेमी.
- 2. दूर का क्षेत्रफल ज्ञात करें, जिसकी धरिध निम्नलिखित है—**
  - (i)  $5/2$  सेमी.
  - (ii) 253 सेमी.
  - (iii) 110 सेमी.
  - (iv) 132 वर्ग सेमी.
- 3. वहि एक गुरुताकार मैदान की परिधि 157 रोमी हो तो इस मैदान के क्षेत्रफल ज्ञात करें।**  
मैदान का क्षेत्रफल भी ज्ञात करें। ( $\pi$  का मान  $\frac{22}{7}$  लेंजिए)
- 4. एक गाड़ी 28 नी. भुजा चाले वर्गाकार मैदान के केन्द्र (मध्य) में एक 14 मी. ऊरी रेखाओं के बीच लोटा हालाए। 14 मिनेटे क्षेत्रफल ताक ले भारा वरेगी और वह यी हालाए के किनाने क्षेत्रफल ले घल नहीं चरेगी।**
- 5. एक गोल छल्ले की बाहरी गोलई की त्रिज्या 14 मी. है तथा छल्ले की भीतरी त्रिज्या 7 नी. है तो छल्ले का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।**
- 6. दी न्हीं अकृति—15.25 में दूर का क्षेत्रफल इत फीजिए।**

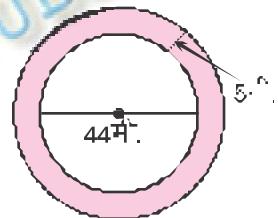


आकृति—15.25

7. ४४ मीटर लम्बे एक तार को मोड़कर दृत्ताकार रूप में जमीन पर रखा गया तो किसने क्षेत्र को ८८ घेर लेगा।
8. एक वृत्त की परिधि ३० ग्रील लगे और १४ नींदर वौछे एक आयत के परिधि के लगाने हैं तो वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात करें।
9. ८ रेमी. त्रिभ्य ताले एक वृत्त काट कर उसके दुलके में से ४ रोड़े, त्रिभ्या वाली एक वृत्त को काटकर निकल दिया जात है तो काटने के शेष भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करें। ( $\pi = 3.14$ )
10. २० रु. ब्रांड वर्क मिटर की दर से २.४ मीटर व्यास वाले एक दृत्ताकार जमीन के इन दो लेंग कलाने का क्षेत्र ज्ञात करें। ( $\pi = \frac{22}{7}$ )
11. किसी आयत की चौड़ाई ४४ मीटर है और इसकी लम्बाई चौड़ाई की  $2\frac{1}{2}$  गुणी है। उस दृत्त ल व्यास इत लीचियु लिसकी परिधि आयत के परिधि के बरबर है। ( $\pi = \frac{22}{7}$ )
12. एक वृत्ताकार फूलों के बाहरी के चारों ओर ६ ग्रील वौछा पथ है तथा फूलों की व्यास का व्यास ४४ मीटर है। इस नथ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ( $\pi = 3.14$ )
13. एक दृत्ताकार बनीये का क्षेत्रफल २४६४ मी.<sup>2</sup> है। बनीये के केन्द्र में एक घूमन वाला कवारा लगाया जाता है, जो इस ६ नींदे के बारे ओर पूरी-पूरी १०० रोड़े कहा जाता है तो अपने बारे ओर कवारा किसने त्रिभ्य नं पनी का छिङ्काव करता है। ( $\pi = \frac{22}{7}$ )
14. दो वृत्तों के त्रिभ्यां का अनुपत ३४ है, तो उनके क्षेत्रफलों का अनुपत क्या होगा?

### 15.8 इकाइयों का रूपान्तरण

एक सेटीमीटर लम्बाई और १ सेमी. चौड़ाई का एक यांत्र इस यांत्र के ऊपर १ मिमी. वाल वारदशी प्रक ऐपर को ८ले, १० हन देखतो हैं कि १ रोपी. वाले वर्ग के अन्दर १०० वर्ग आते हैं। अतः १ रेमी.<sup>2</sup> = १०० रोपी.<sup>2</sup>



आफूति-15.26

इस लन्बाई की इकाइयों के जानते हैं—

10 मिलीमीटर = 1 समी. और

10 सेंटीमीटर = 1 डेसीमीटर

इसी प्रकार 10 मीटर = 1 हेक्टेमीटर

10 हेक्टेमीटर = 1 केटोमीटर

10 केटोमीटर = 1 लिलोमीटर

इसी तरह 10 मीटर = 1 सेमी. या  $(10 \text{ मीटर})^2 = (1 \text{ सेमी.})^2$  या  $100 \text{ मीटर}^2 = 1 \text{ सेमी.}^2$

इसी प्रकार 100 सेमी. = 1 मी. या  $(100 \text{ सेमी.})^2 = (1 \text{ मी.})^2$  या  $10000 \text{ सेमी.}^2 = 1 \text{ मी.}^2$

क्या आप इसी प्रकार किमी.<sup>2</sup> को मी.<sup>2</sup> में बदल सकते हैं?

इन्हें शेषफल की इकाइयों में निम्न प्रकार से जाना जाता है।

100 वर्ग मिलीमीटर = 1 वर्ग सेंटीमीटर

100 वर्ग रोटीमीटर = 1 वर्ग हेक्टेमीटर

100 वर्ग डेसीमीटर = 1 वर्ग मीटर = 1000 वर्ग सेंटीमीटर

100 वर्ग मीटर = 1 वर्ग डकामीटर

100 वर्ग डेसीमीटर = 1 वर्ग हेक्टेमीटर

100 वर्ग हेक्टेमीटर = 1 वर्ग किलोमीटर

मिली<sup>2</sup> प्रणाली में गूँड़खड़ के शेषफल को हेक्टेयर में भेजा जाता है।

अतः हेक्टेयर  $100 \times 100 \text{ मी.}^2 = 10000 \text{ मी.}^2$

जब इस शेषफल की एक इकाई को छेटी इकाई में बदलते हैं तो परिणानस्थरूप इकाइयों में अंकों की संख्या अधिक होगी।

**उदाहरणस्थरूप**  $1000 \text{ मी.}^2 = 1000 \times 1 \text{ मी.}^2 = 1000 \times 100 \text{ सेमी.}^2 = 100000 \text{ सेमी.}^2$

परन्तु जब हम शेषफल की एक इकाई को बड़ी इकाई में बदलते हैं तो बड़ी इकाई में अंकों की संख्या कम होगी।

$$\text{जैसे— } 1000 \text{ मी.}^2 = \frac{1000}{10000} \text{ मी.}^2 = \frac{1}{10} \text{ मी.}^2 = 0.1 \text{ मी.}^2$$

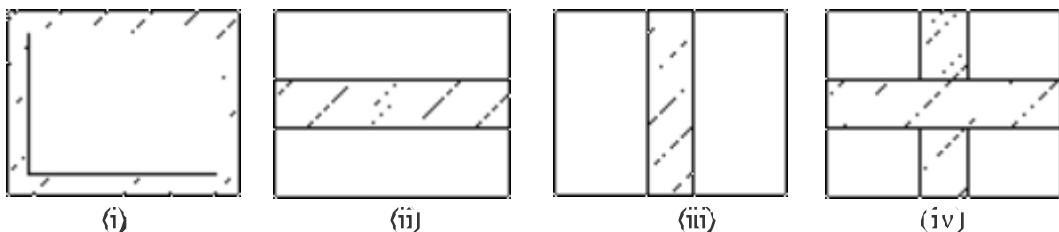
### रवयं करके देखिए

निम्नलिखित के सुगम्यरित करें।

- (i) 200 समी.<sup>2</sup> को मिनी.<sup>2</sup> में।      (ii) 4 हेक्टेयर का मी.<sup>2</sup> में।      (iii) 400 मी.<sup>2</sup> का सेमी.<sup>2</sup> में।

### 15.9 उपयोग

हग लोगों न देख है कि बहुभागकी या बर्गीयों में उनके चारों ओर या हैच में चोपड़ की तरह कुछ स्थान पथ के रूप में निर्मित चित्रों जैसे छोड़ दिया जाता है अथवा एक फेन किए हुए चित्र या पैटिंग के चरों ओर कुछ स्थान छोड़ दिया जाता है। जैसे—



आकृति-15.27

हमें ऐसे कटे या बाँधे के क्षेत्रफलों को ज्ञात करने की आवश्यकता जरूरी है, जब हम उनके बनाने का व्यय जानना चाहते हैं।

**उदाहरण-22.** एक आयताकार बगीच 50 मीटर लम्बा और 40 मीटर चौड़ा है। बगीचे के अन्दर से चारों तरफ 2 मीटर चौड़ा एक चास्ता बनाया गया है। इससे उस क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

**हल :** नम्न कि ABCD एक आयताकार बगीचा है। छायांकित भाग 2 मीटर चौड़ा रखा को कटाया गया है।

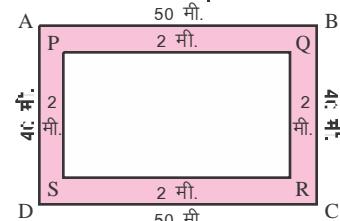
$$\text{आयत } ABCD \text{ का क्षेत्रफल} = 50 \text{ मी.} \times 40 \text{ मी.} \\ - 2 \times 2 \text{ मी.}^2$$

पुनः PQRS ला क्षेत्रफल के लिए लम्ब है

$$PQ = (50 - 2 \times 2) \text{ मी.} = 46 \text{ मी.}, PS = (40 - 2 \times 2) \text{ मी.} = 36 \text{ मी.}$$

$$\text{PQRS का क्षेत्रफल } PQ \times PS = 46 \times 36 \text{ मी.}^2 = 1656 \text{ मी.}^2$$

$$\text{इससे उस क्षेत्रफल} = \text{उच्चत } ABCD \text{ का क्षेत्रफल} - \text{आयत } PQRS \text{ का क्षेत्रफल} \\ = 2000 \text{ मी.}^2 - 1656 \text{ मी.}^2 = 344 \text{ मी.}^2$$



**उदाहरण-23.** 50 मीटर भुजा वाले एक वर्गाकार पाल के बाहर ऊंचे ओर से एक 4 मीटर चौड़ा नथ बन दिया है। इस पथ का क्षेत्रफल शाह करें तथा 20 रुपये प्रति वर्गमीटर की दर से इसे रीमोड़ कराने का व्यय ज्ञात करें।

**हल :** नन्हे कि ABCD एक वर्ग मीटर भूजा का चौकर पकड़ है। छायांकित भूग 4 मीटर वैध पथ को दर्शाता है।

$$BF = AB + 2 \times \text{पथ की लैंड}$$

$$= 50 \text{ मी.} + 2 \times 4 \text{ मी.} = 58 \text{ मी.}$$

$$\text{वर्ग EFGHI का केन्द्र का भूजा} \times \text{भूजा}$$

$$= 58 \text{ मी.} \times 58 \text{ मी.}$$

$$= 3364 \text{ मी.}^2$$

$$\text{वर्ग का केन्द्र का ABCD का केन्द्र का भूजा} \times \text{भूजा}$$

$$= 50 \text{ मी.} \times 50 \text{ मी.}$$

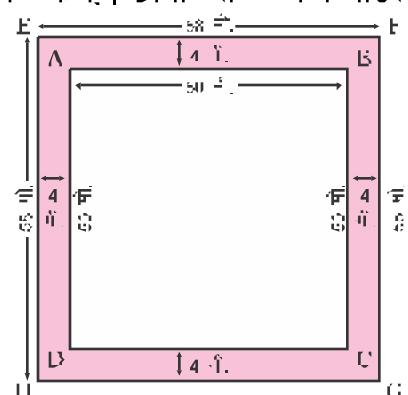
$$2500 \text{ मी.}^2$$

$$\text{पथ का केन्द्र का EFGHI का क्षेत्रफल} = \text{ABCD का केन्द्र का क्षेत्रफल}$$

$$= 3364 \text{ मी.}^2 - 2500 \text{ मी.}^2 = 864 \text{ मी.}^2$$

$$\therefore 1 \text{ मी.}^2 \text{ सीधे करने का व्यय} = 20 \text{ रु.}$$

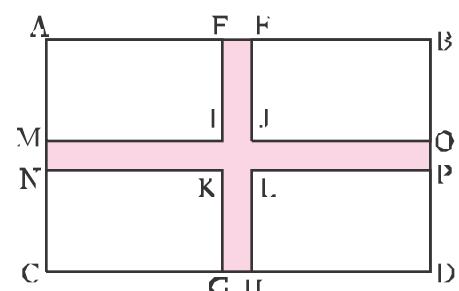
$$\therefore 864 \text{ मी.}^2 \text{ सीधे करने का व्यय} = 20 \times 864 = 17280 \text{ रु.}$$



**उदाहरण-24.** 100 मीटर लम्बाई और 50 मीटर वैल्ज वाले एक आयत का के पथ दो चौकर 5 मीटर चौड़ाई व तो पथ एक दूसरे पर लम्बवत् ऐसे बने हुए हैं जो भुजाओं के समांतर हैं। पथों व लेट्रकल जाति की दर 200 रुपये प्रति वर्ग मीटर की दर से पथों को बनाने का लक्ष ज्ञात करें।

**हल :** छायांकित भाग पथ को दर्शाता है। गलत वर्ग JLK के केन्द्र को दो बार लिया जाता है, जिस पटाना हाना।

आयत EFGH में EF = 5 नी., FG = 50 नी.



$\therefore$  EFGHI का क्षेत्रफल =  $BP \times EG$

$$= 5 \times 50 = 250 \text{ मी.}^2$$

इन आयत MNOP के  $MN = 5$  मी.,  $MO = 100$  मी.

आयत MNOP का क्षेत्रफल =  $5 \times 100 = 500$  मी.<sup>2</sup>

जग IJKL का क्षेत्रफल = 5 मी.  $\times$  5 मी. = 25 मी.<sup>2</sup>

रास्ते का कुल क्षेत्रफल = (EFGHI का क्षेत्रफल + MNOP का क्षेत्रफल) – IJKL का क्षेत्रफल

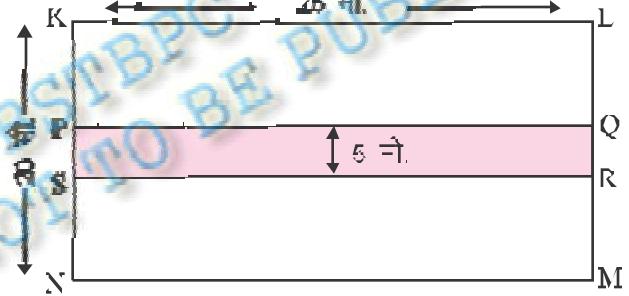
$$(250 \text{ मी.}^2 + 500 \text{ मी.}^2) - 25 \text{ मी.}^2$$

$$750 \text{ मी.}^2 - 25 \text{ मी.}^2 = 725 \text{ मी.}^2$$

पथों को बनने का लव =  $200 \times 725 = 145000$  रु.

**उदाहरण-25.** 25 मीटर लम्फाई

और 20 मीटर लॉन्ड वे के पार्क है, उसमें लॉन्ड के अनुदिश 5 मी. की गति से रास्ता बना रखा है। यह रास्ता का क्षेत्रफल इतना ही नहीं रखा जाएगा कि यह गार्ड का क्षेत्रफल छापा करे।



हल : असाइन्ट भाग दरवाजा को दरखाता है।

रास्ते का क्षेत्रफल = PQRS का क्षेत्रफल

$$= PQ \times PS$$

$$= 5 \text{ मी.} \times 25 \text{ मी.} = 125 \text{ मी.}^2$$

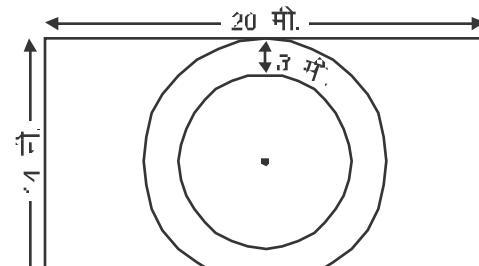
रास्ता सहित गार्ड का क्षेत्रफल = KLMN का क्षेत्रफल = 25 मी.  $\times$  20 मी. = 500 मी. <sup>2</sup>

रास्ता रहित गार्ड का क्षेत्रफल = 500 मी. <sup>2</sup> – रास्ता का क्षेत्रफल

$$= 500 \text{ मी.}^2 - 125 \text{ मी.}^2 = 375 \text{ मी.}^2$$

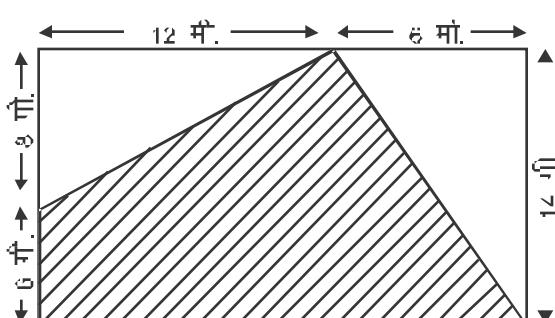
## प्रश्नावली—15.5

1. एक आयताकार पार्क के लम्बाई 40 मीटर और चौड़ाई 20 मीटर है। याकूं के ८ फैट चारों ओर ५ मीटर चौड़ा एक पथ बाट गया है। पथ का क्षेत्रफल ज्ञात करें।
2. एक आयत काल भाग का गैदान है, जिसकी लम्बाई 140 मीटर तथा चौड़ाई 80 मीटर है। इस मैदान के अन्दर से चारों ओर ५ मीटर चौड़ा रास्ता बनाया जाया है। रास्ते का क्षेत्रफल इतना करें।
3. एक पार्क 80 नैटर लम्बा और 70 मीटर चौड़ा है। इसके बाहर चारों ओर एक ५ मीटर चौड़ा रास्ता बनाया है। रास्ते का क्षेत्रफल ज्ञात करें तथा याकूं का क्षेत्रफल हेक्टेयर में बताइए।
4. 10 सेमी. लंबे और 6 सेमी. चौड़े एक गत्ते पर एक चित्र के नेटिंग इस प्रकार बनाई गई है कि इसकी प्रत्येक भुजाओं के अनुपरिश 1.6 सेमी. बैठा 6 डिग्री छोड़ा गया है। हाथिए का कुल क्षेत्रफल ज्ञात करें।
5. 60 मीटर भुजा वाले एक वर्गाकार फूलबारी की परिसीमा से लम्बा भीतर की ओर 3 मीटर बढ़े गए पथ बना हुआ है। यह का क्षेत्रफल ज्ञात करिए राशि 20.50 रुपये प्रति वर्गमीटर की दर से फूलबारी में बने रास्ते में हृष्ट सोलिंग कराने का व्यय इतना किए।
6. ३०० मीटर लम्बे और 400 मीटर चौड़े एक आयताकार पार्क के १४ रो होकर 10 मीटर चौड़ा तो रास्ता बने हुए हैं (एक लम्बाई के एवं एक चौड़ाई के अनुदिर)। रास्ते का कुल क्षेत्रफल इतना करें। रास्ते को छोड़कर याकूं के बाहर भाग का क्षेत्रफल हेक्टेयर में ज्ञात करें।
7. **आकृति—15.28** एक आयताकार पार्क के पक्ष्य की चौड़ाई को व्यास बनाकर हुए फूलों की एक वृत्ताकार व्यासी को दर्शाता है। फूलों की व्यासी ली गरिसीन से ३ मीटर चौड़ा पथ अन्दर से वृत्ताकार बनाया गया है, तो ज्ञात करिए—
  - (i) पूरे याकूं का क्षेत्रफल
  - (ii) रास्ता सहित फूलों की व्यासी का क्षेत्रफल
  - (iii) रास्ता सहित फूलों की व्यासी का देवरफल
  - (iv) रास्ते का क्षेत्रफल
  - (v) फूलों की व्यासे रास्ता सहित का छाड़ा

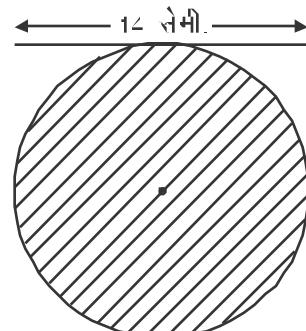


आकृति—15.28

8. दी गई आकृति में छायांकित भाग का क्षेत्रफल हारा करें।



(i)



(ii)

आकृति—15.29

9. चाय का एक आयताकार बागान 150 मीटर लम्बा और 75 मीटर चौड़ा है और उसके ऊपरों ओर से याहर से 8 मीटर चौड़ा एक पथ है। यदि प्रति 100 वर्गमीटर पर बगाने का खर्च 10 रुपये 75 पैसा हो तो पूरा पथ बनाने में क्या खर्च पड़ेगा?

### हमने सीखा

- परिमाप (परिमेत्र) एक चतुर्भुज के ऊपरों और की दूरी के माप है जहाँके क्षेत्रफल एक विवर आकृति हाथा छोड़ दिये जाय को दर्शाता है।
- आयत और वर्ग के परिमाप तथा क्षेत्रफल निकालने के लिए—
  - आयत की परिमिति =  $2(\text{लम्बाई} + \text{चूड़ाई})$
  - वर्ग की परिमिति =  $4 \times \text{भुजा}$
  - आयत का क्षेत्रफल =  $\text{लम्बाई} \times \text{चूड़ाई}$
  - वर्ग का क्षेत्रफल =  $\text{भुजा} \times \text{भुजा}$
- एक रामानू चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधर  $\times$  ऊँचाई
- एक त्रिभुज का क्षेत्रफल =  $\frac{1}{2}$  (समातर चतुर्भुज का क्षेत्रफल)
 
$$= \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}$$

5. एक घूर्त कार धोने के बारे ओर की दूरी इसकी परिधि लगातार है।
6. वृत्त की परिधि =  $\pi d = 2\pi r$  जहाँ  $d$  = व्यास,  $r$  = त्रिज्या और  $\pi = \frac{22}{7}$  या 3.14 (लग्नन) है।
7. एक घूर्त का धोफल = लंबे जारी  $r$  = घूर्त की त्रिज्या है।
8. निम्न प्रवार लन्बाई जी इकाइयों का रूपांतरण लक्ष्य है, उसी प्रकार द्वारकलों की इकाइयों को भी रूपांतरित करें जो चाकड़ा है।  
 $1 \text{ रोमी}^2 = 100 \text{ मिमी}^2, 1 \text{ फी}^2 = 10000 \text{ रोमी}^2.$   
 - सेप्टेम्बर =  $10000 \text{ फी}^2$
9. धोफल एवं परिनप की उपयोगिता की बताओ की।

## अध्याय-16 त्रिविमीय आकृतियों का द्विविमीय निरूपण

### 16.1 भूमिका

जपने दैनेक जीवन में प्रत्येक हम जपने वर्षों तक फिर्मेन आकारों की वस्तुओं को देखते हैं, जैसे — बैद, मालिर के लिल, टुर्पल, मिल ५, इल्लु अल्लु ३। इन सभी वस्तुओं में एक समान लकड़ी है कि प्रत्येक वस्तु की कुछ लम्बाई, चौड़ाई, ऊँचाई या गहराई अवश्य होती है।

इसी करणे से इनी स्थान खेलते हैं और इनकी चीन निर्माण हैं। इसीलिए ये त्रिविमीय आकार (Three Dimensional Shapes) या 3-D कहलाते हैं।

पर्याय लाए द्विविमीय आकृतियों के बरे में जानते हैं?

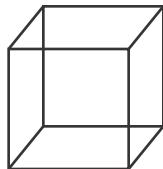
इसी प्रकार एक लगड़ गर खींची जा सकने वाली आकृतियाँ (ऐगली कवल लम्बाई और चौड़ाई छहती हैं) को द्विविमीय (Two Dimensional) आकृतियों लहरते हैं। जैस— घर, आदा, पून, डिमुज इत्यादि।

### स्वयं करके देखिए

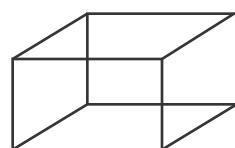
द्विविमीय आकृतियों का उसके नामों के साथ निलान कीजिए।

- |       |  |     |          |
|-------|--|-----|----------|
| (i)   |  | (a) | घर       |
| (ii)  |  | (b) | आदा      |
| (iii) |  | (c) | वृत      |
| (iv)  |  | (d) | चट्टुंडा |
| (v)   |  | (e) | डिमुज    |

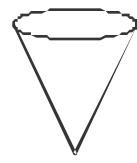
नीचे फूँछ शब्दों के बिंद्रों की उड़ाते नर और कर—



घन



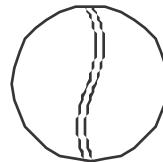
घनाया



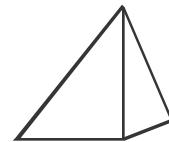
शंकु



बेलन



गोला

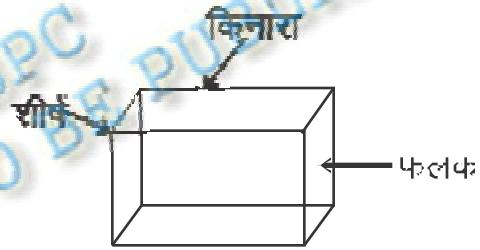


पिरामिड

आकृति-16.1

## 16.2 फलक, किनारे और शीर्ष

यहाँ एक घनाया दिखाया रखा है। घनाया के ढाँचे का बनाने वाले 12 रखाखड़ घनाया के किनारे (Edges) कहलाते हैं। बनाने के 8 कोने उसके शीर्ष (Vertices) हैं। 6 समाई अवक्षाकास पृष्ठ जो घनाया की बाल वा रखवा है, उसके फलक (Faces) कहलाते हैं।



आकृति-16.2

## रवयं कस्के देखिए

### सिंकसिंचित सारणी को पूरा कीजिए—

ठोस आकृति (Solid Shape)	घन (Cube)	घनाया (Cuboid)	बेलन (Cylinder)	शंकु (Cone)	गोला (Sphere)	पिरामिड (Prism)
फलक (Faces)	6	6	3	2	1	5
किनार (Edges)	12	-	2	1	-	-
रेख (Vertices)	-	8	-	1	-	-

यहाँ पर हम देख सकते हैं कि त्रिविमीय आकृतियों के रूप में त्रिविमीय आकारों के फलकों की पहचन के जा रही है।

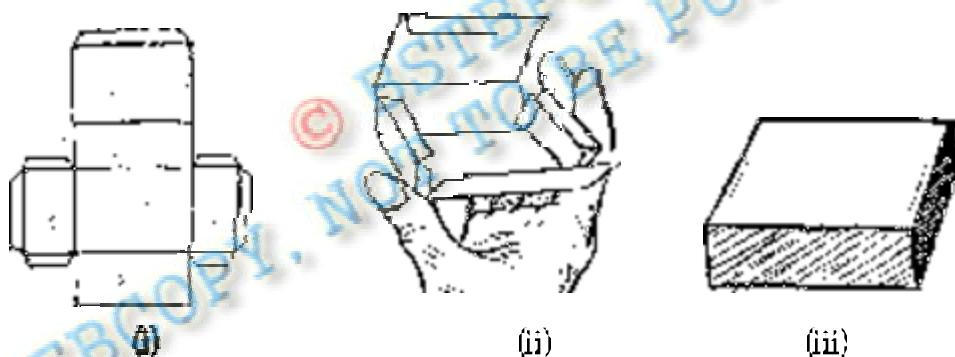
उदाहरण के लिए एक घन के फलक की आकृति बगांकार है जबकि बेलन के रापाच फलक बूरकार है।

अब हम यह देखने का प्रयत्न करेंगे कि किस प्रकार लूँग 3-D आकारों का 2-D आकृतियाँ के चित्रीय रूप में (उर्थात् कागज पर) निरूपित किया जा सकता है।

ऐसा लूँग के लिए हम त्रिविमीय टस्टुड़ त्रिकटतन रूप से परिचित हुए चाहेंग। आइए, इन वस्तुओं को उनसे बनाने का प्रयास करें, जो इनके जाल (Net) लहलाते हैं।

### 16.3 3-D आकार बनाने के लिए जाल (नेट)

एक बॉन्ड लौंजिए। इसके कुछ लेनारों के अनुप्रेश के दर्शक रापाच (Net) बना लौंजिए। अब अपके पास इस हॉल्स का जाल है। जाल 2-D में एक प्रकार का ऐसा है जो होता है जिस पहले पर निरपार्स्वरूप एक 3-D आकार प्राप्त हो जाता है।

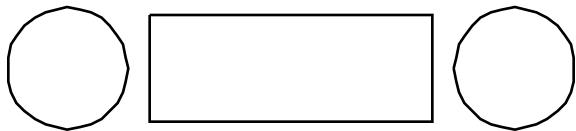


आकृति—16.3

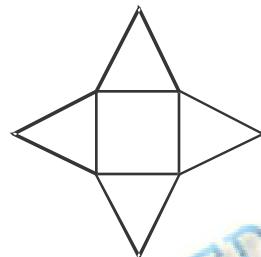
घन का जाल— इस प्रकार हम एक घन का जाल बनाना चाहें तो हमें निन आकृति प्राप्त हांगे।

पीछे का फलक	पीछे का फलक	
बाईं ओर का फलक	पेंदे का फलक	दाईं तरफ का फलक
	रागने वाले फलक	
		स्फुर का फलक

बेलन का जाल— निम्न आकृति बेलन का जाल बनाती है—



शंकु का जाल— निम्न आकृति शंकु का जाल बनाती है।



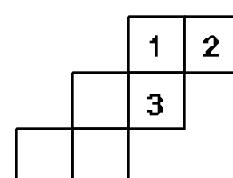
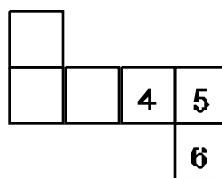
प्रिसिल का जाल— निम्न आकृति प्रिसिल का जाल बनती है। इस प्रिसिल का आधार एक वर्ग है तथा चर दुजओं पर त्रिभुज बने हुए हैं। क्या उपर दिए हुए जाल से इस प्रिसिल को बना सकते हैं?



इस ट्रिपिकल नेट ने देखा कि निन-नेन आले दें के लिए निन-नेन जाल होते हैं। हाँ ने वह यी रोखा कि इन जालों को चर्पणकृत ग्राहार रोगोऽल्ल और चिपकल वस्तुओं का सभी निवारण आकृति ग्राहत कर सकते हैं। (आकृति-16.4)

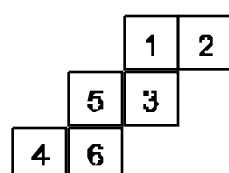
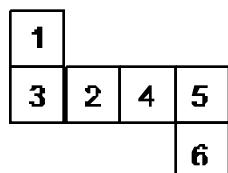
#### आकृति-16.4

**उदाहरण-1.** गास (Dice) ऐसे घन होते हैं, जिनके प्रत्येक कलक पर विन्दु (Dots) अंकित होते हैं। एक पासे के सम्मुख फलकों पर नींकित विन्दुओं की संख्याओं का सम्पूर्ण योग 21 है। 7 होता है। वहाँ पासे (घनो) को बनाने के लिए दो जाल दिए जा रहे हैं। प्रत्येक वर्ग में लिखी संख्या उस बक्से के विन्दुओं का दर्शाती है।

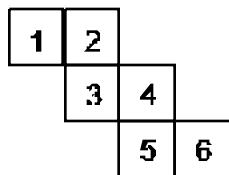


यह याद रखते हुए कि पास के सम्मुख फलकों की संख्याओं का योग सदैव 7 होता है, तो यह नों पर उपर्युक्त रूपके ऐसे होते हैं।

हल :



उदाहरण-2.

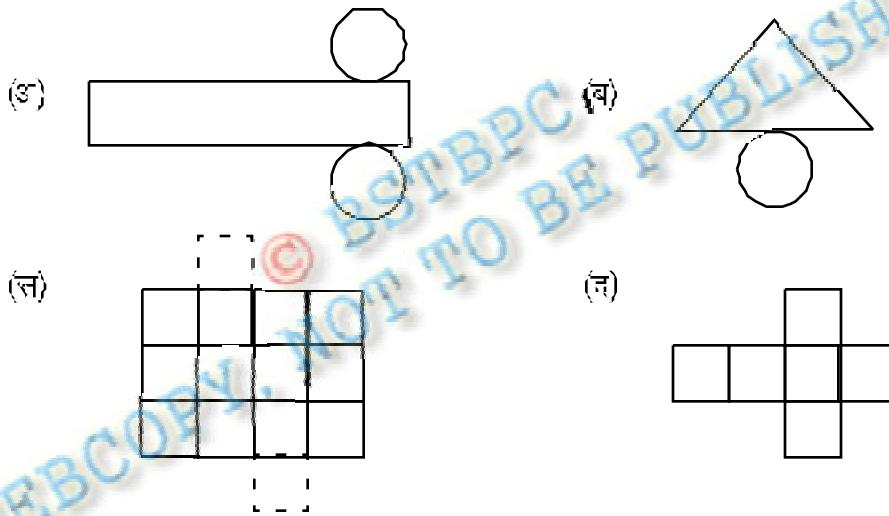


यदा कह पसे के लिए एक जाल हे सकता है?  
अपने उत्तर के समष्टि को जिए।

**हल :** नहीं, व्यक्ति पास के एक जोड़ के द्विरीत छल्ले 1 एवं 4 होंगे जिनका योग 7 नहीं आता है। इसी प्रकार द्विपरीत छल्ले के दूसरे जोड़ 3 एवं 6 होंगे जिनका योग 9 नहीं है। अतः यह पास के लिए जाल नहीं हो सकता।

### प्रश्नावली – 16.1

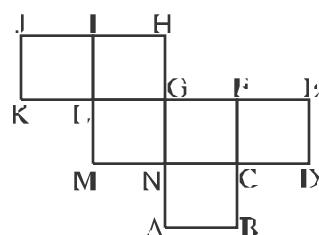
1. चन गोस आकृतियों को पठवाने जिनके जाल नीचे दिए गए हैं–



2. पासे के लिए एक जाल खींचिए और प्रत्येक फलक पर संख्या लिखिए।

3. यदि एक घन बनाने के लिए नीचे दिए गए जाल को मोड़ा जाए तो—

- (अ) कौन-सा किनारा JK से मिलेगा?  
(ब) कौन-सा किनारा LM से मिलेगा?

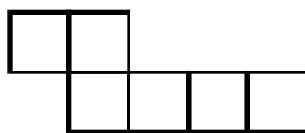


4. दिए गए चित्र एक पासे का जाल दिखाते हैं। फलकों पर चिह्नित  $x$ ,  $y$  और  $z$  का संख्यात्मक मान क्या होगा?

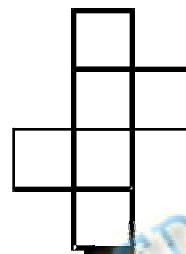
$x$				
$y$	1	3		$z$
5				

5. उन जालों को पहचानिए जिनका उपयोग एक घन बनाने के लिए किया जा सकता है?

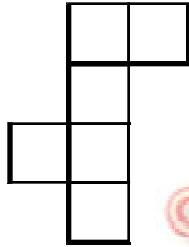
(अ)



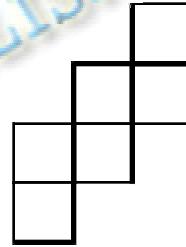
(ब)



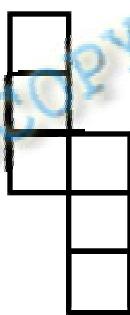
(स)



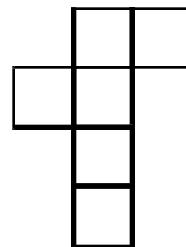
(द)



(ए)



(फ़)

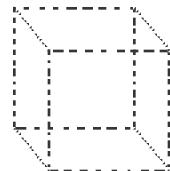


#### 16.4 एक सपाट पृष्ठ पर ठोसों को खींचना

जब आप सपाट पृष्ठ (आँख कंज) पर एक ठोस उल्लंघन का छींचते हैं, तो प्रतिविन्धों को दूषित किया (टेका) कर दिया जाता है, ताकि ये श्रेष्ठीय दिखाई दें। यह एक दृष्टिभ्रम है। यहाँ दो तकनीकें हैं जो ऊरा आकर्षण का विनाश प्रदर्शित किया जा रहा है।

### 16.4.1 रिंगकृ या अनियमित चित्र

यहाँ एक धन के चेत्र दिया है (आकृति 16.5)। जब इसे रामने से देखा जाए तो इररे यह समझ पता चलता है कि एक धन लेरा चित्र है। आप इसके फलकों लो देख नहीं पाते हैं। खींचे गए इस चित्र में लाबाई वर्षावर नहीं है, लाबकि धन में यह वर्षावर हासी चाहिए। फिर भी उपर यह पहचान कर लेते हैं कि यह एक धन है। किसी ठोस ज्ञाता इस चित्र एक रिंगकृ (अनियमित) चित्र (Oblique Sketch) कहलता है।



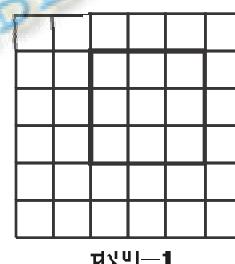
आकृति-16.5

आगे ऐसे चित्र किस प्रलाप खींच सकते हैं।

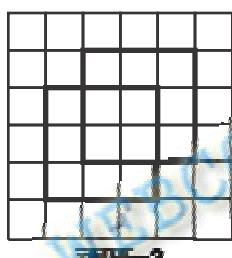
आइए ऐसे चेत्र खींचने की तकनीक को सीखने का प्रयत्न करें।

इसके लिए उपर्युक्त एक चर्चाकृति (रखालित या बिंदुकित) कानून की अवस्थाज्ञा है। प्रारम्भ ने इस प्रकार के लगभग पर विन खींचने का अभ्यास करने के लिए, आप विना इस प्रकार के कागज के सहायता के साथ कागज पर ये चित्र रखता रे खींच रखें।

आइए एक  $3 \times 3 \times 3$  आकार के धन (एक दृष्टि धन जिसका प्रत्येक छिनारा 3 इकाइ है) का एक रिंगकृ विन खींचने का प्रयत्न करें।



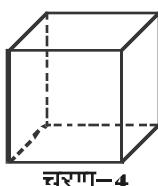
चरण-1



चरण-2

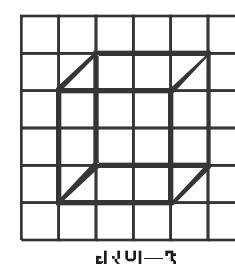
चासने के फलक का रामुख फलक खींचें। फलकों के 115 लाबाई होने चाहिए। चरण-2 यह चित्र चरण-1 के चित्र को ही लुँग डिसल लेर बनाया गया है।

संगत कानून को मिलाइए



चरण-4

छिए हुए छिनारों ले लिए चेत्र का बिंदुकित रखाओं का पयन करते हुए तुग़ा खींचिए (यह एक प्रस्तर या परिष्टी है) अब अन्जिट चित्र तैयार है।



चरण-3

(आकृति-16.6)

उपर्युक्त शिर्षक चित्र में, क्या आप निम्नलिखित बाएँ को देख सकते हैं?

1. साना के फलक और उसके समुख कलक के माप सनन हैं।
2. इन के किनारे जो नरकर होते हैं, चित्र में भी नरकर-हरकर प्रतीक होते हैं अब ऐसे इनको हरकर नहीं लिया गया है।

रिप्पणी— आप ऐसा चित्र भी खोंच राकर हैं, जिनमें गाप (या नपन) देह हुर उर के रूप के अनुसार (अनुकूल) ही हो। ऐसा करन के लिए हमें एक ऐसे कागज के आवश्यकता लगती है, जिस समदूरील शीट (Isometric Sheet) अष्टात् सनन दूरेयों वली रेट काढ़ते हैं।

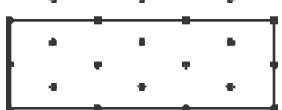
#### 16.4.2 समदूरीक चित्र

क्या उपर एक समदूरील बिंदुकित रेट देखी है?  
एक बिंदुकित रेट नीचे दी जा रही है।

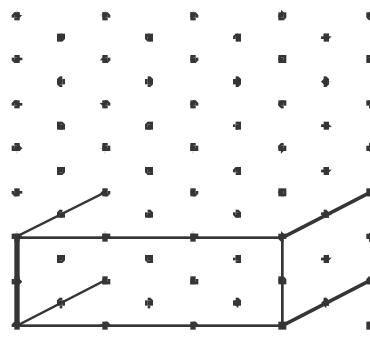
यह र मधुरील बिंदुकित शीट में पूर कागज (ज्यात् १०८×५५ ईंच) बिंदुकित रेखाओं से बने छोटे-छोटे समवाहु त्रिभुजों ने बांग लात है। ये चित्र खोंचने के लिए जिनके नप दिर हुर गोस ली नप के अनुसार हो, उन इन बिंदुकित समदूरीक शीटों का प्रयोग गर सकते हैं।

आकृति—16.7

आइए, इम एक समदूरीक शीट पर इस घाना बगान ला प्रयत्न करत हैं जिसकी लम्बाई 1 रोनी, वैश्व 2 सेमी, एवं ऊँचाई 2 रोमी है।



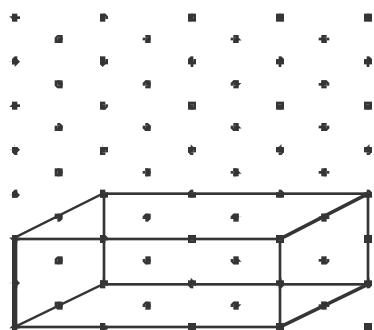
वरण-1



वरण-2

आनने वाले फलक दर्शाने के लिए  
4x2 गार्डों का एक आयत खोड़ें।

आयत के वारों कोनों से लम्ब ई 2  
इकाई वाले 4 रोम लंबे खोड़ें।



वरण-3



वरण-4

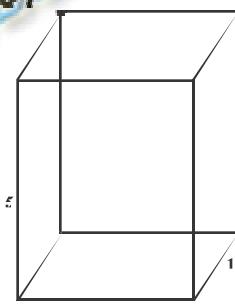
चूमेले कोनों को उपयुक्त रेष्ट खंडों सह धनाभ का एक रामदूरीक छित्र है। यह द्विमीय है।

#### आकृति-16.8

ध्यान दीजिए कि रामदूरीक चित्र में गापन तीक (युग्मार्थ में) गोचर की दो छाँट गापों के होते हैं जबकि तिर्यक चित्र की स्थिति में ऐसा नहीं आया है।

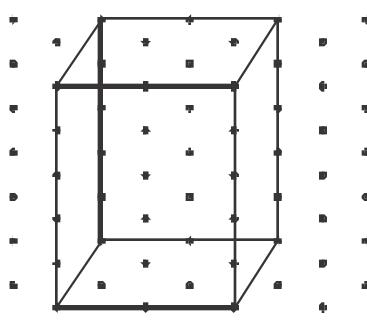
#### उदाहरण-3.

यहाँ दिए धनाभ का एक तिर्यक चित्र दिया गया है। आकृति 16.9 (i)। इस चित्र से मिलान करने माला एक समदूरीक चित्र खींचिए।



आकृति-16.9 (i)

हल : इसका हल आकृति 16.9 (ii) में चित्र खींचलर दर्शाया गया है। ध्यान दीजिए कि छेस प्रकर गापों के अनुरार चित्र ही वा नया है।

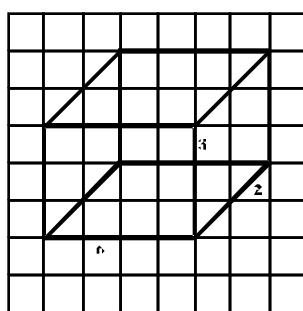


आकृति-16.9 (ii)

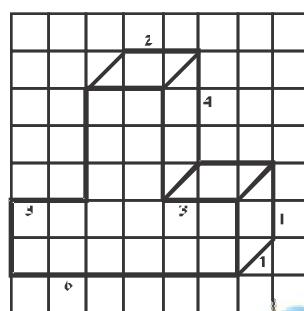
## प्रश्नावली – 16.2

1. एक समदूरीक बिंदुकित कागज का प्रयोग करते हुए निम्नलिखित आकृतियों में से प्रत्येक का एक समदूरीक चित्र खोचिए–

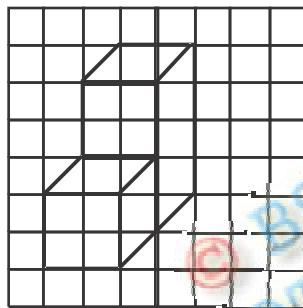
(i)



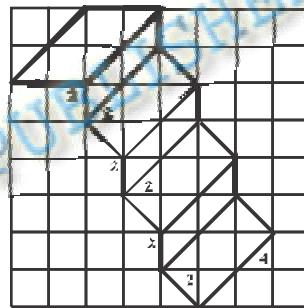
(ii)



(iii)

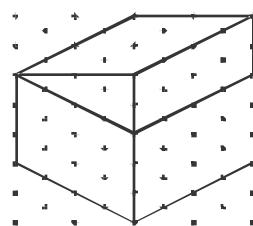
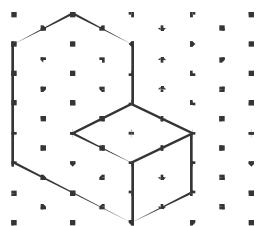


(iv)



आकृति-16.10 [(i)-(iv)]

2. किसी घनाभ की विमाएँ 6 सेमी., 4 सेमी. और 3 सेमी. हैं। इस घनाभ के तीन निम्न-निम्न समदूरीक चित्र खोचिए।  
 3. 3 सेमी. किनारों वाले तीन घनों को परस्पर सटाकर रखते हुए एक घनाभ बनाया गया है। इस घनाभ का एक रियर्क् अथवा एक समदूरीक चित्र खोचिए।  
 4. निम्नलिखित समदूरीक आकारों में से प्रत्येक के लिए एक रियर्क् चित्र खोचिए–



#### **5. निम्नलिखित में से प्रत्येक के लिए—**

- (1) एक रेलवे टिक्का जौही। (2) एक सानदूधीक टिक्का खींचिए।  
(अ) 6 रोमी. / रोमी. तैर र 3 रोमी. विनायें वाला एक इनाम  
(ब) 5 सेमी. किनारे बाल एक धन।

#### 16.5 किसी लोस के विभिन्न भागों को देखना।

आइए अब इस पर चर्च करें कि एक 3-D वर्तु को किस प्रकार विशेषज्ञ विलिंग से देखा जा सकता है।

**16.5.1** किसी वस्तु को देखने ली एक चिट्ठी है उस कटाना  
या उसके पत्तों टकड़े करना।

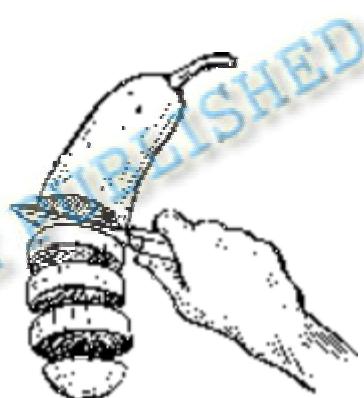
याहूँ एक पंजदू (Pumpkin) दिया हुआ है।

आप चाकू से इसल कुछ टकड़ का लिए।

ऊर्ध्वाधर रूप से कटने पर शंकुके दक्षता प्राप्त

लो जकत् हैं जैसा कि फिल्म में दिखाया गया है।

याँ किए गए टुकड़े का प्रत्येक फलक एक बूत है। ऐसे इस जलक के केंद्र की एक अनुप्रस्थ-काट (Cross Section) लहर है। अनुप्रस्थ-इस स्थिति में, अनुप्रस्थ-एस लगायग एक बूत है। यदि आपका कारना या कठाव उच्चाधिक नहीं होगा तो आपको एक मिन अनुप्रस्थ-काट प्राप्त हो सकता है।

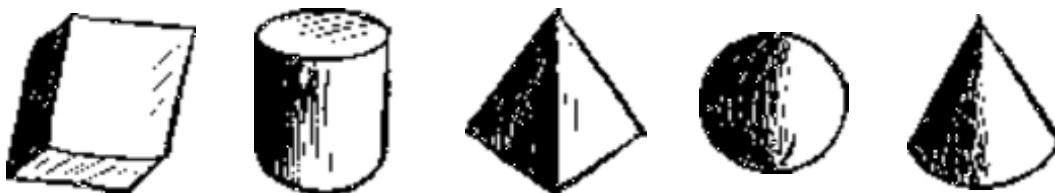


આંકડી-16.11

ੴ ਸਤਿਗੁਰ

निवासियों के गैरुडी के मॉडल (Models) बनाइए तथा इनको उत्कृष्ट या दृष्टिभूमि का दिखाएं।

आपने हूँ र प्रापा अनुमति—काट के रफ (Rough) येत्र दीविए। जहाँ भी संचय हो, इनके नाम भी लिखिए।



आकृति-16.12

### स्वयं करके देखिए

छपको कौन-सा अनुमति—काट प्राप्त होता है जब आप निम्नलिखित लोरों को (i) कल्पनारूप रूप रख और (ii) क्षेत्रिज रूप से कागजत हैं?

- |                  |                      |
|------------------|----------------------|
| (अ) एक पारा      | (इ) एक गिलार         |
| (स) एक चैत       | (ब) एक ललाच का दिमा  |
| (ब) एक नृत बॉक्स | (ग) एक बेलनाकार पाइप |

### 16.5.2 छाया खेल विधि

छाया की सूहायत से विविध वस्तुओं को द्विविमीय आकारों के रूप में देखा जा सकता है।

क्या आपने कभी एक छाया खेल देखा है? यह एक प्रब्लम का मनारंजन है जिसमें सूरपष्ट लोरा आकृतियों को एक प्रकाशमय घोरा के सामने रखकर उनके गतिमान प्रतीक्षेभूमि के प्रभाव पर्यन्त किए जाते हैं। इसमें गणित के अन्वारणाओं का युग्म अनुसन्धान रूप से प्रयोग होता है।

एक शंकु के ठेक सागरे एक टॉर्च का प्रकाश झालिए। यह पर्दे पर किस प्रकार का छाया बनाता है? (आकृति-16.13)



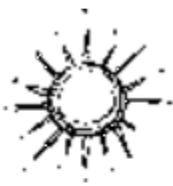
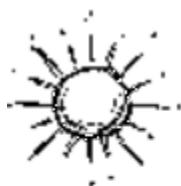
आकृति-16.13

ठोस तेज विनड़ बाला है। इसकी छाया की कितरी विमाएँ हैं?

द्वितीय आप इस खल में शंकु के स्थान पर एक नींद के टॉर्च के सामने रखें, तो आपको किस प्रकार की छाया देखा होगी?

## रवयं कीजिए

चाठ के एक दृत्ताकार प्याले को खुले में सूर्य की रोशनी ने कैसे दिन पिछिन समयों में शुभः, शाम एवं दोपहर इंग शाम रुढ़ जाते हैं। सूर्य की स्थितियों और प्रकाश के समयों के अनुसार चाठ का उद्धयन कीजिए।



सुबह



दोपहर

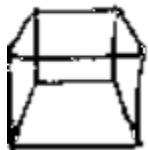


शाम

आकृति—16.14

## प्रश्नावली — 16.4

- निम्नलिखित ठेसों के ठीक कपर एक जलता हुआ बल्ब रखा गया है। प्रत्येक स्थिति में प्राप्त ऊर्ध्व के आकार का नाम बताओ। इस ऊर्ध्व का एक रफ चित्र बनाने का प्रयास कीजिए। (पहले प्रयोग करें और फिर उत्तर दें)



**2. आप अपने परिवेश से एक ठोस का नाम बताएं जो निम्नलिखित छाया का आकार बनाता है।**

- (अ) वर्ग (ब) त्रिभुज (ग) त्रितीय (द) आयत

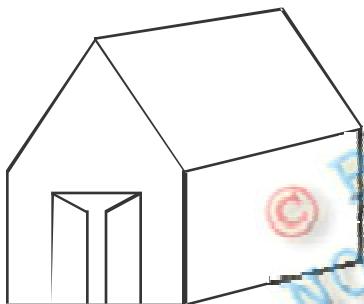
**3. जाँच कीजिए कि क्या ये कथन सत्य हैं?**

- (अ) एक घन एक अभी के आकार की छाया दे सकता है।

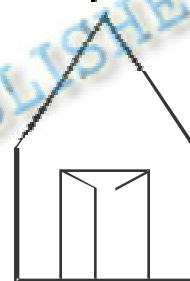
- (ब) एक घन एक वर्ग के आकार की छाया दे सकता है।

### 16.5.3 विशेष कोणों से देखने की विधि

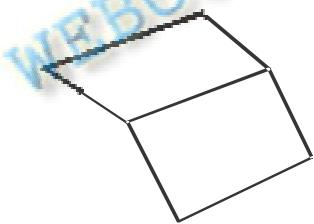
एक तीरारी विधि छह है जिसे कोई भी व्यक्ति किसी वस्तु को उराके सामने से या उराकी ओर (वापरी) से या उराके ऊंचर से देख सकता है। प्रत्येक वास उरों से एक निम्न दृश्य मिलता है। (आकृति—16.14)



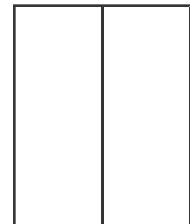
वापरी



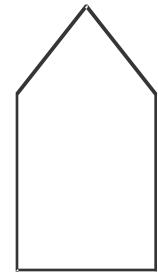
सामने से दृश्य



पाश्चात्य दृश्य



कूपर का दृश्य



पीछे का दृश्य

आकृति—16.15

आप इन्हें धनों को जोड़ने से उनी आकृतियों के लिए भी कर सकते हैं।

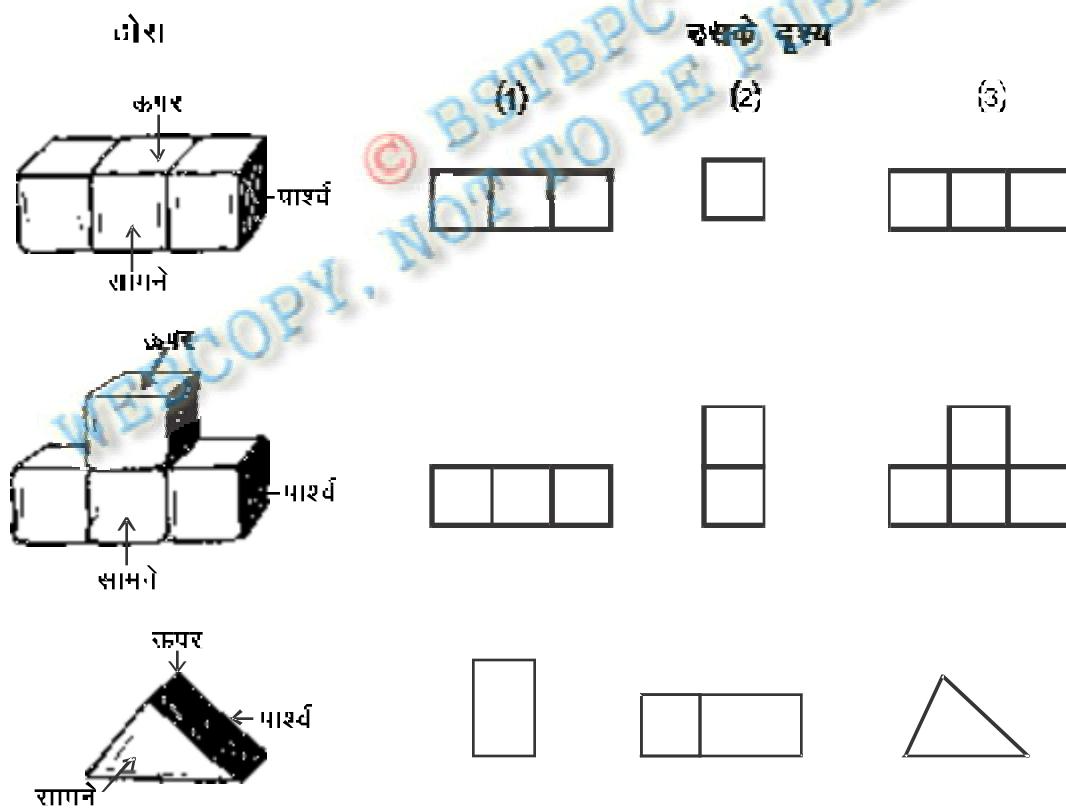


आकृति—16.16

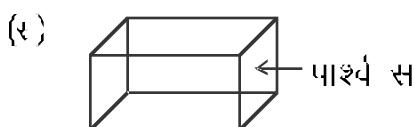
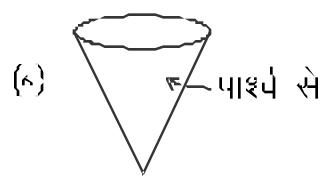
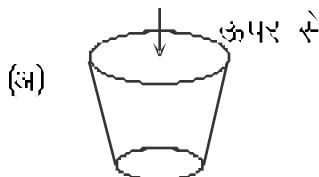
धनों के एक राशि संकलन दोस्रा बनाए और फिर उनके विभिन्न दिशाओं से देखकर उनके ऊपर बोरा अनुसार निम्न तानामे का प्रयोग कीजिए।

### प्रश्नावली — 16.5

1. प्रत्येक रेस के लिए तीन दृश्य (1), (2) और (3) दिए गए हैं। प्रत्येक रेस के लिए संगत ऊपर के (Top), सामने के (Front) और पास्वर्द दृश्यों (Side) की पहचान कीजिए।



2. नीचे दिए गए प्रत्येक ठोस का, तौर द्वारा सूचित दिशा से उसे देखने पर वह कैसा दिखेगा, एक दृश्य खींचिए।



## हमने रीखा

- वृत्त, वृ, अ-वृ, वर्तुर्ज और नियुन समतल आकृतियों के छद्मवरण हैं तथा इन घनाण, गोल, ब्लन, शंकु और पिरामिड ठोस आकारों के छद्मवरण हैं।
- सांकेत आकृतियों की दो चिमारे (संकेत में 2-D) छाँटी हैं तथा लोर आकारों की तीन चिमारे (संकेत में 3-D) छाँटी हैं।
- ठोस आकारों के कोण लक्षके शीर्ष, उसके ढाँचे व रेखाऊँड, उसके किनारे (या लार) तथा उसके सापाट पृष्ठ उसके फलक कहलाते हैं।
- ठोस का एक जाल व चिमारों में एक एस छाँचा (या रूपरेखा) है जिसे मोड़कर वह छोला ग्राह की जाता है। एक ही ठोस के अनेक प्रकार के जल ने राकतों हैं।
- चारपाईक रूप री ठोस उलारों के रापाट पृष्ठों (जैसे कागज) पर खींच जा सकता है। ज्या इसे 3-D ठोर करो 2-D निरूपण करो हैं।
- एक ठोर के दो प्रकार के चिन बनना चाहिए है—
  - एक रिंगफूल चित्र, जिर में लाल इयां रानानुपादी नहीं होती हैं। फिर वही रह ठोर के हर नं सभी गहरवट्ठों जान्कारी प्रदान कर दता है।
  - एक रानानुरूल चित्र का एक रानानुरीक बिन्दुकित काल वर खींचा जाता है। किसी ठोस के एक समदूरीक चित्र में लाल इयां को स्मानुगति रखा जाता है।

7. ठोस आकारों का विभवण एवं बहुत ही उपयोगी कौशल है। जापको ठोस आकरों के लिये दुएँ न दिल ही दिया जा सकता है।
8. एक त्रीमा के विभिन्न गार्डों को अनेक विशेषों से देखा जा सकता है।
- (अ) एक विधि यह है कि दिए दुएँ आकार को काढ़ दिया जाए। दूसरे हाँ परों ठोस का एक अनुग्रह—कान प्रप्त हो जाती है।
- (ब) दूसरी विधि यह है कि एक 3-D आकार की एक तरफ वस्तु को 2-D के रूप में लासली छाया दखी जाय।
- (स) तीसरी विधि यह है कि ठोस आकार का विभिन्न कार्यों से दखा जाय।

३०८

© BSTBPC  
WEBCOPY, NOT TO BE PUBLISHED