आपल्या संख्यांची ओळख

प्रकरण 1

1.1 प्रस्तावना

वस्तू मोजणे आपल्यासाठी सोपे आहे. आता आपण मोठ्या प्रमाणात वस्तू मोजू शकतो, जसे शाळेतील विद्यार्थी संख्या आणि या संख्या अंकांद्वारे सादर करू शकतो. आपण मोठ्या संख्या योग्य संख्यानामे देऊन सूचित करू शकतो.

असे नाही की आपण नेहमीच मोठ्या राशींबद्दल वार्तालाप किंवा संकेतांमध्ये बोलणे जाणत होतो. किती तरी हजार वर्षांपूर्वी लोक केवळ लहान संख्यांच जाणत होते. हळू हळू ते मोठ्या संख्यांवर क्रिया करणे शिकू लागले. ते मोठ्या संख्या चिन्हांमध्ये व्यक्त करायलाही शिकले. हे सर्व मानवप्राण्याच्या सामूहिक प्रयत्नांमुळे शक्य झाले. त्यांचा मार्ग सरळ, सोपा नव्हता आणि त्यांना या संपूर्ण मार्गात संघर्ष करावा लागला. प्रत्यक्षात संपूर्ण गणिताचा विकास याच रूपात समजला जाऊ शकतो. जशी – जशी मानवाने प्रगती केली, तशी – तशी गणिताच्या विकासाची गरज वाढत गेली आणि त्याचा परिणाम म्हणजे गणिताचा विकास आणखी वेगाने झाला.

आपण संख्या वापरतो आणि त्यांच्याविषयी अनेक गोष्टी जाणतो. संख्या आपल्याला वस्तू मोजण्यास मदत करतात. वस्तूंचा कोणता संग्रह मोठा आहे आणि वस्तूंना प्रथम, द्वितीय अशा क्रमाने व्यवस्थित लावण्यातही संख्या आपल्याला मदत करतात. इतर अनेक संदर्भातही अनेक प्रकारे संख्यांचा वापर केला जातो. जेथे आपण संख्यांचा वापर करतो अशा अनेक घटनांचा विचार करा. अशा पाच घटना लिहा ज्यात आपण संख्यांचा वापर करतो.

आपण संख्यांबरोबर कार्य करण्याचा आनंद आधी घेतला आहे. आपण त्यांची बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार व भागाकार या क्रियाही केल्या आहेत. आपण संख्यांचे आकृतिबंध (patterns) पाहिले आहेत आणि संख्याविषयी अनेक मनोरंजनात्मक गोष्टी केल्या आहेत. या प्रकरणामध्ये आपण काही समीक्षा आणि पुनरावलोकन करून या मनोरंजनात्मक गोष्टींमध्ये अधिक पुढे जाणार आहोत.

1.2 संख्यांची तुलना

आपण यापूर्वी संख्यांची तुलना खूप वेळा केली आहे. आता पाहू या की आपल्या लक्षात आहे का की दिलेल्या संख्यांमध्ये कोणती संख्या सर्वात मोठी आहे?

(i) 92, 392, 4456, 89742 — मी सर्वांत मोठी आहे

(ii) 1902, 1920, 9201, 9021, 9210 — मी सर्वांत मोठी आहे

येथे आपणास उत्तर माहीत आहे.

आपल्या मित्रांशी चर्चा करा की ते कोणत्याही संख्यासमूहातील सर्वात मोठी संख्या कशी शोधून काढतात.

प्रयत्न करा

तुम्ही पटकन प्रत्येक ओळीतील सर्वांत मोठी व सर्वांत लहान संख्या कोणती आहे हे सांगू शकता का?

1) 382, 4972, 18, 59785, 750 — उत्तर – 59785 सर्वात मोठी आणि 18 सर्वात लहान आहे.

2) 1473, 89423, 100, 5000, 310 — उत्तर ________________

3) 1834, 75284, 111, 2333, 450 — उत्तर ________________

4) 2853, 7691, 9999, 12002, 124 — उत्तर ________________

हे एकदम सोपे होते का? हे सोपे का होते?

येथे आपण फक्त संख्यांमधील अंक पाहून उत्तर शोधले. सर्वात मोठ्या संख्येत जास्तीत जास्त हजार होते आणि सर्वात लहान संख्या शतक किंवा दशकांत होती.

याच प्रकारची आणखी पाच उदाहरणे तयार करा आणि आपल्या मित्रांना सोडवायला द्या.

आपण 4875 आणि 3542 यांची तुलना कशा प्रकारे करतो? येथे हे फारसे अवघड नाही. या दोन्ही संख्यांमध्ये अंकांची संख्या समान आहे. या दोन्ही संख्या हजारांमध्ये आहेत. परंतु 4875 मध्ये हजार स्थानी असलेला अंक 3542 च्या हजार स्थानच्या अंकापेक्षा मोठा आहे. त्यामुळे 4875 ही 3542 पेक्षा मोठी आहे.

आता सांगा की कोणती संख्या मोठी आहे. 4875 का 4542? येथे दोन्ही संख्यांमधील अंकांची संख्या समान आहे त्याचबरोबर दोन्हीत हजारस्थानी असलेला अंकही समान आहे. आता आपण काय करतो? आपण पुढच्या अंकाकडे वळतो अर्थात शतक स्थानी येणारा अंक पाहतो 4875 मध्ये शतकस्थानी आलेला अंक 4542 मधील शतक स्थानच्या अंकापेक्षा मोठा आहे. त्यामुळे 4875 ही 4542 पेक्षा मोठी आहे.

जर दोन्ही संख्यांमध्ये शतकस्थानचे अंकही समान असते तर आपण काय केले असते?
4875 आणि 4889 ची तुलना करा.
4875 आणि 4879 ची तुलना करा.

प्रयत्न करा

प्रत्येक समूहातील सर्वात मोठी आणि सर्वात लहान संख्या शोधा.

(a) 4536, 4892, 4370, 4452 (b) 15623, 15073, 15189, 15800

(c) 25286, 25245, 25270, 25210 (d) 6895, 23787, 24569, 24659

याच प्रकारची आणखी पाच उदाहरणे अजून तयार करा आणि आपल्या मित्रांना सोडविण्यास द्या.

1.2.1 तुम्ही किती संख्या तयार करू शकता?

समजा आपल्याकडे 7, 8, 3 आणि 5 हे अंक आहेत. या अंकांचा वापर करून आपल्याला 4 अंकी वेगवेगळ्या संख्या तयार करायला सांगितले जाते आहे. फक्त एका संख्येत कोणताही अंक दोनदा येणार नाही. अशाप्रकारे संख्या 7835 चालेल पण 7735 चालणार नाही. या 4 अंकांनी जेवढ्या संख्या तयार करू शकता तेवढ्या करा.

तुम्हाला सर्वात मोठी आणि सर्वात लहान कोणती संख्या मिळाली? येथे सर्वात मोठी संख्या आहे 8753 आणि सर्वात लहान आहे 3578. दोन्हीतील अंकांचा क्रम पहा. तुम्ही सांगू शकाल का दिलेल्या अंकांनी तयार होणारी मोठ्यात मोठी संख्या कशी तयार करतात? तुमची कृती लिहा.

प्रयत्न करा

1. प्रत्येक अंक एकदाच वापरून दिलेल्या अंकांनी तयार होणारी चार अंकी सर्वात मोठी व सर्वात लहान संख्या तयार करा.

   (a) 2, 8, 7, 4 (b) 9, 7, 4, 1 (c) 4, 7, 5, 0

   (d) 1, 7, 6, 2 (e) 5, 4, 0, 3

   (सूचना – 0754 तीन अंकी संख्या आहे)

2. कोणताही एक अंक दोनदा वापरून चार अंकी सर्वात मोठी व सर्वात लहान संख्या तयार करा.

   (a) 3, 8, 7 (a) 9, 0, 5 (a) 0, 4, 9 (a) 8, 5, 1

   (सूचना – प्रत्येक वेळी कोणता अंक दोनदा वापराल याचा विचार करा)

3. दिलेल्या अटींनुसार कोणतेही चार अंक वापरून 4 अंकी सर्वात मोठी व सर्वात लहान संख्या तयार करा.

   (a) 7 अंक सतत एकक स्थानी असेल

सर्वात मोठी	9	8	6	7
सर्वात लहान	1	0	2	7

   (लक्षात ठेवा, 0 ने संख्येची सुरुवात होऊ शकत नाही? का?)

   (b) दशक स्थानी सतत 4 असेल

सर्वात मोठी			4	
सर्वात लहान			4	

(c) शतकस्थानी सतत 9 असेल — सर्वात मोठी

	9		

सर्वात लहान

	9		

(d) हजारस्थानी सतत 1 असेल — सर्वात मोठी

1			

सर्वात लहान

1			

4. समजा तुम्ही दोन अंक 2 व 3 घेतले. या अंकांची समान वेळा पुनरावृत्ती करून चार अंकी संख्या तयार करा. कोणती संख्या सर्वात मोठी आहे? कोणती संख्या सर्वात लहान आहे? तुम्ही अशा एकूण किती संख्या तयार करू शकता?

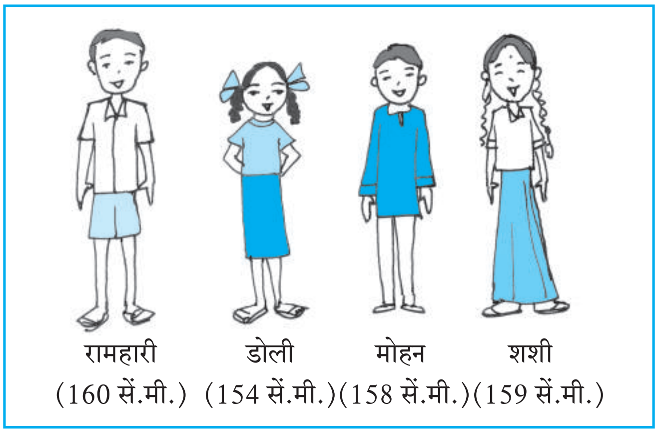
योग्य क्रमाने उभे राहणे

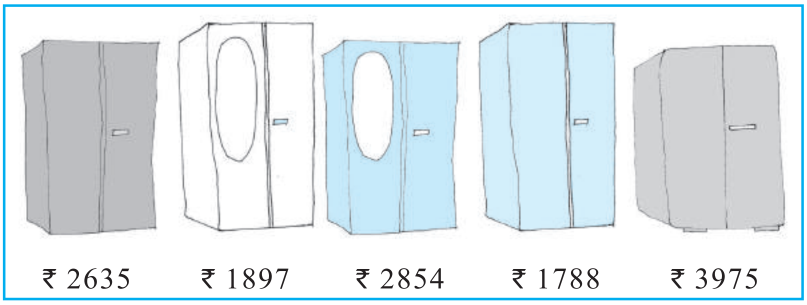
1. यांतील सर्वांत उंच कोण आहे?

2. यांतील सर्वांत बुटका कोण आहे?

(a) तुम्ही यांना उंचीच्या वाढत्या क्रमाने उभे करू शकता का?

(b) तुम्ही यांना उंचीच्या उतरत्या क्रमाने उभे करू शकता का?





काय घ्यावे?
सोहन आणि रीता एक कपाट घ्यायला गेले. तेथे खूप कपाटे होती. त्यांच्यावर त्यांची किमतीची चिठ्ठी लावली होती.

(a) तुम्ही यांना किमतीच्या चढत्या क्रमाने लावू शकता का?

(b) तुम्ही यांना किमतीच्या उतरत्या क्रमाने लावू शकता का?

प्रयत्न करा

याच प्रकारच्या आणखी पाच घटनांचा विचार करा ज्यांमध्ये तुम्ही तीन किंवा तीनपेक्षा अधिक राशींची तुलना कराल?

चढता क्रम (Ascending order) : 'चढता क्रम'चा अर्थ आहे सर्वात लहान संख्येने सुरुवात करून सर्वात मोठ्यापर्यंत क्रम लावणे.

उतरता क्रम (Descending order) : 'उतरता क्रम' म्हणजे सर्वात मोठ्या संख्येने सुरुवात करून सर्वात लहानपर्यंत क्रम लावणे.

प्रयत्न करा

1. खालील दिलेल्या संख्यांचा चढता क्रम लावा.
   (a) 847, 9754, 8320, 571
   (b) 9801, 25751, 36501, 38802
2. खालील दिलेल्या संख्यांचा उतरता क्रम लावा.
   (a) 5000, 7500, 85400, 7861
   (b) 1971, 45321, 88715, 92547

चढत्या/उतरत्या क्रमाची आणखी दहा उदाहरणे तयार करा आणि ती चढत्या/उतरत्या क्रमाने लावा.

1.2.2 अंकांचे स्थानांतरण

तुम्ही कधी विचार केलात का की कोणत्याही संख्यांतील अंकांची स्थाने परस्परात बदलली तर काय होईल?

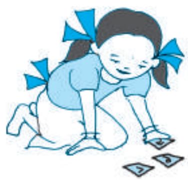
विचार करा 182 काय बनेल? ती 821 सारखी मोठी होईल किंवा 128 सारखी लहान. हीच क्रिया 391 मध्ये करून पाहा.

आता पुढे दिलेल्या प्रश्नांकडे लक्ष द्या. तीन वेगळ्या अंकांची कोणतीही संख्या घ्या आणि शतक स्थानच्या अंकाची एकक स्थानच्या अंकाशी अदलबदल करा.

(a) नवी संख्या मूळ संख्येपेक्षा मोठी आहे का?

(b) नवी संख्या मूळ संख्येपेक्षा लहान आहे का?

अशा क्रमाने तयार होणाऱ्या संख्या चढता आणि उतरता दोन्ही क्रमाने लिहा.



आधी $\boxed{7}$ $\boxed{9}$ $\boxed{5}$

पहिली आणि तिसरी चौकट परस्परांत बदलून

नंतर $\boxed{5}$ $\boxed{9}$ $\boxed{7}$

विविध अंक घेऊन जर तुम्ही पहिल्या आणि तिसऱ्या स्थानावरील अंक परस्परात बदलाल, तर कोणत्या स्थितीत संख्या मोठी होते?

कोणत्या स्थितीत संख्या लहान होते?

हीच कृती चार अंकी कोणतीही संख्या घेऊन पुन्हा करा.

1.2.3 संख्या 10,000 चा प्रवेश

तुम्हाला माहीत आहे की 99 च्या पुढे दोन अंकी कोणतीही संख्या नाही. 99 ही दोन अंकी सर्वात मोठी संख्या आहे. याप्रकारे 999 तीन अंकी सर्वात मोठी आणि 9999 चार अंकी सर्वात मोठी संख्या आहे. जर आपण 9999 मध्ये 1 मिळविला तर काय मिळेल?

हा आकृतिबंध (पॅटर्न) पहा $9 + 1 = 10 = 10 \times 1$

$99 + 1 = 100 = 10 \times 10$

$999 + 1 = 1000 = 10 \times 100$

आपण पाहतो की

एक अंकी सर्वात मोठी संख्या + 1 = दोन अंकी सर्वात लहान संख्या

दोन अंकी सर्वात मोठी संख्या + 1 = तीन अंकी सर्वात लहान संख्या

तीन अंकी सर्वात मोठी संख्या + 1 = चार अंकी सर्वात लहान संख्या

मग आपण असा विचार करूया की चार अंकी सर्वात मोठ्या संख्येत 1 मिळविल्यावर आपल्याला पाच अंकी सर्वात लहान संख्या मिळेल, अर्थात $9999 + 1 = 10000$ अशाप्रकारे 9999 च्या पुढची लगेच येणारी संख्या 10000 आहे. तिला दहा हजार असे म्हणतात. त्या बरोबर, $10000 = 10 \times 1000$ असे होईल असाही विचार आपण करू शकतो.

1.2.4 स्थानिक किंमतीवर पुन्हा एक नजर–

तुम्ही स्थानिक किंमतीबद्दल या आधी अभ्यास केला आहे. त्यामुळे 78 सारख्या दोन अंकी संख्येचे विस्तारित रूप तुम्हाला आठवत असेलच. ते अशा प्रकारे आहे

$$78 = 70 + 8$$
$$= 7 \times 10 + 8$$

याच प्रमाणे तुम्हाला तीन अंकी संख्यांचे जसे 278 चे विस्तारित रूपही आठवत असेल. ते असे आहे

$$278 = 200 + 70 + 8$$
$$= 2 \times 100 + 7 \times 10 + 8$$

आपण म्हणतो की 8 एककस्थानी 7 दशकस्थानी आणि 2 शतकस्थानी आहे.

नंतर आपण हाच नियम चार अंकी संख्यांनाही लागू केला होता. उदाहरणार्थ 5278 चे विस्तारित रूप आहे.

$$5278 = 5000 + 200 + 70 + 8$$
$$= 5 \times 1000 + 2 \times 100 + 7 \times 10 + 8$$

येथे एककस्थानी 8, दशकस्थानी 7, शतकस्थानी 2 आणि हजारस्थानी 5 आहे.

10000 संख्या माहीत झाल्यानंतर आपण हाच नियम आणखी पुढे लागू करू शकतो. आपण पाच अंकी संख्या जसे 45278 या प्रकारे लिहू शकतो.

$$45278 = 4 \times 10000 + 5 \times 1000 + 2 \times 100 + 7 \times 10 + 8$$

येथे आपण म्हणू शकतो की एककस्थानी 8, दशकस्थानी 7, शतकस्थानी 2, हजारस्थानी 5 आणि दशहजारस्थानी 4 आहेत. या संख्येचे वाचन पंचेचाळीस हजार दोनशे अठ्ठ्याहत्तर असे केले जाते. आता तुम्ही पाच अंकी सर्वात लहान आणि सर्वात मोठी संख्या लिहून शकाल?

प्रयत्न करा

संख्या वाचा आणि जेथे जेथे रिकाम्या जागा आहेत तेथे संख्येचे वाचन लिहा आणि विस्तारित रूपात लिहा.

संख्या	संख्या वाचन	विस्तारित रूप
20000	वीस हजार	2×10000
26000	सव्वीस हजार	$2 \times 10000 + 6 \times 1000$
38400	अडतीस हजार चारशे	$3 \times 10000 + 8 \times 1000 + 4 \times 100$
65740	पासष्ठ हजार सातशे चाळीस	$6 \times 10000 + 5 \times 1000$ $+ 7 \times 100 + 4 \times 10$
89324	एकोणनव्वद हजार तीनशे चोवीस	$8 \times 10000 + 9 \times 1000$ $+ 3 \times 100 + 2 \times 10 + 4$
50000	________________	________________
41000	________________	________________
47300	________________	________________
57630	________________	________________
29485	________________	________________
29085	________________	________________
20085	________________	________________
20005	________________	________________

पाच अंकी आणखी पाच संख्या लिहा, त्या वाचा आणि विस्तारित रूपात लिहा.

1.2.5 संख्या 100000 चा प्रवेश

पाच अंकी सर्वात मोठी संख्या कोणती आहे? पाच अंकी सर्वात मोठ्या संख्येत 1 मिळविल्यास सहा अंकी सर्वात लहान संख्या पाहिजे. अर्थात,

$$99,999 + 1 \quad = 1,00,000$$

या संख्येला **एक लाख** नाव दिले गेले आहे. एक लाख 99,000 च्या नंतर येणारी संख्या आहे.

त्याचबरोबर $10,000 \times 10 \ = 1,00,000$

आता आपण सहा अंकी संख्या आणि त्यांचे विस्तारित रूप लिहू शकतो. जसे,

$$2,46,853 = 2 \times 1,00,000 + 4 \times 10,000 + 6 \times 1,000 + 8 \times 100 + 5 \times 10 + 3 \times 1$$

या संख्येत एककस्थानी 3, दशकस्थानी 5, शतकस्थानी 8, हजार स्थानी 6, दशहजार स्थानी 4 आणि लक्षस्थानी 2 आहेत. या संख्येचे नाव दोन लाख सेहेचाळीस हजार आठशे त्रेपन्न आहे.

प्रयत्न करा

संख्या वाचून रिकाम्याजागी संख्येचे वाचन आणि विस्तारित रूपात लिहा.

संख्या	संख्येचे वाचन	विस्तारित रूप
3,00,000	तीन लाख	$3 \times 1,00,000$
3,50,000	तीन लाख पन्नास हजार	$3 \times 1,00,000 + 5 \times 10,000$
3,53,500	तीन लाख त्रेपन्न हजार पाचशे	$3 \times 1,00,000 + 5 \times 10,000$ $+ 3 \times 1000 + 5 \times 100$
4,57,928	_______________	_______________
4,07,928	_______________	_______________
4,00,829	_______________	_______________
4,00,029	_______________	_______________

1.2.6 मोठ्या संख्या

जर आपण 6 अंकी सर्वात मोठ्या संख्येत 1 मिळविला तर आपल्याला 7 अंकी सर्वात लहान संख्या मिळते जी दहा लाख अशी वाचतात.

6 अंकी सर्वात मोठी आणि 7 अंकी सर्वात लहान संख्या लिहा.

7 अंकी सर्वात मोठी संख्या आणि 8 अंकी सर्वात लहान संख्या लिहा. 8 अंकी सर्वात लहान संख्या **एक कोटी** आहे.

आकृतिबंध (पॅटर्न) पूर्ण करा.

9 + 1 = 10

99 + 1 = 100

999 + 1 = _______

9,999 + 1 = _______

99,999 + 1 = _______

9,99,999 + 1 = _______

99,99,999 + 1 = 1,00,00,000

लक्षात ठेवा

1 शतक	= 10 दशक
1 हजार	= 10 शतक
	= 100 दशक
1 लाख	= 100 हजार
	= 1000 शतक
1 कोटी	= 100 लाख
	= 10,000 हजार

प्रयत्न करा

1. 10 – 1 काय आहे?
2. 100 – 1 काय आहे?
3. 10,000 – 1 काय आहे?
4. 1,00,000 – 1 काय आहे?
5. 1,00,00,000 – 1 काय आहे?

(सूचना – आकृतिबंध (पॅटर्न) ओळखा)

अनेक वेगवेगळ्या परिस्थितीत आपल्यासमोर मोठ्या संख्या येतात. उदाहरणार्थ – तुमच्या वर्गातील विद्यार्थीसंख्या दोन अंकी असेल, पण तुमच्या शाळेतील एकूण विद्यार्थीसंख्या 3 किंवा 4 अंकी असेल. जवळच्या शहरात राहणाऱ्या लोकांची संख्या आणखी जास्त असेल.

ती 5, किंवा 6 किंवा 7 अंकी संख्या आहे का? तुम्हाला तुमच्या राज्यात राहणाऱ्या लोकांची संख्या माहीत आहे का? त्या संख्येत किती अंक असतील?

गव्हाने भरलेल्या एका पोत्यात दाण्यांची संख्या किती असेल? ती पाच अंकी का सहा अंकी का आणखी मोठी संख्या असेल?

प्रयत्न करा

1. अशी पाच उदाहरणे द्या ज्यात मोजल्या जाणाऱ्या वस्तूंची संख्या 6 अंकी संख्येपेक्षा अधिक असेल.
2. 6 अंकी सर्वात मोठ्या संख्येने सुरुवात करून उतरत्या क्रमाने मागील पाच संख्या लिहा.
3. 8 अंकी सर्वात लहान संख्येने सुरुवात करून चढत्या क्रमाने पुढच्या पाच संख्या लिहा आणि त्यांचे वाचन करा.

1.2.7 मोठ्या संख्या वाचणे आणि लिहिणे यासाठी एक मदत

(खालील संख्या वाचण्याचा प्रयत्न करा.)

(a) 279453 (b) 5035472

(c) 152700375 (d) 40350894

तुम्हाला काही कठीण वाटले का?

तुम्हाला असे करताना काय कठीण वाटले?

कधी कधी मोठ्या संख्या वाचणे आणि लिहिण्यात काही सूचक खुणा असतात. शगुप्ता ही काही खुणांचा वापर करते ज्यामुळे तिला मोठ्या संख्या वाचणे आणि लिहिण्यास मदत होते. तिच्या ह्या संख्या विस्तारित रूपात लिहितानाही मदत करतात. उदाहरणार्थ ती 257 मधील एकक, दशक आणि शतक स्थानाचे अंक पाहून ते तक्त्यात ए, द आणि श च्या खाली खालील प्रकारे लिहिते.

श	द	ए	विस्तारित रूप
2	5	7	$2 \times 100 + 5 \times 10 + 7 \times 1$

याचप्रमाणे 2902 साठी ती लिहिते

श	ह	द	ए	विस्तारित रूप
2	9	0	2	$2 \times 1000 + 9 \times 100 + 0 \times 10 + 2 \times 1$

ती या नियमाला लाखपर्यंतच्या संख्यांना लागू करते. खाली दिलेल्या तक्त्यात आपण पाहू शकतो. (आपण त्यांना शुगुप्ताच्या चौकटी म्हणू या). लक्षपूर्वक पहा आणि रिकाम्या जागा भरा.

संख्या	दल	ल	दह	ह	श	द	ए	संख्येचे वाचन	विस्तारित रूप
7,34,543		7	3	4	5	4	3	सात लाख चौतीस हजार पाचशे त्रेचाळीस	----------------
32,75,829	3	2	7	5	8	2	9	--------------------	$3\times10,00,000$ $+2\times1,00,000$ $+7\times10,000$ $+5\times1000$ $+8\times100$ $+2\times10+9\times1$

या प्रकारे आपण कोटीपर्यंतच्या संख्या एकत्रित करू शकतो. खाली हे दाखविले आहे.

संख्या	दको	को	दल	ल	दह	ह	श	द	ए	संख्येचे वाचन
2,57,34,543	-	2	5	7	3	4	5	4	3	____________
65,32,75,829	6	5	3	2	7	5	8	2	9	पासष्ठ कोटी बत्तीस लक्ष पंच्याहत्तर हजार आठशे एकोणतीस

तुम्ही संख्या विस्तारित रूपात लिहिण्यासाठी असे इतर तक्ते तयार करू शकता.

स्वल्पविरामांचा (commas) वापर

तुमच्या लक्षात आले असेल की वरील तक्त्यात मोठ्या संख्या लिहिताना आपण स्वल्पविरामांचा वापर केला आहे. मोठ्या संख्या लिहिताना आणि वाचताना स्वल्पविरामांची आपल्याला मदत होते. **संख्यांकनाची भारतीय पद्धती (Indian system of numeration)** मध्ये आपण एकक, दशक, शतक, हजार यांचा वापर करतो आणि पुढे लाख, कोटीचा उपयोग करतो. हजार, लाख आणि कोटींच्या संख्या मांडताना स्वल्पविरामांचा उपयोग केला जातो. पहिला स्वल्पविराम शतकस्थान (उजवीकडून तिसरा अंक) नंतर येतो आणि हजार संख्या दर्शवितो. दुसरा स्वल्पविराम पुढच्या दोन अंकांनंतर (उजवीकडून पाचवा अंक) येतो. हा दहा हजारच्या स्थानानंतर येतो आणि लाख संख्या दर्शवितो. तिसरा स्वल्पविराम इतर दोन अंकांनंतर (उजवीकडून सातवा अंक) येतो. हा दहा लाखानंतर येतो आणि कोटी संख्या दर्शवितो.

उदाहरणार्थ 5, 08, 01, 592
3, 32, 40, 781
7, 27, 05, 062

संख्येचे वाचन करताना आपण स्वल्पविराम वापरत नाही.

वर दिलेल्या संख्या वाचण्याचा प्रयत्न करा. याच प्रकारच्या पाच आणखी संख्या लिहा आणि त्या वाचा.

आंतरराष्ट्रीय संख्यांकन पद्धती

संख्यांकनाच्या आंतरराष्ट्रीय (International) पद्धतीमध्ये एकक, दशक, शतक आणि हजारानंतर मिलियनचा वापर केला जातो. हजार मिलियन दर्शविण्यासाठी स्वल्पविरामांचा वापर केला जातो. स्वल्पविराम उजवीकडून प्रत्येक तिसऱ्या अंकांनंतर येतो. पहिला स्वल्पविराम हजार दर्शवितो आणि दुसरा स्वल्पविराम मिलियन दर्शवितो. उदा. 50,801,592 ही संख्या आंतरराष्ट्रीय पद्धतीमध्ये पन्नास मिलियन आठशे एक हजार पाचशे ब्याण्णव असे वाचले जाते. भारतीय पद्धतीत हे पाच कोटी आठ लाख एक हजार पाचशे ब्याण्णव आहेत.

किती लाखांनी एक मिलियन होतो?

किती मिलियनने एक कोटी होतात?

तीन मोठ्या संख्या घ्या. त्या भारतीय आणि आंतरराष्ट्रीय पद्धतीने लिहा.

हे तुम्हाला आवडेल.

शंभर मिलियनपेक्षा मोठ्या संख्या मांडण्यासाठी आंतरराष्ट्रीय पद्धतीत बिलीयनचा वापर केला जातो.

1 बिलियन = 1000 मिलियन

तुम्हाला हे माहीत आहे का?
भारताच्या लोकसंख्येत पुढील प्रकारे वाढ झाली

1921-1931 च्या जनगणनेत 27 मिलियन
1931-1941 च्या जनगणनेत 37 मिलियन
1941-1951 च्या जनगणनेत 44 मिलियन
1951-1961 च्या जनगणनेत 78 मिलियन

1991–2001 च्या जनगणनेत किती वाढ झाली? ही माहिती मिळविण्याचा प्रयत्न करा. तुम्हाला आताची भारताची लोकसंख्या किती आहे माहीत आहे का? माहीत करण्याचा प्रयत्न करा.

प्रयत्न करा

1. या संख्या रकान्याचा वापर करून लिहा आणि नंतर विस्तारित रूपात लिहा.
   (i) 475320 (ii) 9847215
   (iii) 97645310 (iv) 30458094
   (a) यांतील कोणती संख्या सर्वात लहान आहे?
   (b) यांतील कोणती संख्या सर्वात मोठी आहे?
   (c) या संख्या चढत्या व उतरत्या क्रमाने लावा.
2. खालील संख्या पहा.
   (i) 527864 (ii) 95432
   (iii) 18950049 (iv) 70002509
   (a) या संख्या रकान्यांचा वापर करून लिहा आणि नंतर स्वल्पविराम वापरून लिहा.
   (b) या संख्या चढत्या व उतरत्या क्रमाने लावा.
3. अशाच तीन मोठ्या संख्या घेऊन ही कृती पुन्हा करा.

तुम्ही संख्या लिहिण्यास मला मदत करू शकाल का?

एखाद्या संख्येतील अंक लिहिण्यासाठी आपण पुन्हा रकान्यांचा वापर करू शकतो.

(a) बेचाळीस लक्ष सत्तर हजार आठ

(b) दोन कोटी नव्वद लाख पंचावन्न हजार आठशे

(c) सात कोटी साठ हजार पंचावन्न

प्रयत्न करा

1. तुमच्याकडे 4, 5, 6, 0, 7 आणि 8 हे अंक आहेत. हे अंक वापरून 6 अंकी पाच संख्या तयार करा.
   (a) वाचन सुलभ व्हावे यासाठी स्वल्पविराम द्या.
   (b) त्या चढत्या व उतरत्या क्रमाने लावा.
2. 4, 5, 6, 7, 8 आणि 9 हे अंक वापरून 8 अंकी कोणत्याही तीन संख्या तयार करा. वाचन सुलभ (सोपे) व्हावे म्हणून स्वल्पविराम द्या.
3. 3, 0 आणि 4 हे अंक वापरून 6 अंकी पाच संख्या तयार करा. स्वल्पविराम द्या.

उदाहरणसंग्रह 1.1

1. रिकाम्या जागा भरा.

   (a) 1 लाख = ________ दश हजार

   (b) 1 मिलियन = ________ शंभर हजार

   (c) 1 कोटी = ________ दशलक्ष

   (d) 1 कोटी = ________ मिलियन

   (e) 1 मिलियन = ________ लाख

2. योग्य स्थानी स्वल्पविराम घालून संख्या लिहा.

   (a) त्र्याहत्तर लाख पंचाहत्तर हजार तीनशे सात

   (b) नऊ कोटी पाच लाख एक्केचाळीस

   (c) सात कोटी बावन्न लाख एकवीस हजार तीनशे दोन

   (d) अठ्ठावन्न मिलियन चारशे तेवीस हजार दोनशे दोन

   (e) तेवीस लाख तीस हजार दहा

3. योग्य ठिकाणी स्वल्पविराम द्या व संख्या भारतीय संख्यांकन पद्धतीने अक्षरांत लिहा.

   (a) 87595762 (b) 8546283 (c) 99900046 (d) 98432701

4. योग्य ठिकाणी स्वल्पविराम द्या आणि संख्या आंतरराष्ट्रीय संख्यांकन पद्धतीने अक्षरांत लिहा.

   (a) 78921092 (b) 7452283 (c) 99985102 (d) 48049831

1.3 मोठ्या संख्यांचा व्यावहारिक उपयोग

मागील वर्षी आपण शिकलो की लांबीचे एक एकक म्हणून सेंटिमीटरचा उपयोग केला जातो. पेन्सिलची लांबी, आपल्या पुस्तकाची किंवा व्यवसायमालेची रुंदी मोजण्यासाठी आपण सेंटिमीटरचा वापर करतो. आपल्या पट्टीवर सेंटिमीटरच्या खुणा असतात. पण पेन्सिलीची जाडी मोजण्यासाठी आपल्याला सेंटिमीटर हे मोठे एकक आहे हे लक्षात येते. त्यामुळे पेन्सिलची जाडी मोजण्यासाठी आपण मिलिमीटर या छोट्या एककाचा वापर करतो.

(a) 10 मिलिमीटर = 1 सेंटिमीटर

आपल्या वर्गाची लांबी किंवा शाळेच्या इमारतीची लांबी मोजण्यासाठी सेंटिमीटर हे लहान एकक आहे हे तुमच्या लक्षात येईल. त्यामुळे यासाठी आपण मीटरचा उपयोग करतो.

(b) 1 मीटर = 100 सेंटिमीटर = 1000 मिलिमीटर

जर आपण दोन शहरे असे दिल्ली-मुंबई किंवा दिल्ली-कोलकातामधील अंतरे सांगत असू तर मीटर लहान एकक आहे. त्यासाठी आपण एका मोठ्या एककाचा किलोमीटरचा वापर करतो.

(c) 1 किलोमीटर = 1000 मीटर

किती मिलिमीटर म्हणजे 1 किलोमीटर?

1 मीटर = 1000 मिमी

त्यामुळे 1 किमी = 1000 मी = 1000 × 1000 मिमी= 10,00,000 मिमी

प्रयत्न करा

1. किती सेंटिमीटरने एक किलोमीटर बनते?
2. भारतातील पाच मोठ्या शहरांची नावे लिहा. त्यांची लोकसंख्या माहीत करा. या शहरांच्या प्रत्येक जोडीमधील अंतरेही किलोमीटरमध्ये शोधा.

आपण दुकानात गहू किंवा तांदूळ घ्यायला जातो. आपण ते किलोग्रॅममध्ये (किग्रॅ) घेतो. पण आले किंवा मिरचीसारख्या वस्तू आपणांस जास्त प्रमाणात लागत नाहीत. त्या आपण ग्रॅम (ग्रॅ.)मध्ये घेतो. आपल्याला माहीत आहे की,

1 किलोग्रॅम = 1000 ग्रॅम

आजारी पडल्यावर जी औषधाची गोळी घेतली जाते तिच्या वजनावर कधी लक्ष दिलेत का? ते खूपच कमी असते. ते वजन मिलिग्रॅममध्ये (मिग्रॅ) असते.

1 ग्रॅम = 1000 मिलिग्रॅम

प्रयत्न करा

1. किती मिलिग्रॅमने एक किलोग्रम बनतो?
2. औषधांच्या गोळ्यांच्या एका खोक्यात 2,00,000 गोळ्या आहेत. ज्यात प्रत्येक गोळीचे वजन 20 मिग्रॅ आहे. या खोक्यात ठेवलेल्या सर्व गोळ्यांचे एकूण वजन ग्रॅममध्ये किती असेल आणि किलोग्रॅममध्ये किती असेल?

पाण्याच्या एका साधारण बादलीची धारकता किती असते? साधारणपणे 20 लीटर. धारकता लीटरमध्ये मोजतात, पण कधी कधी आपल्याला एखाद्या लहान एककाची गरज पडते. ते एकक मिलिमीटर आहे. केसांचे तेल, स्वच्छतेची द्रावणे किंवा शीतपेयांच्या बाटल्यांवर जे प्रमाण लिहिलेले असते ते त्यात भरलेल्या द्रवपदार्थांचे प्रमाण मिलिमीटरमध्ये दाखवतात.

1 लीटर = 1000 मिलिलीटर

लक्षात ठेवा की या सर्व एककांमध्ये आपण काही सामान्य प्रचलित शब्द जसा की किलो, मिली आणि सेंटी वापरतो. लक्षात ठेवा की किलोचा अर्थ आहे हजार आणि तो या सर्वांत मोठा आहे. मिलीचा अर्थ आहे हजारावा भाग आणि तो सर्वांत लहान आहे. किलो 1000 पट दाखवतो आणि हजारावा भाग दाखवतो. अर्थात 1 किलोग्रॅम = 1000 ग्रॅम आणि 1 ग्रॅम = 1000 मिलीग्रॅम.

याचप्रकारे सेंटी शंभरावा भाग दाखवितो. अर्थात 1 मीटर = 100 सेंटिमीटर.

प्रयत्न करा

एका बसने प्रवासास सुरुवात केली आणि ती 60 किमी/तास वेगाने वेगवेगळ्या ठिकाणी पोहोचली. हा प्रवास खाली दाखवला आहे.

(i) A पासून D पर्यंत जाण्यासाठी बसने कापलेले एकूण अंतर शोधा.

(ii) D पासून G पर्यंत जाण्यासाठी बसने कापलेले एकूण अंतर शोधा.

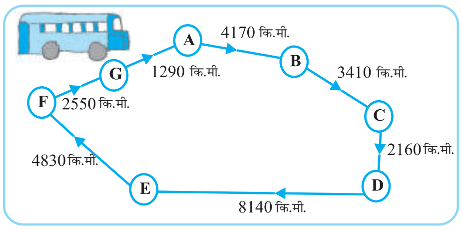
(iii) बसने कापलेले एकूण अंतर शोधा.

(iv) तुम्हाला C पासून D पर्यंतचे आणि D पासून E पर्यंतचे अंतर काढता येईल का?

(v) बसला खालील प्रवासांस लागलेला वेळ काढा–

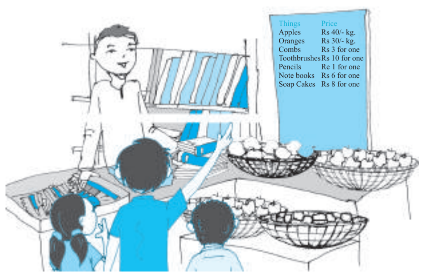
(a) A पासून B पर्यंत (b) C पासून D पर्यंत (c) E पासून G पर्यंत

(d) एकूण प्रवास



रमणचे दुकान

वस्तू	दर	
सफरचंद	₹ 40	प्रतिकिग्रॅ
संत्रे	₹ 30	प्रतिकिग्रॅ
कंगवा	₹ 3	प्रतिनग
दातांचा ब्रश	₹ 10	प्रतिनग
पेन्सिल	₹ 1	प्रतिनग
वही	₹ 6	प्रतिनग
साबणाची वडी	₹ 8	प्रतिनग



मागील वर्षीची विक्री

सफरचंद	2457 किग्रॅ
संत्रे	3004 किग्रॅ
कंगवा	22760
दातांचा ब्रश	25367
पेन्सिल	38530
वही	40002
साबणाची वडी	20005

(a) तुम्ही रमणने मागील वर्षी विकलेल्या सफरचंदे आणि संत्र्यांचे एकूण वजन काढू शकता का?

सफरचंदांचे वजन = ____________ किग्रॅ

संत्र्यांचे वजन = ____________ किग्रॅ

एकूण वजन = ____________ किग्रॅ + ______ किग्रॅ = ______किग्रॅ

उत्तर = संत्री आणि सफरचंदांचे एकूण वजन = ___________

(b) तुम्ही रमणने विकलेल्या सफरचंदांमुळे मिळालेली एकूण रक्कम काढू शकता का?

(c) तुम्ही रमणने सफरचंदे आणि संत्र्यांच्या विक्रीतून मिळालेली एकूण रक्कम काढू शकता का?

(d) रमणने प्रत्येक वस्तूच्या विक्रीतून मिळविलेली रक्कम दाखवणारा एक तक्ता तयार करा. या रकमा चढत्या क्रमाने लावा. ज्यातून रमणला सर्वांत जास्त पैसे मिळाले अशी कोणती वस्तू आहे? ही रक्कम किती आहे?

बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार आणि भागाकारावर आपण अनेक उदाहरणे सोडविली आहेत. येथे आपण अशीच आणखी काही उदाहरणे करणार आहोत. सुरुवात करण्यापूर्वी खालील उदाहरणे बघा. तसेच प्रश्नांचे स्पष्टीकरण अभ्यासा आणि कशाप्रकारे सोडविले ते पहा.

उदाहरण 1 : 1991 साली सुंदरनगरची लोकसंख्या 2,35,471 होती. 2001 साली लोकसंख्येत 72,958 ची वाढ झाली. 2001 साली या शहराची लोकसंख्या किती होती?

उकल : 2001 साली या शहराची लोकसंख्या

= 1991 ची लोकसंख्या + लोकसंख्येतील वाढ

= 2,35,471 + 72,958

आता

$$\begin{array}{r} 235471 \\ +\ \ 72958 \\ \hline 308429 \\ \hline \end{array}$$

सलमाने या संख्यांची बेरीज अशी केली : 235471 = 200000 + 35000 + 471, 72958 = 72000 + 958 आणि 200000 + 107000 + 1429 = 308429 पण मेरीने अशाप्रकारे बेरीज केली :

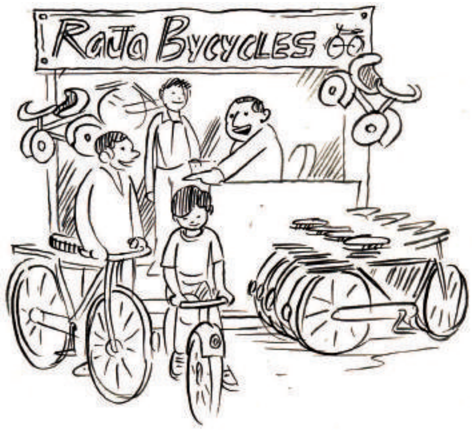
200000 + 35000 + 400 + 71 + 72000 + 900 + 58 = 308429

उत्तर : 2001 साली शहरांची लोकसंख्या 3,08,429 होती.

तीनही पद्धती बरोबर आहेत.

उदाहरण 2 : एका राज्यात वर्ष 2002-2003 मध्ये 7,43,000 विकल्या गेल्या. वर्ष 2003-2004 मध्ये 8,00,100 सायकली विकल्या गेल्या. कोणत्या वर्षात जास्त सायकली विकल्या गेल्या आणि किती जास्त?

उकल : 8,00,100 ही संख्या 7,43,000 पेक्षा मोठी आहे हे स्पष्ट आहे. त्यामुळे त्या राज्यात 2003-04 साली 2002-03 पेक्षा अधिक सायकली विकल्या गेल्या. आता



$$\begin{array}{r} 800100 \\ -\quad 743000 \\ \hline 057100 \\ \hline \end{array}$$

बेरीज करून उत्तराचा पडताळा करा.

$$\begin{array}{r} 743000 \\ +\quad 57100 \\ \hline 800100 \\ \hline \end{array}$$ (उत्तर बरोबर आहे)

तुम्ही हे सोडविण्याचा इतर पद्धती सांगू शकता का?

उत्तर : वर्ष 2003-04 मध्ये 57,100 सायकली जास्त विकल्या गेल्या.

उदाहरण 3 : एका शहरात वर्तमानपत्र दररोज छापले जाते. एका प्रतीत 12 पाने असतात. दररोज या वर्तमानपत्राच्या 11,980 प्रती छापल्या जातात. दररोज सर्व प्रतींसाठी एकूण किती पाने छापली जातात?

उकल : प्रत्येक प्रतीमध्ये 12 पाने आहेत.

त्यामुळे 11,980 प्रतींमध्ये $12 \times 11,980$ पाने असतील.

ही संख्या काय असेल? 1,00,000 पेक्षा जास्त का कमी?

आता

$$\begin{array}{r} 11980 \\ \times\quad 12 \\ \hline 23960 \\ +\ 119800 \\ \hline 143760 \\ \hline \end{array}$$

उत्तर : दररोज सर्व प्रतींसाठी 1,43,760 पाने छापली जातात.

उदाहरण 4 : वह्या तयार करण्यासाठी कागदाची 75,000 शीट उपलब्ध आहेत. एका शीटमध्ये वहीची 8 पाने तयार होतात. प्रत्येक वहीमध्ये 200 पाने आहेत. उपलब्ध कागदांमधून किती वह्या तयार होतील?

उकल : प्रत्येक शीटमधून 8 पाने तयार होतात.

म्हणून 75,000 शीटमध्ये $8 \times 75{,}000$ पाने तयार होतील,

$$\begin{array}{r} 75000 \\ \times \quad\quad 8 \\ \hline 600000 \\ \hline \end{array}$$

अशाप्रकारे वह्या तयार करण्यासाठी 6,00,000 पाने उपलब्ध आहेत.

आता 200 पानांची एक वही बनते.

म्हणून 6,00,000 पानांमध्ये $6{,}00{,}000 \div 200$ वह्या तयार होतील.

आता

$$\begin{array}{r|l} & 3000 \\ \hline 200 & 600000 \\ & 600 \\ \hline & 0000 \end{array}$$

उत्तर : 3,000 वह्या

उदाहरणसंग्रह 1.2

1. एका शाळेत चार दिवसांसाठी एक पुस्तक प्रदर्शन आयोजित करण्यात आले. पहिल्या, दुसऱ्या, तिसऱ्या आणि शेवटच्या दिवशी खिडकीवर अनुक्रमे 1094, 1812, 2050 आणि 2751 तिकिटे विकली गेली. या चार दिवसांत विकल्या गेलेल्या तिकिटांची एकूण संख्या किती?
2. शेखर एक प्रसिद्ध क्रिकेटपटू आहे. त्याने टेस्ट मॅचमध्ये आतापर्यंत 6980 धावा काढल्या आहेत. त्याला 10,000 धावा पूर्ण करायच्या आहेत. त्याला आणखी किती धावांची आवश्यकता आहे?
3. एक निवडणुकीत जिंकलेल्या उमेदवाराला 5,77,500 मते मिळाली. त्याच्या जवळच्या प्रतिस्पर्ध्यास 3,48,700 मते मिळाली. जिंकलेल्या उमेदवाराने निवडणूक किती मतांनी जिंकली?
4. कीर्ती बुक स्टोअरने जूनच्या पहिल्या आठवड्यात ₹ 2,85,891 किमतीची पुस्तके विकली. त्याच महिन्याच्या दुसऱ्या आठवड्यात ₹ 4,00,768 किमतीची पुस्तके विकली गेली. दोन्ही आठवड्यांत मिळून किती विक्री झाली. कोणत्या आठवड्यात जास्त विक्री झाली आणि किती जास्त?

5. 6, 2, 7, 4 आणि 3 हे अंक केवळ एकदाच वापरून तयार होणारी सर्वांत मोठी आणि सर्वांत लहान संख्येतील फरक काढा.
6. एक यंत्र एका दिवसात सरासरीं 2,825 मळसूत्रे (स्क्रू) तयार करते. जानेवारी 2006 मध्ये त्या यंत्राने किती मळसूत्रे बनविली ?
7. एका व्यापाऱ्याकडे 78,592 रुपये होते. त्याने 40 रेडिओ खरेदी करण्याची ऑर्डर दिली. प्रत्येक रेडिओचे मूल्य 1200 रुपये होते. या खरेदीनंतर त्याच्याकडे किती रक्कम उरेल ?

8. एका विद्यार्थ्याने 7236 ला 56 ऐवजी 65 ने गुणले. त्याचे उत्तर योग्य उत्तरापेक्षा जास्त होते ? (**सूचना –** दोन्ही गुणाकार करण्याची आवश्यकता नाही.)
9. एक कुर्ता शिवण्यासाठी 2 मी 15 सें.मी. कापड लागते. 40 मी. कापडात किती कुर्ते शिवले जाऊ शकतील आणि किती कापड उरेल ?
10. औषधे खोक्यांमध्ये भरली आहेत आणि अशा प्रत्येक खोक्याचे वजन 4 किग्रॅ 500 ग्रॅम आहे. एक टेंपो 800 किग्रॅपेक्षा जास्त वजन नेऊ शकत नाही. अशा एका टेंपोतून किती खोकी नेली जाऊ शकतात ?
11. एक शाळा आणि एका विद्यार्थ्याच्या घरातील अंतर 1 किमी 875 मी आहे. प्रत्येक दिवशी हे अंतर दोनदा चालले जाते. 6 दिवसांत त्या विद्यार्थ्याने चाललेले एकूण अंतर काढा.
12. एका पातेल्यात 4 ली 500 मिली दही आहे. 25 मिली धारकता असलेले किती ग्लास या दह्याने भरले जातील ?

1.3.1 आकलन

बातम्या

1. भारत आणि पाकिस्तान यांच्यात झालेली हॉकी मॅच स्टेडियममध्ये 51,000 दर्शकांनी पाहिली आणि संपूर्ण जगात 40 मिलियन लोकांनी दूरदर्शनवर पाहिली. यात हार–जीतचा निर्णय झाला नाही.
2. भारत आणि बांग्लादेशाच्या किनारपट्टीलगतच्या भागांमध्ये आलेल्या एका चक्रिवादळात जवळजवळ 2000 लोकांचा मृत्यू झाला आणि 50,000 पेक्षा अधिक जण जखमी झाले.
3. रेल्वेने दररोज 63,000 किलोमीटरपेक्षा जास्त रेल्वेरूळांवर 13 मिलियनपेक्षा अधिक प्रवासी प्रवास करतात.

आपण खात्रीने असे म्हणू शकतो का या बातम्यांमध्ये जेवढे लोक सांगितले आहेत तेथे अगदी तेवढेच लोक होते ? उदाहरणार्थ,

(1) स्टेडियममध्ये बरोबर 51,000 दर्शक होते का ? किंवा दूरदर्शनवर बरोबर 40 मिलियन लोकांनी मॅच पाहिली ? अर्थातच नाही. **जवळजवळ** हा शब्दच असे सांगतो की लोकांची संख्या या संख्यांच्या जवळपास होती. स्पष्टपणे 51,000 संख्या 50,800 या 51,300

मधील कोणतीही संख्या असू शकेल पण ती 70,000 नसणार. याचप्रकारे 40 मिलियनचा अर्थ 39 मिलियनपेक्षा जास्त आणि 41 मिलियनपेक्षा थोडे कमी असू शकेल पण नक्कीच याचा अर्थ 50 मिलियन नाही.

याचप्रकारे भारतीय रेल्वेने प्रवास करणाऱ्या प्रवाशांची संख्या दिल्या गेलेल्या संख्येएवढीच नसू शकेल, पण त्यापेक्षा काही जास्त किंवा कमी असू शकेल.

या उदाहरणात दिलेल्या संख्या अगदी मोजून नाही लिहिल्या गेल्या, या त्या संख्याबद्दल दिलेले अंदाज आहेत.

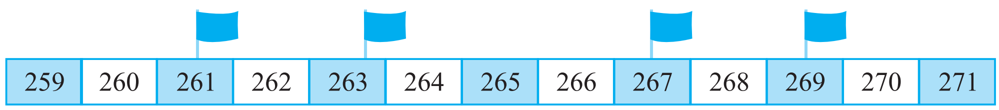
आपण निकटीकरण (approximation) करुन अंदाज कोठे काढतो? आपल्या घरात होणाऱ्या एखाद्या मोठ्या कार्यक्रमाची कल्पना करा. प्रथम तुमच्या घरात अंदाजे किती पाहुणे येतील ते पहाल? तुम्ही पाहुण्यांची अगदी अचूक संख्या घेऊन सुरुवात करू शकाल का? व्यावहारिकदृष्ट्या हे अशक्य आहे.

आपल्या देशाचे अर्थमंत्री दरवर्षी अंदाजपत्रक सादर करतात. मंत्री महोदय 'शिक्षण' शीर्षकाखाली काही रक्कम मान्य करतात. ही रक्कम अगदी तेवढीच अचूक असते का? ती त्यावर्षी देशात शिक्षणावर खर्च होणाऱ्या रकमेचा केवळ एक विवेकसंगत योग्य अंदाज असतो.

अशा परिस्थितीचा विचार करा जेथे तुम्हांला अगदी अचूक संख्यांची आवश्यकता असते आणि अशा परिस्थितीची तुलना करा जेथे तुम्हांला अंदाजे काढलेल्या संख्यांनी काम भागेल. अशा परिस्थितींची तीन उदाहरणे द्या.

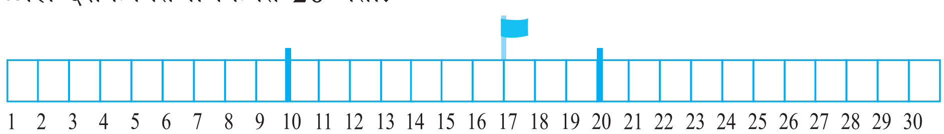
1.3.2 निकटीकरणाने जवळील दशकापर्यंत अंदाजे किंमत ठरविणे

खालील चित्र पहा.



(a) कोणते झेंडे 270 च्या तुलनेत 260 च्या अधिक जवळ आहेत?

(b) कोणते झेंडे 260 च्या तुलनेत 270 च्या अधिक जवळ आहेत? पट्टीवरील 10, 17 आणि 20 ची स्थाने पहा. 17 ही संख्या 10 च्या अधिक जवळ आहे का 20 च्या? 17 आणि 20 च्या मधील रिकामी जागा 17 आणि 10 मधील रिकाम्या जागेपेक्षा कमी आहे. म्हणूनच आपण 17 ची जवळील दशकपर्यंतची किंमत 20 घेतो.



आता 12 ही संख्या घ्या. ही पण 10 आणि 20 च्या मधे आहे. पण 12 ही 20 पेक्षा 10 च्या अधिक जवळ आहे. म्हणून आपण 12 ची जवळच्या दशकापर्यंतची किंमत 10 घेतो. तुम्ही 76 ची जवळच्या दशकापर्यंतची किंमत कोणती घ्याल? 80 हीच ना?

आपण पाहतो की 1, 2, 3 आणि 4 या संख्या 10 च्या तुलनेत 0 च्या अधिक जवळ आहेत. त्यामुळे आपण त्यांची किंमत 0 घेतो. 6, 7, 8 आणि 9 या 10 च्या जवळ आहेत. त्यामुळे आपण त्या किमती 10 घेतो. 5 ही संख्या 0 आणि 10 पासून समान अंतरावर आहे. त्यामुळे 5 ही संख्या नेहमी 10 घ्यावी असा संकेत आहे.

प्रयत्न करा

या संख्यांच्या जवळील दशकातील किमती काढा.

28	32	52	41	39	48
64	59	99	215	1453	2936

1.3.3 जवळील शतकापर्यंत संख्या

संख्या 410 ही 400 च्या अधिक जवळ आहे का 500 च्या अधिक जवळ आहे?

410 ही 400 च्या अधिक जवळ आहे. त्यामुळे ती जवळील शतकापर्यंत 400 घेतात.

संख्या 889 ही 800 आणि 900 च्या मधे आहे. ती 900 च्या अधिक जवळ आहे. त्यामुळे ती जवळील शतकापर्यंत 900 अशी घेतली जाते.

1 ते 49 संख्या 100 च्या तुलनेत 0 च्या अधिक जवळ आहे. त्यामुळे जवळच्या शतकापर्यंत घेताना 0 घेतात. 51 ते 99 पर्यंतच्या संख्या 0 च्या तुलनेत 100 च्या अधिक जवळ आहेत. त्यामुळे त्या जवळच्या शतकापर्यंत घेताना 100 घेतात.

50 ही संख्या 0 आणि 100 पासून समान अंतरावर आहे. त्यामुळे सर्वमान्य संकेतानुसार ती 100 घेतली जाते.

खालील संख्यांच्या जवळच्या (शतकापर्यंत) घेतलेल्या संख्या बरोबर आहेत का नाही ते तपासा.

841 → 800; 9537 → 9500; 49730 → 49700;

2546 → 2500; 286 → 300; 5750 → 5800;

168 → 200; 149 → 100; 9870 → 9800.

ज्या चूक आहेत त्या दुरुस्त करा.

1.3.4 जवळील हजारांपर्यंत संख्या

आपल्याला माहीत आहे, की 1 ते 499 पर्यंतच्या संख्या 1000 च्या तुलनेत 0 च्या अधिक जवळ आहेत. त्यामुळे संख्या जवळच्या हजारापर्यंत लिहिताना त्यांची किंमत 0 घेतात. 501 ते 999 पर्यंतच्या संख्या 0 च्या तुलनेत 1000 च्या अधिक जवळ आहेत. त्यामुळे संख्या जवळच्या हजारापर्यंत घेताना त्या 1000 घेतात.

संख्या 500 ही 1000 घेतात. खालील संख्यांच्या जवळच्या हजारापर्यंत घेतलेल्या संख्या तपासा आणि ज्या चूक आहेत त्या दुरुस्त करा.

2573 → 3000; 53552 → 53000;

6404 → 6000; 65437 → 65000;

7805 → 7000; 3499 → 4000

प्रयत्न करा

खाली दिलेल्या संख्या जवळच्या दशक, शतक, हजार, दशहजारच्या रूपांत पूर्ण करा.

दिलेल्या संख्या	अंदाजे जवळ	बदललेले रूप
75847	दशक	_________________
75847	शतक	_________________
75847	हजार	_________________
75847	दशहजार	_________________

1.3.5 संख्यांवरील क्रियांचे परिणाम समजून घेणे

आपण संख्यांची बेरीज कशी करतो? आपण नेमक्या रितीचा (algorithm) चा पद्धतशीर वापर करून संख्यांची बेरीज करतो. आपण संख्या लिहिताना एका स्थानावरील अंक एकाच स्तंभात लिहिला जाईल, याकडे लक्ष देतो. उदाहरणार्थ, 3946 + 6579 + 2050 ही बेरीज खालीलप्रमाणे लिहिली जाईल.

TTh	Th	H	T	O
	3	9	4	6
	6	5	7	9
+	2	0	5	0

नंतर आपण एकक स्थानातील संख्यांची बेरीज करतो. गरज पडल्यास आपण योग्य संख्या 'हातचा' म्हणून दशक स्थानात लिहितो. जसे की वरील उदाहरणात आहे मग याचप्रकारे दशक स्थानातील संख्यांची बेरीज करतो आणि असेच पुढे केले जाते. उर्वरित उदाहरण तुम्ही स्वतः पूर्ण करू शकता. या प्रक्रियेस अधिक वेळ लागतो.

अनेकदा आपल्याला अतिशय जलदगतीने उत्तर काढावे लागते. उदा., जेव्हा तुम्ही एखाद्या जत्रेत किंवा बाजारात काही रक्कम घेऊन जाता, तेव्हा आकर्षक वस्तूंच्या किमती आणि संख्या पाहून सर्वच खरेदी कराव्या असे वाटते. यासाठी तुम्हांला ज्या गोष्टींची खरेदी करायची आहे त्या वस्तूंच्या किमती लक्षात घेऊन आवश्यक असलेल्या रकमेचा विचार करायचा आहे.

एका विशिष्ट दिवशी एका व्यापाऱ्याला दोन ठिकाणाहून काही रक्कम मिळणार आहे. एका ठिकाणाहून ₹ 13,569 तर दुसऱ्या ठिकाणाहून ₹ 26,785 त्याच दिवशी संध्याकाळी त्याला कोणा एका व्यक्तीला ₹ 37,000 द्यायचे आहेत. तो संख्यांना जवळच्या हजारांमध्ये संख्यांना धरून लगेच कच्चे (रफ) उत्तर काढतो. तो खूश होतो की त्याच्याकडे पुरेशी रक्कम आहे.

तुम्हांला असे वाटते का, की त्याच्याकडे पुरेशी रक्कम असेल? कोणतीही रीत न करता तुम्ही हे सांगू शकता का?

शीला आणि मोहनला त्यांचे मासिक अंदाजपत्रक बनवायचे आहे. त्यांना वाहतूक, शालेय गरजा, किराणा सामान, दूध आणि कपडे इ. वर होणाऱ्या मासिक खर्चाची माहिती आहे. तसेच इतर नियमित खर्चाचीदेखील माहिती आहे. या महिन्यात त्यांना फिरायला जायचे आहे तसेच भेटवस्तूदेखील घ्यायच्या आहेत. ते या सर्व गोष्टींवर होणारा खर्च समजून घेतात. त्यांची बेरीज करून हे समजून घेतात की त्यांच्याजवळ एवढी पुरेशी रक्कम आहे की नाही?

ज्याप्रमाणे व्यापाऱ्याने केले तसे ते हजारांपर्यंत निकटीकरण करतील का?

अशा आणखी पाच परिस्थितीबद्दल विचार करा आणि चर्चा करा. जेथे आपल्याला बेरीज किंवा वजाबाकीचा विचार करावा लागतो.

आपण या सर्वांमध्ये एकाच स्थानापर्यंत निकटीकरण करतो का?

संख्यांवरील क्रियांच्या परिणामांच्या अभ्यासाचा कोणताही निश्चित नियम नाही. उदाहरणातील अचूकता किती हवी, आकलन किती लवकर व्हायला पाहिजे तसेच सर्वांत महत्त्वाचे म्हणजे अंदाजे उत्तर किती योग्य हवे या सर्वांवर पद्धत अवलंबून असते.

1.3.6 बेरीज किंवा वजाबाकीचा अंदाज करणे.

आपण वर पाहिले की कोणत्याही संख्येचे आपण एका स्थानापर्यंत निकटीकरण करू शकतो. व्यापाऱ्याने रक्कम जवळच्या हजार स्थानापर्यंत पूर्ण केली आणि त्याच्याकडे पुरेशी रक्कम आहे म्हणून समाधान मानले. जेव्हा तुम्हांला बेरीज किंवा वजाबाकी करायची असेल तेव्हा आपण का निकटीकरण करतो आहे आणि त्यामुळे कोणत्या स्थानापर्यंत निकटीकरण करायचे आहे हे तुम्हाला माहीत हवे. खालील उदाहरण पाहा.

उदाहरण 5 : 5,290 + 17,986 हे सोडवा.

उकल : आपल्याला ठाऊक आहे की, 17,986 > 5,290

आपण जवळच्या हजारपर्यंत निकटीकरण करू या.

17,986		18,000
+5,290		+ 5,000
अंदाजे उत्तर	=	23,000

ही पद्धत योग्य आहे का? आपण अचूक उत्तर काढून जाणून घेऊ शकता की हे सोडवलेले योग्य आहे की नाही?

उदाहरण 6 : 5,673 – 436 सोडवा.

उकल : सुरुवातीला आपण हजारपर्यंत निकटीकरण करू या. (का?)

5,673	6,000
– 436	– 0
अंदाजे उत्तर	= 6,000

हे योग्य उत्तर नाही. हे योग्य का नाही? अगदी जवळचे उत्तर मिळवण्यासाठी संख्येचे जवळच्या शंभरपर्यंत निकटीकरण करण्याचा प्रयत्न करु.

5,673 बदललेले रूप	5,700
– 436 बदललेले रूप	– 400
अंदाजे उत्तर	5,300

हे एक चांगले आणि अधिक योग्य उत्तर आहे.

1.3.7 गुणाकाराचा अंदाज करणे.

आपण गुणाकाराचा अंदाज कसा करतो ?

19×78 चे अंदाजे उत्तर काय येईल ?

स्पष्ट आहे की गुणाकाराचे उत्तर 2000 पेक्षा कमी आहे का? जर आपण 19 ला निकटतम दशकापर्यंत पूर्ण केले तर आपल्याला 20 मिळतील आणि मग 78 निकटतम दशकापर्यंत पूर्ण केले तर 80 मिळतील आता, $20 \times 80 = 1600$ होतात.

63×182

जर आपण दोन्ही संख्यांना निकटतम शतकापर्यंत पूर्ण केले तर $100 \times 200 = 20{,}000$ येतात. हे खऱ्या गुणाकारापेक्षा खूपच जास्त आहेत. म्हणून आता आपण काय करावे? एक अधिक योग्य उत्तर काढण्यासाठी आपण 63 आणि 182 या दोन्हींना जवळच्या दशकांमध्ये बदलूया जे क्रमशः 60 आणि 180 आहेत. म्हणून $60 \times 180 = 10{,}800$ मिळतात. हे एक अधिक चांगले उत्तर आहे. परंतु हे इतक्या लवकर नाही मिळत. जर आपण 63 ऐवजी 60 आणि 182 ऐवजी 200 घेतले तर $60 \times 200 = 12{,}000$ हा गुणाकाराचा अंदाज अधिक चांगला आणि चटकन मिळणारा आहे.

संख्येच्या निकटीकरणाचा (round off) एक सर्वसाधारण नियम म्हणजे गुणाकारातील संख्यांचे जवळच्या मोठ्यात मोठ्या स्थानापर्यंत निकटीकरण करून घ्या व नंतर गुणाकार करा. अशाप्रकारे वरील उदाहरणात आपण 63 ला दशकात आणि 182 ला दशकात पूर्ण केले आहे.

आता वरील नियमाचा उपयोग करून

81×479 चे अंदाजे उत्तर काढा.

479 चे 500 पर्यंत निकटीकरण केले. (शतकापर्यंत निकटीकरण केले)

81 चे 80 पर्यंत निकटीकरण केले. (दशकापर्यंत निकटीकरण केले)

म्हणून काढलेले उत्तर $= 500 \times 80 = 40{,}000$.

प्रयत्न करा

खालील गुणाकार अंदाजे करा.

(a) 87×313 (b) 9×795

(c) 898×785 (d) 958×387

अशीच आणखी पाच उदाहरणे तयार करा आणि सोडवा.

तुमच्या अंदाजाचा एक महत्त्वपूर्ण उपयोग म्हणजे तुम्ही तुमची उत्तरे पडताळून पाहू शकता. समजा, तुम्ही 37×1889 चे उत्तर काढले, परंतु तुम्हांला याची खात्री नाही की उत्तर बरोबर आहे

की नाही. या गुणाकाराची चटकन आणि अधिक अभ्यासपूर्ण उकल $40 \times 2000 = 80000$ अशी आहे. जर तुमचे उत्तर 80,000 च्या जवळ आहे तर कदाचित तुमचे उत्तर योग्य असू शकेल. दुसरे म्हणजे, जर उत्तर 8000 किंवा 8,00,000 च्या जवळ जाणारे असेल तर नक्कीच गुणाकार करतानाच चूक झाली असेल.

उदाहरणसंग्रह 1.3

1. सर्वसाधारण नियमांचा उपयोग करून खाली दिलेली सर्व उदाहरणे अंदाजे सोडवा.

   (a) $730 + 998$ (b) $796 - 314$

   (c) $12{,}904 + 2{,}888$ (d) $28{,}292 - 21{,}496$

   बेरीज, वजाबाकी यांची आणखी दहा उदाहरणे घ्या आणि त्यांची उत्तरे अंदाजाने काढा.

2. एक कच्चा अंदाज (100 पर्यंत निकटीकरण करून) आणि एक जवळचा अंदाज (10 पर्यंत निकटीकरण करून) काढा.

   (a) $439 + 334 + 4{,}317$ (b) $1{,}08{,}734 - 47{,}599$

   (c) $8325 - 491$ (d) $4{,}89{,}348 - 48{,}365$

   या प्रकारची आणखी चार उदाहरणे तयार करा.

3. सर्वसाधारण नियम वापरून खालील गुणाकार अंदाजे करा.

   (a) 578×161 (b) 5281×3491

   (c) 1291×592 (d) 9250×29

   या प्रकारची आणखी चार उदाहरणे तयार करा.

1.4 कोष्टकांचा वापर

सुमनने बाजारातून प्रतिपुस्तक 10 रु. प्रमाणे 6 स्वाध्यायपुस्तिका खरेदी केल्या. तिची बहीण सीमाने अशाच 7 स्वाध्यायपुस्तिका खरेदी केल्या. त्यांनी दिलेली एकूण रक्कम काढा.

सीमाने याप्रकारे रक्कम काढली	**सुमनने याप्रकारे रक्कम काढली**
$6 \times 10 + 7 \times 10$	$6 + 7 = 13$
$= 60 + 70$	13×10
$= 130$ रु.	$= 130$ रु.

तुम्ही पाहू शकता की सीमा आणि सुमन यांच्या उत्तर काढण्याच्या पद्धतीमध्ये थोडा फरक आहे. परंतु दोघींची उत्तरे समान आहेत आणि ती अचूक आहेत, का?

सीमा म्हणते की सुमनने $7 + 6 \times 10$ करून उत्तर मिळवले आहे.

अप्पू सांगतो की $7 + 6 \times 10 = 7 + 60 = 67$ परंतु मीराने जे उत्तर काढले ते हे नाही. आता, तीनही विद्यार्थी गोंधळून गेले.

अशा परिस्थितीत गोंधळ दूर करण्यासाठी आपण कंसांचा (brackets) वापर करू शकतो. आपण कंसाचा वापर करून 6 आणि 7 च्या बेरजेचा एक समूह बनवू शकतो. त्यामुळे त्यांची बेरीज

ही एक संख्या आहे हे कळेल. ज्यामुळे उत्तर पुढीलप्रमाणे मिळेल.

$(6 + 7) \times 10 = 13 \times 10$

सुमनने असेच केले आहे. तिने आधी 6 आणि 7 ची बेरीज केली मग आलेल्या उत्तराला 10 ने गुणले.

कंसांचा वापर आपल्याला स्पष्टपणे सांगतो की *आधी कंसामध्ये ( ) दिलेल संख्यांना एका संख्येत बदलून घ्या आणि मग बाहेर राहिलेल्या क्रिया करा, जे या ठिकाणी 10 ने गुणायचे होते.*

प्रयत्न करा

1. कंसांचा वापर करून खाली दिलेल्या प्रत्येक उदाहरणासाठी पदावली लिहा.
   (a) नऊ आणि दोन यांच्या बेरजेला चारने गुणा.
   (b) अठरा आणि सहा यांच्यातील फरकाला चारने भागा.
   (c) पंचेचाळीसला तीन आणि दोनच्या बेरजेच्या तिपटीने भागा.
2. $(5 + 8) \times 6$ साठी तीन वेगवेगळी शाब्दिक उदाहरणे तयार करा.
   (एक उदाहरण दिले आहे : सोनी आणि रीताने 6 दिवस काम केले. सोनीने दररोज 5 तास आणि रीता दररोज 6 तास काम करते. तर दोघींनी मिळून एका आठवड्यात किती तास काम केले?
3. खाली दिलेल्या गणितासाठी 5 शाब्दिक उदाहरण तयार करा. जिथे कंसांचा वापर करावा लागेल.
   (a) $7(8 - 3)$ (b) $(7 + 2)\ (10 - 3)$

1.4.1 कंसांचा विस्तार

आता पहा की, कंसांचा वापर आणि कंसांचा विस्तार करणे यामुळे आपल्या उदाहरण सोडवण्याला क्रमबद्धतेमुळे साहाय्य होते. तुम्हांला असे वाटते का की कंसांचा वापर न करता ज्या पायऱ्या आपण सोडवतो त्या आपल्याला समजतील?

(i) $7 \times 109 = 7 \times (100 + 9) = 7 \times 100 + 7 \times 9 = 700 + 63 = 763$

(ii) $102 \times 103 = (100 + 2) \times (100 + 3)$

$= 100 \times 100 + 2 \times 100 + 100 \times 3 + 2 \times 3$

$= 10{,}000 + 200 + 300 + 6 = 10{,}000 + 500 + 6$

$= 10{,}506$

(iii) $17 \times 109 = (10 + 7) \times 109 = 10 \times 109 + 7 \times 109$

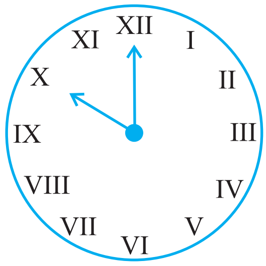
$= 10 \times (100 + 9) + 7 \times (100 + 9)$

$= 10 \times 100 + 10 \times 9 + 7 \times 100 + 7 \times 9$

$= 1000 + 90 + 700 + 63 = 1{,}790 + 63 = 1{,}853$

1.5 रोमन संख्याचिन्हे

आतापर्यंत आपण हिंदू अरेबिक संख्यापद्धती (Hindi Arabic Numerals) चाच वापर केला आहे. ही एकमेव संख्यापद्धती नाही. संख्याचिन्हे लिहिण्याच्या जुन्या पद्धतींमधील एक म्हणजे रोमन



संख्याचिन्हे (Roman Numerals) पद्धती पण आहे. या पद्धतीचा आजही अनेक ठिकाणी वापर केला जातो. उदा., आपण घड्याळात रोमन संख्याचिन्हे पाहतो. शालेय वेळापत्रकामध्ये वर्गांसाठीदेखील यांचा उपयोग केला जातो.

अशी आणखी तीन उदाहरणे आठवा, जिथे रोमन संख्याचिन्हे वापरली जातात.

रोमन संख्याचिन्हे

I,	II,	III,	IV,	V,	VI,	VII,	VIII,	IX,	X

क्रमशः 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 या संख्या व्यक्त करतात. यानंतर 11 साठी XI 12 साठी XII,... 20 साठी XX वापरले जातात.

या पद्धतीचे आणखी काही संख्याचिन्हे हिंदू-अरेबिक संख्यांबरोबर खाली नमूद केले आहेत.

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

या पद्धतीचे नियम पुढीलप्रमाणे-

(a) जर एखाद्या चिन्हाची पुनरावृत्ती होत असेल तर जितक्या वेळा ते चिन्ह आले आहे तितक्या वेळा बेरीज करुन ती संख्या लिहितात. जसे की II म्हणजे 2, XX म्हणजे 20 आणि XXX = 30.

(b) कोणतेही चिन्ह तीनपेक्षा जास्त वेळा येत नाही. पण V, L आणि D यांची कधी पुनरावृत्ती होत नाही.

(c) जर कमी किमतीचे चिन्ह जास्त किमतीच्या चिन्हाच्या उजवीकडे दिले तर त्याची किंमत जास्त चिन्हात मिळवली जाते.

VI = 5 + 1 = 6 XII = 10 + 2 = 12

LXV = 50 + 10 + 5 = 65

(d) जर कमी किमतीचे एखादे चिन्ह ज्याला किमतीच्या चिन्हाच्या डावीकडे आले तर जास्त किमतीतून कमी किंमत वजा केली जाते. जसे-

IV = 5 – 1 = 4 IX = 10 – 1 = 9

XL = 50 – 10 = 40 XC = 100 – 10 = 90

(e) V, L आणि D ही चिन्हे जास्त किमतीच्या चिन्हाच्या डावीकडे लिहिली जात नाहीत. म्हणजेच, V, L आणि D यांच्या किमती कधीही वजा केल्या जात नाहीत.

I हे चिन्ह केवळ V आणि X मधून वजा केले जाऊ शकते. X हे चिन्ह केवळ L, M आणि C मधून वजा केले जाऊ शकते.

या नियमांचे पालन केल्याने आपणाला हे मिळेल.

1	=	I	20	=	XX
2	=	II	30	=	XXX
3	=	III	40	=	XL
4	=	IV	50	=	L
5	=	V	60	=	LX
6	=	VI	70	=	LXX
7	=	VII	80	=	LXXX
8	=	VIII	90	=	XC
9	=	IX	100	=	C
10	=	X			

(a) वरील सारणीमध्ये राहिलेल्या संख्या रोमन पद्धतीत लिहा.

(b) XXXX, VX, IC, XVV ... इ. लिहिले जात नाही. का ते सांगु शकाल का?

उदाहरण 7 : खाली दिलेल्या संख्या रोमन संख्याचिन्हांत लिहा.

(a) 69 (b) 98

उकल : (a) 69 = 60 + 9
= (50 + 10) + 9
= LX + IX

म्हणून 69 = LX IX

(b) 98 = 90 + 8
= (100 – 10) + 8
= XC + VIII

म्हणून 98 = XCVIII

प्रयत्न करा

रोमन पद्धतीमध्ये लिहा.

1. 73
2. 92

आपण काय चर्चा केली?

1. दोन संख्यांमध्ये अधिक अंक असलेली संख्या मोठी असते. जर दोन्हींमध्ये अंकांची संख्या समान असेल तर आपण सर्वांत डावीकडील अंकांची तुलना करतो आणि ज्या संख्येत तो अंक मोठा असेल ती संख्या पण मोठी असते. जर हे अंक पण समान असतील तर याचप्रकारे पुढे तुलना केली जाते.
2. दिलेल्या अंकांपासून संख्या तयर करताना कोणत्या अटी दिल्यात ते पाहावे लागते. जसे, 7, 8, 3 आणि 5 पासून कोणताही अंक पुन्हा पुन्हा न घेता चार अंकी मोठ्यांत मोठी संख्या बनवण्यासाठी 8 ला सर्वांत डावीकडे ठेवावे लागेल आणि मग त्यापेक्षा लहान अंक पुढे पुढे ठेवावे लागतील.

3. 1000 ही चार अंकी सर्वांत लहान संख्या आहे. याचाच अर्थ तीन अंकी सर्वांत मोठी संख्या 999 आहे. पाच अंकी सर्वांत मोठी संख्या 10000 आहे, याचा अर्थ चार अंकी सर्वांत मोठी संख्या 9999 आहे.

   याचप्रकारे पुढे, सहा अंकी सर्वात लहान संख्या 100000 (एक लाख) आहे, याचाच अर्थ पाच अंकी सर्वात मोठी संख्या 99999 आहे. हाच क्रम आणखी मोठ्या संख्यांसाठी पण लागू होतो.

4. स्वल्पविरामांचा उपयोग संख्या लिहिताना किंवा वाचताना उपयुक्त ठरतो. भारतीय संख्यापद्धतीमध्ये पहिला स्वल्पविराम उजवीकडून तीन अंकांनंतर आणि मग दोन-दोन अंकांनंतर दिला जातो. हे स्वल्पविराम हजार, लाख, कोटी यांना वेगवेगळे करतात. आंतरराष्ट्रीय संख्यापद्धतीत स्वल्पविराम उजवीकडून तीन-तीन अंकांनंतर दिले जातात. तीन आणि सहा अंकांनंतर दिलेले स्वल्पविराम हजार आणि मिलियन यांना वेगळे करतात.

5. दैनंदिन जीवनात अनेक ठिकाणी आपल्याला मोठमोठ्या संख्यांची गरज पडते. जसे की, शाळेत शिकणाऱ्या विद्यार्थ्यांची संख्या, गाव किंवा शहराची लोकसंख्या, मोठमोठे व्यवहार तसेच गाव आणि शहरातील अंतर इ.

6. लक्षात ठेवा, किलोचा अर्थ- हजार, सेंटीचा अर्थ शंभरावा भाग, मिलीचा अर्थ हजारावा भाग, अशाप्रकारे, 1 किलोमीटर = 1000 मीटर, 1 मीटर = 100 सेंटिमीटर = 1000 मिलिमीटर.

7. अनेकदा आपल्याला अगदी अचूक संख्यांची गरज नसते. उलट एक अंदाज पुरेसा असतो. जसे की, एका आंतरराष्ट्रीय हॉकी सामन्याच्या प्रेक्षकांची संख्या सांगताना आपण म्हणतो की, जवळपास 51000 प्रेक्षकांनी सामना पाहिला, या ठिकाणी आपल्याला प्रेक्षकांच्या निश्चित संख्येची गरज नाही.

8. उदाहरण सोडवताना कोणत्याही संख्येला एका ठरावीक मर्यादेपर्यंत पूर्ण करावे लागते जसे की 4117 चे बदललेले रूप- हजारांत 4000 तसेच शतकामध्ये 4100 केले जाईल. परंतु हे गरजेवर अवलंबून आहे.

9. अनेकदा आपल्याला संख्यांवर क्रिया करून येणाऱ्या उत्तरांची अंदाजे उकल पण उपयुक्त ठरते. अशा उत्तरांमध्ये आपण वापरल्या जाणाऱ्या संख्यांना पूर्ण करून चटकन उत्तर काढता येऊ शकते.

पूर्ण संख्या

प्रकरण 2

2.1 प्रस्तावना

आपल्याला ठाऊक आहे की आपण संख्या मोजायला सुरुवात करतो तेव्हा आपण 1, 2, 3, 4,... चा उपयोग करतो. अंक सुरू करताना या संख्या आपल्या डोळ्यांसमोर येतात. म्हणून गणिततज्ज्ञ या मोजसंख्यांना (Counting Numbers) नैसर्गिक संख्या (Natural Numbers) म्हणतात.

मागची (आधीची) संख्या आणि पुढची संख्या

दिलेल्या नैसर्गिक संख्येत 1 मिळवला तर तुम्हांला पुढची नैसर्गिक संख्या मिळेल. म्हणजेच तुम्ही तिची पुढची संख्या (successor) मिळवू शकता.

16 ची पुढची संख्या 16 + 1 = 17, 19 ची 19 +1 = 20 आहे आणि अशाप्रकारे पुढे चालू राहील.

16 ही संख्या 17 या संख्येच्या आधी येते. आपण म्हणू शकतो की 17 ची मागची संख्या आहे. (predecessor) 17–1=16 आहे 20 ची 20 – 1 = 19 आहे.

प्रयत्न करा

1. 19, 1997, 12000, 49, 100000, 2440701, 100199 आणि 208090 च्या मागच्या आणि पुढच्या संख्या लिहा.
2. अशी कोणती नैसर्गिक संख्या आहे की जिला मागची संख्या नाही?
3. अशी कोणती नैसर्गिक संख्या आहे की जिला पुढची संख्या नाही? शेवटची नैसर्गिक संख्या कोणती?

3 या संख्येला एक मागची संख्या व एक पुढची संख्या आहे. 2 बद्दल तुम्हांला काय वाटते? याची पुढची संख्या 3 आहे आणि मागची संख्या 1 आहे. 1 या संख्येला मागची आणि पुढची दोन्ही संख्या आहेत का?

आपण आपल्या शाळेतील मुलांची संख्या मोजू शकतो. आपण एखाद्या शहरात राहणाऱ्या व्यक्तींची संख्या मोजू शकतो. आपण भारतात राहणाऱ्या लोकांची संख्या पण मोजू शकतो. संपूर्ण जगातील लोकांची संख्या पण मोजता येईल. कदाचित आपण आकाशात दिसणारे तारे किंवा आपल्या डोळ्यांवरील केस मोजू शकणार नाही परंतु जर मोजावे लागले तर त्यासाठीदेखील एक संख्या असेलच. मग आपण त्या संख्येत 1 मिळवून आणखी मोठी संख्या मिळवू शकतो. अशा पद्धतीने आपण दोन व्यक्तींच्या डोळ्यावरील केस मोजून त्यांची संख्या लिहू शकतो.

आतापर्यंत हे स्पष्ट झाले अशी सर्वांत मोठी नैसर्गिक संख्या कोणतीही नाही. वरील प्रश्नांव्यतिरिक्त जेव्हा आपल्याला नैसर्गिक संख्या वापराव्या लागतात, तेव्हा आपल्यासमोर अनेक प्रश्न येतात. तुम्ही अशा प्रश्नांबाबत विचार करा आणि मित्रांबरोबर चर्चा करा. तुम्ही या प्रश्नांमधील अनेकांची उत्तरे काढू शकणार नाही.

2.2 पूर्ण संख्या

आपण पाहिले आहे की नैसर्गिक संख्या 1 च्या मागची संख्या नाही. 0 ला आपण नैसर्गिक संख्याच्या मागची संख्या म्हणून मानतो.

नैसर्गिक संख्या शून्यच्या बरोबर घेतल्यास पूर्ण संख्या संच (Whole numbers) बनतो.

प्रयत्न करा

1. सर्व नैसर्गिक संख्या या पूर्ण संख्यादेखील आहेत का?
2. सर्व पूर्ण संख्या या नैसर्गिक संख्या आहेत का?
3. सर्वांत लहान पूर्ण संख्या कोणती?
4. सर्वांत मोठी पूर्ण संख्या कोणती?

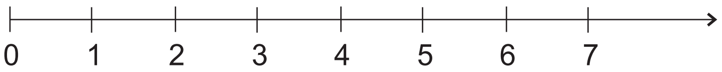
या पूर्वीच्या इयत्तांमध्ये तुम्ही पूर्ण संख्यावरील सर्व मूलभूत क्रिया जसे की– बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार आणि भागाकार करणे शिकला आहात. तुम्ही हेही जाणता की यांचा उत्तर काढण्यासाठी कशाप्रकारे उपयोग केला जातो. चला तर आता या क्रिया एका संख्यारेषेवर करूया. परंतु त्याआधी 'संख्यारेषा' बद्दल जाणून घेऊया.

2.3 संख्यारेषा

एक रेषा काढा. त्यावर एक बिंदू घ्या. त्या बिंदूला '0' निर्देशांक द्या. 0 च्या उजवीकडे आणखी एक बिंदू काढा. त्याला 1 निर्देशांक द्या.

0 आणि 1 यामधील अंतराला 1 एकक अंतर (unit distance) म्हणतात. या रेषेवर 1 च्या उजवीकडे 1 एकक अंतरावर बिंदू काढा आणि 2 निर्देशांक द्या. अशाप्रकारे तुम्ही संख्यारेषेवर एक एकक अंतरावर बिंदूंना 3, 4, 5,....... या प्रमाणे निर्देशित करा. तुम्ही उजव्या बाजूने कोणत्याही पूर्ण संख्येपर्यंत जाऊ शकता.

खाली दिलेली रेषा पूर्ण संख्यांसाठी संख्यारेषा आहे.



बिंदू 2 आणि 4 मधील अंतर किती आहे? हे अंतर निश्चितच 2 एकक आहे. तुम्ही बिंदू 2 आणि 6 तसेच 2 आणि 7 मधील अंतर सांगू शकता का?

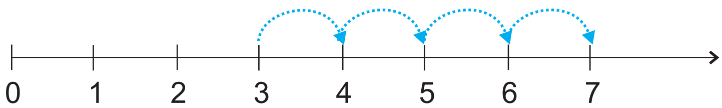
संख्यारेषेवर तुम्ही पाहू शकता की 7 ही संख्या 4 या संख्येच्या उजव्या बाजूला आहे आणि 7 ही संख्या 4 पेक्षा मोठी आहे म्हणजेच $7 > 4$ आहे. 8 ही संख्या 6 च्या उजव्या बाजूला आहे आणि $8 > 6$ आहे. या दृश्यांच्या आधारे आपण म्हणू शकतो की दोन पूर्ण संख्यांमध्ये जी संख्या रेषेवर इतर संख्यांच्या उजवीकडे असते ती मोठी असते. आपण असेही म्हणू शकतो की डाव्या बाजूला असणाऱ्या पूर्ण संख्या लहान असतात. उदाहरणार्थ, $4 < 9$ आहे. 4 ही 9 च्या डावीकडे आहे याचप्रकारे, $12 > 5$. 12 ही 5 च्या उजवीकडे आहे.

तुम्ही 10 आणि 20 बद्दल सांगू शकता का?

30, 12 आणि 18 यांचे संख्यारेषेवर स्थान पहा. कोणती संख्या सर्वांत डावीकडे आहे? तुम्ही 1005 आणि 9756 बद्दल सांगू शकाल का की कोणती संख्या दुसऱ्या संख्येच्या उजवीकडे आहे? संख्यारेषेवरील 12 नंतरची आणि 7 पूर्वीची संख्या सांगा.

संख्यारेषेवर बेरीज

पूर्ण संख्यांची बेरीज संख्यारेषेवर दाखवता येते. चला 3 आणि 4 ची बेरीज पाहूया.

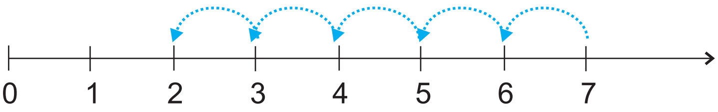


बाणाच्या टोकाला बिंदू 3 आहे. 3 पासून सुरुवात करा. आपल्या या संख्येत 4 मिळवायचे आहेत म्हणून आपण उजवीकडे वर दाखविल्याप्रमाणे 4 पावले 3 ते 4, 4 ते 5, 5 ते 6 आणि 6 ते 7 जाऊ. पावलाच्या शेवटी बाणाच्या दिशेला बिंदू 7 आहे. याप्रकारे 3 आणि 4 ची बेरीज 7 म्हणजेच $3 + 4 = 7$.

प्रयत्न करा

संख्यारेषेवर वापर करून $4 + 5$; $2 + 6$; $3 + 5$ आणि $1 + 6$ काढा.

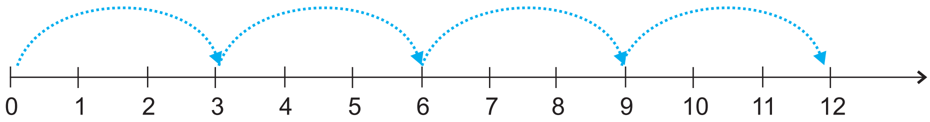
वजाबाकी – दोन पूर्ण संख्यांची वजाबाकीदेखील संख्यारेषेवर दाखवता येते. चला $7 - 5$ हे काढूया.



बाणाच्या टोकाला बिंदू 7 आहे. 7 पासून सुरुवात करा. आपल्याला 5 कमी करायचे आहेत म्हणून आपण डावीकडे 1 एककाची 5 पावले जाऊया. आपण बिंदू 2 वर पोहोचू. आपल्याला $7 - 5 = 2$ हे मिळते.

प्रयत्न करा

संख्यारेषेचा वापर करून $8 - 3$; $6 - 2$ आणि $9 - 6$ काढा.



गुणाकार : आता आपण संख्यारेषेवर पूर्ण संख्यांचा गुणाकार पाहूया.

चला, $4 \times 3 =$ किती हे काढू.

0 पासून सुरुवात करा आणि उजवीकडे एकदा 3 एककांपर्यंत चला. अशाप्रकारे 4 वेळा जा. तुम्ही कोठे पोचलात? तुम्ही 12 वर पोहोचलात. म्हणून आपण म्हणतो की, $4 \times 3 = 12$.

प्रयत्न करा

संख्यारेषेचा वापर करून 2×6; 3×3 आणि 4×2 काढा.

उदाहरणसंग्रह 2.1

1. 10999 च्या नंतर येणाऱ्या तीन नैसर्गिक संख्या लिहा.
2. 10001 च्या लगतची आधी नैसर्गिक संख्या लिहा.
3. सर्वांत लहान पूर्ण संख्या कोणती?
4. 32 आणि 53 च्या दरम्यान किती पूर्ण संख्या आहेत?
5. खालील संख्यांच्या पुढील संख्या लिहा.
   (a) 2440701 (b) 100199 (c) 1099999 (d) 2345670
6. खालील संख्यांच्या मागील संख्या लिहा.
   (a) 94 (b) 10000 (c) 208090 (d) 7654321
7. खाली दिलेल्या संख्यांच्या जोड्यांपैकी प्रत्येक जोडीतील कोणती पूर्ण संख्या संख्यारेषेवर दुसऱ्या संख्येच्या डावीकडे आहे हे त्यांच्यामध्ये योग्य चिन्हांचा (>, <) उपयोग करून दाखवा.
   (a) 530, 503 (b) 370, 307
   (c) 98765, 56789 (d) 9830415, 10023001

8. खालील विधानांपैकी कोणती विधाने सत्य आणि कोणती असत्य आहेत?
   (a) शून्य ही सर्वांत लहान नैसर्गिक संख्या आहे.
   (b) 400 ही 399 च्या आधीची संख्या आहे.
   (c) शून्य ही सर्वांत लहान पूर्ण संख्या आहे.
   (d) 600 ही संख्या 599 च्या पुढची संख्या आहे.
   (e) सर्व नैसर्गिक संख्या या पूर्ण संख्या आहेत.
   (f) सर्व पूर्ण संख्या या नैसर्गिक संख्या आहेत.
   (g) दोन अंकी पूर्ण संख्येच्या आधीची संख्या कधीही एक अंकी असत नाही.
   (h) 1 ही सर्वांत लहान संख्या आहे.
   (i) 1 या नैसर्गिक संख्येच्या आधी कोणतीही संख्या नाही.
   (j) 1 या पूर्ण संख्येच्या आधी कोणतीही संख्या नसते.
   (k) 13 ही पूर्ण संख्या 11 आणि 12 या संख्यांच्या दरम्यान येते.
   (l) 0 या पूर्ण संख्येच्या आधी कोणतीही संख्या नसते.
   (m) दोन अंकी संख्येच्या पुढील संख्या नेहमी दोन अंकी संख्याच असते.

2.4 पूर्ण संख्यांची वैशिष्ट्ये

जेव्हा आपण पूर्ण संख्यांवरील विविध क्रियांचा जवळून अभ्यास करतो तेव्हा आपल्याला अनेक वैशिष्ट्ये कळतात. या वैशिष्ट्यांचा उपयोग या संख्या चांगल्याप्रकारे समजण्यासाठी होतो. तसेच, या वैशिष्ट्यांमुळे अनेक क्रिया सोप्यादेखील होतात.

हे करा

तुमच्या वर्गातील प्रत्येक विद्यार्थ्याला कोणत्याही दोन पूर्ण संख्यांची बेरीज करायला सांगा. त्यांचे उत्तर प्रत्येक वेळेस पूर्ण संख्याच आले का? तुमच्या बेरजा पुढीलप्रमाणे असू शकतात. पूर्ण संख्यांच्या अशा 5 जोड्या घेऊन बेरजा करा. प्रत्येक बेरीज एक पूर्ण संख्याच येते का?

7	+	8	=	15, एक पूर्ण संख्या
5	+	5	=	10, एक पूर्ण संख्या
0	+	15	=	15, एक पूर्ण संख्या
.	+	.	=	...
.	+	.	=	...

तुम्हांला पूर्ण संख्यांची अशी जोडी मिळाली का की ज्याचे उत्तर पूर्ण संख्या येत नाही? अशा कोणत्याही दोन पूर्ण संख्या मिळणार नाही ज्यांचे उत्तर पूर्ण संख्या नसते. आपण म्हणतो की दोन पूर्ण संख्यांची बेरीज एक पूर्ण संख्याच असते. पूर्ण संख्यांच्या बेरजेतून पूर्ण संख्याच मिळते म्हणून पूर्ण संख्यासंच बेरजेमुळे संवृत्त (Closed) बनतो. याला पूर्ण संख्यांच्या बेरजेचा संवृत्ततेचा (Closure property) गुणधर्म म्हणतात.

पूर्ण संख्या गुणाकाराच्या दृष्टीनेदेखील संवृत्त आहेत का? तुम्ही याचा पडताळा कशाप्रकारे घेऊ शकता?

तुमचे गुणाकार खालील प्रकारे असू शकतात.

7	×	8	=	56, एक पूर्ण संख्या
5	×	5	=	25, एक पूर्ण संख्या
0	×	15	=	0, एक पूर्ण संख्या
.	×	.	=	...
.	×	.	=	...

दोन पूर्ण संख्यांचा गुणाकारदेखील एक पूर्ण संख्याच असते. म्हणून आपण म्हणू शकतो की, पूर्ण संख्यासंच गुणाकाराच्या दृष्टीने पूर्ण संख्यासंच संवृत्त (Closed) आहे.

संवृत्ततेचा गुणधर्म – पूर्ण संख्या या बेरीज तसेच गुणाकारासाठी संवृत्त (Closed) असतात.

विचार करा, चर्चा करा आणि लिहा.

1. पूर्ण संख्या वजाबाकीसाठी संवृत्त नसतात का?
   तुम्ही केलेल्या वजाबाकी खालील प्रकारच्या असू शकतात.
   तुम्ही मनाने काही उदाहरणे द्या आणि वरील विधानाचे समर्थन करा.

6	–	2	=	4, एक पूर्ण संख्या
7	–	8	=	?, एक पूर्ण संख्या नाही
5	–	4	=	1, एक पूर्ण संख्या
3	–	9	=	?, एक पूर्ण संख्या नाही

2. भागाकाराच्या दृष्टीने पूर्ण संख्या संवृत्त नसतात का?
   खालील तक्ता पाहा.

8	÷	4	=	2, एक पूर्ण संख्या
5	÷	7	=	$\frac{5}{7}$, एक पूर्ण संख्या नाही
12	÷	3	=	4, एक पूर्ण संख्या
6	÷	5	=	$\frac{6}{5}$, एक पूर्ण संख्या नाही

तुम्ही मनाने काही उदाहरणे घ्या आणि वरील विधानाचे समर्थन करा.

शून्याने भागणे

एका संख्येने भागणे याचा अर्थ होतो की ती संख्या वारंवार वजा करणे.

चला $8 \div 2$ सोडवू.

8 मधून 2 पुन्हापुन्हा वजा करा.

$$\begin{array}{rrl} & 8 & \\ - & 2 & \text{........ } 1 \\ & 6 & \\ - & 2 & \text{........ } 2 \\ & 4 & \\ - & 2 & \text{........ } 3 \\ & 2 & \\ - & 2 & \text{........ } 4 \\ & 0 & \end{array}$$

किती वेळा वजा केल्यावर आपण 0 पर्यंत पोहोचतो?

= चार वेळा

म्हणून, आपण $8 \div 2 = 4$ लिहितो.

ही पद्धत वापरून $24 \div 8$ आणि $16 \div 4$ सोडवा.

चला, आता $2 \div 0$ हे सोडवण्याचा प्रयत्न करू.

$$\begin{array}{rrl} & 2 & \\ - & 0 & \text{........ } 1 \\ & 2 & \\ - & 0 & \text{........ } 2 \\ & 2 & \\ - & 0 & \text{........ } 3 \\ & 2 & \\ - & 0 & \text{........ } 4 \\ & 2 & \\ & \vdots & \quad\vdots \end{array}$$

प्रत्येक वेळी वजा करूनही आपल्याला पुन्हा 2 च मिळतात. ही क्रिया कधी संपेल का? नाही.

आपण असे म्हणतो की, $2 \div 0$ हे सांगता येत नाही.

चला, $7 \div 0$ सोडवण्याचा प्रयत्न करू.

$$\begin{array}{rrl} & 7 & \\ - & 0 & \text{........ } 1 \\ & 7 & \\ - & 0 & \text{........ } 2 \\ & 7 & \\ - & 0 & \text{........ } 3 \\ & 7 & \\ & \vdots & \quad\vdots \end{array}$$

पुन्हा आपल्याला वजाबाकीच्या कोणत्याही टप्प्यावर 0 मिळत नाही.

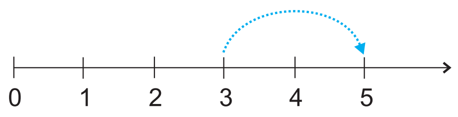
आपण असे म्हणतो की, $7 \div 0$ हे सांगता येत नाही.

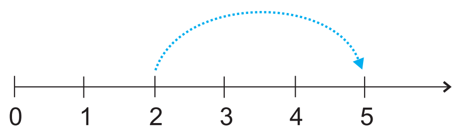
$5 \div 0$ आणि $16 \div 0$ साठी सोडवून पाहा.

पूर्ण संख्यांना शून्याने भाग देता येत नाही. (शून्याने भागाकार अव्याख्येय आहे)

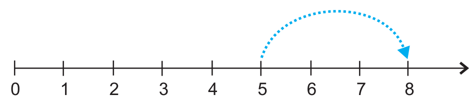
बेरीज आणि गुणाकाराच्या क्रमनिरपेक्षतेचा गुणधर्म

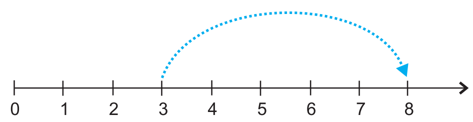
संख्यारेषेची खालील चित्रे काय सांगतात? दोन्ही स्थितींमध्ये आपण 5 वर पोहोचतो.





म्हणून 3 + 2 = 2 + 3 दोन्हीचे उत्तर एकच म्हणजे 5 येते.
अशाच पद्धतीने 5 + 3 आणि 3 + 5 दोन्ही समान येते.



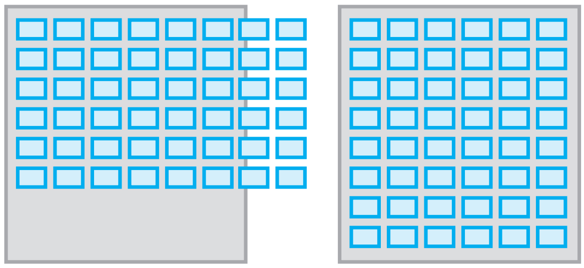


अशाप्रकारे, 4 + 6 आणि 6 + 4 ची उत्तरे काढण्याचा प्रयत्न करा. जेव्हा आपण दोन संख्यांची बेरीज करतो तेव्हा कोणतीही अशी जोडी मिळत नाही की ज्यात संख्यांचा क्रम बदलून वेगवेगळी उत्तरे येतील.

आपण दोन पूर्ण संख्यांची बेरीज करताना कोणताही क्रम ठेवू शकतो.

पूर्ण संख्यांसाठी बेरजेचा क्रम बदल लागू आहे, असे आपण म्हणतो. यालाच बेरजेचा क्रमनिरपेक्षतेचा गुणधर्म म्हणतात.

तुमच्या मित्रांबरोबर चर्चा करा.



तुमच्या घरात एक छोटा उत्सव आहे. तुम्ही पाहुण्यांसाठी खुर्च्यांच्या 6 ओळी मांडता, ज्यात प्रत्येक ओळीत 8 खुर्च्या आहेत. खोली इतकी रुंद नाही की त्यात 8 खुर्च्यांची ओळ बसेल. म्हणून तुम्ही निर्णय घेता की, 8 ओळी बनतील प्रत्येकी 6 खुर्च्यांच्या. तुम्हांला आणखी खुर्च्यांची गरज पडेल का?

गुणाकारामध्येसुद्धा क्रमबदलाचा गुणधर्म असतो का? 4 आणि 5 या संख्यांना वेगवेगळ्या क्रमाने गुणा. तुम्हांला कळेल की, $4 \times 5 = 5 \times 4$ आहे.

तुम्ही दोन पूर्ण संख्यांचा कोणत्याही क्रमाने गुणाकार करू शकता.

पूर्ण संख्यांसाठी गुणाकार क्रमबदल लागू होतो, असे आपण म्हणतो.
अशाप्रकारे **पूर्ण संख्यांसाठी, बेरीज आणि गुणाकार या दोन्ही मध्येही क्रमबदल करता येतात.**

पडताळा घ्या

(i) पूर्ण संख्यांसाठी वजाबाकी क्रमबदलाने समान होत नाही याचा पडताळा घेण्यासाठी तीन वजाबाकी करा.

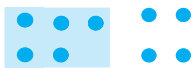
(ii) $(6 \div 3)$ चे उत्तर $(3 \div 6)$ इतकेच येते का?

पूर्ण संख्यांच्या आणखी जोड्या घेऊन विधानाचे समर्थन करा.

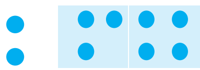
बेरीज आणि गुणाकारातील साहचर्य गुणधर्म

खालील चित्रे पाहा,

(a) $(2 + 3) + 4 = 5 + 4 = 9$



(b) $2 + (3 + 4) = 2 + 7 = 9$



वरील (a) नुसार आधी 2 आणि 3 ची बेरीज करून बेरजेमध्ये 4 मिळवू शकता.

तसेच (b) नुसार आधी 3 आणि 4 ची बेरीज करून नंतर त्यात 2 मिळवू शकता.

दोन्हींची उत्तरे समान नाहीत का?

आपल्याला पुढीलप्रमाणेदेखील उत्तरे मिळू शकतील.

$(5 + 7) + 3 = 12 + 3 = 15$ तसेच, $5 + (7 + 3) = 5 + 10 = 15$

म्हणून $(5 + 7) + 3 = 5 + (7 + 3)$

याला पूर्ण संख्यांच्या बेरजेचा साहचर्य गुणधर्म (associative property) म्हणतात.

उदाहरण 1 : 234, 197 आणि 103 यांची बेरीज करा.

रीत : $234 + 197 + 103 = 234 + (197 + 103)$

$= 234 + 300$

$= 534$

ध्यानात ठेवा की,
बेरीज करताना आपण
संख्यांचा कसा गट करतो.

हा खेळ खेळा

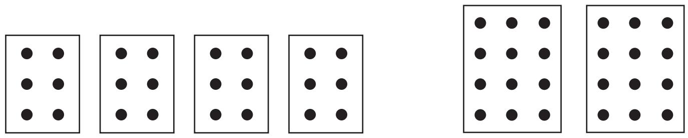
तुम्ही आणि तुमचा मित्र हा खेळ खेळू शकता.

तुम्ही 1 ते 10 मधील कोणतीही एक संख्या म्हणा. आता तुमचा मित्र त्यामध्ये 1 ते 10 मधील एक संख्या मिळवेल. यानंतर तुमची पाळी. तुम्ही आळीपाळीने दोघेही खेळा. जो पहिल्यांदा 100 पर्यंत पोचेल तो जिंकेल. जर तुम्हांला सतत जिंकायचे असेल तर काय युक्ती कराल?

(a) (b)

खालील (आकृती 2.1) प्रमाणे आकृतीत दाखवलेल्या गुणाकारांचे निरीक्षण करा.

(a) आणि (b) मधील ठिपक्यांची संख्या मोजा. तुम्हांला काय दिसेल? दोन्हींमध्ये ठिपक्यांची संख्या समान आहे. (a) मध्ये आपल्या जवळ प्रत्येक चौकटीत (box) 2×3 ठिपके आहेत. म्हणून ठिपक्यांची एकूण संख्या $(2 \times 3) \times 4 = 24$



(a) (b)

आकृती 2.1

(b) मध्ये प्रत्येक चौकटीत 3×4 ठिपके आहेत. म्हणून ठिपक्यांची एकूण संख्या $= 2 \times (3 \times 4) = 24$. अशाप्रकारे, $(2\times3)\times4=2\times(3\times4)$. अशाच पद्धतीने तुम्ही $(3 \times 5) \times 4 = 3 \times (5 \times 4)$ आहे, हे पाहू शकता.

असेच, $(5 \times 6) \times 2$ आणि $5 \times (6 \times 2)$ आणि $(3 \times 6) \times 4$ आणि $3 \times (6 \times 4)$ सोडवून पाहा.

याला पूर्ण संख्यांच्या गुणाकाराचा साहचर्य गुणधर्म म्हणतात.

विचार करा आणि जाणून घ्या.

कोणता गुणाकार सोपा आहे आणि का?

(a) $(6 \times 5) \times 3$ या $6 \times (5 \times 3)$

(b) $(9 \times 4) \times 25$ या $9 \times (4 \times 25)$

उदाहरण 2 : $14 + 17 + 6$ दोन पद्धतीने सोडवा.

उकल : $14 + 17 + 6 = (14 + 17) + 6 = 31 + 6 = 37$,

$14 + 17 + 6 = (14 + 6) + 217 = 20 + 17 = 37$

येथे तुम्ही बेरजेच्या साहचर्य व क्रमनिरपेक्षता या गुणधर्मांचा वापर केला आहे. तुम्हांला असे वाटते का की दोन्ही गुणधर्मांचा वापर करून उदाहरण सोडवणे सोपे जाते?

प्रयत्न करा

7 + 18 + 13 आणि 16 + 12 + 4 सोडवा.

गुणाकाराच्या गुणधर्माचा उपयोग खालील प्रकाराच्या प्रश्नांची उकल करताना होतो.

उदाहरण 3 : 12×35 सोडवा.

रीत : $12 \times 35 = (6 \times 2) \times 35 = 6 \times (2 \times 35) = 6 \times 70 = 420$

या उदाहरणात आपण साहचर्य गुणधर्माचा उपयोग सर्वांत लहान सम संख्येला 5 च्या विभाज्याने (multiple) गुणून सोप्या पद्धतीने उत्तर काढण्यासाठी केला आहे.

उदाहरण 4 : $8 \times 1769 \times 125$ सोडवा.

$8 \times 1769 \times 125 = 8 \times 125 \times 1769$ (या ठिकाणी तुम्ही कोणता गुणधर्म वापरला?)

$= (8 \times 125) \times 1769 = 1000 \times 1769 = 1769000$

प्रयत्न करा

सोडवा.

$25 \times 8358 \times 4$; $625 \times 3759 \times 8$

विचार करा, चर्चा करा आणि लिहा.

$(16 \div 4) \div 2 = 16 \div (4 \div 2)$ आहे का?

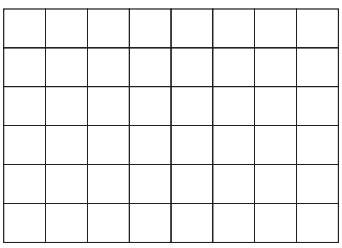
भागाकारासाठी साहचर्य गुणधर्म लागू होतो? नाही.

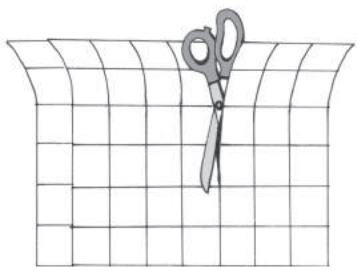
तुमच्या मित्रांबरोबर चर्चा करा $(28 \div 14) \div 2$ आणि $28 \div (14 \div 2)$ समान आहे का?

हे करा

गुणाकाराचा बेरजेवर वितरण गुणधर्म –

6 सेंमी × 8 सेंमी मापाचा एक आलेख कागद (graph) घ्या ज्यात 1 सेंमी × 1 सेंमीचे चौरस आहेत.

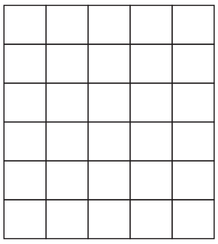




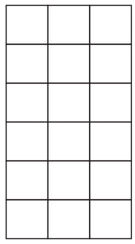
तुमच्याकडे एकूण किती चौरस आहेत?

ही संख्या 6×8 आहे का?

आता हा कागद 6 सेमी × 5 सेमी आणि 6 सेमी × 3 सेमी मापाच्या दोन भागांत कापा, जसे आकृतीमध्ये दाखवले आहे.



चौरसांची संख्या : 6×5 आहे का?



चौरसांची संख्या : 6×3 आहे का?

दोन्ही भागांतून मिळून एकूण किती चौरस आहेत?

वरील चौरस $(6 \times 5) + (6 \times 3)$ आहेत का? याचा अर्थ $6 \times 8 = (6 \times 5) + (6 \times 3)$ आहे का? पण, $6 \times 8 = 6 \times (5 + 3)$ आहे. यावरून असे दिसते का की, $6 \times (5 + 3) = (6 \times 5) + (6 \times 3)$

अशाप्रकारे तुम्हांला उत्तर मिळेल $2 \times (3 + 5) = (2 \times 3) + (2 \times 5)$

याला गुणाकाराचा बेरजेवर वितरण गुणधर्म (distributive property of multiplication over addition) म्हणतात.

वितरण गुणधर्माचा उपयोग करून, $4 \times (5 + 8)$; $6 \times (7 + 9)$ आणि $7 \times (11 + 9)$ सोडवा.

विचार करा, चर्चा करा आणि लिहा

आता खालील गुणाकाराची क्रिया पाहा आणि चर्चा करा की आपण संख्यांचा गुणाकार करताना बेरजेमधील गुणाकाराचे वितरण या गुणधर्माचा अवलंब करतो का?

425			
×136			
2550	←	425 × 6	(6 एककाने गुणा)
12750	←	425 × 30	(3 दशकाने गुणा)
42500	←	425 × 100	(1 शतकाने गुणा)
57800	←	425 × (6 + 30 100)	

उदाहरण 5 : एका शाळेच्या उपाहारगृहात (Canteen) दररोज दुपारचे जेवण (Lunch) साठी ₹ 20 आणि दुधासाठी ₹ 4 घेतात. अशाप्रकारे आपण 5 दिवसांत एकूण किती खर्च करता?

उकल : हे दोन पद्धतींनी सोडवता येते.

पद्धत 1 : जेवणासाठी लागणारी 5 दिवसांची रक्कम काढा.
दुधासाठी लागणारी 5 दिवसांची रक्कम काढा.
नंतर यांची बेरीज करा.

जेवणाचा खर्च $= ₹\ 5 \times 20$

दुधाचा खर्च $= ₹\ 5 \times 4$

एकूण खर्च $= ₹\ (5 \times 20) + ₹\ (5 \times 4) = ₹\ (100 + 20)$
$= ₹\ 120$

पद्धत 2 : एका दिवसाची एकूण रक्कम काढा.
मग त्याला 5 ने गुणा
एक दिवसाचा खर्च (जेवण + दूध) $= ₹\ (20 + 4)$
5 दिवसांचा एकूण खर्च $= 5 \times ₹\ (20 + 4) = ₹\ (5 \times 24)$
$= ₹\ 120$
वरील उदाहरणावरून असे दिसून येते की,
$5 \times (20 + 4) = (5 \times 20) + (5 \times 4)$
हा बेरजेमधील गुणाकाराच्या वितरणाचा नियम आहे.

उदाहरण 6 : वितरण गुणधर्माचा उपयोग करून 12×35 सोडवा.
उकल : $12 \times 35 = 12 \times (30 + 5) = 12 \times 30 + 12 \times 5$
$= 360 + 60 = 420$

उदाहरण 7 : सोडवा $126 \times 55 + 126 \times 45$
उकल : $126 \times 55 + 126 \times 45 = 126 \times (55 + 45) = 126 \times 100$
$= 12600$

प्रयत्न करा

वितरण गुणधर्माचा उपयोग करून, 15×68, 17×23 आणि $69 \times 78 + 22 \times 69$ ची उत्तरे काढा.

अविकारी अवयव (बेरीज आणि गुणाकारासाठी)

पूर्ण संख्या संच हा नैसर्गिक संख्या संचाहून कशाप्रकारे भिन्न आहे? याचे कारण म्हणजे केवळ पूर्ण संख्या संचामध्ये 'शून्य' असतो. या 'शून्या'ची बेरजेमध्ये विशेष भूमिका असते. याचा अर्थ लावण्याचा प्रयत्न करा.

खालील तक्ता तुम्हांला उपयोगी ठरेल.

7	+	0	=	7
5	+	0	=	5
0	+	15	=	15
0	+	26	=	26
0	+	.....	=	.....

जेव्हा तुम्ही कोणत्याही पूर्ण संख्येत शून्य मिळवता तेव्हा काय उत्तर मिळते?

उत्तर म्हणजे तीच पूर्ण संख्या असते. त्यामुळेच शून्याला पूर्ण संख्यांच्या बेरजेसाठी अविकारक (identity element) म्हणतात. शून्याला पूर्ण संख्यांसाठी बेरजेचा अविकारक (additive identity) देखील म्हणतात.

गुणाकाराच्या क्रियेतदेखील शून्याची विशेष भूमिका असते. कोणत्याही पूर्ण संख्येला शून्यने गुणल्यास गुणाकार शून्यच येतो.

उदाहरणार्थ, खालील गुणाकार पाहा.

$5 \times 6 = 30$

$5 \times 5 = 25$

$5 \times 4 = 20$

$5 \times 3 = 15$

$5 \times 2 = ...$

$5 \times 1 = ...$

$5 \times 0 = ?$

गुणाकाराची उत्तरे कशा पद्धतीने घटतात?

तुम्हांला एखादे प्रतिरूप दिसते का?

शेवटच्या पायरीबद्दल कोणते अनुमान काढता येईल?

हे प्रतिरूप इतर पूर्ण संख्यांसाठी योग्य आहे का?

दोन वेगवेगळ्या पूर्ण संख्या घेऊन जाणून घ्या.

तुम्हांला पूर्ण संख्यांसाठी बेरजेचा अविकारक मिळाला. कोणत्याही पूर्ण संख्येत शून्य मिळवल्यास किंवा शून्यात कोणतीही पूर्ण संख्या मिळवल्यास उत्तर ती संख्या येते. हीच परिस्थिती पूर्ण संख्यांसाठी गुणाकार अविकारक (multiplicative identity) साठी आहे.

7	×	1	=	7
5	×	1	=	5
1	×	12	=	12
1	×	100	=	100
1	×	......	=	......

आपण योग्य विचार करीत आहात की, पूर्ण संख्यांच्या गुणाकारासाठी, 1 हा अविकारी अवयव किंवा अविकारक आहे. दुसऱ्या शब्दांत सांगायचे तर पूर्ण संख्यांसाठी 1 हा गुणाकार अविकारक अवयव आहे.

उदाहरणसंग्रह 2.2

1. योग्य क्रम लावून बेरीज करा.
   (a) $837 + 208 + 363$ (b) $1962 + 453 + 1538 + 647$
2. योग्य क्रम लावून गुणाकार करा.
   (a) $2 \times 1768 \times 50$ (b) $4 \times 166 \times 25$
   (c) $8 \times 291 \times 125$ (d) $625 \times 279 \times 16$
   (e) $285 \times 5 \times 60$ (f) $125 \times 40 \times 8 \times 25$
3. खालील प्रत्येकाचे उत्तर काढा.
   (a) $297 \times 17 + 297 \times 3$ (b) $54279 \times 92 + 8 \times 54279$
   (c) $81265 \times 169 - 81265 \times 69$ (d) $3845 \times 5 \times 782 + 769 \times 25 \times 218$
4. योग्य गुणधर्माचा उपयोग करून गुणाकार करा.
   (a) 738×103 (b) 854×102 (c) 258×1008 (d) 1005×168

5. एका टॅक्सीचालकाने त्याच्या गाडीत सोमवारी 40 लीटर पेट्रोल टाकले. दुसऱ्या दिवशी त्याने 50 लीटर पेट्रोल टाकले. जर पेट्रोलचा दर प्रतिलीटर ₹ 44 असेल तर त्याने पेट्रोलवर किती खर्च केला?

6. एक दूधवाला एका हॉटेलसाठी सकाळी 32 लीटर दूध देतो आणि संध्याकाळी 68 लीटर दूध देतो. जर दुधाचा दर ₹45 प्रतिलीटर आहे, तर दूधवाल्याला रोज किती रुपये मिळतील?

7. खालील जोड्या लावा.

(i) $425 \times 136 = 425 \times (6 + 30 + 100)$ (a) गुणाकाराची क्रमनिरपेक्षता

(ii) $2 \times 49 \times 50 = 2 \times 50 \times 49$ (b) बेरजेची क्रमनिरपेक्षता

(iii) $80 + 2005 + 20 = 80 + 20 + 2005$ (c) बेरजेमधे गुणाकाराचे वितरण

2.5 पूर्ण संख्यांमध्ये आकृतिबंध

आपण संख्यांना ठिपक्यांच्याद्वारे प्राथमिक आकार देऊ. (1) एक रेषा (2) एक आयत (3) एक चौरस (4) एक त्रिकोण. प्रत्येक संख्येला या आकारांपैकी एक आकारात बसवायचे आहे. इतर कोणता आकार नसावा.

- प्रत्येक संख्या एका रेषेच्या रूपात बसवता येते.

  2 ही संख्या पुढीलप्रकारे दाखवता येते. • •

  3 ही संख्या पुढीलप्रकारे दाखवता येते. • • •

  इत्यादी.

- काही संख्या आयताच्या रूपात दाखवता येतात. उदाहरणार्थ–

  6 ही संख्या आयताच्या रूपात दाखवता येऊ शकते.

  लक्षात घ्या की इथे 2 ओळी आणि 3 स्तंभ आहेत.

- काही संख्या जसे की 4 आणि 9 या चौरसाच्या रूपातदेखील दाखवता येतात.

- काही संख्या त्रिकोणाच्या रूपातदेखील दाखवता येतात. उदाहरणार्थ–

लक्षात घ्या की त्रिकोणाच्या दोन बाजू समानच असल्या पाहिजेत. खालच्या बाजूने सुरुवात करून ओळींमध्ये ठिपक्यांची संख्या 4, 3, 2, 1 अशाप्रकारे असेल. सर्वांत वरच्या ओळीत केवळ एकच ठिपका येईल.

तक्ता पूर्ण करा.

1, एक विशेष संख्या आहे.

संख्या	रेषा	आयत	वर्ग	त्रिकोण
2	हो	नाही	नाही	नाही
3	हो	नाही	नाही	हो
4	हो	हो	हो	नाही
5	हो	नाही	नाही	नाही
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				

प्रयत्न करा

1. कोणकोणत्या संख्या फक्त रेषेच्या स्वरूपात दाखवता येतात?
2. कोणत्या संख्या चौरसाच्या स्वरूपात दाखवल्या जाऊ शकतात?
3. कोणत्या संख्या आयताच्या स्वरूपात दाखवता येतात?
4. पहिल्या सात त्रिकोणी संख्या लिहा. (ज्या त्रिकोणाच्या स्वरूपात मांडता येतात.) 3, 6, ...
5. काही संख्या दोन आयतांच्या रूपात दाखवता येतात. उदाहरणार्थ,

12 $\longrightarrow$

3×4 $\qquad$ 2×6

अशी कमीत कमी पाच उदाहरणे लिहा.

आकृतिबंध पाहणे

आकृतिबंध पाहिल्यामुळे आपल्यात सरळरूप देण्याच्या क्रियेत मार्गदर्शन मिळू शकते.

खालील उदाहरणांचा अभ्यास करा.

(a) $117 + 9 \quad = 117 + 10 \;- 1 \quad = 127 - 1 \quad = 126$

(b) $117 - 9 \quad = 117 - 10 \;+ 1 \quad = 107 + 1 \quad = 108$

(c) $117 + 99 = 117 + 100 - 1 = 217 - 1 = 216$

(d) $117 - 99 = 117 - 100 + 1 = 17 + 1 = 18$

ही रूपांतरे 9, 99, 999 ...... अशाप्रकारच्या संख्यांची बेरीज-वजाबाकीमध्ये साहाय्य करतात का?

या ठिकाणी आणखी एक रूपांतर दिले आहे.

(a) $84 \times 9 = 84 \times (10 - 1)$

(b) $84 \times 99 = 84 \times (100 - 1)$

(c) $84 \times 999 = 84 \times (1000 - 1)$

तुम्हांला एखाद्या संख्येला 9, 99, 999 .... या प्रकारच्या संख्यांशी गुणण्याची सोपी युक्ती मिळते का?

अशा सोप्या युक्त्या आपल्याला अनेक गणिते तोंडी सोडवण्यास मदत करतात.

खालील रूपांतरे तुम्हांला एखाद्या संस्थेला 5 किंवा 25 किंवा 125 ने गुणण्याची एक मजेशीर पद्धत दाखवतात.

(तुम्ही या संख्या आणखी वाढवू शकता.)

(i) $96 \times 5 = 96 \times \frac{10}{2} = \frac{960}{2} = 480$

(ii) $96 \times 25 = 96 \times \frac{100}{4} = \frac{9600}{4} = 2400$

(iii) $96 \times 125 = 96 \times \frac{1000}{8} = \frac{96000}{8} = 12000$ ....

खाली दिलेला आकृतिबंध काय सुचवतो?

(i) $64 \times 5 = 64 \times \frac{10}{2} = 32 \times 10 = 320 \times 1$

(ii) $64 \times 15 = 64 \times \frac{30}{2} = 32 \times 30 = 320 \times 3$

(iii) $64 \times 25 = 64 \times \frac{50}{2} = 32 \times 50 = 320 \times 5$

(iv) $64 \times 35 = 64 \times \frac{70}{2} = 32 \times 70 = 320 \times 7$ ....

उदाहरणसंग्रह 2.3

1. खालीलपैकी कोणत्या उदाहरणांतून 0 मिळत नाही?

   (a) $1 + 0$ (b) 0×0 (c) $\frac{0}{2}$ (d)

2. जर दोन पूर्ण संख्यांचा गुणाकार शून्य आहे, तर आपण असे म्हणू शकतो का की दोनपैकी एक किंवा दोन्हीही शून्य असल्या पाहिजेत? उदाहरण देऊन उत्तर स्पष्ट करा.

3. जर दोन पूर्ण संख्यांचा गुणाकार 1 आहे तर यांपैकी एक किंवा दोन्हीही 1 ही संख्या असली पाहिजे, असे आपण म्हणू शकतो का? उदाहरण देऊन स्पष्ट करा.
4. विस्तार पद्धती जाणून घ्या.

   (a) 728×101 (b) 5437×1001 (c) 824×25

   (d) 4275×125 (e) 504×35
5. खालील आकृतिबंधाचा अभ्यास करा.

   $1 \times 8 + 1 = 9$

   $12 \times 8 + 2 = 98$

   $123 \times 8 + 3 = 987$

   $1234 \times 8 + 4 = 9876$

   $12345 \times 8 + 5 = 98765$

   याच्या पुढील दोन टप्पे लिहा. असे आकृतिबंध कशाप्रकारे काम करतात, हे तुम्ही सांगू शकाल का?

   (संकेत : $12345 = 11111 + 1111 + 111 + 11 + 1$)

आपण कोणती चर्चा केली?

1. 1, 2, 3 .... अशा संख्या त्यांचा उपयोग आपण मोजण्यासाठी करतो त्यांना नैसर्गिक संख्या म्हणतात.
2. जर तुम्ही एखाद्या नैसर्गिक संख्येत 1 मिळवलात तर तुम्हांला लगतची पुढची संख्या मिळते आणि 1 वजा केला तर लगतची मागची संख्या मिळते.
3. प्रत्येक नैसर्गिक संख्येची पुढची संख्या असते. 1 ही संख्या सोडून प्रत्येक नैसर्गिक संख्येला मागची संख्या असते.
4. जर नैसर्गिक संख्यासंचात 0 वाढवला तर आपल्याला पूर्ण संख्या संच मिळतो. अशा प्रकारे 0, 1, 2, 3,....... या संख्यांनी पूर्ण संख्यासंच बनतो.
5. प्रत्येक पूर्ण संख्येला पुढची संख्या असते. ‘0’ सोडून इतर प्रत्येक पूर्ण संख्येला मागची संख्या असते.
6. सर्व नैसर्गिक संख्या या पूर्ण संख्यादेखील असतात. परंतु सर्व पूर्ण संख्या या नैसर्गिक संख्या नाहीत.
7. आपण एक रेषा घेऊन त्यावर एक बिंदू घेऊन त्याला ‘0’ ने निर्देशित करतो. मग ‘0’ च्या उजवीकडे समान अंतरावर बिंदू देतो. यांना क्रमशः 1, 2, 3,....... ने निर्देशित केल्यास आपल्याला एक संख्यारेषा मिळते. जिच्यावर पूर्ण संख्या दाखविल्या जातात. त्यावर आपण बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार अशा अनेक क्रिया करू शकतो.
8. संख्यारेषेवर उजवीकडे जात राहिल्यास बेरीज मिळत जाते. तसेच, डावीकडे जात राहिल्यास वजाबाकी मिळत जाते. शून्य (0) पासून सुरुवात केल्यास समान अंतरावरील टप्प्यावर आपल्याला गुणाकार मिळतो.

9. दोन पूर्ण संख्यांची बेरीज एक पूर्ण संख्याच असते. तसेच, दोन पूर्ण संख्यांचा गुणाकार नेहमी एक पूर्ण संख्या असतो. पूर्ण संख्यांची बेरीज आणि गुणाकार नेहमी संवृत्त असतो. परंतु पूर्ण संख्यांची वजाबाकी आणि भागाकार संवृत्त नसतो.

10. शून्याने भाग देणे व्याख्येय नाही.

11. शून्याला पूर्ण संख्यांच्या बेरजेसाठी अविकारक (identity clement) म्हणतात. '1' या पूर्ण संख्येला गुणाकारासाठी अविकारक म्हणतात.

12. तुम्ही दोन पूर्ण संख्यांना कोणत्याही क्रमाने मिळवू शकता. तुम्ही दोन पूर्ण संख्यांना कोणत्याही क्रमाने गुणू शकता. आपण असे म्हणतो की, पूर्ण संख्यांसाठी बेरीज व गुणाकार क्रमनिरपेक्ष (commutative) आहेत.

13. गुणाकार आणि बेरीज यांचा साहचर्य (Associative) नियम पूर्ण संख्यांसाठी लागू पडतो.

14. गुणाकाराचा बेरजेवर वितरण गुणधर्म पूर्ण संख्यांसाठी लागू पडतो.

15. पूर्ण संख्यांचे क्रमनिरपेक्षता, साहचर्य आणि वितरण हे गुणधर्म सोप्या पद्धतीने सोडवण्यासाठी उपयुक्त आहेत. आपण नकळत हे वापरत असतो.

16. संख्यांची रूपांतरे ही केवळ गमतीशीर नसतात, तर तोंडी उदाहरण सोडवण्यासाठी उपयुक्त असतात. संख्यांचे गुणधर्म समजून घेण्यासाठी मदत करतात.

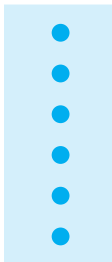
प्रकरण 3

खेळा संख्यांशी

3.1 प्रस्तावना

रमेशजवळ 6 गोट्या आहेत. त्याला गोट्या ओळीत अशा मांडायच्या आहेत की, प्रत्येक ओळीत गोट्यांची संख्या समान येईल. तो खालील प्रकारे त्यांची मांडणी करतो व गोट्यांची संख्या पूर्ण करतो.

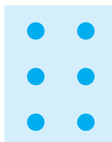
(i) प्रत्येक ओळीत एक गोटी



ओळींची संख्या = 6

गोट्यांची एकूण संख्या = $1 \times 6 = 6$

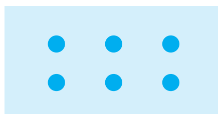
(ii) प्रत्येक ओळीत 2 गोट्या



ओळींची संख्या = 3

गोट्यांची एकूण संख्या = $2 \times 3 = 6$

(iii) प्रत्येक ओळीत 3 गोट्या

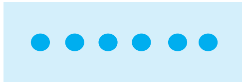


ओळींची संख्या = 2

गोट्यांची एकूण संख्या = $3 \times 2 = 6$

(iv) त्याला प्रत्येक ओळीत 4 किंवा 5 गोट्या येतील अशी एकही रचना सुचत नाही. एका ओळीत सर्व 6 गोट्या राहतील.

ओळींची संख्या = 1
गोट्यांची एकूण संख्या = $6 \times 1 = 6$



या गणनांमध्ये रमेशला असे दिसते की, 6 या संख्येला विविध प्रकारांनी दोन संख्यांच्या गुणाकाराच्या रूपात लिहिता येते. जसे की खालीलप्रमाणे

$6 = 1 \times 6$; $6 = 2 \times 3$; $6 = 3 \times 2$; $6 = 6 \times 1$

$6 = 2 \times 3$ यामधून असे म्हटले जाते की, 2 आणि 3 ने 6 या संख्येला नि:शेष भाग जातो. म्हणजेच 2 आणि 3 ते 6 चे विभाजक (भाजक) (divisors) आहेत. इतर गुणाकार $6 = 1 \times 6$ मधून 6 चे इतर विभाजक 1 व 6 मिळतात.

अशाप्रकारे 1, 2, 3 आणि 6 हे 6 चे विभाजक आहेत. यांना 6 चे अवयव म्हणतात.

18 गोट्यांना ओळीत मांडण्याचा प्रयत्न करा आणि 18 चे अवयव मिळवा.

3.2 विभाजक आणि विभाज्य

मेरीला 4 ला पूर्ण भाग देणाऱ्या संख्या काढायच्या आहेत. ती 4 ला 4 पेक्षा कमी किंवा 4 ने भागते.

1) 4 (4
-4
0

भागाकार = 4
बाकी = 0
4 = 1 × 4

2) 4 (2
-4
0

भागाकार = 2
बाकी = 0
4 = 2 × 2

3) 4 (1
-3
1

भागाकार = 1
बाकी = 1

4) 4 (1
-4
0

4 = 4 × 1
भागाकार = 1
बाकी = 0

तिला असे समजते की 4 ही संख्या खालील प्रकारे लिहिली जाऊ शकते.

$4 = 1 \times 4; 4 = 2 \times 2; 4 = 4 \times 1$

ती जाणून घेते की, 1, 2, 4 या संख्या 4 चे पूर्ण विभाजक आहेत.
त्यांना 4 चे अवयव म्हणतात.

एखाद्या संख्येचा अवयव तिचा पूर्ण (exact) विभाजक (divisor) असतो.

खेळ 1 : हा खेळ दोन व्यक्ती उदा. A आणि B यांच्याकडून खेळला जाऊ शकतो. यासाठी 50 कार्डांची आवश्यकता आहे. ज्यावर 1 ते 50 संख्या लिहिल्या आहेत. एका टेबलावर खालील दाखविल्याप्रमाणे ही कार्डे मांडा.

1	2	3	4	5	6	7	
8	9	10	11	12	13	14	
15	16	17	18	19	20	21	
22	23	24	25	26	27	28	
29	30	31	32	33	34	35	
36	37	38	39	40	41	42	
43	44	45	46	47	48	49	50

पायऱ्या

(a) आधी कोण खेळणार हे ठरवा A की B.

(b) समजा, A आधी खेळणार. तो टेबलावरून एक कार्ड घेईल आणि आपल्याकडेच ठेवेल. समजा त्यावर 28 लिहिले आहे.

(c) B खेळाडू आता ती सर्व कार्डे उचलतो, ज्यावर A ने उचललेल्या संख्येचे अवयव लिहिले आहेत. (उदा., 28 चे) व आपल्याकडे ठेवेल

(d) आता B खेळाडू एक कार्ड घेईल आणि B च्या कार्डावरील संख्येचे अवयव असलेली सर्व कार्डे A उचलून आपल्याकडे ठेवेल

(e) सर्व कार्डे उचलली जाईपर्यंत हा खेळ चालू राहील.

(f) A आपल्याजवळील संख्यांची बेरीज करेल. तसेच, B आपल्याजवळील संख्यांची बेरीज करेल. ज्याची बेरीज जास्त असेल तो जिंकेल.

कार्डांची संख्या वाढवून हा खेळ आणखी मजेदार बनवता येईल.

हा खेळ तुमच्या मित्रांसोबत खेळा. हा खेळ जिंकण्याची एखादी पद्धत तुम्ही शोधू शकाल का?

जेव्हा आपण $20 = 4 \times 5$ लिहितो तेव्हा आपण असे म्हणतो की, 4 आणि 5 हे 20 चे अवयव (factor) आहेत. आपण असेही म्हणतो की 20 ही संख्या 4 आणि 5 ची विभाज्य (multiple) आहे.

$24 = 2 \times 12$ हे असे दर्शवते की, 2 आणि 12 या संख्येचे अवयव आहेत. तसेच 24 ही संख्या 2 आणि 12 ने विभाज्य आले.

गुणाकार

$$\underset{\text{गुण्य}}{4} \times \underset{\text{गुणक}}{5} = \overset{\text{गुणाकार}}{20}$$

आपण असे म्हणू की, **एखादी संख्या आपल्या प्रत्येक अवयवाने विभाज्य असते.**

प्रयत्न करा

45, 30 आणि 36 चे अवयव काढा.

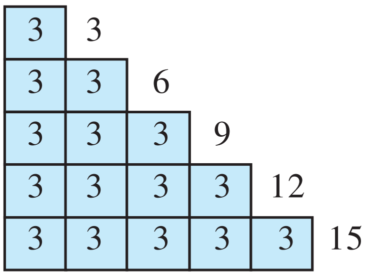
चला, आता अवयव आणि विभाज्य यांच्या संदर्भात काही मजेशीर गोष्टी पाहू.

(a) प्रत्येकी 3 एकक लांबीच्या लाकडी किंवा कागदाच्या काही पट्ट्या घ्या.

(b) टोके जोडून खालीलप्रमाणे जोडा.

सर्वांत वरची पट्टी $3 = 1 \times 3$ एकक लांबीची असेल.

त्याच्या खालील पट्टी $3 + 3 = 6$ एकक लांबीची तसेच $6 = 2 \times 3$ अशी असेल.



पुढची पट्टी $3 + 3 + 3 = 9$ एकक लांबीची आहे तसेच $9 = 3 \times 3$ आहे. ही क्रिया अशीच चालू ठेवत आपण इतर लांबी खालीलप्रकारे सांगू शकतो.

$12 = 4 \times 3$; $15 = 5 \times 3$

आपण असे म्हणतो की 3, 6, 9, 12, 15 या संख्या 3 ने विभाज्य आहेत.

3 च्या विभाज्यांची यादी 18, 21, 24, ... अशी पुढे वाढवू शकतो. यात प्रत्येक विभाजक 3 किंवा त्यापेक्षा मोठा आहे.

4 ने विभाज्य 4, 8, 12, 16, 20, 24, ... आहेत. ही यादी संपत नाही. यात प्रत्येक विभाजक 4 किंवा त्यापेक्षा मोठा आहे.

विभाजक आणि विभाज्य यांबद्दल आपण कोणता निष्कर्ष काढू शकतो हे पाहू.

1. प्रत्येक संख्येच्या अवयवाच्या रूपात येईल अशी एखादी संख्या आहे का? ती 1 आहे. उदा., $6 = 1 \times 6$, $18 = 1 \times 18$ इ. इतर संख्यांद्वारे आपण याचा पडताळा घेऊ शकतो.

म्हणून आपण असे म्हणू शकतो की **1 ही संख्या प्रत्येक संख्येचा अवयव असते.**

2. 7 हा स्वतःचा अवयव होऊ शकतो का? होय. 7 ला आपण 7×1 या स्वरूपात लिहू शकतो. 15 बद्दल तुम्ही कोणता विचार करता? तुम्हांला असे दिसेल की, प्रत्येक संख्या तुम्ही या स्वरूपात लिहू शकता.

   आपण म्हणतो की, **प्रत्येक संख्या ही स्वतःचा एक अवयव असते.**

3. 16 चे अवयव कोणते? 1, 2, 4, 8 आणि 16 आहेत. या अवयवांमध्ये असा एखादा अवयव आहे का ज्याने 16 ला भाग देता येत नाही. 20 आणि 36 च्या बाबतीतदेखील वरील विधान तपासून पाहा.

   तुम्हांला असे समजेल की **एखादी संख्येचा प्रत्येक अवयव त्या संख्येचा एक पूर्ण विभाजक असतो.**

4. 34 चे अवयव कोणते आहेत? 1, 2, 17 व 34, यात सर्वांत मोठा अवयव कोणता आहे? तो आहे 34. इतर अवयव 1, 2 आणि 17 हे 34 पेक्षा लहान आहेत. 64, 81 आणि 56 च्या बाबतीत वरील विधान तपासून पाहा. आपण असे म्हणू शकतो की, **दिलेल्या संख्येचा प्रत्येक अवयव तिच्यापेक्षा लहान किंवा तिच्याएवढा असतो.**

5. 76 च्या अवयवांची संख्या 5 आहे. 136 चे किती अवयव आहेत? 96 चे किती अवयव आहेत? तुम्ही प्रत्येक संख्येच्या अवयवांची संख्या मोजू शकता. 10576, 25642 अशा मोठ्या संख्यांचेदेखील अवयव तुम्ही मोजू शकता. कदाचित या संख्यांचे अवयव पाडणे तुम्हांला कठीण जाईल.

   आपण असे म्हणू शकतो की **एखाद्या दिलेल्या संख्येच्या अवयवांची संख्या मर्यादित परिमित (finite) असते.**

6. 7 चे विभाज्य कोणते आहेत? 7, 14, 21, 28,... असे आहेत. यात प्रत्येक विभाज्य हा 7 पेक्षा मोठा किंवा 7 आहे हे विधान प्रत्येक संख्येच्या विभाज्यांसाठी सत्य आहे का? 6, 9, 10 इत्यादींच्या विभाज्यांशी पडताळा घेऊन पाहा.

   आपल्याला असे दिसून येते की, प्रत्येक संख्येचे प्रत्येक विभाज्य त्या संख्येहून मोठा किंवा संख्येइतकाच असतो.

7. 5 चे विभाज्य लिहा. 5, 10, 15, 20, ... तुम्ही हा विचार कराल की ही सूची कधी संपेल? नाही. ही यादी न संपणारी आहे. याचा पडताळा 6 आणि 7 चे विभाज्य घेऊन पाहा.

   आपल्याला असे दिसून येते की **एखाद्या संख्येच्या विभाज्यांची संख्या अमर्यादित (infinite)** आहे.

8. 7 हा स्वतःचा एक विभाज्य आहे का? होय, कारण $7 = 7 \times 1$ आहे. हे विधान इतर संख्यांसाठीदेखील सत्य आहे. हे विधान इतर संख्यांसाठीदेखील सत्य आहे का? 3, 12 आणि 16 या संख्यांची मांडणी करून पडताळा घ्या.

   तुम्हांला असे दिसेल की, **प्रत्येक संख्या ही स्वतःचा विभाज्य असते.**

6 चे सर्व अवयव = 1, 2, 3 आणि 6 आले. तसेच, $1 + 2 + 3 + 6 = 12 = 2 \times 6$ आहे. आपल्याला हे समजते की 6 च्या सर्व अवयवांची बेरीज 6 च्या दुप्पट आहे. 28 चे सर्व अवयव = 1, 2, 4, 7, 14 आणि 28 आहेत. यांची बेरीज केल्यास,

$1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56 = 2 \times 28$ होते.

म्हणजेच 28 च्या सर्व अवयवांची बेरीज ही 28 च्या दुप्पट आहे.

जिच्या सर्व अवयवांची बेरीज ही त्या संख्येच्या दुप्पट असते, अशी संख्या परिपूर्ण संख्या (perfect number) म्हटली जाते.

10 ही एक परिपूर्ण संख्या आहे का?

उदाहरण 1 : 68 चे सर्व अवयव लिहा.

उकल : $68 = 1 \times 68$ $68 = 2 \times 34$ $68 = 4 \times 17$

$68 = 17 \times 4$

या ठिकाणी थांबा. कारण 4 आणि 17 यापूर्वी आले आहेत.

अशाप्रकारे 68 चे अवयव 1, 2, 4, 17, 34, 68 असे आहेत.

उदाहरण 2 : 36 चे अवयव काढा.

उकल : $36 = 1 \times 36$ $36 = 2 \times 18$

$36 = 3 \times 12$ $36 = 4 \times 9$

$36 = 6 \times 6$

या ठिकाणी थांबा. कारण दोन्ही अवयव (6) समान आहे.

अशाप्रकारे अपेक्षित मिळालेले अवयव 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 आणि 36 आहेत.

उदाहरण 3 : 6 चे सुरुवातीचे 5 विभाज्य लिहा.

उकल : मिळालेले विभाज्य

$6\times1 = 6$, $6\times2 = 12$, $6\times3 = 18$, $6\times4 = 24$ और $6\times5 = 30$

म्हणजेच, 6, 12, 18, 24 आणि 30 आहेत.

उदाहरणसंग्रह 3.1

1. खालील संख्यांचे सर्व अवयव लिहा.

   (a) 24 (b) 15 (c) 21

   (d) 27 (e) 12 (f) 20

   (g) 18 (h) 23 (i) 36

2. खालील संख्यांचे पहिले पाच विभाज्य लिहा.

   (a) 5 (b) 8 (c) 9

3. पहिल्या स्तंभातील संख्यांच्या दुसऱ्या स्तंभाशी योग्य जोड्या लावा.

स्तंभ 1	**स्तंभ 2**
(i) 35	(a) 8 चा विभाज्य
(ii) 15	(b) 7 चा विभाज्य
(iii) 16	(c) 70 चा विभाज्य
(iv) 20	(d) 30 चा अवयव
(v) 25	(e) 50 चा अवयव
	(f) 20 चा अवयव

4. 9 चे 100 पेक्षा कमी असलेले सर्व विभाज्य लिहा.

3.3 मूळ संख्या व संयुक्त संख्या

आता आपण एखाद्या संख्येचे अवयव काढण्याची पद्धत शिकलो आहोत. खालील तक्त्यात लिहिलेल्या काही संख्यांच्या अवयवांच्या संख्या लक्षात घ्या.

संख्या	अवयव	अवयवांची संख्या
1	1	1
2	1, 2	2
3	1, 3	2
4	1, 2, 4	3
5	1, 5	2
6	1, 2, 3, 6	4
7	1, 7	2
8	1, 2, 4, 8	4
9	1, 3, 9	3
10	1, 2, 5, 10	4
11	1, 11	2
12	1, 2, 3, 4, 6, 12	6

आपल्याला असे दिसून येते की,

(a) 1 या संख्येचा अवयव 1 (स्वतः तीच संख्या) आहे.

(b) काही संख्या जसे की, 2, 3, 5, 7, 11 इ. अशा आहेत की त्यांचे फक्त दोन अवयव आहेत. (1 आणि स्वतः ती संख्या) या संख्या मूळ संख्या (prime numbers) आहेत. **ज्या संख्यांना 1 आणि ती स्वतः संख्या असे दोनच अवयव असतात त्या संख्यांना मूळ संख्या म्हणतात.**

या संख्यांशिवाय इतर काही मूळ संख्या माहीत करून घ्या.

(c) 4, 6, 8, 9, 10 या संख्यांसारख्या काही संख्या अशा आहेत की, ज्यांचे दोनपेक्षा जास्त अवयव आहेत. या संयुक्त (composite numbers) संख्या आहेत. **ज्या संख्यांना दोनपेक्षा जास्त अवयव असतात त्यांना संयुक्त संख्या म्हणतात.**

लक्षात ठेवा :
1 ही संख्या मूळही नाही आणि संयुक्तही नाही.

15 ही एक संयुक्त संख्या आहे का? 18 आणि 25 बद्दल तुम्हांला काय वाटते?

एक सोपी पद्धत आहे. त्याद्वारे 1 ते 100 दरम्यानच्या मूळ संख्या अवयव न पाडता मिळवता येतात. ही पद्धत इ.स.पू. तिसऱ्या शतकातील एक ग्रीक गणितज्ञ इराटोस्थनीस (Eratosthenes) यांनी शोधली होती. चला, ही पद्धत पाहूया. 1 ते 100 पर्यंतच्या संख्या खालीलप्रमाणे लिहा.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

पायरी-1 : 1 ला काट मारा कारण ती एक मूळ संख्या नाही.

पायरी-2 : 2 ला गोल करा आणि 2 चे इतर सर्व विभाज्य जसे की, 4, 6, 8, ... यांना काट मारा.

पायरी-3 : पुढची काट न मारलेली संख्या 3 आहे. 3 ला गोल करा आणि 3 चे इतर सर्व विभाज्यांना काट मारा.

पायरी-4 : पुढची काट न मारलेली संख्या 5 आहे. 5 ला गोल करा आणि 5 च्या इतर सर्व विभाज्यांना काट मारा.

पायरी-5 : ही क्रिया तोपर्यंत चालू ठेवा जोवर वरील तक्त्यातील सर्व संख्यांना एक तर गोल नाहीतर काट बसेल. गोल केलेल्या सर्व संयुक्त संख्या आहेत. 1 सोडून इतर सर्व काटलेल्या संख्या मूळ संख्या आहेत. ही पद्धत 'इराटोस्थनीसची चाळणी' (Sieve of Eratosthenes) ओळखली जाते.

प्रयत्न करा

लक्षात घ्या की $2 \times 3 + 1 = 7$ ही एक मूळ संख्या आहे. या ठिकाणी 2 च्या एका विभाज्यात 1 मिळवून एक मूळ संख्या मिळाली आहे. अशाप्रकारे थोड्या मूळ संख्या शोधता येतील का?

उदाहरण 4 : 15 पेक्षा सर्व लहान मूळ संख्या लिहा.

उकल : चाळणी पद्धतीने वरील तक्ता पाहून आपण मिळालेल्या मूळ संख्या लिहू शकतो : 2, 3, 5, 7, 11 आणि 13

सम आणि विषम संख्या

तुम्हांला 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ... यात एखादा (pattern) आकृतिबंध दिसतो का? तुम्हांला समजेल की यात प्रत्येक संख्या ही 2 ची विभाज्य आहे.

यांना **सम संख्या (even numbers)** म्हणतात. उर्वरित सर्व नैसर्गिक संख्या. उदा., 1, 3, 5, 7, 9, 11,... **विषम संख्या (odd numbers)** म्हणतात.

2 किंवा 3 अंकी संख्या या सम संख्या आहेत की नाही हे आपण पडताळून पाहू शकतो. आपण कसे ओळखणार की 756482 सारखी मोठी संख्या एक सम संख्या आहे की नाही? 2 ने भाग देऊन ही क्रिया थोडी किचकट होईल का?

आपण असे म्हणू शकतो की, ज्या संख्यांच्या एकक स्थानी 0, 2, 4, 6, 8 यांपैकी एक अंक असेल तर ती संख्या सम संख्या असते. म्हणून 350, 4862 आणि 59246 या सम संख्या आहेत. 457, 2359 आणि 8231 विषम संख्या आहेत. चला आता काही मजेशीर गोष्टी घेऊ.

(a) सर्वांत लहान सम संख्या कोणती आहे? ती म्हणजे 2.

सर्वांत लहान मूळ संख्या कोणती आहे? पुन्हा ती 2 आहे.

अशाप्रकारे, **2 ही सर्वांत लहान मूळ संख्या आहे जी समदेखील आहे.**

(b) 2 शिवाय इतर मूळ संख्या 3, 5, 7, 11 ..... आहेत. या यादीमध्ये दुसरी कोणती सम संख्या आहे का? नाही. सर्व विषम संख्या आहेत. आणखी काही मूळ संख्या शोधा.

अशाप्रकारे, आपण असे म्हणू शकतो की, **2 शिवाय इतर सर्व मूळ संख्या विषम आहेत.**

उदाहरणसंग्रह 3.2

1. जर (र) विषम संख्या (ल) सम संख्या यांची बेरीज केली तर ती सम असते की विषम?
2. खालीलपैकी कोणती विधाने सत्य आणि असत्य आहेत?
   (a) तीन विषम संख्यांची बेरीज सम असते.
   (b) दोन विषम संख्या आणि एक सम संख्या यांची बेरीज सम असते.
   (c) तीन विषम संख्यांचा गुणाकार विषम असतो.
   (d) जर एखाद्या सम संख्येला 2 ने भागले तर भागाकार नेहमी विषम येतो.
   (e) सर्व मूळ संख्या विषम आहेत.
   (f) मूळ संख्यांचे कोणतेही अवयव नसतात.
   (g) दोन मूळ संख्यांची बेरीज नेहमी सम येते.
   (h) फक्त 2 हीच एक सम मूळ संख्या आहे.
   (i) सर्व सम संख्या संयुक्त संख्या आहेत.
   (j) दोन सम संख्यांचा गुणाकार नेहमी सम असतो.

3. 13 आणि 31 या मूळ संख्या आहेत. या दोन्हींमध्ये 1 आणि 3 अंक आहेत. 100 पर्यंतच्या संख्यांमधील अशा आणखी जोड्या शोधा.
4. 20 पेक्षा लहान असलेल्या सर्व मूळ आणि संयुक्त संख्या वेगवेगळ्या लिहा.
5. 1 ते 10 च्या दरम्यान येणारी सर्वांत मोठी मूळ संख्या लिहा.
6. खालील संख्यांना दोन मूळ संख्यांच्या बेरजेच्या रूपात मांडा.
   (a) 44 (b) 36 (c) 24 (d) 18
7. मूळ संख्यांच्या अशा तीन जोड्या लिहा. ज्यांच्यात 2 चा फरक आहे.
   [टीप – 2 चा फरक येणाऱ्या अशा मूळ संख्यांना **जोडमूळ संख्या (twin primes)** म्हणतात.]
8. खालीलपैकी मूळ संख्या कोणती?
   (a) 23 (b) 51 (c) 37 (d) 26
9. 100 पेक्षा लहान सात क्रमवार संयुक्त संख्या लिहा ज्यांच्या दरम्यान कोणतीही मूळ संख्या येत नाही.
10. खालील संख्यांना प्रत्येकी तीन मूळ संख्यांच्या बेरजेच्या रूपात मांडा.
    (a) 21 (b) 31 (c) 53 (d) 61
11. 20 पेक्षा लहान मूळ संख्यांच्या अशा 5 जोड्या लिहा ज्यांची बेरीज 5 ने विभाज्य असेल (divisible) उदा., (3 + 7 = 10)
12. खालील रिकाम्या जागा भरा.
    (a) अशी संख्या जिचे फक्त दोनच अवयव आहेत. तिला ________ म्हणतात.
    (b) अशी संख्या जिचे दोन किंवा अधिक अवयव असतील, त्यांना ________ म्हणतात.
    (c) 1 ही संख्या ________ नाही आणि ________ नाही.
    (d) सर्वांत लहान मूळ संख्या ________ आहे.
    (e) सर्वात लहान संयुक्त संख्या ________ आहे.
    (f) सर्वांत लहान सम संख्या ________ आहे.

3.4 संख्यांच्या विभाज्यतेच्या कसोट्या

38 ही संख्या 2 ने विभाज्य आहे का? 4 ने विभाज्य आहे का? 5 ने विभाज्य आहे का?

38 या संख्येला या संख्यांनी भागल्यानंतर आपल्याला समजेल की 38 ही 2 ने विभाज्य आहे. परंतु 4 किंवा 5 ने नाही.

चला, आपण एखादा आकृतिबंध (pattern) तयार होतोय का ते पाहू ज्याद्वारे आपल्याला कळेल की एखादी संख्या 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 किंवा 11 ने विभाज्य आहे की नाही? तुम्हांला असे वाटते का की असे आकृतिबंध आपल्याला सहजपणे प्राप्त होतील?

10 ची कसोटी : चारू 10 चे विभाज्य 10, 20, 30, 40, 50, 60, ... यांकडे पाहत होती. तिला या संख्यांमध्ये एक सामाईक गुणधर्म दिसून आला. तुम्ही सांगू शकता का की तो गुणधर्म कोणता आहे? यामध्ये प्रत्येक एकक स्थानी 0 आहे.

तिने एकक स्थानी 0 असलेल्या आणखी काही संख्या पाहिल्या. उदा., 100, 1000, 3200, 7010 इ. तिच्या असे लक्षात आले की या संख्या पण 10 विभाज्य आहेत.

अशाप्रकारे तिला हे समजले की जर एखाद्या संख्येच्या एकक स्थानी 0 असेल तर ती संख्या 10 ने विभाज्य असते.

तुम्ही 100 ने विभाज्यतेचा एखादा नियम काढू शकता का?

5 ने विभाज्यता : मणिने 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, ... या संख्यांमध्ये एक मजेशीर आकृतिबंध (pattern) पाहिला. तुम्हांला तो पॅटर्न सांगता येईल का? या सर्व संख्यांमध्ये एकक स्थानी एक तर 0 किंवा 5 अंक आहेत. तिला हे समजले की, या सर्व संख्या 5 ने विभाज्य आहेत.

त्याने 5 ने विभाज्य असलेल्या आणखी काही संख्या घेतल्या. उदा. 100, 215, 6205, 3500 इ. या संख्यांमध्येदेखील एकक स्थानी 0 किंवा 5 आहेत.

त्याने 23, 56 आणि 97 ला 5 ने भाग देण्याचा प्रयत्न केला. हे त्याला शक्य होईल का? पडताळून पाहा. त्याच्या असे लक्षात आले की, **जर एखाद्या संख्येच्या एकक स्थानी 0 किंवा 5 असतील तर ती संख्या 5 ने विभाज्य असते.**

1750125 ही 5 ने विभाज्य आहे का?

2 ने विभाज्यता : चारूने 2 च्या काही विभाज्यांचे निरीक्षण केले. 10, 12, 14, 16,...... तसेच 2410, 4356, 1358, 2972, 5974 इ. यांत तिला एक पॅटर्न दिसला. तुम्ही सांगू शकाल? या संख्यांच्या एकक स्थानी 0, 2, 4, 6, 8 यांपैकीच अंक असतो.

तो यांना भाग देऊन बाकी 0 येते का हे पडताळून पाहते.

या सर्व उदाहरणांवरून असा निष्कर्ष निघतो की, **जर एखाद्या संख्येच्या एकक स्थानी 0, 2, 4, 6, 8 यांपैकी अंक असेल तर ती संख्या 2 ने विभाज्य असते.**

3 ने विभाज्यता : 21, 27, 36, 54 आणि 219 या संख्या 3 ने विभाज्य आहेत का? होय.

25, 37 आणि 260 या 3 ने विभाज्य आहेत का? नाही.

3 ने विभाज्यतेसाठी तुम्हांला एकक स्थानात काही पॅटर्न दिसत नाही. कारण एकक स्थानात समान अंक असूनही 3 ने विभाज्य होतेपण आणि नसतेपण.

जसे की 27 ही 3 ने विभाज्य आहे, पण 17, 37 या संख्या 3 ने विभाज्य नाहीत.

आता तुम्ही 21, 36, 54 अणि 219 मधील अंकांची बेरीज करा. $2 + 1 = 3$, $3 + 6 = 9$, $5 + 4 = 9$, $2 + 1 + 9 = 12$. या सर्व बेरजा 3 ने विभाज्य आहेत.

25, 37, 260 यांच्या अंकांच्या बेरजा करा. $2 + 5 = 7$, $3 + 7 = 10$, $2 + 6 + 0 = 8$ या बेरजा 3 ने विभाज्य नाही.

म्हणून आपण म्हणतो की, **जर एखाद्या संख्येतील अंकांची बेरीज 3 ने विभाज्य असेल तर पूर्ण संख्यादेखील 3 ने विभाज्य असते.**

7221 ही संख्या 3 ने विभाज्य आहे का?

6 ने विभाज्यता : तुम्ही अशी एखादी संख्या सांगू शकता का जी 2 आणि 3 या दोन्हींनी विभाज्य आहे? 18 ही अशी संख्या आहे. मग 2×3 च्या गुणाकाराने म्हणजे 6 ने 18 विभाज्य होते का? होय. होतेच.

18 सारख्या आणखी काही संख्या पाहा. पडताळून पाहा की त्या 6 ने विभाज्य आहेत का?

अशी एखादी संख्या शोधा की जी 2 ने विभाज्य आहे पण 3 ने नाही.

आता अशी एक संख्या घ्या जी 3 ने विभाज्य आहे, पण 2 ने नाही. उदा., 27.

27 ही 6 ने विभाज्य होते का? नाही. अशाच आणखी काही संख्या शोधा.

यातून आपण असा निष्कर्ष काढतो की, **जर एखादी संख्या 2 आणि 3 ने विभाज्य असेल ती संख्या 6 ने देखील विभाज्य असते.**

4 ने विभाज्यता : तुम्ही एखादी तीन अंकी 4 ने विभाज्य असलेली संख्या सांगू शकता का? उदा,. 212. आता एखादी चार अंकी 4 ने विभाज्य असलेली संख्या सांगा. उदा., 1936 ही संख्या.

212 च्या दशक व एकक स्थानी असलेल्या अंकांनी तयार होणारी संख्या पाहा. ती 12 आहे आणि 12 ही 4 ने विभाज्य आहे. 1936 मध्ये 36 आहे; जी 4 ने विभाज्य आहे. ही क्रिया 4612; 3516; 9532 वर करून पाहा.

286 ही 4 ने विभाज्य आहे का? नाही. कारण 86 ही 4 ने विभाज्य नाही.

म्हणून शेवटी आपण असे म्हणतो की, **3 किंवा जास्त अंकी संख्यांच्या दशक व एकक स्थानातील अंकांनी बनलेल्या संख्येला 4 ने भाग गेला तर ती संख्या 4 ने विभाज्य असते.**

1 व 2 अंकी संख्यांची 4 ने विभाज्यता प्रत्यक्ष 4 ने भाग देऊनच पाहावी लागते.

8 ने विभाज्यता : 1000, 2104, 1416 या संख्या 8 ने विभाज्य आहेत का? होय.

या संख्यांच्या एकक, दशक आणि शतक स्थानांतील अंकांनी बनलेल्या संख्यांना 000, 104, 416 यांना 8 ने भाग जातो. अशाच आणखी काही संख्या घेऊन ज्यांच्या शतक, दशक, एकक स्थानांतील अंकांपासून बनलेल्या संख्या पडताळून घ्या. उदा., 9216, 8216, 7216, 10216, 9995216 इ. या संख्या 8 ने विभाज्य आहेत.

आपल्या लक्षात येते की, **4 किंवा जास्त अंकी संख्या 8 ने विभाज्य असते तर शेवटच्या तीन अंकांपासून बनलेली संख्या 8 ने विभाज्य असेल.**

73512 ही 8 ने विभाज्य आहे का?

1, 2 व 3 अंकी संख्यांची 8 ने विभाज्यता पडताळून पाहण्यासाठी प्रत्यक्ष 8 ने भाग द्यावा लागतो.

9 ने विभाज्यता : 9 चे विभाज्य 9, 18, 27, 36, 45, 54,... आहेत. म्हणजेच या संख्या 9 ने विभाज्य आहेत. आणखी काही संख्या 4608, 5283 यादेखील 9 ने विभाज्य आहेत.

या संख्येच्या अंकांच्या बेरजेमध्ये काही पॅटर्न दिसतो का? होय.

$1 + 8 = 9, 2 + 7 = 9, 3 + 6 = 9, 4 + 5 = 9,$

$4 + 6 + 0 + 8 = 18, 5 + 2 + 8 + 3 = 18$

या सर्व बेरजा 9 ने विभाज्य आहेत.

758 ही 9 ने विभाज्य आहे का? नाही.

$7 + 5 + 8 = 20$ ही 9 ने विभाज्य नाही.

या उदाहरणांच्या आधारे आपण म्हणू शकतो की, **जर एखादी संख्येतील अंकांची बेरीज 9 ने विभाज्य असेल तर ती संख्या 9 ने विभाज्य असते.**

11 ने विभाज्यता : 308, 1331 आणि 61809 या तीनही संख्या 11 ने विभाज्य आहेत.

आपण एक तक्ता बनवून निरीक्षण केल्यास त्या संख्येतील अंकांमध्ये काही समानता दिसते का?

संख्या	उजवीकडून विषम स्थानातील अंकांची बेरीज	उजवीकडून सम स्थानातील अंकांची बेरीज	फरक
308	$8 + 3 = 11$	0	$11 - 0 = 11$
1331	$1 + 3 = 4$	$3 + 1 = 4$	$4 - 4 = 0$
61809	$9 + 8 + 6 = 23$	$0 + 1 = 1$	$23 - 1 = 22$

आपल्याला असे दिसून येते की प्रत्येक परिस्थितीत फरक 0 किंवा 11 ने विभाज्य आहे.

5081 मध्ये $(8 + 5) - (1 + 0) = 12$ येते जी 11 ने विभाज्य नाही. म्हणून 5081 देखील 11 ने विभाज्य नाही. याचा पडताळा 5081 ला 11 ने भाग देऊन पाहू शकतो.

अशा प्रकारे, **एखाद्या संख्येची 11 ने विभाज्यता पडताळून पाहण्यासाठी उजवीकडून विषम स्थानांतील अंकांची बेरीज व सम स्थानांतील अंकांची बेरीज काढून घेऊन त्यांमधील फरक 0 किंवा 11 ने विभाज्य असेल तर ती संख्या 11 ने विभाज्य असते.**

उदाहरणसंग्रह 3.3

1. विभाज्यतेच्या कसोट्यांचा वापर करून खालीलपैकी कोणत्या 2 ने विभाज्य 3 ने, 4 ने, 5 ने, 6 ने, 8 ने, 9 ने 10 ने किंवा 11 ने विभाज्य आहेत (किंवा नाहीत) हे सांगा.

संख्या	विभाज्य आहेत								
	2 ने	**3** ने	**4** ने	**5** ने	**6** ने	**8** ने	**9** ने	**10** ने	**11** ने
128	होय	नाही	होय	नाही	नाही	होय	नाही	नाही	नाही
990	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
1586	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
275	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
6686	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
639210	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
429714	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
2856	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
3060	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
406839	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....

2. विभाज्यतेच्या कसोट्यांचा वापर करून खालीलपैकी कोणत्या संख्या 4 ने विभाज्य आहेत आणि कोणत्या 8 ने विभाज्य आहेत हे पाहा.

   (a) 572 (b) 726352 (c) 5500 (d) 6000
   (e) 12159 (f) 14560 (g) 21084 (h) 31795072
   (i) 1700 (j) 2150

3. विभाज्यतेच्या कसोट्या वापरून पुढीलपैकी कोणत्या संख्या 6 ने विभाज्य आहेत हे पाहा.

   (a) 297144 (b) 1258 (c) 4335 (d) 61233
   (e) 901352 (f) 438750 (g) 1790184 (h) 12583
   (i) 639210 (j) 17852

4. विभाज्यतेच्या कसोट्यांद्वारे कोणत्या संख्या 11 ने विभाज्य आहेत ते पाहा.

   (a) 5445 (b) 10824 (c) 7138965
   (d) 70169308 (e) 10000001 (f) 901153

5. खालील दिलेल्या रिकाम्या जागी सर्वांत लहान अंक लिहा ज्यामुळे संख्या 3 ने विभाज्य होईल.

   (a) ____ 6724 (b) 4765 ____ 2

6. खालील रिकाम्या जागी असा अंक लिहा ज्यामुळे संख्या 11 ने विभाज्य होईल.

   (a) 92 ____ 389 (b) 8 ____ 9484

3.5 सामाईक अवयव आणि सामाईक विभाज्य

काही संख्यांच्या जोड्यांतील अवयव पाहा.

(a) 4 आणि 18 चे अवयव कोणते आहेत?

4 चे अवयव = 1, 2, 4

18 चे अवयव = 1, 2, 3, 6, 9, 18

दोन्ही संख्यांचे 1 आणि 2 हे अवयव आहेत. म्हणजेच 1 आणि 2 हे 4 व 18 चे सामाईक अवयव (Common factors) आहेत.

प्रयत्न करा

खाली दिलेल्या जोड्यांचे सामाईक अवयव कोणते?

(a) 8, 20 (b) 9, 15

(b) 4 आणि 15 चे सामाईक अवयव कोणते?

या दोन्हींमध्ये केवळ 1 हाच सामाईक अवयव आहे.

7 आणि 16 मध्ये सामाईक अवयव कोणते?

ज्या दोन संख्यांमध्ये केवळ 1 हाच सामाईक अवयव असतो, अशा संख्यांना सहमूळ संख्या (co-prime numbers) म्हणतात.

4 आणि 15 सहमूळ संख्या आहेत.

7 आणि 15, 12 आणि 49, 18 आणि 23 या सहमूळ संख्या आहेत का?

(c) 4, 12, 16 चे सामाईक अवयव काढा.

4 चे अवयव = 1, 2, 4

12 चे अवयव = 1, 2, 3, 4, 6, 12

16 चे अवयव = 1, 2, 4, 8, 16

सामाईक अवयव = 1, 2, 4

खालील संख्यांचे सामाईक अवयव कोणते?

(a) 8, 12, 20 (b) 9, 15, 21

आता एकपेक्षा जास्त संख्यांचे विभाज्य घेऊन पाहू.

(a) 4 आणि 6 चे विभाज्य कोणते?

4 चे विभाज्य = 4, 8, 12, 16, 20, 24, ... (आणखी विभाज्य लिहा)

6 चे विभाज्य = 6, 12, 18, 24, 30, 36, ... (आणखी विभाज्य लिहा)

यामध्ये अशा काही संख्या आहेत का की ज्या दोन्हींकडे आहेत. आपल्याला असे दिसून येईल की 12, 24, 36, ... 4 आणि 6 चे दोन्हींचे विभाज्य आहेत.

तुम्हांला असे आणखी विभाज्य लिहिता येतील का?

12, 24, 36, ... हे 4 आणि 6 चे सामाईक विभाज्य (Common multiples) आहेत.

(b) 3, 5 आणि 6 चे सामाईक विभाज्य लिहा.

3 चे विभाज्य 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, ... आहेत.

5 चे विभाज्य 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, ... आहेत.

6 चे विभाज्य 6, 12, 18, 24, 30, ... आहेत.

3, 5 अणि 6 चे सामाईक विभाज्य 30, 60, 90, ... आहेत.

3, 5 आणि 6 चे आणखी काही सामाईक विभाज्य लिहा.

उदाहरण 5 : 75, 60 आणि 210 चे सामाईक विभाजक काढा.

उत्तर : 75 चे विभाजक 1, 3, 5, 15, 25 आणि 75 आहेत.

60 चे विभाजक 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 आणि 60

210 चे विभाजक 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42,7 0, 105 अणि 210 आहेत.

याप्रमाणे 75, 60 आणि 210 चे सामाईक विभाजक 1, 3, 5 आणि15 आहेत.

उदाहरण 6 : 3, 4 आणि 9 चे सामाईक विभाज्य काढा.

उत्तर : 3 चे विभाज्य 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, ... आहेत.

4 चे विभाज्य 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48,... आहेत.

9 चे विभाज्य 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, ... आहेत.

खात्रीने 3, 4 आणि 9 चे सामाईक विभाज्य 36, 72, 108,... आहेत.

उदाहरणसंग्रह 3.4

1. खालील संख्यांचे सामाईक विभाजक काढा.
   (a) 20 आणि 28 (b) 15 आणि 25
   (c) 35 आणि 50 (d) 56 आणि 120
2. खालील संख्यांचे सामाईक विभाजक काढा.
   (a) 4, 8 आणि 12 (b) 5, 15 आणि 25
3. खालील संख्यांचे पहिले तीन सामाईक विभाज्य काढा.
   (a) 6 आणि 8 (b) 12 आणि 18
4. 3 आणि 4 च्या सामाईक विभाज्य असलेल्या 100 पेक्षा लहान सर्व संख्या लिहा.
5. खालीलपैकी कोणत्या संख्या सहमूळ आहेत?
   (a) 18 आणि 35 (b) 15 आणि 37 (c) 30 आणि 415
   (d) 17 आणि 68 (e) 216 आणि 215 (f) 81 आणि 16
6. एका संख्येला 5 आणि 12 या दोन्ही संख्यांनी भाग जातो, तर अशी संख्या काढा की जिने त्या संख्येला नेहमी भाग जाईल.
7. एका संख्येला 12 ने भाग जातो. आणखी अशा कोणत्या संख्या आहेत की त्यांनी त्या संख्येला भाग जाईल?

3.6 विभाज्यतेचे आणखी काही नियम

संख्यांच्या विभाज्यतेचे आणखी काही नियम पाहू.

(i) तुम्ही 18 चा एक विभाजक सांगू शकता का? तो 9 आहे. 9 चा एक विभाजक लिहा. तो 3 आहे. तो 18 चा विभाजक आहे का? हो, आहे. 18 चा दुसरा विभाजक सांगा. हा 6 आहे. 6 चा एक विभाजक सांगा. तो 2 आहे. हा 18 चा ही एक विभाजक आहे. याची पडताळणी 18 च्या अन्य विभाजकांसाठीही करा.

ह्रीच क्रिया 24 साठी करा. ही 8 ने विभाज्य आहे. तसेच 24 या संख्येला 8 च्या सर्व विभाजकांनी म्हणजे 1,2,4 आणि 8 ने विभाज्य आहे.

म्हणून आपण म्हणू शकतो की, **कोणतीही संख्या एका संख्येने विभाज्य असेल तर ती संख्या या संख्येच्या विभाजकांनीही विभाज्य असेल.**

(ii) 80 ही संख्या 4 व 5 दोन्हींनी विभाज्य आहे. ही $4 \times 5 = 20$ नेही विभाज्य आहे तसेच 4 आणि 5 सहमूळ संख्या आहेत.

याचप्रमाणे 60, सहमूळ संख्या 3 आणि 5 यांना विभाज्य आहे. 60 ही $3 \times 5 = 15$ नेही विभाज्य आहे.

म्हणून आपण म्हणू शकतो की, **कोणतीही संख्या दोन सहमूळ संख्यांनी विभाज्य असेल तर ती त्या संख्यांच्या गुणाकाराने ही विभाज्य असते.**

(iii) दोन संख्या 16 आणि 20 संख्या 4 ने विभाज्य आहेत. $16 + 20 = 36$ ही संख्या सुद्‌धा 4 ने विभाज्य आहे याची पडताळणी संख्यांच्या अजून जोड्या घेऊन करा.

16 आणि 20 च्या इतर सामाईक विभाजकांसाठीही पडताळणी करा. याप्रमाणे, **जर दिलेल्या दोन संख्या कुठल्याही एका संख्येने विभाज्य असतील तर या संख्यांची बेरीजही त्या संख्येने विभाज्य असते.**

(iv) दोन संख्या 35 आणि 20, संख्या 5 ने विभाज्य आहेत, तर यांची वजाबाकी $35 - 20 = 15$ सुद्‌धा 5 ने विभाज्य असेल का? याची पडताळणी संख्यांच्या आणखी जोड्या घेऊन करा.

याप्रमाणे, **जर दिलेल्या दोन संख्या एखाद्या संख्येने विभाज्य असतील तर त्या संख्यांची वजाबाकीसुद्‌धा त्या संख्येने विभाज्य असते.** अन्य दोन संख्यांची जोडी घेऊन वर दिलेले चारही नियम पडताळून पाहा.

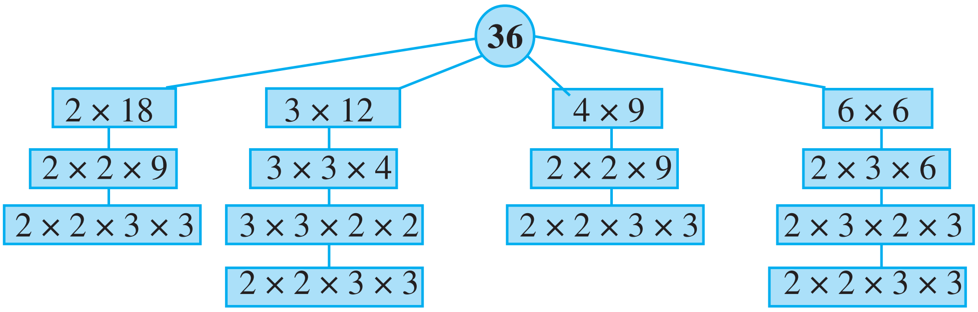
3.7 मूळ अवयव पाडणे

जर कोणतीही संख्या तिच्या विभाजकांच्या गुणाकार रूपात मांडली गेली तर त्या संख्येचे अवयव पाडले असे आपण म्हणतो. याप्रकारे जेव्हा आपण $24 = 3 \times 8$ लिहितो तेव्हा 24 चे अवयव (विभाजक) पाडले असे आपण म्हणतो. ही 24 अवयवांची एक जोडी आहे. 24 चे अन्य अवयव खालीलप्रमाणे :

$24 = 2 \times 12$ $= 2 \times 2 \times 6$ $= 2 \times 2 \times 2 \times 3$	$24 = 4 \times 6$ $= 2 \times 2 \times 6$ $= 2 \times 2 \times 2 \times 3$	$24 = 3 \times 8$ $= 3 \times 2 \times 2 \times 2$ $= 2 \times 2 \times 2 \times 3$

24 च्या सर्व अवयवांत आपण शेवटी $2 \times 2 \times 2 \times 3$ या अवयवांपर्यंत पोहोचतो. या अवयवांत फक्त 2 आणि 3 हेच विभाजक आहेत आणि त्या मूळ संख्या आहेत. कोणत्याही संख्येचा असे मूळ अवयव काढणे (prime factorisation) असे म्हणतात.

याची पडताळणी 36 ही संख्या घेऊन करू.



36 चे मूळ विभाजक आहेत $2 \times 2 \times 3 \times 3$. हे 36 चे केवळ एकच मूळ विभाजक आहेत.

प्रयत्न करा

16, 28 आणि 38 चे मूळ विभाजक लिहा.

हे करा

विभाजक वृक्ष (Factor Tree)

कोणतीही संख्या घ्या व ती लिहा

90

तिची कोणतीही विभाजक जोडी घ्या, जसे की

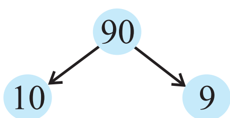
90 =10×9

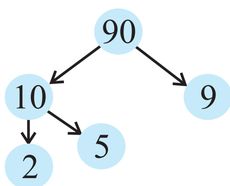
आता 10 ची विभाजकांची एक जोडी घ्या, जसे

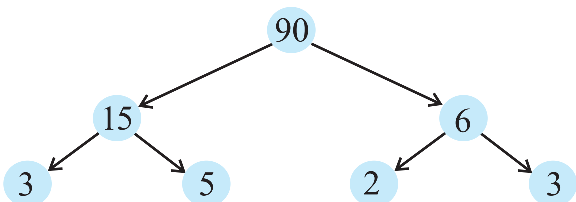
10 = 2×5

9 चे विभाजक

9 = 3×3







असेच खालील संख्या घेऊन करा.

(a) 8 (b) 12

उदाहरण 7 : 980 चे मूळ विभाजक काढा.

उत्तर : आपण खालीलप्रमाणे करू.

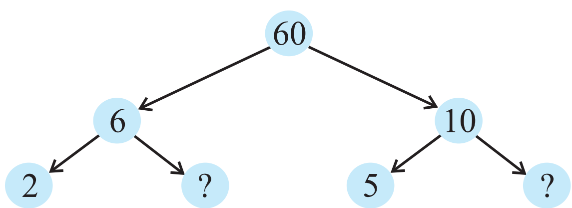
आपण 980 ला 2, 3, 5, 7 इत्यादींनी याच क्रमाने पुन्हा पुन्हा भाग देऊ. ही किमया भाग जात आहे तोपर्यंत करू.

2	980
2	490
5	245
7	49
7	7
	1

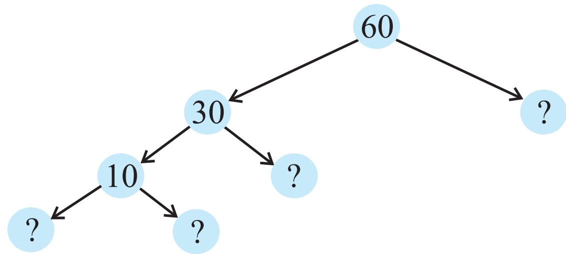
याप्रकारे 980 चे मूळ विभाजक $980 = 2 \times 2 \times 5 \times 7 \times 7$

उदाहरणसंग्रह 3.5

1. खालीलपैकी कोणती विधाने सत्य आहेत?
   (a) जर एखादी संख्या 3 ने विभाज्य असेल तर 9 नेही विभाज्य असते.
   (b) जर एखादी संख्या 9 ने विभाज्य असेल तर 3 नेही नक्की विभाज्य असेल.
   (c) जर एखादी संख्या 18 ने विभाज्य आहे, तर ते ती संख्या 3 आणि 6 या दोन्हींनीही विभाज्य असेल.
   (d) जर एक संख्या 9 आणि 10 ने विभाज्य असेल तर ती 90 नेही विभाज्य असेल.
   (e) जर दोन संख्या सहमूळ असतील तर त्यात किमान एक तरी नक्कीच मूळ संख्या असेल.
   (f) 4 ने विभाज्य सर्व संख्या 8 ने सुद्धा विभाज्य असतील.
   (g) 8 ने विभाज्य सर्व संख्या 4 ने सुद्धा विभाज्य असतील.
   (h) एका संख्येने दोन संख्यांना वेगवेगळा पूर्णपणे भाग जात असेल तर त्यांच्या बेरजेलाही त्या संख्येने पूर्णपणे भाग जाईल.
   (i) एखाद्या संख्येने दोन संख्यांच्या बेरजेला पूर्णपणे भाग जात असेल तर त्या संख्येने त्या दोन संख्यांना वेगवेगळा पूर्णपणे भाग जाईल.
2. इथे 60 चे दोन भिन्न-भिन्न विभाजक वृक्ष दिले आहेत.
   (a)



(b)



3. एका संयुक्त संख्येच्या मूळ विभाजकांमध्ये कोणत्या विभाजकांचा समावेश केला जात नाही?
4. चार अंकी सर्वांत मोठी संख्या लिहा आणि ती मूळ अवयवांचा गुणाकार रूपात व्यक्त करा.
5. पाच अंकी सर्वांत लहान संख्या लिहा आणि ती मूळ अवयवांचा गुणाकार रूपात व्यक्त करा.
6. 1729 चे सर्व मूळ विभाजक काढा आणि संख्या मूळ विभाजनांच्या गुणाकार रूपात लिहा.
7. तीन क्रमागत संख्यांचा गुणाकार नेहमी 6 ने विभाज्य असतो. या विधानाचे काही उदाहरणांच्या साहाय्याने स्पष्टीकरण करा.
8. दोन क्रमागत विषम संख्यांची बेरीज 4 ने विभाज्य असते. काही उदाहरणे घेऊन या विधानाची सत्यता पडताळून पहा.
9. खालीलपैकी कोणत्या विधानांमध्ये मूळ अवयव काढले आहेत.
   (a) $24 = 2 \times 3 \times 4$ (b) $56 = 1 \times 7 \times 2 \times 2 \times 2$
   (c) $70 = 2 \times 5 \times 7$ (d) $54 = 2 \times 3 \times 9$
10. भागाकार न करता 25110 ही संख्या 45 ने विभाज्य आहे का ते ठरवा.

    [सूचना : 5 आणि 9 सहमूळ संख्या आहेत. दिलेल्या संख्येची 5 आणि 9 साठी विभाज्यता तपासून पहा.]
11. 18 ही संख्या 2 आणि 3 या दोन्हींनी विभाज्य आहे. ती $2 \times 3 = 6$ ने ही विभाज्य आहे. याप्रमाणे एक संख्या 4 आणि 6 दोन्हींनी विभाज्य आहे. तर ती संख्या $4 \times 6 = 24$ नेही विभाज्य आहे असे आपण म्हणू शकतो का? जर नसेल तर उत्तराच्या समर्थनार्थ एक उदाहरण द्या.
12. मी चार वेगवेगळे मूळ अवयव असलेली सर्वांत लहान संख्या आहे. तुम्ही मला शोधू शकाल का?

3.8 महत्तम सामाईक विभाजक

आपण दोन संख्यांचे सामाईक विभाजक काढायला शिकलो. आता आपण या सामाईक विभाजकातील सर्वांत मोठा विभाजक शोधण्याचा प्रयत्न करू.

12 आणि 16 चे सामाईक विभाजक काय आहेत? ते आहेत 1, 2 आणि 4.

या सामाईक विभाजकात सर्वांत मोठा कोणता आहे? तो 4 आहे. 20, 28 आणि 36 चे सामाईक विभाजक काय आहेत? ते 1, 2 आणि 4 आहेत. यातही पुन्हा 4 हा सर्वांत मोठा विभाजक आहे.

दोन किंवा दोनपेक्षा अधिक संख्यांच्या सामाईक विभाजकातील सर्वांत मोठा सामाईक विभाजक महत्तम सामाईक विभाजक (highest common factor) म्हणतात. संक्षेपात म.सा.वि. (किंवा HCF) लिहितात. याला महत्तम (सर्वांत मोठा) सामाईक भाजक (greatest common divisor) किंवा (GCD) सुद्धा म्हणतात.

प्रयत्न करा

खालील संख्यांचा म.सा.वि. काढा.

(i) 24 आणि 36 (ii) 15, 25 आणि 30

(iii) 8 आणि 12 (iv) 12, 16 आणि 28

20, 28 आणि 36 चा म.सा.वि. त्या संख्यांच्या मूळ विभाजकांद्वारे असा काढला जाऊ शकतो.

$$\begin{array}{r|l} 2 & 20 \\ \hline 2 & 10 \\ \hline 5 & 5 \\ \hline & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 28 \\ \hline 2 & 14 \\ \hline 7 & 7 \\ \hline & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 36 \\ \hline 2 & 18 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline & 1 \end{array}$$

याप्रकारे

$$\begin{aligned} 20 &= \boxed{2} \times \boxed{2} \times 5 \\ 28 &= \boxed{2} \times \boxed{2} \times 7 \\ 36 &= \boxed{2} \times \boxed{2} \times 3 \times 3 \end{aligned}$$

20, 28 आणि 36 मध्ये सामाईक विभाजक 2 (दोन वेळा येतो) आहे.

20, 28 आणि 36 चा म.सा.वि. $2 \times 2 = 4$ आहे.

उदाहरणसंग्रह 3.6

1. खालील संख्यांचे म.सा.वि. काढा.

   (a) 18, 48 (b) 30, 42 (c) 18, 60 (d) 27, 63

   (e) 36, 84 (f) 34, 102 (g) 70, 105, 175 (h) 91, 112, 49

   (i) 18,54, 81 (j) 12, 45, 75

2. खालील संख्यांचे म.सा.वि. काय असतील?

   (a) क्रमाने येणाऱ्या दोन संख्या (b) दोन क्रमागत समसंख्या

   (c) दोन क्रमागत विषम संख्या

3. मूळ विभाजक पद्धती द्वारा दोन सहमूळ संख्या 4 आणि 15 चा म.सा.वि. या पद्धतीने काढला गेला :

   $4 = 2 \times 2$ आणि $15 = 3 \times 5$

   या विभाजकामध्ये कोणताही मूळ विभाजक सामाईक विभाजक नाही. म्हणून 4 आणि 15 चा म.सा.वि. शून्य आहे. हे उत्तर बरोबर आहे का? जर नसेल तर योग्य म.सा.वि. काय आहे?

3.9 लघुतम सामाईक विभाज्य

4 आणि 6 चे सामाईक विभाज्य काय आहेत? ते 12, 24, 36, ... आहेत. यातील सर्वांत लहान विभाज्य कोणता आहे. तो 12 आहे. आपण म्हणतो की, 4 आणि 6 चा सर्वांत लहान विभाज्य किंवा लघुत्तम सामाईक विभाज्य (lowest common multiple) 12 आहे. ही दोन्ही संख्यांची लहानात लहान विभाज्य संख्या आहे. दिलेल्या **दोन किंवा दोनापेक्षा जास्त संख्यांचा लघुतम सामाईक विभाज्य त्या संख्यांचा सामाईक विभाज्यामधील सर्वांत लहान (लघुतम किंवा कमीत कमी) विभाज्य असतो. थोडक्यात, त्याला ल.सा.वि. (LCM) असे लिहितात.** 8 आणि 12 चा ल.सा.वि. काय आहे? 4 आणि 9 चा ल.सा.वि. काय आहे? 6 आणि 7 चा ल.सा.वि. काय आहे?

उदाहरण 8 : 12 आणि 18 चा ल.सा.वि. काढा.

उत्तर आपल्याला माहीत आहे की, 12 आणि 18 चे सामाईक विभाज्य 36, 72, 108 इत्यादी आहेत. यातील 36 सर्वांत लहान आहे. हे आणखी एका पद्धतीने काढू :

12 आणि 18 चे मूळ विभाजक हे आहेत :

$12 = 2 \times 2 \times 3 \qquad 18 = 2 \times 3 \times 3$

या मूळ विभाजकांमध्ये, मूळ विभाजक 2 हा जास्तीत जास्त दोन वेळा येतो. (हा 12 च्या विभाजकांमध्ये आहे.) याप्रकारे मूळ विभाजक 3 हा जास्तीत जास्त दोन वेळा येतो. (हा 18 च्या विभाजकांमध्ये आहे.) दोन संख्यांचा ल.सा.वि. हा त्या संख्यांमध्ये जास्तीत जास्त वेळा येणाऱ्या मूळ विभाजकांचा गुणाकार आहे. म्हणून यांचा ल.सा.वि. $= 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$ आहे.

उदाहरण 9 : 24 आणि 90 चा ल.सा.वि. काढा.

उत्तर : $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \qquad 90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$

या मूळ विभाजकांमध्ये, मूळ विभाजक 2 जास्तीत जास्त तीन वेळा आला आहे. (हा 24 मध्ये आहे) मूळ विभाजक 3 जास्तीत जास्त दोन वेळा आला आहे. (हा 90 मध्ये आहे.) आणि मूळ विभाजक 5 केवळ एकदा 90 मध्ये आला आहे.

म्हणून इच्छित ल.सा.वि. $= (2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3) \times 5 = 360$

उदाहरण 10 : 40, 48 आणि 45 चा ल.सा.वि. काढा.

उत्तर : 40, 48 आणि 45 चे मूळ विभाजक याप्रमाणे :

$40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$

$48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$

$45 = 3 \times 3 \times 5$

मूळ विभाजक 2 जास्तीत जास्त चार वेळा (हा 48 मध्ये आहे), मूळ विभाजक 3 जास्तीत जास्त दोन वेळा (हा 45 मध्ये आहे) आणि मूळ विभाजक 5 केवळ एकदा (हा 40 व 45 दोन्ही मध्ये आहे) येतो.

म्हणून इच्छित ल.सा.वि. $= (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3) \times 5 = 720$

लघुतम साधारण विभाज्य (ल.सा.वि.) आणखी एका पद्धतीनेही काढता येतो. ती पुढील उदाहरणात दाखवली आहे.

उदाहरण 11 : 20, 25 आणि 30 चा ल.सा.वि. काढा.

उत्तर : आपण संख्या एका ओळीत खाली दाखवल्याप्रमाणे लिहून घेऊ.

2	20	25	30	**(a)**
2	10	25	15	**(b)**
3	5	25	15	**(c)**
5	5	25	5	**(d)**
5	1	5	1	**(e)**
	1	1	1	

म्हणून, ल.सा.वि. = $2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 = 300$

(a) (सर्वांत लहान मूळ विभाजक 2 ने भाग द्या. 25 ही संख्या 2 ने विभाज्य नाही. म्हणून ती पुढच्या ओळीत जशीच्या तशी लिहिली जाते.)

(b) (पुन्हा 2 ने भाग द्या. 2 चे विभाज्य आहेत तोपर्यंत ही कृती चालू ठेवा.)

(c) (पुढची मूळ विभाजक संख्या 3 ने भाग द्या.)

(d) (पुढची मूळ विभाजक संख्या 5 ने भाग द्या.)

(e) (पुन्हा 5 ने भागा.)

3.10 म.सा.वि. आणि ल.सा.वि. वरील काही उदाहरणे

अनेक परिस्थिती आपल्यासमोर येतात, ज्यामध्ये आपण म.सा.वि., ल.सा.वि. या संकल्पनांचा वापर करतो. आपण काही उदाहरणे पाहू.

उदाहरण 12 : दोन टँकरमध्ये (tankers) अनुक्रमे 850 लीटर आणि 680 लीटर रॉकेल आहे. अशा एका मोठ्यांत मोठ्या भांड्याची धारकता काढा की दोन्ही टँकरमधील रॉकेलचे आकारमान त्या धारकतेच्या पूर्ण पटीत असेल.

उत्तर : इच्छित भांड्याने दोन्ही टँकरमधील तेल पूर्णपणे मोजायचे आहे. म्हणून त्याची धारकता दोन्ही टँकरच्या धारकतेची पूर्णपणे विभाजक असेल. याखेरीज ही धारकता जास्तीत जास्त हवी. म्हणून अशा भांड्याची जास्तीत जास्त धारकता 850 आणि 680 चा म.सा.वि. असेल. तो या पद्धतीने काढता येईल.

2	8 5 0
5	425
5	85
17	17
	1

2	6 8 0
2	340
2	170
5	85
17	17
	1

म्हणून

$$
\begin{array}{llllllll}
850 = 2 \times 5 \times 5 \times 17 & = \boxed{2} & \times & \boxed{5} & \times & \boxed{17} & \times & 5 \\
680 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 17 & = \boxed{2} & \times & \boxed{5} & \times & \boxed{17} & \times & 2 \times 2
\end{array}
$$

850 आणि 680 चे सामाईक विभाजक 2, 5 आणि 17 आहेत.

म्हणून 850 आणि 680 चा म.सा.वि. $2 \times 5 \times 17 = 170$ आहे.

इच्छित भांड्याची जास्तीत जास्त धारकता 170 लीटर आहे. हे माप 5 वेळा पूर्ण भरल्यावर पहिला टँकर आणि 4 वेळा पूर्ण भरल्यावर दुसरा टँकर भरेल.

उदाहरण 13 : सकाळच्या फिरण्याच्या वेळी तीन व्यक्ती एकाच वेळी चालायला प्रारंभ करतात. त्यांच्या लगतच्या पावलांतील अंतर क्रमशः 80 सेमी, 85 सेमी, 90 सेमी आहे. ते कमीत कमी किती अंतर चालले म्हणजे प्रत्येकाने टाकलेल्या पावलांची संख्या पूर्णांकात असेल.

उत्तर : प्रत्येक व्यक्ती चाललेले अंतर समान आणि कमीत कमी हवे आहे. हे प्रत्येक व्यक्तीने चाललेले कमीत कमी अंतर म्हणजे त्यांच्या पावलांचा ल.सा.वि. आहे. तुम्ही का ते सांगू शकाल का?

म्हणून आपण 80, 85 आणि 90 चा ल.सा.वि. काढू. 80, 85 आणि 90 चा ल.सा.वि. 12240 आहे.

म्हणून इच्छित कमीत कमी अंतर 12240 सेमी आहे.

उदाहरण 14 : अशी सर्वांत लहान संख्या काढा की जिला 12, 16, 24 आणि 36 ने भागल्यावर प्रत्येक वेळी 7 बाकी उरेल.

उत्तर : आपण 12, 16, 24 आणि 36 चा ल.सा.वि. खालील प्रकारे काढू.

2	12	16	24	36
2	6	8	12	18
2	3	4	6	9
2	3	2	3	9
3	3	1	3	9
3	1	1	1	3
	1	1	1	1

याप्रकारे, ल.सा.वि. $= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 144$

144 ही सर्वांत लहान संख्या आहे, जिला 12, 16, 24 आणि 36 ने भाग दिल्यावर प्रत्येक वेळी 0 बाकी उरेल.

परंतु आपल्याला अशी सर्वांत लहान संख्या हवी आहे जिला भागल्यावर प्रत्येक वेळी 7 बाकी उरेल. म्हणून इच्छित संख्या 144 पेक्षा 7 ने अधिक असेल.

याप्रमाणे, इच्छित सर्वांत लहान संख्या $= 144 + 7 = 151$ आहे.

उदाहरणसंग्रह 3.7

1. रेणू 75 किग्रॅ आणि 69 किग्रॅ वजनाच्या दोन खताच्या गोण्या खरेदी करते. जास्तीत जास्त वजनाच्या पूर्ण भरलेल्या खताच्या किती पिशव्या तयार करता येतील?

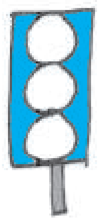
2. तीन मुले एकाच स्थानापासून चालायला प्रारंभ करतात. त्यांच्या लगतच्या पावलांतील अंतर क्रमशः 63 सेमी, 70 सेमी आणि 77 सेमी आहे. ते कमीत कमी किती अंतर चालले म्हणजे प्रत्येकाने टाकलेल्या पावलांची संख्या पूर्णांकात असेल?

3. एका खोलीची लांबी, रुंदी आणि उंची क्रमशः 825 सेमी 675 सेमी आणि 450 सेमी आहे. असा सर्वांत लांब टेप शोधा की जो तिन्ही मितींना पूर्णांकात मोजेल.

4. 6, 8 आणि 12 ने विभाज्य तीन अंकी सर्वांत लहान संख्या काढा.

5. 8, 10 आणि 12 ने विभाज्य तीन अंकी सर्वांत मोठी संख्या काढा.

6. तीन वेगवेगळ्या चौकांतील ट्रॅफिक लाईट (traffic lights) क्रमशः प्रत्येक 48 सेकंदांनी, 72 सेकंदांनी आणि 108 सेकंदांनी बदलतात. जर ते सकाळी 7 वाजता एकाच वेळी बदलते, तर ते पुन्हा एकाच वेळी कधी बदलतील?



7. तीन टँकरमध्ये क्रमशः 403 लीटर, 434 लीटर, 465 लीटर डिझेल आहे. अशा एका मोठ्यांत मोठ्या भांड्याची धारकता काढा की दोन्ही टँकरमधील रॉकेलचे आकारमान धारकतेच्या पूर्ण पटीत असेल.

8. अशी सर्वांत लहान संख्या काढा, की जिला 6, 15 किंवा 18 ने भाग दिल्यावर प्रत्येक वेळी 5 बाकी राहील.

9. चार अंकी सर्वांत लहान संख्या काढा, की जी 18, 24 आणि 32 ने विभाज्य आहे.

10. खालील संख्यांचा ल.सा.वि. काढा. ज्यामध्ये एक संख्या नेहमी 3 ने विभाज्य आहे.

    (a) 9 आणि 4   (b) 12 आणि 5

    (c) 6 आणि 5   (d) 15 आणि 4

    मिळालेल्या ल.सा.वि. तील एक सामाईक गुणधर्म शोधा. प्रत्येक स्थितीत ल.सा.वि. दोन्ही संख्यांचा गुणाकार आहे का?

11. खालील संख्यांचा ल.सा.वि. काढा. ज्यामध्ये एक संख्या दुसऱ्या संख्येचा विभाजक आहे.

    (a) 5, 20   (b) 6, 18

    (c) 12, 48   (d) 9, 45

    मिळालेल्या उत्तरावरून काय निष्कर्ष काढाल?

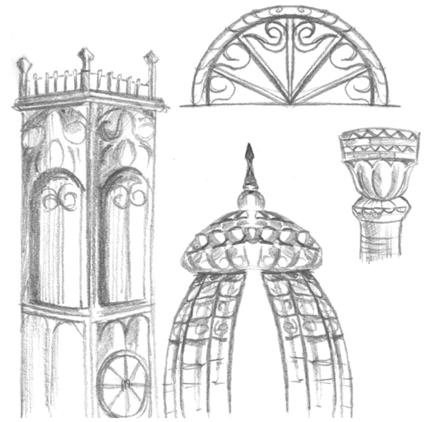
आपण काय चर्चा केली?

1. विभाज्य आणि विभाजक असे ओळखावेत?
2. आपण चर्चा केली आणि खालील गोष्टी शोधल्या. –
   (a) संख्येचा विभाजक त्या संख्येचा अवयव असतो.
   (b) प्रत्येक संख्या स्वत: त्या संख्येची विभाजक असतेच. 1 हा प्रत्येक संख्येचा विभाजक असतो.
   (c) दिलेल्या संख्येचा प्रत्येक विभाजक हा त्या संख्येपेक्षा लहान किंवा संख्येएवढा असतो.
   (d) प्रत्येक संख्या ही आपल्या प्रत्येक विभाजकाची विभाज्य असते.
   (e) दिलेल्या संख्येचा प्रत्येक विभाज्य त्या संख्येपेक्षा मोठा किंवा संख्येएवढा असतो.
   (f) प्रत्येक संख्या ही स्वत:चा विभाज्य असते.
3. आपण शिकलो की –
   (a) ज्या संख्येचे स्वत: ती संख्या आणि 1 असे दोनच विभाजक असतात तिला मूळ संख्या म्हणतात. ज्या संख्याचे दोनपेक्षा जास्त विभाजक असतात तिला संयुक्त संख्या म्हणतात.
   (b) 2 ही सर्वात लहान मूळ संख्या, सम संख्या सुद्‌धा आहे. अन्य सर्व मूळ संख्या विषम आहेत.
   (c) ज्या दोन संख्यांचा सामाईक विभाजक केवळ 1 आहे, त्यांना सहमूळ संख्या म्हणतात.
   (d) जेव्हा एक संख्या दुसरीची विभाजक आहे, तेव्हा त्या संख्येचा प्रत्येक विभाजक दुसऱ्या संख्येचा विभाजक असतो.
   (e) दोन सहमूळ संख्येने भाग जात असलेल्या संख्येला त्यांच्या गुणाकार संख्येनेही भाग जातो.
4. संख्यांना न भागता सुद्‌धा 2,3,4,5,8,9 आणि 11 या संख्यांसाठी विभाज्यता तपासून पाहता येते. संख्येतील अंक आणि त्यांची विविध संख्यांसाठीची विभाज्यता यातील संबंध आपण शोधला.
   (a) 2,5 आणि 10 साठी केवळ एकक स्थान अंक पाहून विभाज्यता सांगता येते.
   (b) संख्येतील अंकांच्या बेरजेने, 3 आणि 9 ची विभाज्यता सांगता येते.
   (c) 4 ची विभाज्यता एकक आणि दशक स्थानच्या अंकांनी तर 8 ची विभाज्यता एकक, दशक आणि शतक स्थानच्या अंकांनी तपासता येते.
   (d) 11 ची विभाज्यता सम आणि विषम स्थानच्या अंकांच्या बेरजेची तुलना करून ठरवता येते.
5. जर दोन संख्यांना एका संख्येने भाग जात असेल तर त्यांच्या बेरजेला आणि वजाबाकीलाही त्या संख्येने भाग जातो.
6. आपण शिकलो की –
   (a) दोन किंवा अधिक संख्यांचा म.सा.वि (HCF) त्याच्या सामाईक विभाजकातील सर्वात मोठा विभाजक असतो.
   (b) दोन किंवा अधिक संख्यांचा ल.सा.वि (LCM) त्याच्या सामाईक विभाजकातील सर्वात लहान विभाज्य असतो.

मूलभूत भूमितीय संकल्पना

प्रकरण 4

4.1 प्रस्तावना



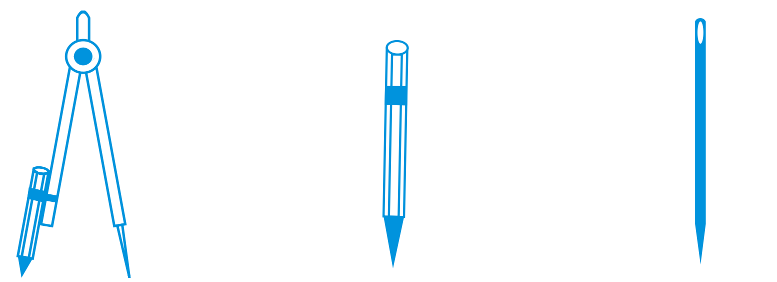
भूमितीला एक मोठा आणि संपन्न इतिहास आहे. भूमितीला इंग्रजी शब्द (Geometry) आणि ग्रीक शब्द (Geometron) आहे. (Geo) म्हणजे 'पृथ्वी' (भूमी/जमीन) '(Metron)' म्हणजे 'मापन'। इतिहासकारांच्या म्हणण्यानुसार प्राचीन काळात, भूमितीय संकल्पना बहुदा कला, वास्तुकला/शिल्पकला (Architecture) आणि भूमी (जमीन) मापनाच्या आवश्यकतांमुळे (गरजेमुळे) विकसित झाल्या असाव्यात. शेतकऱ्यांच्या जमिनींच्या सीमारेषा (boundaries), तक्रारीला कोणतीही जागा न ठेवता निश्चित करण्याचे प्रसंगही यात समाविष्ट आहेत. वैभवपूर्ण राजप्रासाद, मंदिरे तळी, धरणे आणि नगरांची (शहरांची) निर्मिती, कला, वास्तुकला यांनी या संकल्पनांना आधार दिला, बळ दिले. अगदी आजसुद्धा कला, मापन, वास्तुकला, अभियांत्रिकी (engineering), कापडाचे आकृतीबंध इ. च्या सर्व रूपात भूमितीय संकल्पनांचा प्रभाव दिसून येतो. तुम्ही विविध प्रकारच्या वस्तू, जसे की, बॉक्स, टेबल, पुस्तक शाळेत जाताना नेण्याचा जेवणाचा डबा, चेंडू ज्याच्याशी तुम्ही खेळता. पाहता आणि त्यांचा उपयोगही करता. या सगळ्या वस्तूंचे आकार (shapes) भिन्न भिन्न असतात. जी पट्टी (ruler) तुम्ही वापरता आणि ज्या पेन्सीलीने तुम्ही लिहिता, ज्या वस्तू सरळ (straight) आहेत. बांगडी, 1 रुपयाचं नाणं, एक चेंडू यांची चित्रे वर्तुळाकृती (round) दिसतात.

इथे आपण काही मनोरंजक वस्तुस्थितीबाबत शिकू की जी आपल्या सभोवतीच्या आकारांबद्दल अधिक माहिती मिळविण्यासाठी मदत करतील.

4.2 बिंदू

कागदावर एका टोकदार पेन्सिलच्या टोकाने एक खूण (dot) करा. पेन्सिल जितकी टोकदार तितकी खूण सूक्ष्म (लहान) येईल. जवळ जवळ न दिसणारी खूण आपल्याला बिंदूंची संकल्पना देईल. बिंदू (point) एक स्थिती (location) दर्शविते.

बिंदूसाठी काही उदाहरणे खालील प्रमाणे



कंपासचे टोक   पेन्सिलचे टोकदार टोक   सुईचे टोकदार टोक

समजा, तुम्ही एका कागदावर तीन बिंदू काढले, तर त्यांच्यातील फरक तुम्हाला समजायला हवा. म्हणून, त्यांना A, B, C इत्यादी इंग्रजी मोठ्या अक्षरांनी दाखवले जाते.

• B

या बिंदूंना बिंदू A, बिंदू B आणि बिंदू C असे वाचले जाते.

• A

• C

बिंदू नि:संशय खूप लहान हवेत.

प्रयत्न करा

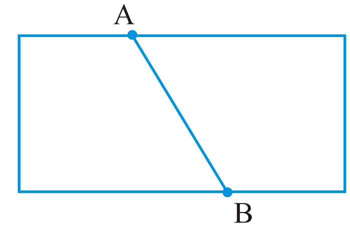
1. पेन्सिलच्या टोकाने, एका कागदावर चार बिंदू काढा. तसेच त्यांना A,C,P आणि H ही नावे द्या. या बिंदूंना वेगवेगळ्या प्रकाराने नावे द्या. नावे देण्याचा एक प्रकार शेजारील आकृतीनुसार होऊ शकतो.

   A•   •C

   P•   •H

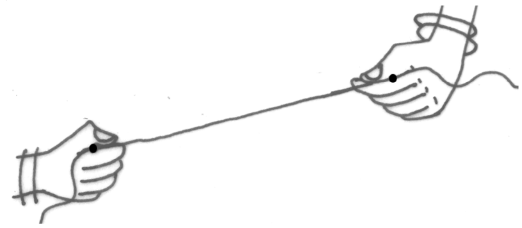
2. आकाशातील तारा आपल्याला बिंदूची कल्पना देऊ शकतो. आपल्या दैनंदिन जीवनातील या प्रकारच्या पाच परिस्थिती लिहा.

4.3 रेषाखंड



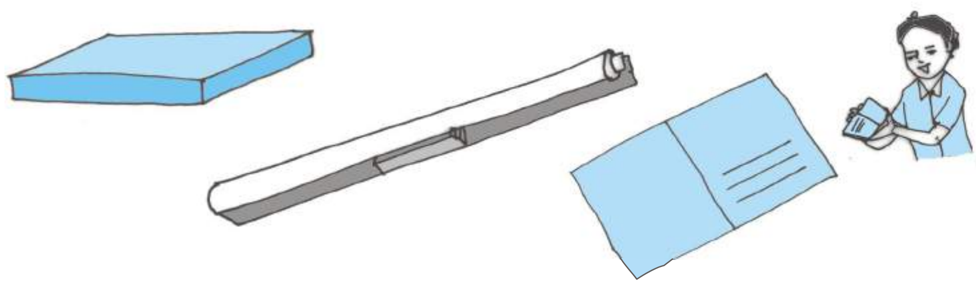
एक कागद दुमडा आणि पुन्हा उघडा. त्यावर घडीची खूण आपल्याला दिसते का? यातूनच रेषाखंडाची कल्पना येते. याचे दोन अंत्यबिंदू (end points) A आणि B आहेत.

एक पातळ दोरा घ्या. त्याच्या दोन्ही टोकांना ताणून घट्ट पकडा. हा एक रेषाखंड दाखवतो. हातांनी पकडलेली टोके या रेषाखंडाचे अंत्यबिंदू आहेत.



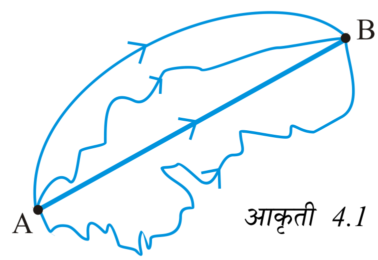
रेषाखंडाची काही उदाहरणे खालील प्रमाणे आहेत.:

एका पेटीची कड   एक ट्यूबलाईट   एका पोस्टकार्डची बाजू



आपल्या भोवतालची अशी आणखी काही रेषाखंडाची उदाहरणे देण्याचा प्रयत्न करा.

एका कागदावर A आणि B हे दोन बिंदू काढा. या दोन बिंदूंना शक्य त्या सर्व मार्गांनी जोडण्याचा प्रयत्न करा. (आकृती 4.1).



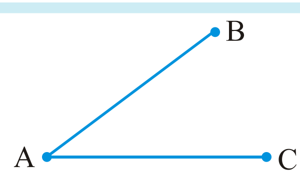
आकृती 4.1

A पासून B पर्यन्त सर्वांत लहान रस्ता कोणता?

A आणि B ला जोडणारा सर्वांत लहान रस्ता (यात बिंदू A आणि B आहेत) जो शेजारील आकृती 4.1 मध्ये दाखवला आहे, तो एक रेषाखंड आहे. तो $\overline{AB}$ किंवा $\overline{BA}$ ने दाखवतात. बिंदू A आणि B हे या रेषाखंडाचे अंत्यबिंदू आहेत.

प्रयत्न करा

1. शेजारील आकृतीत दिलेल्या रेषाखंडांची नावे लिहा. (आकृती 4.2) A हा प्रत्येक रेषाखंडांचा अंत्यबिंदू आहे का?



आकृती 4.2

4.4 रेषा

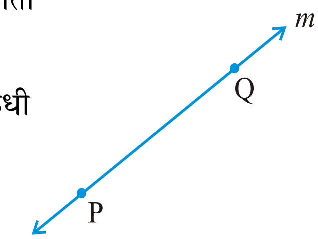
कल्पना करा की A पासून B पर्यंतचा रेषाखंड (अर्थात $\overline{AB}$) ला A च्या पुढे एका दिशेने आणि B च्या पुढे दुसऱ्या दिशेने अमर्याद वाढविले. (आकृती पहा.) आपल्याला रेषेचे (line) एक उदाहरण मिळेल.

तुम्हाला असे वाटते की कागदावर तुम्ही पूर्ण रेषा काढू शकता? नाही. (का?)

दोन बिंदू A आणि B मधून जाणारी रेषा $\overleftrightarrow{AB}$ दाखवते. ही दोन्ही दिशांना अमर्याद वाढत जाते. यावर असंख्य बिंदू असतात. (या बद्दल विचार करा.

रेषा निश्चित करण्यासाठी दोन बिंदू पुरेसे असतात. आपण म्हणतो की, दोन बिंदू एक रेषा निश्चित (determine) करतात.

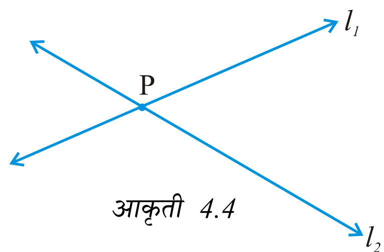
शेजारील आकृती (आकृति 4.3) रेषा $\overleftrightarrow{PQ}$ ची आहे. कधी कधी एका रेषेला l सारख्या अक्षरानेही दाखवतात.



आकृती 4.3

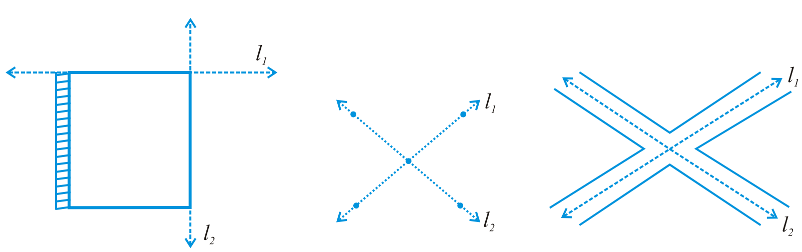
4.5 छेदणाऱ्या रेषा

शेजारील आकृती 4.4 पहा. यात l_1 आणि l_2 या दोन रेषा दाखवल्या आहेत. या दोन रेषा बिंदू P मधून जातात. आपण म्हणतो की, रेषा l_1 आणि l_2 बिंदू P मध्ये छेदतात. जर दोन रेषात एक सामाईक बिंदू असेल तर त्यांना **छेदणाऱ्या रेषा (intersecting lines)** म्हणतात.



आकृती 4.4

छेदणाऱ्या रेषांची काही उदाहरणे खाली दिली आहेत.:



आपल्या अभ्यास पुस्तिकेच्या दोन संलग्न कडा | इंग्रजी वर्णमालेतील X हे अक्षर | परस्परांना छेदणारे रस्ते

आकृती 4.5

छेदणाऱ्या रेषांच्या जोड्यांची आणखी काही उदाहरणे शोधण्याचा प्रयत्न करा.

हे करा

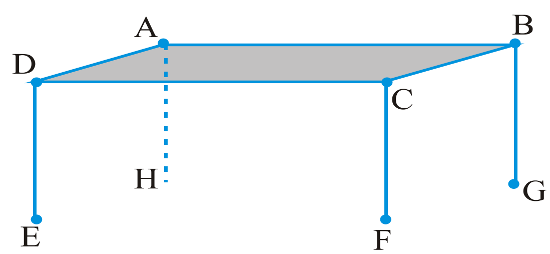
एक कागद घ्या. तो दोन वेळा असा दुमडा (घडीच्या खुणा ठेवा) की छेदणाऱ्या रेषा मिळतील आणि चर्चा करा.

(a) दोन रेषा एक पेक्षा अधिक बिंदूत छेदतात का?

(b) दोन पेक्षा जास्त रेषा एकाच बिंदूत छेदू शकतात का?

4.6 समांतर रेषा

आकृती 4.6 मध्ये दाखवलेले टेबल पहा. त्याचा वरचा भाग ABCD सपाट (Flat) आहे. तुम्हांला काही रेषाखंड आणि बिंदू दिसत आहेत का? इथे छेदणाऱ्या रेषा आहेत का?



आकृती 4.6

हो, इथे $\overleftrightarrow{AB}$ आणि $\overleftrightarrow{BC}$, बिंदू B मध्ये छेदतात. कोणत्या रेषा A मध्ये छेदतात. कोणत्या रेषा C मध्ये छेदतात आणि कोणत्या रेषा D मध्ये छेदतात?

रेषा AD आणि CD परस्परांना छेदतात का?

रेषा AD आणि BC परस्परांना छेदतात का?

आपण पाहिले की, टेबलाच्या वरच्या पृष्ठावरील काही रेषा परस्परांना छेदत नाहीत. (त्यांना कितीही वाढवल तरी). $\overleftrightarrow{AD}$ आणि $\overleftrightarrow{BC}$ अशा रेषांची एक जोडी आहे. टेबलाच्या वरील पृष्ठावरच्या अशा रेषांची अन्य जोडी (ज्या कोठेही मिळणार नाहीत) सांगू शकाल का?

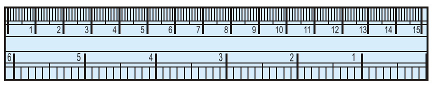
अशा रेषा (जशा टेबलाच्या वरच्या पृष्ठावर आहेत) ज्या छेदत नाहीत, त्यांना **समांतर रेषा (parallel lines)** म्हणतात.

विचार करा, चर्चा करा आणि लिहा

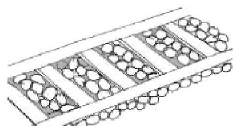
आपण समांतर रेषा आणखी कोठे पाहतो? त्यांची 10 उदाहरणे देण्याचा प्रयत्न करा.

जर दोन रेषा AB आणि CD समांतर असतील तर आपण सांकेतिक रूपात $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ लिहितो.

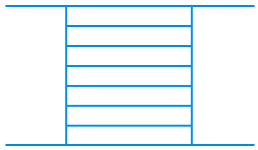
जर दोन रेषा l_1 आणि l_2 समांतर असतील तर आपण $l_1 \parallel l_2$ असे लिहितो
खालील आकृतीतील समांतर रेषा तुम्ही सांगू शकाल का?



पट्टी (scale) च्या समोरासमोरील कडा



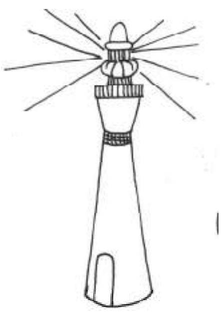
रेल्वे रूळ



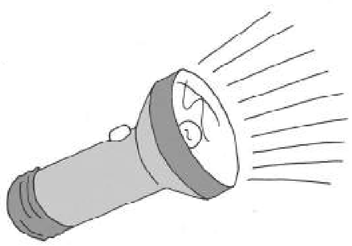
खिडकीच्या सळया

4.7 किरण

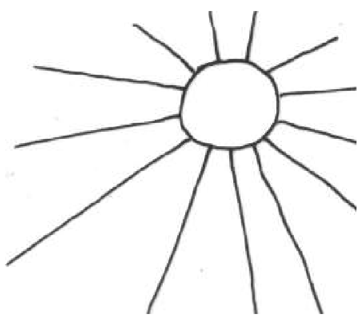
किरण (ray) साठी खालील काही प्रारूपे:



दीपस्तंभातून निघालेली प्रकाशकिरणे



विजेरीतून निघालेली प्रकाशकिरणे



सूर्याची किरणे

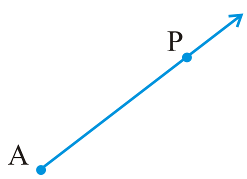
किरण रेषेचा एक भाग असतो. तो एका बिंदूपासून सुरू होतो. ज्याला आरंभ बिंदू (initial point) म्हणतात आणि एका दिशेने अमर्याद जातो.

इथे किरणाची दिलेली आकृती (आकृती 4.7) पहा. या किरणावर दोन बिंदू दाखवले आहेत:

(a) A, जो आरंभ बिंदू आहे.

(b) P, जो किरणावरील अन्य बिंदू आहे.

आपण ज्याला $\overrightarrow{AP}$ ने व्यक्त करतो.



आकृती 4.7

विचार करा, चर्चा करा आणि लिहा:

जर $\overrightarrow{PQ}$ एक किरण आहे तर,

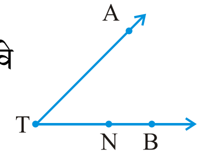
(a) त्याचा आरंभबिंदू कोणता?

(b) बिंदू Q किरणावर कोठे आहे?

(c) Q या किरणाचा आरंभ बिंदू असे आपण म्हणू शकतो का?

प्रयत्न करा

1. पुढे दिलेल्या आकृती (आकृती 4.8) मध्ये दाखवलेल्या किरणांची नावे लिहा.
2. T या सर्व किरणांचा आरंभ बिंदू आहे का?



आकृती 4.8

शेजारील आकृती 4.9 मध्ये एक किरण OA दिला आहे. हा O ने सुरू होतो आणि A मधून जातो तसेच बिंदू B मधूनही जातो.

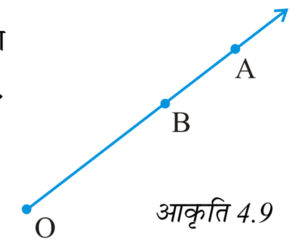
आपण त्याला $\overrightarrow{OB}$ म्हणू शकतो का? का?

इथे $\overrightarrow{OA}$ आणि $\overrightarrow{OB}$ एकच किरण दाखवतात.

आपण किरण $\overrightarrow{OA}$ ला किरण $\overrightarrow{AO}$ लिहू शकतो का? का? किंवा का नाही?

पाच किरण काढा. त्यांना योग्य नावे द्या.

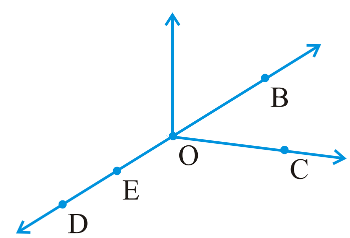
या किरणावर काढलेले बाण काय दाखवतात.



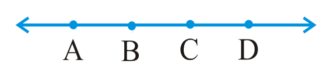
आकृति 4.9

उदाहरणसंग्रह 4.1

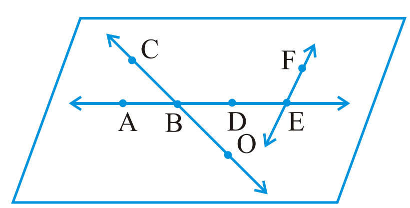
1. शेजारील आकृतीचा वापर करून नावे लिहा:
   (a) पाच बिंदू
   (b) एक रेषा
   (c) चार किरण
   (d) पाच रेषाखंड



2. शेजारील आकृतीत दिलेल्या रेषेची शक्य ती सर्व नावे लिहा. तुम्ही या चार बिंदूतील कोणतेही बिंदू वापरू शकता.



3. शेजारील आकृती पाहून नावे लिहा.
   (a) ज्यांच्यात E बिंदू आहे अशा रेषा
   (b) A मधून जाणाऱ्या रेषा
   (c) ज्यावर बिंदू A आहे अशी रोषा
   (d) छेदणाऱ्या रेषांच्या दोन जोड्या



4. यातून किती रेषा काढल्या जाऊ शकतात?
   (a) एक बिंदू (b) दोन बिंदू

5. खालील स्थितीतील प्रत्येकासाठी एक-एक (Rough) आकृती काढा. आणि योग्य ती नावे द्या.

   (a) बिंदू P रेषाखंड $\overline{AB}$ वर आहे.

   (b) रेषा XY आणि PQ बिंदू M वर छेदतात.

   (c) रेषा l वर E आणि F आहे पण D नाही.

   (d) $\overleftrightarrow{OP}$ आणि $\overleftrightarrow{OQ}$ बिंदू O वर मिळतात.

6. शेजारील रेषा $\overleftrightarrow{MN}$ ची आकृती पहा. या आकृती संदर्भात खालील विधाने सत्य की असत्य ते सांगा.:

   (a) Q, M, O, N आणि P हे रेषा $\overleftrightarrow{MN}$ वर आहेत.

   (b) M, O आणि N रेषाखंड $\overleftrightarrow{MN}$ वर आहेत.

   (c) M आणि N रेषाखंड $\overleftrightarrow{MN}$ चे अंत्यबिंदू आहेत.

   (d) O आणि N रेषाखंड $\overline{OP}$ चे अंत्यबिंदू आहेत.

   (e) M रेषाखंड $\overline{QO}$ दोन अंत्यबिंदूमधील एक आहे.

   (f) M किरण $\overrightarrow{OP}$ वरील एक बिंदू आहे.

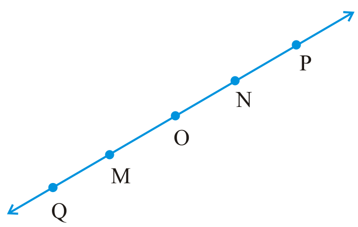
   (g) किरण $\overrightarrow{OP}$ किरण $\overrightarrow{OP}$ हून भिन्न आहे.

   (h) किरण $\overrightarrow{OP}$ आणि किरण $\overrightarrow{OM}$ हे एकच आहेत.

   (i) किरण $\overrightarrow{OM}$ किरण $\overrightarrow{OP}$ च्या विरूद्ध (Opposite) किरण नाही.

   (j) O किरण $\overrightarrow{OP}$ चा आरंभ बिंदू नाही.

   (k) N किरण $\overrightarrow{NP}$ आणि किरण $\overrightarrow{NM}$ चा प्रारंभिक बिंदू आहे.



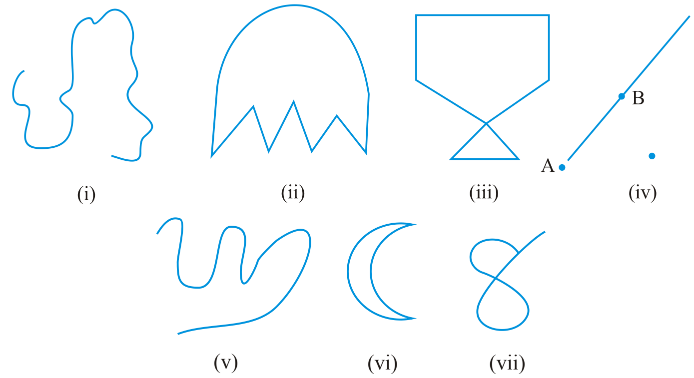
4.8 वक्र

तुम्ही कधी कागदावर वेड्या-वाकड्या रेषा काढल्या आहेत का? असे केल्यावर ज्या आकृत्या मिळतात. त्यांना **वक्र (curves)** असे म्हणतात.

यातील काही आकृत्या तुम्ही कागदावर पेन्सिल न उचलता आणि पट्टीचा वापर न करता काढू शकता. या सर्व आकृत्या वक्र आहेत. आकृती (4.10)

रोजच्या भाषेत 'वक्र' चा अर्थ 'सरळ नाही' असा होतो. गणितात वक्र, सरळ सुद्धा असू शकतो जसे खाली दाखवले आहे. [(आकृती 4.10 (iv)]

लक्षात घ्या. आकृती 4.10 मध्ये वक्र (iii) आणि (vii) स्वत:लाच छेदतात, तर (i), (ii), (v) आणि (vi) मध्ये वक्र स्वत:ला छेदत नाही. जर कोणताही वक्र स्वत:ला छेदत नसेल तर त्याला **साधा वक्र (Simple Curves)** म्हणतात.

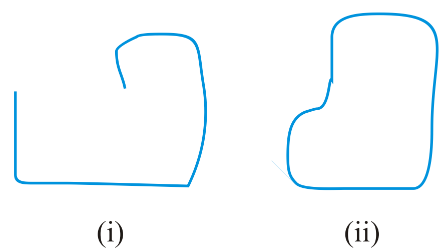


आकृती 4.10

पाच साधे वक्र काढा आणि पाच साधे नसलेले वक्र काढा.

आता हे पहा. (आकृती 4.11)

शेजारील आकृती (आकृती 4.11) मध्ये दिलेल्या दोन वक्रांमध्ये काय फरक आहे. पहिली अर्थात् आकृती 4.11 (i) हा खुला वक्र (Open Curve) आणि दुसरी आकृती 4.11 (ii) हा एक बंद वक्र (Closed Curve) आहे. आकृती 4.10 (i), (ii), (v) आणि (vi) मधील बंद वक्र आणि खुले वक्र तुम्ही सांगू शकाल का?



आकृती 4.11

एका आकृतीमधील स्थिती

एका टेनिस कोर्ट (Tennis Court) मध्ये कोर्ट रेषा त्याला तीन भागात विभागते. हे भाग आहेत: रेषेच्या एका बाजूला, रेषेवर आणि रेषेच्या दुसऱ्या बाजूला. तुम्ही रेषेच्या एका बाजूकडून दुसऱ्या बाजूला रेषा ओलांडल्याशिवाय जाऊ शकत नाही.

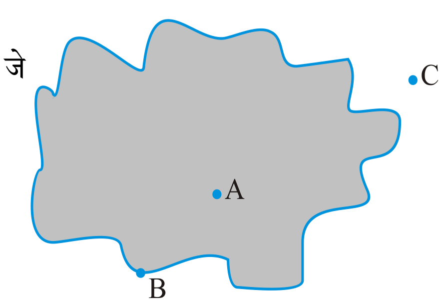
तुमच्या घराचे कुंपण घराला रस्त्यापासून वेगळे करते. तुम्ही कुंपणाच्या आत, कुंपणाच्या सीमेवर (Boundary) आणि कुंपणाबाहेर असे म्हणता.

याप्रमाणे एका बंद वक्राशी संबंधित तीन भाग असतात. जे एकमेकापासून पूर्णपणे भिन्न असतात.

(i) वक्राचा अंतर्भाग (interior) (आतील भाग)

(ii) वक्राची सीमा (boundary) (वक्रावर)

(iii) वक्राचा बहिर्भाग (exterior) (बाहेरचा भाग)



आकृती 4.12

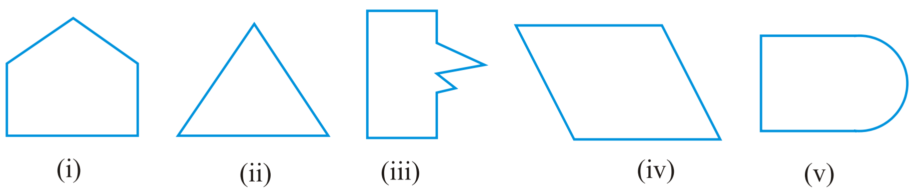
आकृती 4.12 मध्ये, A वक्राच्या अंतर्भागात आहे. C त्याच्या बहिर्भागात आहे आणि B वक्राच्या सीमेवर आहे.

वक्राचा अंतर्भाग आणि त्याची सीमा यांना मिळून त्या वक्राचे **क्षेत्र (region)** असे म्हणतात. तुम्ही जो बंद वक्र काढला आहे. त्यात तीन क्षेत्र दाखवली आहेत.

4.9 बहुभुज

खाली दाखवलेल्या आकृती 4.13 (i), (ii), (iii), (iv) आणि (v) पहा.:

तुम्ही यांच्याबाबत काय म्हणू शकाल? या बंद आकृत्या (वक्र) आहेत का? या एकमेकींपासून कोणत्या बाबतीत वेगळ्या आहेत? आकृती 4.13 (i), (ii), (iii) आणि (iv) यामध्ये काही



आकृती 4.13

विशेषता आहे. या केवळ रेषाखंडाने बनल्या आहेत. या आकृत्यांना **बहुभुज (polygons)** म्हणतात.

म्हणून, जेव्हा एखादी आकृती, सरळ बंद आकृती असेल आणि केवळ रेषाखंडांनी बनलेली असेल, तर ती बहुभुज असते. दहा वेगवेगळ्या आकृतींचे बहुभुज काढा.

खालील गोष्टींच्या साहाय्याने बहुभुज बनविण्याचा प्रयत्न करा.

हे करा

2. चार आगकाड्या
3. तीन आगकाड्या
4. दोन आगकाड्या

वरीलपैकी कशामध्ये शक्य नाही? का?

बाजू, शिरोबिंदू आणि कर्ण

शेजारील आकृती 4.14 पहा. याला बहुभुज म्हणण्याचे कारण सांगा. बहुभुज तयार करणाऱ्या रेषाखंडांना त्याच्या ***भुजा (sides)*** म्हणतात.

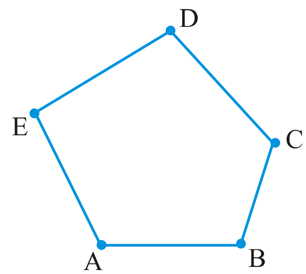
बहुभुज ABCDE च्या भुजांची नावे लिहा.

(लक्षात घ्या. की कोनांना (corners) कोणत्या प्रकारे घेऊन बहुभुजाचे नाव लिहिले आहे)

याच्या भुजा $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ आणि $\overline{EA}$ आहेत.

दोन भुजा जेथे मिळतात त्या बिंदूला बहुभुजाचा शिरोबिंदू (*vertex*) म्हणतात.

भुजा $\overline{AE}$ आणि $\overline{ED}$ बिंदू E वर मिळतात. म्हणून E बहुभुज ABCDE चा एक शिरोबिंदू आहे. B आणि C हे त्याचे आणखी



आकृती 4.14

दोन शिरोबिंदू आहेत. तुम्ही या बिंदूवर मिळणाऱ्या भुजांची नावे लिहू शकता का?

वरील बहुभुज ABCDE च्या अन्य शिरोबिंदूंची नावे तुम्ही लिहू शकता का?

ज्यांच्यामध्ये एक सामाईक अंत्यबिंदू (common end point) असेल अशा कोणत्याही दोन भुजांना बहुभुजाच्या **लगतच्या बाजू (adjacent sides)** असे म्हणतात.

AB आणि BC लगतच्या भुजा आहेत का? AE आणि DC बाबत तुम्ही काय म्हणू शकता!

एकाच भुजेच्या अंत्यबिंदूंना **लगतचे शिरोबिंदू (adjacent vertices)** म्हणतात. शिरोबिंदू E आणि D लगतचे शिरोबिंदू आहेत. तर A आणि D लगतचे शिरोबिंदू नाहीत. असे का? हे तुम्ही सांगू शकाल का?

लगतचे नाहीत असे शिरोबिंदू घ्या. त्यांना जोडणाऱ्या रेषाखंडांना बहुभुजाचे **कर्ण (diagonals)** असे म्हणतात.

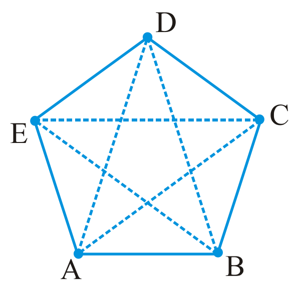
शेजारील आकृतीत रेषाखंड $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{BE}$ आणि $\overline{CE}$ बहुभुजाचे कर्ण आहेत.

रेषाखंड $\overline{BC}$ कर्ण आहे? किंवा का नाही?

लगतच्या शिरोबिंदूंना जोडून कर्ण मिळू शकतो का?

आकृती ABCDE (आकृती 4.15) च्या सर्व भुजा, लगतच्या भुजा आणि लगतचे शिरोबिंदू यांची नावे लिहा.

एक बहुभुज ABCDEFGH काढा. त्याच्या सर्व बाजू लगतच्या बाजू आणि कर्णांची नावे लिहा.



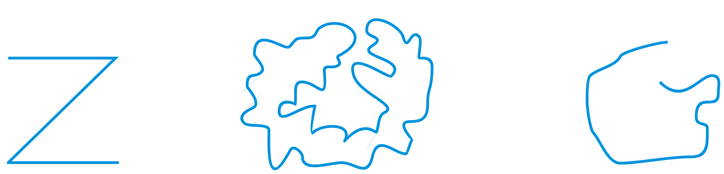
आकृती 4.15

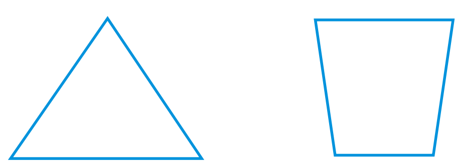
उदाहरणसंग्रह 4.2

1. खाली दिलेल्या वक्रांचे (i) खुले किंवा (ii) बंद या स्वरूपात वर्गीकरण करा.:

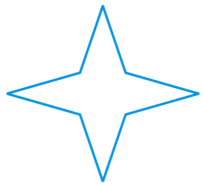
2. खालील गोष्टी स्पष्ट करण्यासाठी एक आकृती काढा.:

   (a) खुला वक्र (b) बंद वक्र


(a) (b) (c)


(d) (e)

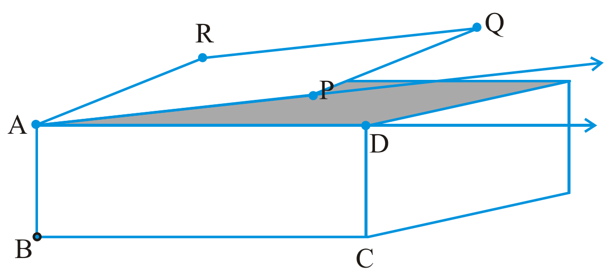
3. कोणताही बहुभुज काढा आणि त्याचा अंतर्भाग छायांकित (shade) करा.
4. शेजारील आकृती पाहून प्रश्नांची उत्तरे लिहा.
   (a) हा एक वक्र आहे का?
   (b) हा बंद आहे का?
5. शक्य असेल तर रफ आकृत्या काढून खालील गोष्टी स्पष्ट करा.
   (a) एक बंद वक्र जो बहुभुज नाही.
   (b) केवळ रेषाखंडाने बनलेला खुला वक्र
   (c) दोन भुजा असलेला बहुभुज



4.10 कोन

जेव्हा कोपरे (corner) बनतात, तेव्हा कोनही (angles) बनतात.

इथे आकृती 4.16 दिली आहे. त्यात पेटींचा (Box) वरचा भाग बिजागीरीने लावलेल्या एका दरवाज्यासारखा आहे. पेटीची कड (edge) AD आणि दरवाज्याची कड AP यांची कल्पना दोन किरण $\overrightarrow{AD}$ आणि $\overrightarrow{AP}$ यामध्ये केली जाऊ शकते. या दोन्ही मध्ये एक सामाईक अंत्यबिंदू (किंवा आरंभ बिंदू) A आहे, हे दोन किरण कोन तयार करतात असे म्हणता येईल.

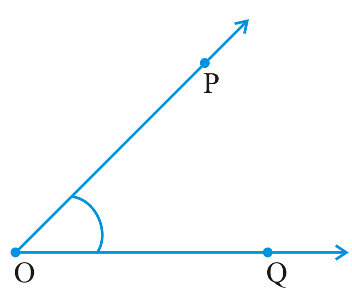


आकृति 4.16

सामाईक आरंभबिंदू असलेल्या दोन किरणांनी एक कोन बनतो.

कोन करणाऱ्या दोन किरणांना त्याच्या **भुजा (Arms किंवा sides)** म्हणतात. सामाईक आरंभबिंदूला कोनाचा **शिरोबिंदू** किंवा **शीर्ष (vertex)** म्हणतात.

शेजारील आकृतीत, किरण $\overrightarrow{OP}$ आणि किरण $\overrightarrow{OQ}$ यांनी बनलेला एक कोन दाखवला आहे. कोन दाखविण्यासाठी शिरोबिंदू जवळ लहान वक्र वापरला आहे. O हा या कोनाचा शिरोबिंदू आहे. या कोनाच्या भुजा कोणत्या आहेत? त्या किरण $\overrightarrow{OP}$ आणि $\overrightarrow{OQ}$ नाहीत का?



आकृति 4.17

या कोनाला आपण कशा प्रकारे नाव देऊ शकतो? आपण केवळ असे म्हणू शकतो की, O वर एक कोन आहे आणि आणखी नेमकेपणासाठी, आपण कोनाच्या दोन्ही भुजांवर एक-एक बिंदू घेऊन आणि त्याचा शिरोबिंदू घेऊन कोनाचे नाव लिहू शकतो.

या पद्धतीने, या कोनाला कोन POQ हे नाव देणे ही चांगली पद्धत आहे. आपण तो • POQ ने दाखवतो.

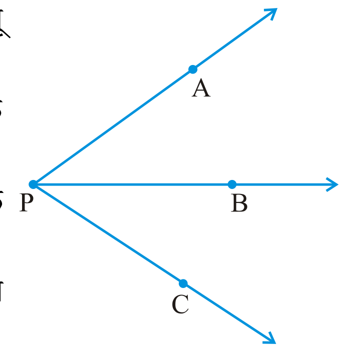
विचार करा, चर्चा करा आणि लिहा.

शेजारील आकृती 4.18 पहा. या कोनाचे नाव काय आहे? आपण त्याला • P म्हणू शकतो का? परंतु कोणत्या कोनाला • P म्हणू शकतो? • P ने कोणता अर्थबोध होतो?

कोनाला, केवळ त्याच्या शिरोबिंदूने नामांकित करणे सहायक होईल का? का नाही?

• P चा अर्थ इथे • APB किंवा • CPB किंवा • APC होऊ शकतो. म्हणून इथे आणखी माहितीची आवश्यकता आहे.

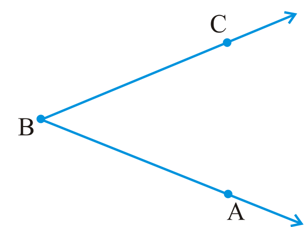
लक्षात ठेवा, की कोन लिहिताना त्याच्या शिरोबिंदूचे अक्षर नेहमी मधोमध लिहावे.



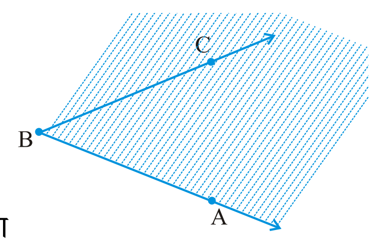
आकृती 4.18

हे करा

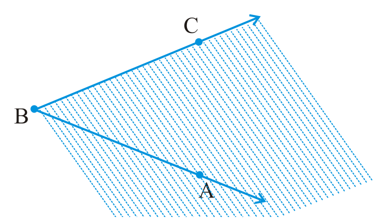
कोणताही • ABC घ्या.



$\overrightarrow{BA}$ सीमा घेऊन कागदाचा तो भाग छायांकित करा. ज्या बाजूला $\overrightarrow{BC}$ आहे.

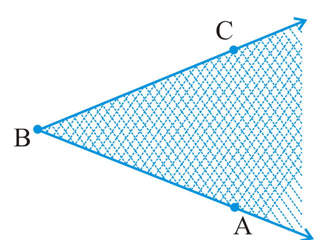


आता $\overrightarrow{BC}$ सीमा घेऊन त्या भागाला दुसऱ्या रंगाने रंगवा ज्या बाजूला $\overrightarrow{BA}$ आहे.



दोन्ही छायांकित भागातील सामाईक भाग • ABC चा अंतर्भाग आहे. (आकृती 4.19)।

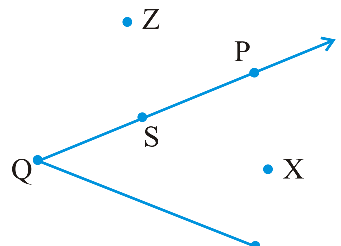
(लक्षात घ्या की, अंतर्भाग एक सीमित क्षेत्र नाही हे अमर्याद आहे, कारण कोनाच्या दोन्ही भुजा आपल्या एका बाजूला अमर्याद विस्तृत आहेत)



आकृती 4.19

शेजारील आकृती 4.20 मध्ये, बिंदू X कोनाच्या अंतर्भागात आहे. Z कोनाच्या अंतर्भागात नाही. हा कोनाच्या बहिर्भागात आहे.

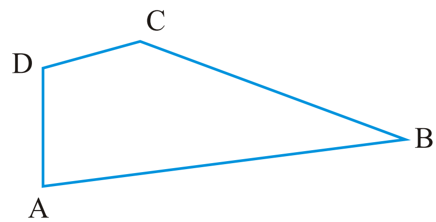
बिंदू S, • PQR वर आहे, म्हणून कोनाशी ही संबंधित तीन क्षेत्रे असतात.



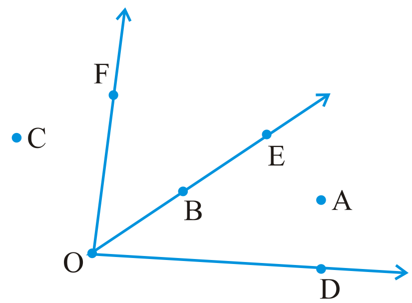
आकृती 4.20

उदाहरणसंग्रह 4.3

1. खाली दिलेल्या आकृतीत कोनांची नावे लिहा.



2. शेजारील आकृतीमध्ये, असे बिंदू लिहा.
   (a) जे • DOE च्या अंतर्भागात आहेत.
   (b) जे • EOF च्या बहिर्भागात आहेत.
   (c) • EOF वर आहेत.



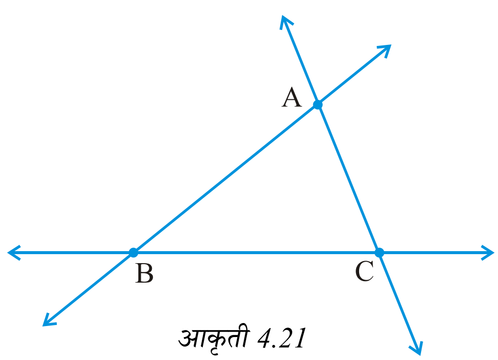
3 दोन कोनांची अशी आकृती काढा. ज्यात,
   (a) एक बिंदू सामाईक आहे.
   (b) दोन बिंदू सामाईक आहेत.
   (c) तीन बिंदू सामाईक आहेत.
   (d) चार बिंदू सामाईक आहेत.
   (e) एक किरण सामाईक आहे.

4.11 त्रिकोण

त्रिकोण (triangle) तीन भुजा असलेला बहुभुज आहे. खरं तर, हा सर्वांत कमी बाजू असलेला बहुभुज आहे.

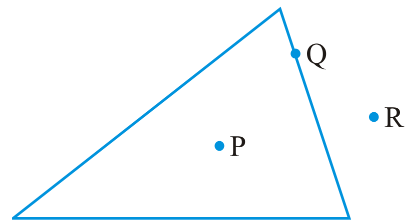
शेजारील आकृती 4.21 मध्ये दिलेला त्रिकोण पहा. आपण त्रिकोण ABC साठी • ABC असे लिहितो. • ABC मध्ये किती भुजा आहेत? यात किती कोन आहेत?

या त्रिकोणाच्या $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ आणि $\overline{CA}$ या तीन भुजा आहेत. त्याचे तीन कोन • BAC, • BCA आणि • ABC, बिंदू A, B आणि C ला त्रिकोणाचे शिरोबिंदू म्हणतात.



आकृती 4.21

बहुभुज असल्यामुळे, त्रिकोणाला बहिर्भाग आणि अंतर्भाग असतो. शेजारील आकृती 4.22 मध्ये, P त्रिकोणाच्या अंतर्भागात आहे, R त्रिकोणाच्या बहिर्भागात आहे आणि Q त्रिकोणावर आहे.

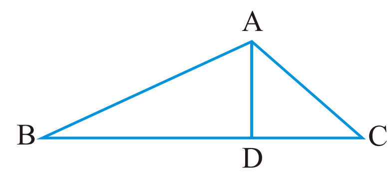


आकृती 4.22

उदाहरणसंग्रह 4.4

1. त्रिकोण ABC ची कच्ची आकृती काढा. या त्रिकोणाच्या अंतर्भागात बिंदू P आणि बहिर्भागात बिंदू Q दाखवा. बिंदू A त्याच्या अंतर्भागात आहे की बहिर्भागात आहे.

2. (a) शेजारील आकृतीतील तीन त्रिकोण ओळखा. (b) सात कोनांची नावे लिहा. (c) सहा रेषाखंडांची नावे लिहा. (d) कोणत्या दोन त्रिकोणात • B सामाईक आहे?

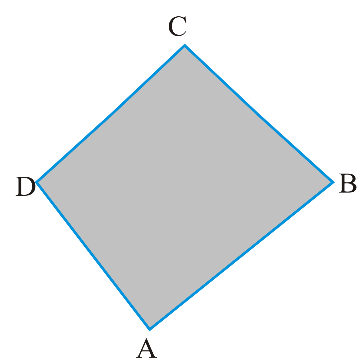


4.12 चौकोन

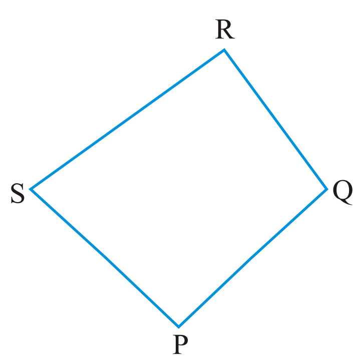
चार भुजा असलेल्या बहुभुजाला **चौकोन (Quadrilateral)** म्हणतात. याला चार भुजा आणि चार कोन असतात. त्रिकोणाप्रमाणेच आपण याचा अतर्भाग बघू शकतो.

ज्या क्रमाने चौकोनाच्या शिरोबिंदूची नावे लिहिली जातात ती पद्धती बघा.

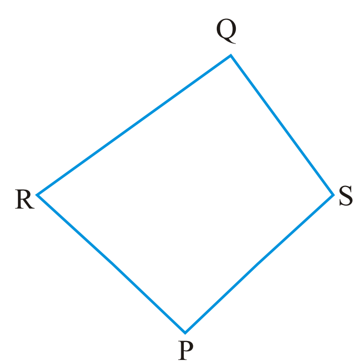
चौकोन ABCD (आकृती 4.23) च्या चार भुजा $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ आणि $\overline{DA}$ आहेत. याचे चार कोन आहेत: • A, • B, • C आणि • D.



आकृती 4.23

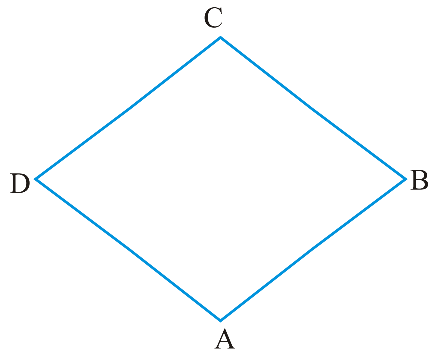


चौकोन PQRS आहे.



हा चौकोन PQRS आहे का?

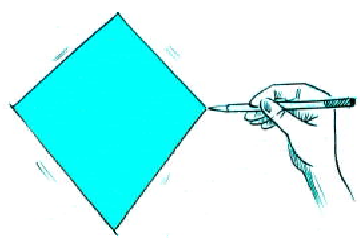
चौकोन ABCD मध्ये $\overline{AB}$ आणि $\overline{BC}$ लगतच्या भुजा आहेत. **लगतच्या भुजांच्या** आणखी जोड्या लिहू शकाल का?



या चौकोनात $\overline{AB}$ आणि $\overline{DC}$ **संमुख भुजा (Opposite sides)** आहेत. संमुख भुजेची आणखी एक जोडी लिहा.

• A आणि • C चौकोन ABCD चे **संमुख कोन (Opposite angles)** आहेत. याप्रमाणे, • D आणि • B सुद्धा संमुख कोन आहेत. • A आणि • B **लगतचे कोन (adjacent angles)** आहेत. याप्रमाणे लगतच्या कोनांच्या अन्य जोड्या लिहू शकाल.

उदाहरणसंग्रह 4.5



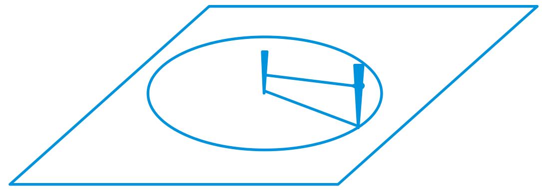
1. चौकोन PQRS ची कच्ची आकृती काढा. त्याचे कर्ण काढा. त्यांची नावे लिहा. या कर्णाचा छेदन बिंदू चौकोनाच्या अंतर्भागात आहे का? किंवा बहिर्भागात आहे का?
2. चौकोन KLMN चे एक कच्चे चित्र काढा आणि लिहा.
   (a) संमुख भुजांच्या दोन जोड्या
   (b) संमुख कोनांच्या दोन जोड्या
   (c) लगतच्या भुजांच्या दोन जोड्या
   (d) लगतच्या कोनांच्या दोन जोड्या
3. **शोधा.**
   पट्ट्या आणि त्यांना बांधायच्या वस्तू घेऊन एक त्रिकोण आणि चौकोन बनवा. त्रिकोणाच्या एका शिरोबिंदूवर पट्ट्या आत दाबण्याचा प्रयत्न करा. हीच कृती चौकोनाच्या बाबतीतही करा. त्रिकोणात काही बदल घडून आला? चौकोनात काही बदल घडून आला? त्रिकोण ही एक दृढ (rigid) आकृती आहे का? विद्युत टॉवर (Electric Towers) सारख्या रचनांमध्ये त्रिकोण आकारांचा वापर का करतात? चौकोन आकारांचा का नाही?

4.13 वर्तुळ

तुम्हाला तुमच्या परिसरात अनेक वर्तुळाकार वस्तू मिळतील. जशा की, एक चक्र, बांगडी, नाणे, इत्यादी. आपण वर्तुळाकार वस्तूंचा अनेक प्रकारे वापर करतो. एका स्टीलच्या अवजड कांबेला ओढण्यापेक्षा लोटत नेणे अधिक सोपे असते.

वर्तुळ (circle) एक साधा बंद वक्र आहे, की जो बहुभुज नाही. याचे काही विशिष्टि गुणधर्म आहेत.

हे करा



- एक बांगडी किंवा कोणतीही वर्तुळाकार वस्तू कागदावर ठेवा आणि त्याच्या चारी बाजूंनी पेन्सिल फिरवून एक वर्तुळाकार आकृती काढा.
- जर आपल्याला एक वर्तुळाकार बाग करायची असेल तर ती तुम्ही कशी कराल?

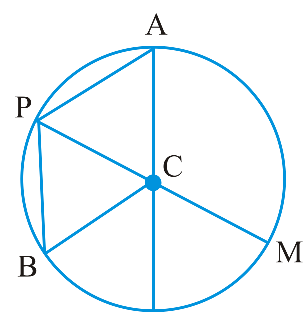
दोन काठ्या आणि दोरी घ्या. जमिनीवर एक काठी खोचा. हे काढल्या जाणाऱ्या वर्तुळाचे केंद्र (centre) आहे. दोरीच्या दोन्ही बाजूला दोन फास (loop) करा. एक फास केंद्राच्या काठीला लावा आणि दुसरा फास दुसऱ्या काठीला लावा. या काठ्या जमिनीला लंबरूप ठेवा. दोरी ताणलेली ठेवत, जमिनीवर दुसरी काठी फिरवत एक पथ काढा. तुम्हाल वर्तुळ (circle) मिळेल.

स्वाभाविक आहे, की वर्तुळावरील प्रत्येक बिंदू केंद्रापासून समान अंतरावर आहे.

वर्तुळाचे भाग

शेजारील आकृती 4.24 मध्ये केंद्र C असलेले एक वर्तुळ आहे.

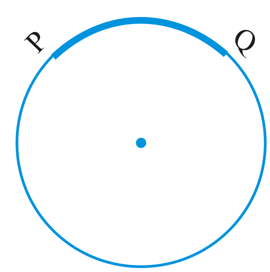
A,P,B,M वर्तुळावरील काही बिंदू आहेत. आपल्याला दिसेल की, $CA = CB = CP = CM$ आहे.



चित्र 4.24

प्रत्येक रेषाखंड $\overline{CA}$, $\overline{CB}$, $\overline{CP}$ किंवा $\overline{CM}$ वर्तुळाच्या **त्रिज्या (radius)** आहेत. त्रिज्या हा असा रेषाखंड आहे, की जो वर्तुळावरील बिंदूला त्याच्या केंद्राशी जोडतो. याच आकृतीत $\overline{CP}$ आणि $\overline{CM}$ अशा त्रिज्या आहेत की बिंदू P, C, M एकाच रेषेवर आहेत. रेषाखंड $\overline{PM}$ ला वर्तुळाचा **व्यास (diameter)** म्हणतात. वर्तुळाचा व्यास त्याच्या त्रिजेच्या दुप्पट आहे का? हो, वर्तुळावरील कोणत्याही दोन बिंदूंना जोडणाऱ्या रेषाखंडाला वर्तुळाची **जीवा (chord)** म्हणतात.

याप्रमाणे $\overline{PB}$ वर्तुळाची जीवा आहे. $\overline{PM}$ सुद्धा वर्तुळाची जीवा आहे का?



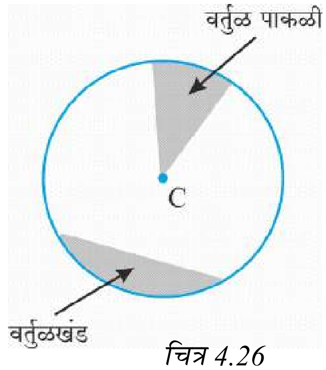
चित्र 4.25

वर्तुळाच्या भागाला त्याचा कंस (arc) म्हणतात.

जर बिंदू P आणि Q वर्तुळावर असतील तर आपल्याला कंस PQ मिळेल. तो आपण $\overset{\frown}{PQ}$ ने दाखवतो. (आकृती 4.25)

कोणत्याही सरळ बंद वक्राप्रमाणे, वर्तुळाचा **अंतर्भाग** आणि

बहिर्भाग याबाबत आपण विचार करू शकतो. वर्तुळ क्षेत्राचा तो भाग जो दोन त्रिज्या आणि संगत कंस यांनी बनतो. त्याला **वर्तुळ पाकळी** (**sector**) म्हणतात.



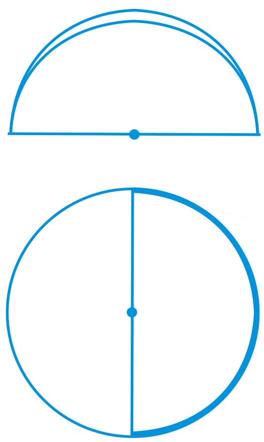
चित्र 4.26

वर्तुळाची एक जीवा आणि संगत कंस यांनी बनलेल्या वर्तुळ क्षेत्राच्या भागाला **वर्तुळखंड** (**segment of a circle**) म्हणतात.

कोणतीही वर्तुळाकार वस्तू घ्या. एक दोरा घ्या, तो वस्तूभोवती एक वेळा गुंडाळा आणि त्याची लांबी मोजा. दोऱ्याची ही लांबी त्या वस्तूभोवती एक पूर्ण चक्कर मारताना काटलेले अंतर होय. ही लांबी काय दाखवते?

हे करा

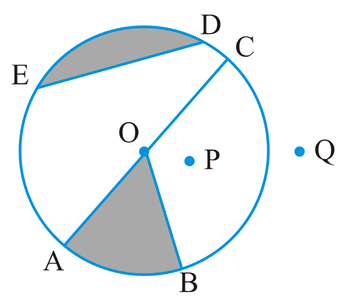
ंतर म्हणजेच **परीघ** (**circumference**) होय.



- एक वर्तुळाकार कागद (sheet) घ्या. त्याची घडी घालून दोन अर्धे भाग (halves) बनवा. दाबून घडीची खूण मिळवा आणि कागद उघडा. तुम्हाला दिसतंय का की वर्तुळाचे क्षेत्र त्याच्या व्यासामुळे दोन अर्ध्या (बरोबर) भागात विभागले गेले आहे. वर्तुळाचा एक व्यास त्याला बरोबर दोन भागांत विभागतो. प्रत्येक भागाला **अर्धवर्तुळ** (**semicircle**) म्हणतात.

  अर्धवर्तुळ वर्तुळाचा अर्धा भाग असतो, ज्यामध्ये अंत्यबिंदू सोडून व्यास समाविष्ट नसतो.

उदाहरणसंग्रह 4.6



1. शेजारील आकृती पाहून प्रश्नांची उत्तरे लिहा.
   (a) वर्तुळाचे केंद्र
   (b) तीन त्रिज्या
   (c) एक व्यास
   (d) एक जीवा
   (e) अंतर्भागातील दोन बिंदू
   (f) बहिर्भागातील दोन बिंदू
   (g) एक वर्तुळ पाकळी
   (h) एक वर्तुळखंड

2. (a) वर्तुळाचा प्रत्येक व्यास त्याची जीवा सुद्धा असते का?
   (b) वर्तुळाची प्रत्येक जीवा त्याचा व्यास सुद्धा असतो का?
3. एक वर्तुळ काढून त्यात खालील गोष्टी दाखवा.:
   (a) केंद्र
   (b) एक त्रिज्या
   (c) एक व्यास
   (d) एक वर्तुळपाकळी
   (e) एक वर्तुळखंड
   (f) त्याच्या अंतर्भागातील एक बिंदू
   (g) त्याच्या बहिर्भागातील एक बिंदू
   (h) एक कंस
4. सत्य की असत्य हे सांगा.
   (a) वर्तुळाचे दोन व्यास नक्कीच एकमेकांना छेदतात.
   (b) वर्तुळाचे केंद्र हे नेहमी त्याच्या अंतर्भागात असते.

आपण काय शिकलो?

1. बिंदू एक स्थिती ठरवतो. त्याला सामान्यपणे इंग्रजी मोठ्या अक्षरात व्यक्त करतात.
2. दोन बिंदूंना जोडणारा सर्वांत लहान रस्ता एक रेषाखंड दाखवतो. बिंदू A आणि B ला जोडणारा रेषाखंड $\overline{AB}$ दाखवतात. ($\overline{AB}$ और $\overline{BA}$ दोनों एक ही रेखाखंड को दर्शाते हैं। या वाक्याचे भाषांतर नाही.)
3. रेषाखंड $\overline{AB}$ ला दोन्ही बाजूस अमर्याद वाढवला असता आपल्याला एक रेषा मिळते. ती $\overleftrightarrow{AB}$ ने दाखवतात. ती l सारख्या अक्षरानेही दाखवली जाते.
4. दोन भिन्न रेषा परस्परांना कोणत्या तरी एका बिंदूत छेदतात किंवा मिळतात. तेव्हा त्यांना छेदणाऱ्या रेषा म्हणतात.
5. दोन रेषा एकमेकींना छेदत नसतील तर त्यांना समांतर रेषा म्हणतात.
6. किरण हा रेषेचा असा भाग आहे की, जो एका बिंदूपासून सुरू होऊन एका दिशेने अमर्याद वाढतो.
7. कागदावर पेन्सिल न उचलता कोणतीही आकृती (साधी किंवा वक्र) काढली तर त्याला वक्र असे म्हणतात. या संदर्भात एक रेषा ही सुद्धा एक वक्रच आहे.
8. जर कोणताही वक्र स्वत:ला छेद नसेल तर त्याला सरळ वक्र (Simple Curve) म्हणतात.
9. जर वक्राची टोके जुळली असतील त्याला बंद वक्र म्हणतात. अन्यथा त्याला खुला वक्र म्हणतात.
10. रेषाखंडांनी बनलेल्या बंद आकृतीला बहुभुज म्हणतात.
    (i) बहुभुज बनविणाऱ्या रेषाखंडांना त्याच्या भुजा म्हणतात.
    (ii) कोणत्याही दोन भुजा ज्यामध्ये एक सामाईक अंत्य बिंदू असतो. त्यांना बहुभुजाच्या लगतच्या

बाजू म्हणतात.

(iii) दोन बाजू जिथे मिळतात त्या बिंदूला बहुभुजाचा शिरोबिंदू (vertex) म्हणतात.

(iv) बहुभुजाच्या एकाच बाजूच्या अंत्य बिंदूंना लगतचे शिरोबिंदू (adjacent vertice) म्हणतात.

(v) लगत नसलेल्या शिरोबिंदूंना जोडून तयार होणाऱ्या रेषाखंडाला त्या बहुभुजाचा कर्ण म्हणतात.

11. सामाईक आरंभबिंदू असलेल्या दोन किरणांमुळे एक कोन तयार होतो. दोन किरण $\overrightarrow{OA}$ आणि $\overrightarrow{OB}$ • AOB बनतात. (• BOA असेही लिहू शकतो.)

कोनाशी संबंधित तीन क्षेत्र आहेत :

तो कोन, कोनाचा अंतर्भाग आणि कोनाचा बहिर्भाग.

12. त्रिकोण (Triangle), तीन बाजूंनी तयार झालेला बहुभुज असतो.

13. चार बाजू असलेल्या बहुभुजाला चौकोन म्हणतात. त्याच्या शिरोबिंदूंना क्रमाने नावे दिली जातात. (named cyclically).

ABCD या कोणत्याही चौकोनात, $\overline{AB}$ आणि $\overline{DC}$ तसेच $\overline{AD}$ आणि $\overline{BC}$ या संमुख बाजूंच्या जोड्या आहेत. • A आणि • C तसेच • B आणि • D या संमुख कोनांच्या जोड्या आहेत. • A आणि • B लगतचे कोन आहेत. अशाच लगतच्या कोनांच्या आणखी तीन जोड्या आहेत.

14. एका निश्चित बिंदूपासून समान अंतरावर असणाऱ्या बिंदूंच्या बिंदूपथाला वर्तुळ असे म्हणतात. निश्चित बिंदूला वर्तुळाचे केंद्र म्हणतात तर निश्चित अंतराला वर्तुळाची त्रिज्या म्हणतात, तसेच वर्तुळाच्या अंतराला परीघ असे म्हणतात. वर्तुळावरील कोणत्याही दोन बिंदूना जोडणाऱ्या रेषाखंडास जीवा (chord) असे म्हणतात.

केंद्रामधून जाणाऱ्या जीवेला व्यास असे म्हणतात. दोन त्रिज्या आणि संगत कंस यांनी बनलेल्या वर्तुळ क्षेत्राच्या भागाला वर्तुळ पाकळी (sector) असे म्हणतात. वर्तुळाची एक जीवा आणि संगत कंस यांनी बनलेल्या वर्तुळ क्षेत्राच्या भागाला वर्तुळ खंड (segment of a circle) म्हणतात. वर्तुळाच्या व्यासाचे दोन अंत्यबिंदू वर्तुळाला दोन समान भागात विभाजित करतात. प्रत्येक भागाला अर्धवर्तुळ असे म्हणतात.

प्रारंभिक आकारांचे आकलन

प्रकरण 5

5.1 प्रस्तावना

आपल्या आसपास (अवतीभवती) आपण जे सारे आकार (shapes) पाहतो ते 'वक्र' किंवा रेषांनी बनलेले असतात. आपण आपल्या भोवतालच्या परिसरात कोपरे, कडा, प्रतले, उघडे (खुले) वक्र, बंद वक्र पाहतो. आपण त्यांना रेषाखंड, कोन, त्रिकोण, बहुभुजाकृती आणि वर्तुळे यांच्यात त्यांची विभागणी करूया. आपल्या लक्षात येतं की त्यांचे आकार आणि मापे भिन्न आहेत. आता आपण त्यांच्या आकारांची तुलना करण्यासाठी काही साधने विकसित करू या.

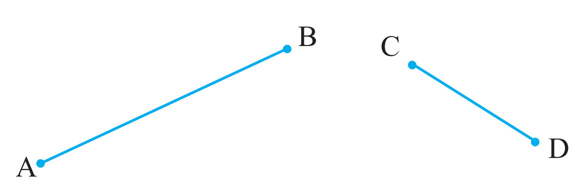
5.2 रेषाखंडांचे मापन

आपण अनेक वेळा रेषाखंड काढले आणि पाहिले आहेत. त्रिकोण तीन रेषाखंडांनी तयार होतो तर चौकोन चार रेषाखंडांनी तयार होतो.

रेषाखंड (line segment) हा रेषेचा (line) निश्चित असा भाग असतो. त्यामुळे रेषाखंडाचे मापन करणे शक्य आहे. प्रत्येक रेषाखंडाचे माप (measure) ही एकमेव संख्या असते, ज्याला रेषाखंडाची लांबी (lenght) म्हणतात. या संकल्पनेचा वापर आपण रेषाखंडांची तुलना करण्यासाठी करूया.

दोन रेषाखंडांची तुलना करण्यासाठी त्यांच्या लांबीमधला संबंध माहीत करून घ्यायला हवा, अनेक प्रकारे तो माहीत करून घेता येतो.

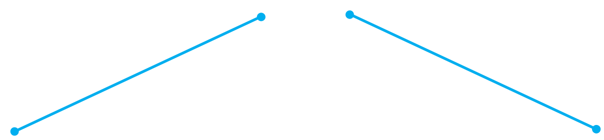
(i) निरीक्षणाने तुलना



केवळ पाहून तुम्ही सांगू शकता का की वरीलपैकी कोणता रेषाखंड मोठा आहे?

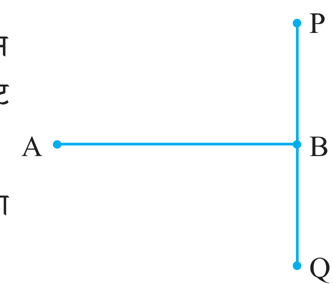
तुम्ही पाहू शकता की रेषाखंड $\overline{AB}$ मोठा आहे.

पण नेहमीच फक्त पाहून घेतलेल्या निर्णयाबद्दल आपण खात्री देऊ शकत नाही. उदा., हे पुढील रेषाखंड पहा :



या दोन रेषाखंडांच्या लांबीतील फरक तितकासा स्पष्टपणे कळत नाही. म्हणूनच तुलना करण्यासाठी विशिष्ट पद्धतीची/मार्गाची आवश्यकता आहे.

बाजूच्या आकृतीमध्ये प्रत्यक्षात $\overline{AB}$ आणि $\overline{PQ}$ ची लांबी समान आहे. पण नुसत्या निरीक्षणापासून हे चटकन लक्षात येत नाही. (स्पष्ट होत नाही.)



म्हणून रेषाखंडांच्या तुलनेसाठी अधिक चांगल्या पद्धतीची आवश्यकता आहे.

(ii) ट्रेसिंगपेपरच्या साहाय्याने तुलना

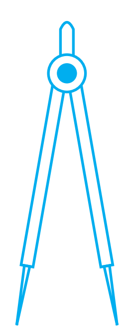
$\overline{AB}$ आणि $\overline{CD}$ यांची तुलना करण्यासाठी आपण एका ट्रेसिंग पेपरचा उपयोग करून $\overline{CD}$ ट्रेस करूया म्हणजेच गिरवूया आणि हा ट्रेस केलेला $\overline{AB}$ वर ठेवूया.

आता तुम्ही सांगू शकाल का $\overline{AB}$ आणि $\overline{CD}$ मध्ये कोण मोठा आहे?

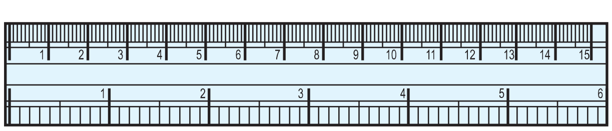
आपण रेषाखंड ट्रेस करण्याचे म्हणजेच गिरवण्याचे काम किती अचूक करतो त्यावर ही पद्धत अवलंबून आहे. याशिवाय दुसऱ्या एखाद्या रेषाखंडाची $\overline{AB}$ बरोबर तुलना करायची असेल तर तो रेषाखंडही ट्रेस करावा म्हणजेच गिरवावा लागेल. हे अवघड आहे. कारण प्रत्येक वेळी आपण तो रेषाखंड 'ट्रेस' नाही करू शकत. (गिरवू नाही शकत.)

(iii) पट्टी आणि कर्कटक वापरून तुलना

तुमच्या कंपासपेटीतील साहित्य तुम्ही ओळखू शकता? बाकी सर्व साहित्याबरोबरच त्यात एक पट्टी (ruler) आणि एक कर्कटक असते.



डिवाइडर



रूलर

पट्टीवर कोणत्या प्रकारच्या खुणा केल्या आहेत ते लक्षपूर्वक पहा. पट्टीची एक कड 15 समान भागांत विभागलेली आहे. यातील प्रत्येक भागाची लांबी 1 सेमी आहे.

यांतील प्रत्येक भागाला आणखी उपभागांत विभागले (sub divide) गेले आहे कसे? या प्रत्येक उपविभागाची लांबी किती आहे?

प्रत्येक सेंटिमीटरला दहा समान भागात विभागले गेले आहे. 1 सेमी चा प्रत्येक उपभाग 1 मिमी आहे.

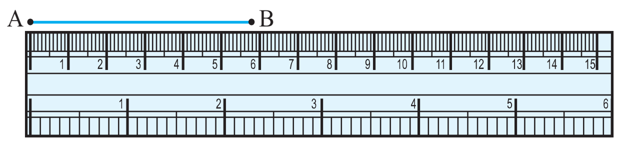
किती मिलिमीटर मिळून एक सेंटिमीटर तयार होतो? (बनतो)

जर 1 सेमी = 10 मिमी तर 2 सेमी आणि 3 मिमी कसे लिहाल?

7.7 सेमी चा अर्थ काय होईल?

> 1 मिमी म्हणजे 0.1 सेमी,
> 2 मिमी म्हणजे 0.2 सेमी,
> याप्रमाणे 2.3 सेमी म्हणजे 2 सेमी आणि 3 मिमी

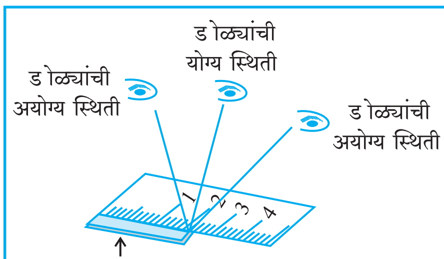
समजा रेषाखंड AB ची लांबी मोजायची आहे. पट्टीची शून्याची खूण बिंदू A वर ठेवा. बिंदू B समोरची खूण पाहून तिथली संख्या वाचा. यावरून AB ची लंबी समजेल. समजा ही लांबी 5.8 सेमी आहे. तर ती आपण पुढीलप्रमाणे लिहू शकतो. लांबी AB = 5.8 सेमी किंवा फक्त AB = 5.8 सेमी



याही पद्धतीमध्ये त्रुटींची शक्यता असतेच. पट्टीच्या जाडीमुळे तिच्यावर असलेल्या खुणा वाचण्यात अडचण येऊ शकते.

विचार करा, चर्चा करा आणि लिहा.

1. आणखी कोणत्या त्रुटी आणि अडचणी आपल्या समोर येऊ शकतात?
2. जर पट्टीवरील खुणा पाहून त्यासमोरील संख्या नीट वाचता आली नाही तर कोणत्या प्रकारच्या त्रुटी निर्माण होतील? त्या कशा टाळल्या जाऊ शकतात?

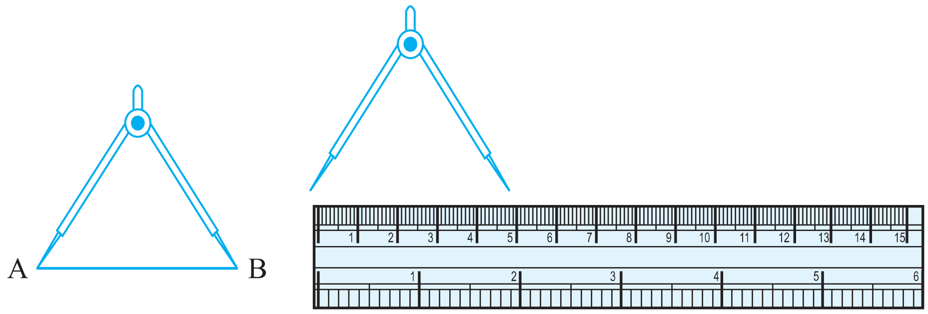


स्थितीमुळे त्रुटी

योग्य माप घेण्यासाठी डोळ्याची स्थिती योग्य असायला हवी. डोळा, खुणेच्या बरोबर वर असायला हवा. नाहीतर तिरपे पाहिल्याने त्रुटी निर्माण होऊ शकते.

ही समस्या आपण टाळू शकतो का? यापेक्षा अधिक चांगली पद्धत आहे का? चला तर मग. लांबी मोजण्यासाठी आपण कर्कटक (divider) चा वापर करूया.

कर्कटक उघडा. त्याच्या एक टोक बिंदू A वर ठेवा आणि दुसरे टोक बिंदू B वर ठेवा. आता कर्कटकाच्या दोन्ही टोकांमधील अंतरात कोणताही बदल होणार नाही याची काळजी घेत कर्कटक उचलून पट्टीवर राहील याची खात्री करा. आता दुसऱ्या टोकाजवळील संख्या (खुणेसमोरील) वाचा. हीच रेखाखंड AB ची लांबी आहे. (पुढील आकृती पहा.)



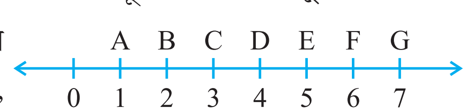
प्रयत्न करा

1. एक पोस्टकार्ड घ्या. वरील तंत्राचा उपयोग करून त्याच्या दोन लगतच्या बाजू मोजा.
2. वरचा पृष्ठभाग सपाट असलेल्या कोणत्याही तीन वस्तू निवडा. कर्कटक आणि पट्टीचा वापर करून वरच्या पृष्ठभागाच्या सर्व बाजू मोजा.

उदाहरणसंग्रह 5.1

1. रेषाखंडाची तुलना केवळ निरीक्षणाने करण्यात कोणता तोटा आहे?
2. एका रेषाखंडाची लांबी मोजण्यासाठी पट्टीऐवजी कर्कटक वापरणे अधिक चांगले का आहे?
3. कोणताही एक रेषाखंड $\overline{AB}$ काढा. बिंदू A आणि B च्या दरम्यान कोणताही एक बिंदू C घ्या. AB, BC आणि CA ची लांबी मोजा. $AB = AC + CB$ आहे का?

   (**टीप –** जर A, B, C हे कोणतेही तीन बिंदू एका रेषेवर असे आहेत की $AC + CB = AB$ तर बिंदू C हा, बिंदू A आणि बिंदू B यांच्या दरम्यान असतो.)
4. बिंदू A, B आणि C एका रेषेवर असे आहेत की, AB = 5 सेमी, BC = 3 सेमी आणि AC = 8 सेमी, तर यांपैकी कोणता बिंदू इतर दोन बिंदूंच्या दरम्यान आहे?
5. सोबतच्या आकृतीमध्ये बिंदू D हा रेषाखंड $\overline{AG}$ चा मध्यबिंदू आहे हे पडताळून पहा.
6. बिंदू B हा रेषाखंड $\overline{AC}$ चा मध्यबिंदू आहे आणि बिंदू C हा रेषाखंड $\overline{BD}$ चा मध्यबिंदू आहे. बिंदू A, B, C आणि D हे एकाच रेषेवर आहेत. तर सांगा की $AB = CD$ का?



7. पाच त्रिकोण काढा आणि त्यांच्या बाजू मोजा. प्रत्येक त्रिकोणासाठी, कोणत्याही दोन बाजूंच्या लांबींची बेरीज, तिसऱ्या बाजूच्या लांबीपेक्षा नेहमीच जास्त असते हे पडताळून पहा.

5.3 'कोन', 'काटकोन' आणि 'सरळ कोन'

आपण भूगोलात (Geography) दिशांविषयी ऐकलं आहे. चीन भारताच्या उत्तरेला आणि श्रीलंका दक्षिणेला आहे. आपल्याला हेही माहीत आहे, की सूर्य पूर्वेला उगवतो आणि पश्चिमेला मावळतो. सगळ्या मिळून चार मुख्य दिशा आहेत.

या आहेत : उत्तर (North) (N), दक्षिण (South) (S), पूर्व (East) (E) आणि पश्चिम (West)(W)

तुम्हाला माहीत आहे का की उत्तर दिशेची विरुद्ध दिशा कोणती?

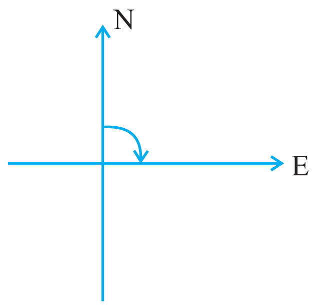
तुम्हाला आधीच माहीत असलेल्या गोष्टी आठवण्याचा प्रयत्न करा. आता आपण या ज्ञानाचा उपयोग, कोनांचे काही गुणधर्म शिकण्यासाठी करणार आहोत.

हे करा

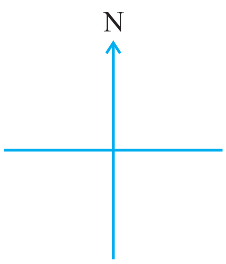
उत्तरेला तोंड करून उभे रहा.

घड्याळाच्या दिशेने (clock-wise) पूर्वेला वळा.

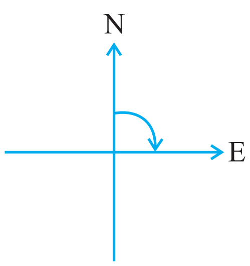
तुम्ही काटकोनातून वळता आहात. घड्याळाच्या (right angle) काट्याच्या दिशेने एका काटकोनातून वळून बघा.



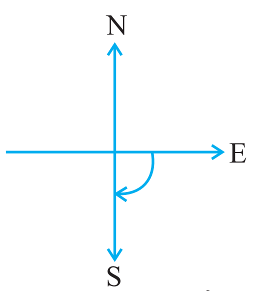
आता तुम्ही दक्षिणेला तोंड करून उभे आहात, जर तुम्ही घड्याळाच्या काट्याच्या विरुद्ध दिशेने (anti clock-wise) एका काटकोनात वळलात तर तुमचं तोंड कोणत्या दिशेला होईल? पुन्हा पूर्व दिशेला होईल. (का?)



तुम्ही उत्तरेला तोंड करून उभे आहात.



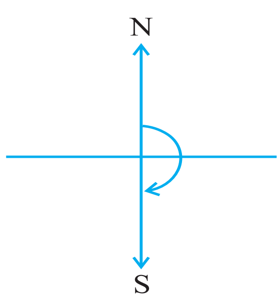
घड्याळाच्या दिशेने एका काटकोनातून वळल्यानंतर आता तुम्ही पूर्वेकडे तोंड करून उभे आहात.



अजून एका काटकोनातून वळल्यानंतर, आता तुम्ही दक्षिणेला तोंड करून उभे आहात.

आता पुढील स्थितीचं निरीक्षण करा :

उत्तरेकडे तोंड असल्यापासून, दक्षिणेकडे तोंड होईपर्यंत वळण्यासाठी तुम्ही दोन काटकोनात वळतात. हे दोन फेऱ्यांपर्यंत वळणे म्हणजे दोन काटकोनांतून वळणे. यालाच एक सरळकोन (straight angle) म्हणतात. NS ही एक सरळ रेषा आहे.

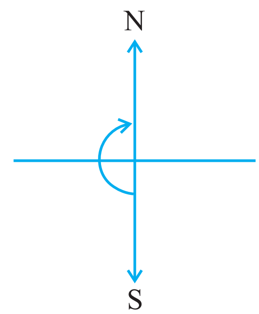


दक्षिणेकडे तोंड करून उभे रहा.

एका सरळकोनातून वळा.

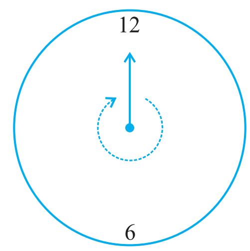
आता तुम्ही कोणत्या दिशेला तोंड करून उभे आहात?

तुम्ही उत्तर दिशेला तोंड करून उभे आहात.



उत्तरेकडून दक्षिणेपर्यंत वळण्यासाठी तुम्ही एका सरळकोनातून वळलात. पुन्हा दक्षिणेकडून उत्तरेपर्यंत वळण्यासाठी तुम्ही त्याच दिशेने पुन्हा एका सरळकोनातून वळता. म्हणजेच दोन सरळकोनांतून वळल्यानंतर तुम्ही तुमच्या मूळ स्थितीला पोहोचतात.

विचार करा, चर्चा करा आणि लिहा :

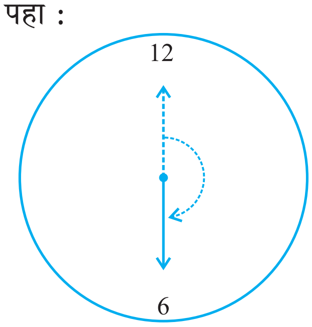


आपल्या मूळ स्थितीला परत येण्यासाठी तुम्ही एकाच दिशेने किती काटकोनातून वळाल?

एकाच दिशेने दोन सरळकोनांतून किंवा चार काटकोनांतून वळल्यावर एक फेरी पूर्ण होते. या एका पूर्ण फेरीला एक परिभ्रमण किंवा एक प्रदक्षिणा म्हणतात. एका परिभ्रमणासाठीच्या कोनाला **'पूर्ण कोन' (complete angle)** म्हणतात.

आपण ही परिभ्रमणे (revolutions) एका घड्याळावर पाहू शकतो. जेव्हा घड्याळाचा एक काटा एका स्थानावरून दुसऱ्या स्थानावर जातो तेव्हा तो एका कोनातून (angle) फिरतो.

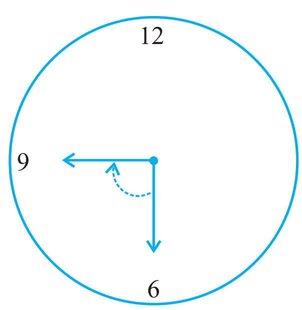
समजा घड्याळाचा एक काटा 12 पासून सुरुवात करून गोल वळून पुन्हा 12 वर येतो. त्याने एक परिभ्रमण पूर्ण केलं नाही का? आता तो किती काटकोनातून फिरला आहे? ही उदाहरणे (आकृत्या) पहा :



12 पासून 6 पर्यंत

$\frac{1}{2}$ परिभ्रमण

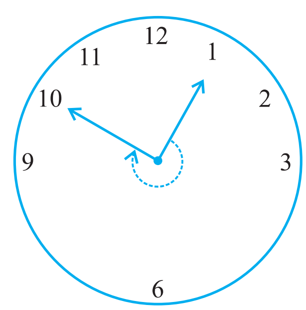
किंवा 2 काटकोन



6 पासून 9 पर्यंत

$\frac{1}{4}$ परिभ्रमण

किंवा 1 काटकोन



1 पासून 10 पर्यंत

$\frac{3}{4}$ परिभ्रमण

किंवा 3 काटकोन

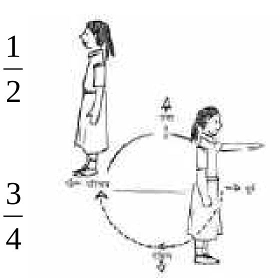
प्रयत्न करा

1. अर्ध्या परिभ्रमणासाठी कोनाचे नाव काय?
2. एक चतुर्थांश परिभ्रमणासाठी कोनाचे नाव काय?
3. एका घड्याळावर अर्धे परिभ्रमण एक चतुर्थांश परिभ्रमण आणि तीन चतुर्थांश परिभ्रमणासाठी पाच वेगवेगळ्या स्थिती दाखवा.

लक्षात ठेवा की तीन-चतुर्थांश परिभ्रमणाच्या कोनासाठी कोणतेही विशिष्ट नाव नाही.

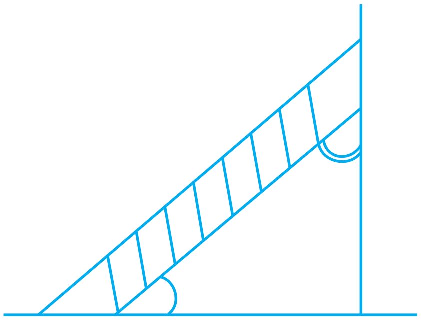
उदाहरणसंग्रह 5.2

1. घड्याळाचा तासकाटा परिभ्रमणाच्या कितव्या भागातून वळेल, जेव्हा तो
   (a) 3 वरून 9 वर जाईल.
   (b) 4 वरून 7 वर जाईल.
   (c) 7 वरून 10 वर जाईल.
   (d) 12 पासून 9 वर पोहोचेल
   (e) 1 पासून 10 वर जाईल.
   (f) 6 वरून 3 वर जाईल.
2. घड्याळाचा काटा कुठे येऊन थांबेल, जर त्याने
   (a) 12 पासून सुरुवात करून, घड्याळाच्या काट्याच्या दिशेने $\frac{1}{2}$ परिभ्रमण केले.
   (b) 2 पासून सुरुवात करून, घड्याळाच्या काट्याच्या दिशेने $\frac{1}{2}$ परिभ्रमण केले.
   (c) 5 पासून सुरुवात करून, घड्याळाच्या काट्याच्या दिशेने $\frac{1}{4}$ परिभ्रमण केले.
   (d) 5 पासून सुरुवात करून, घड्याळाच्या काट्याच्या दिशेने $\frac{3}{4}$ परिभ्रमण केले.
3. तुमचे तोंड कोणत्या दिशेला असेल जर तुम्ही सुरुवातीला
   (a) पूर्वेला तोंड करून उभे आहात आणि घड्याळाच्या दिशेने $\frac{1}{2}$ परिभ्रमण पूर्ण केलेत?
   (b) पूर्वेला तोंड करून उभे आहात आणि घड्याळाच्या दिशेने $1\frac{1}{2}$ परिभ्रमण पूर्ण केलेत?
   (c) पश्चिमेला तोंड करून उभे आहात आणि घड्याळाच्या दिशेने $\frac{3}{4}$ परिभ्रमण पूर्ण केलेत?



   (d) दक्षिणेला तोंड करून उभे आहात आणि घड्याळाच्या दिशेने 1 परिभ्रमण पूर्ण केले आहे. (या शेवटच्या प्रश्नासाठी घड्याळाची दिशा किंवा घड्याळाची विरुद्ध दिशा घ्यायची ते सांगायला हवे का? का नको?)
4. तुम्ही एका परिभ्रमणाचा कितवा भाग फिराल, जर तुम्ही
   (a) पूर्वेकडे तोंड करून उभे आहात आणि घड्याळाच्या दिशेने फिरून तुमचे तोंड उत्तरेकडे झाले?
   (b) दक्षिणेकडे तोंड करून उभे आहात आणि घड्याळाच्या दिशेने फिरून तुमचे तोंड पूर्वेकडे झाले?
   (c) पश्चिमेकडे तोंड करून उभे आहात आणि घड्याळाच्या दिशेने फिरून तुमचे तोंड पूर्वेकडे झाले?

5. घड्याळाचा तासकाटा किती काटकोनातून फिरला ते शोधा, जर तो
   (a) 3 वरून 6 वर गेला. (b) 2 वरून 8 वर गेला.
   (c) 5 वरून 11 वर गेला. (d) 10 वरून 1 वर गेला.
   (e) 12 वरून 9 वर गेला. (f) 12 वरून 6 वर गेला.
6. तुम्ही किती काटकोनातून फिराल, जर सुरुवातीला तुमचे तोंड
   (a) दक्षिणेकडे आहे आणि घड्याळाच्या दिशेने पश्चिमेकडे वळलात?
   (b) उत्तरेकडे आहे आणि घड्याळाच्या उत्तर दिशेने पूर्वेकडे वळलात?
   (c) पश्चिमेकडे आहे आणि घड्याळाच्या पश्चिमेकडेच वळलात?
   (d) दक्षिणेकडे आहे आणि उत्तरेकडे वळलात?
7. घड्याळाचा तासकाटा कोठे येऊन थांबेल, जर सुरुवात करेल
   (a) 6 पासून आणि 1 काटकोन फिरेल?
   (b) 8 पासून आणि 2 काटकोन फिरेल?
   (c) 10 पासून आणि 3 काटकोन फिरेल?
   (d) 7 पासून आणि 2 सरळकोन फिरेल?



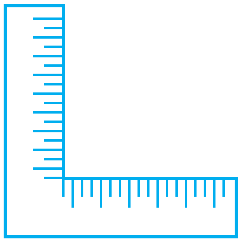
5.4 कोन–लघुकोन, विशालकोन, प्रविशाल कोन

आपण काटकोन आणि सरळकोनाचा अर्थ समजावून घेतला. पण आपल्याला जे कोन पहायला मिळतात ते नेहमीच याच दोन प्रकारचे नसतात. या शिडीने भिंतीशी किंवा फरशीशी केलेला कोन काटकोनही नाही आणि सरळकोनही नाही.

विचार करा, चर्चा करा आणि लिहा.

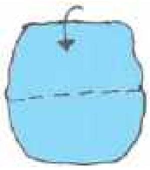
असे काही कोन आहेत का की जे काटकोनापेक्षा लहान आहेत?

असे काही कोन आहेत का की जे काटकोनापेक्षा मोठे आहेत?



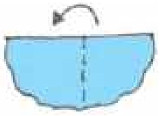
सुताराकडे असणारा गुण्या तुम्ही पाहिलात का? तो इंग्रजी 'L' अक्षरासारखा असतो. काटकोन तपासण्यासाठी याच प्रकारचा एक 'टेस्टर' **(tester)** बनवूया.

हे करा



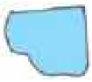
पायरी 1

कागदाचा एक तुकडा घ्या.



पायरी 2

त्याची मध्यभागी घडी घाला.



पायरी 3

सरळ कडेवर पुन्हा घडी घाला. तुमचा 'टेस्टर' तयार!

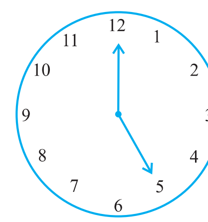
तुम्ही बनवलेला काटकोन **(right -angle-Tester)** टेस्टर पहा. (याला आपण RA टेस्टर म्हणूया का?) या टेस्टरची एक कड, दुसऱ्या कडेवर बरोबर सरळ उभी आहे का?

समजा कोपरे नसलेला एखादा आकार तुम्हांला दिला आहे, तर तुम्ही त्या कोपऱ्यांपाशी तयार झालेल्या कोनांची तपासणी या RA टेस्टरने करू शकता!

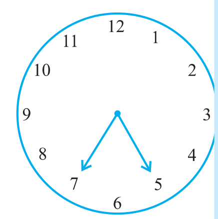
या टेस्टरच्या कडा, तुमच्या कागदाच्या कडांशी जुळतात का? जर जुळत असतील तर त्याचा अर्थ तो काटकोन आहे.

प्रयत्न करा

1. घड्याळाचा तासकाटा 12 पासून 5 पर्यंत चालतो. त्याचे परिभ्रमण एका काटकोनापेक्षा जास्त आहे का?



2. जर घड्याळाचा तासकाटा 5 वरून 7 वर जात असेल तर त्यावेळी तासकाट्यामुळे तयार झालेला कोन कसा दिसेल? तो कोन काटकोनापेक्षा मोठा आहे का?



3. पुढील माहितीवरून घड्याळावरील काट्यांच्या स्थितीचे प्रकार बनवा आणि तयार झालेल्या कोनांची RA टेस्टरने तपासणी करा.
   (a) 12 वरून 2 वर
   (b) 6 वरून 7 वर
   (c) 4 वरून 8 वर
   (d) 2 वरून 5 वर

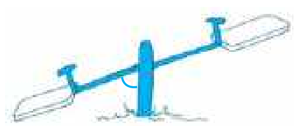
कोपरे	**पेक्षा लहान** 	**पेक्षा मोठा** 
A	....	....
B	....	....
C	....	....
⋮		

4. कोपरे असलेले 5 वेगवेगळे आकार घ्या. कोपऱ्यांना नावे द्या. आपल्या RA टेस्टरने या कोनांची तपासणी करा आणि प्रत्येक कोपऱ्यासाठी मिळालेले उत्तर (निकाल) सारणीच्या रुपात पुढील प्रकारे लिहा.

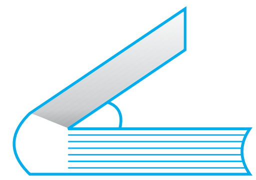
इतर प्रकार

- काटकोनापेक्षा लहान कोनाला **लघुकोन (acute angle)** म्हणतात. हे लघुकोन आहेत.

छप्पर



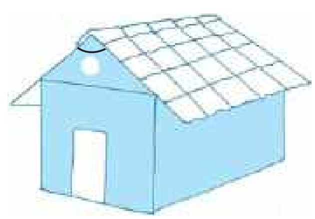
सी–सॉ (see-saw)



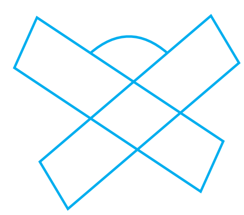
उघडे पुस्तक

तुम्ही पाहिलंत का यापैकी प्रत्येक कोन, परिभ्रमणाच्या एक चतुर्थांशापेक्षा लहान आहे? तुमच्या RA टेस्टरने त्याची तपासणी करा.

- जर एखादा कोन काटकोनापेक्षा मोठा आणि सरळकोनापेक्षा लहान असेल तर त्याला 'विशाल कोन' **(obtuse angle)** म्हणतात.
हे विशालकोन आहेत.



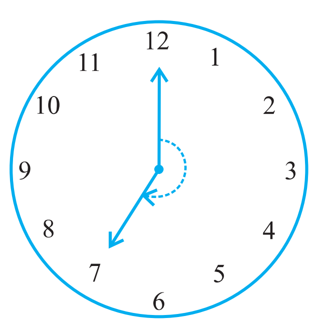
घर



पुस्तक वाचनाचा स्टँड

तुम्ही पाहिलंत का की यातील प्रत्येक कोन $\frac{1}{4}$ परिभ्रमणापेक्षा मोठा आहे? आणि $\frac{1}{2}$ परिभ्रमणापेक्षा लहान आहे? याची तपासणी करायला तुमचा RA टेस्टर तुम्हांला मदत करेल.
आधीच्या उदाहरणांमधूनही 'विशालकोन' ओळखा.

- एक **प्रविशाल कोन (reflex angle)** सरळकोनापेक्षा मोठा आणि संपूर्ण कोनापेक्षा लहान असतो. हा कोन या आकृतीत दाखविलेल्या प्रकारचा असतो. (घड्याळावरील कोन पहा.) यापूर्वी तुम्ही ज्या आकृत्या बनवल्या होत्या, त्यात काही प्रविशाल कोन आहेत का? तुम्ही या कोनांची तपासणी कशा प्रकारे कराल?



प्रयत्न करा

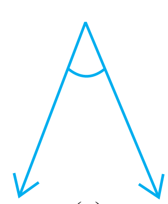
1. तुमच्या अवतीभवती पहा आणि कोपऱ्यांपाशी कोन तयार करणाऱ्या, एकमेकींशी जुळणाऱ्या कडा ओळखा. अशा दहा स्थिती लिहा.
2. जिथे लघुकोन तयार आहेत अशा दहा स्थिती लिहा.
3. जिथे काटकोन तयार झाले आहेत अशा दहा स्थिती लिहा.
4. जिथे विशालकोन तयार झाले आहेत अशा पाच स्थिती लिहा.
5. जिथे प्रत्यावर्ती कोन तयार झाले आहेत अशा पाच स्थिती लिहा.

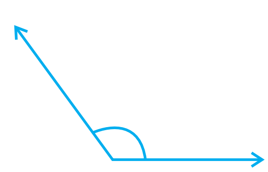
प्रश्नावली 5.3

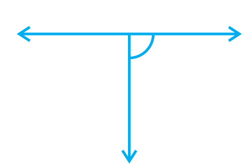
1. जोड्या (match) जुळवा :

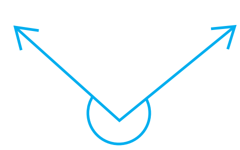
(i) सरळकोन	(a) $\frac{1}{4}$ परिभ्रमणापेक्षा कमी
(ii) काटकोन	(b) $\frac{1}{2}$ परिभ्रमणापेक्षा जास्त
(iii) लघुकोन	(c) $\frac{1}{2}$ परिभ्रमण
(iv) विशालकोन	(d) $\frac{1}{4}$ परिभ्रमण
(v) प्रविशालकोन	(e) $\frac{1}{4}$ परिभ्रमण आणि $\frac{1}{2}$ परिभ्रमण यांच्या दरम्यान
	(f) एक पूर्ण परिभ्रमण

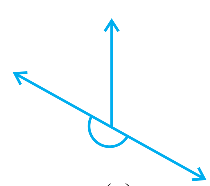
2. पुढील प्रत्येक कोनाचे काटकोन, सरळकोन, लघुकोन, विशालकोन आणि प्रविशाल कोन यांच्यात वर्गीकरण करा :

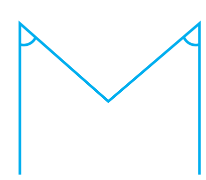

(a)


(b)


(c)


(d)


(e)


(f)

5.5 कोनांचे मापन (कोन मोजणे)

आपण तयार केलेल्या 'RA टेस्टर'च्या पद्धतीने आपण कोनांची काटकोनाशी तुलना केली. त्यामुळे आपण कोनांचे, लघुकोन, विशालकोन आणि प्रविशालकोन यात वर्गीकरण करू शकतो.

परंतु यावरून कोनांची नेमकेपणाने तुलना होऊ शकत नाही. यावरून दिलेल्या दोन विशालकोनांपैकी कोणता कोन मोठा आहे ते समजत नाही. म्हणून कोनांची तुलना अधिक नेमकेपणाने करण्यासाठी, कोनांची मापे ठरवायला हवीत. कोनमापकाच्या (protractor) मदतीने हे आपण करू शकतो.

कोनाचे माप

आपण आपल्या या मापाला 'अंशमाप' (degree measure) असे म्हणतो. एका संपूर्ण परिभ्रमणाला समान 360 भागांत विभागले जाते. प्रत्येक भागाला एक अंश **(degree)** म्हणतात. तीनशे साठ अंश म्हणण्यासाठी 360^0 लिहितात.

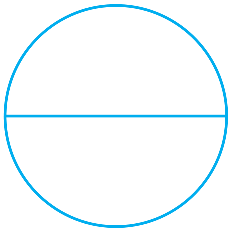
विचार करा. चर्चा करा आणि लिहा.

$\frac{1}{2}$ परिभ्रमणात किती अंश असतात? एका काटकोनात किती अंश असतात?

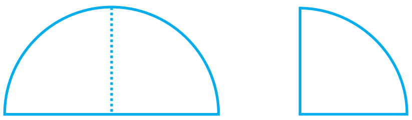
एका सरळकोनात किती अंश असतात? किती काटकोन मिळून 180^o बनतात? किती काटकोन मिळून 360^o बनतात?

हे करा

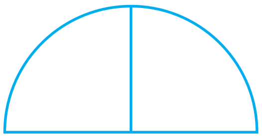
1. एका बांगडीच्या मदतीने एक वर्तुळाकार आकृती बनवा किंवा त्याच मापाचे एक वर्तुळाकार शीट (कागद) घ्या.



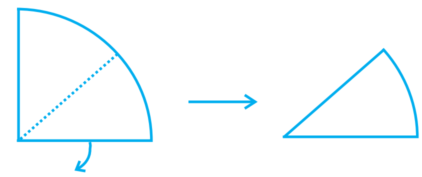
2. त्याला दोन वेळा दुमडा, ज्यामुळे आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे आकार येईल. याला एक चतुर्थांश (quadrant) म्हणतात.



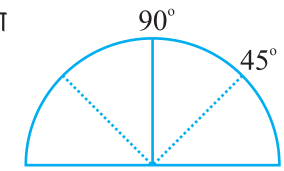
3. त्याला उघडा. तुम्हांला मध्यभागी घडी असलेलं एक अर्धवर्तुळ दिसेल. त्या घडीवर 90° लिहा.



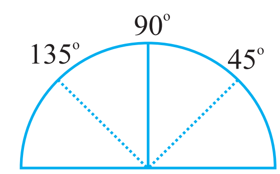
4. अर्धवर्तुळ दुमडून एक चतुर्थांश बनवा. त्याला पुन्हा एकदा घडी घालून सोबत दर्शविलेली आकृती मिळवा. आता कोनाचे माप 90° च्या निम्मे म्हणजेच 45° आहे.



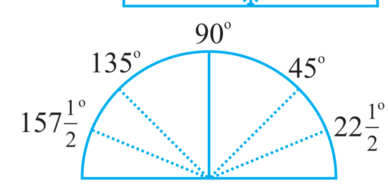
5. आता हे उघडा. 90° च्या दोन्ही बाजूंना एक-एक घडीची खूण दिसते आहे. आधार रेषाच्या डावीकडे पहिल्या घडीवर 45° लिहा.



6. 90° च्या दुसऱ्या म्हणजेच उजव्या बाजूच्या घडीच्या खुणेवर 90° + 45° = 135° लिहा.

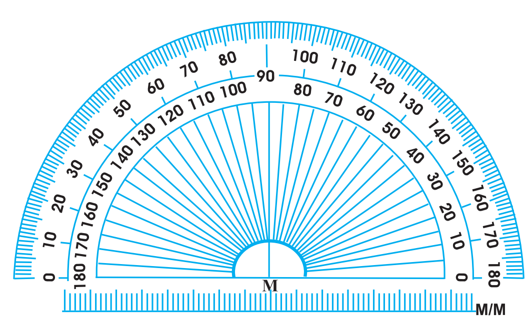


7. आता पुन्हा एकदा कागदाला 45° पर्यंत (म्हणजेच चतुर्थांशाच्या निम्मे) घडीवर दुमडा. आता त्याच्या निम्मे करा. आधार रेषेच्या डावीकडील पहिली घडीची खूण 45° चा अर्धा म्हणजेच 22½° दर्शवेल. 135° च्या डावीकडील कोन 157½° आहे.

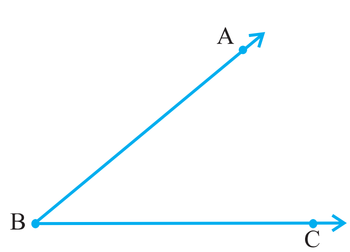


कोनमापक

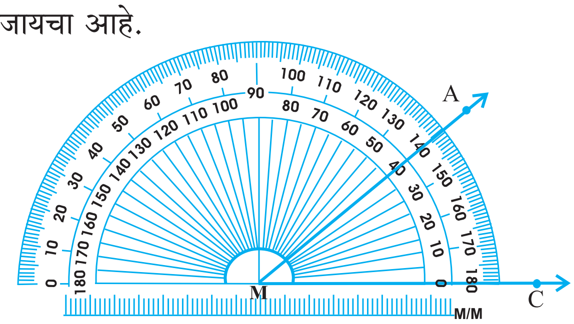
तुमच्या कंपास बॉक्समध्ये (कंपासपेटी) तुम्हांला तयार कोनमापक मिळेल. त्याची वक्र कड ही 180 समान भागांत विभागली गेली आहे. प्रत्येक भागाला एक अंश **(degree)** म्हणतात. यावरील खुणा उजवीकडून डावीकडे 0° पासून180° पर्यंत असतात.



समजा तुम्हांला एखादा कोन ABC मोजायचा आहे.



∠ABC दिला आहे.

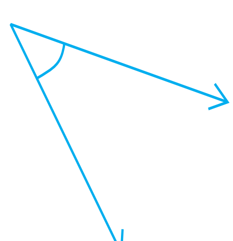


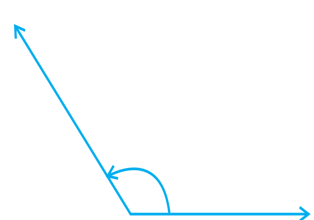
∠ABC मोजणे

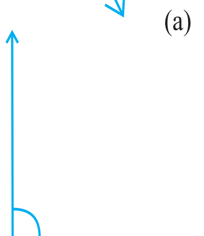
1. कोनमापक अशा प्रकारे ठेवा की त्याच्या सरळ कडेचा मध्यबिंदू (आकृतीतील M) कोनाच्या B या शिरोबिंदूशी तंतोतंत जुळेल.
2. कोनमापक अशा रीतीने जुळवा की किरण BC हा त्याच्या सरळ कडेलगत राहील.
3. कोनमापकावर दोन मापनश्रेणी (scale) आहेत. ज्या मापनश्रेणीतील 0° ची खूण किरण BC शी जुळते ती मापनश्रेणी वापरा.
4. वक्र कडेवर किरण ABने दर्शविलेली खूण, कोनाचे अंशीय माप (degree measure) दाखविते. आकृतीत ते माप 40° आहे.
   आता आपण हा कोन $m\angle ABC = 40^\circ$ किंवा फक्त $\angle ABC = 40^\circ$ असाही लिहू शकतो.

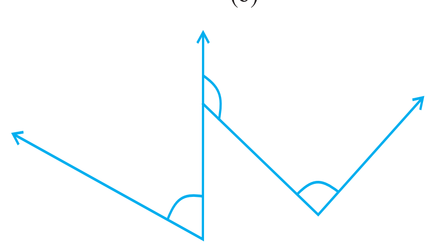
उदाहरणसंग्रह 5.4

1. पुढील कोनांची मापे लिहा.
   (i) 1 काटकोन (ii) 1 सरळकोन
2. सत्य (T) की असत्य (F) : ते ठरवा.
   (a) एका लघुकोनाचे माप $< 90^\circ$ आहे.
   (b) एका विशालकोनाचे माप $< 90^\circ$ आहे.
   (c) एका प्रविशालकोनाचे माप $< 180^\circ$ आहे.
   (d) एका संपूर्ण परिभ्रमणाचे माप $= 360^\circ$ आहे.
   (e) जर $m\angle A = 53^\circ$ आणि $m\angle B = 35^\circ$ आहे. तर $m\angle A > m\angle B$.
3. पुढील कोनांची मापे लिहा.
   (a) काही लघुकोन
   (b) काही विशालकोन
   (प्रत्येकाची दोन उदाहरणे द्या.)
4. पुढील कोन, कोनमापकाच्या साह्याने मोजा आणि त्यांची मापे लिहा.


(a)


(b)

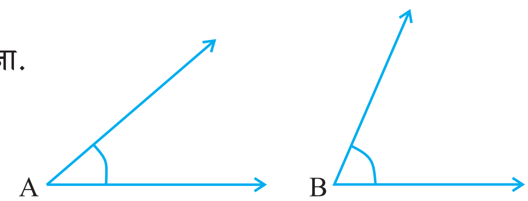

(c)


(d)

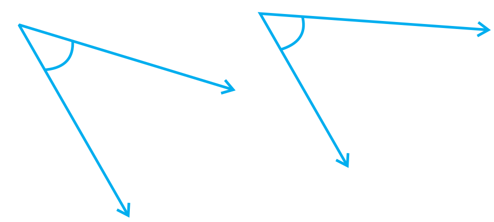
5. कोणत्या कोनाचे माप मोठे (जास्त) आहे?
   आधी अंदाज (estimate) घ्या आणि मग मोजा.

   कोन A चे माप =

   कोन B चे माप =

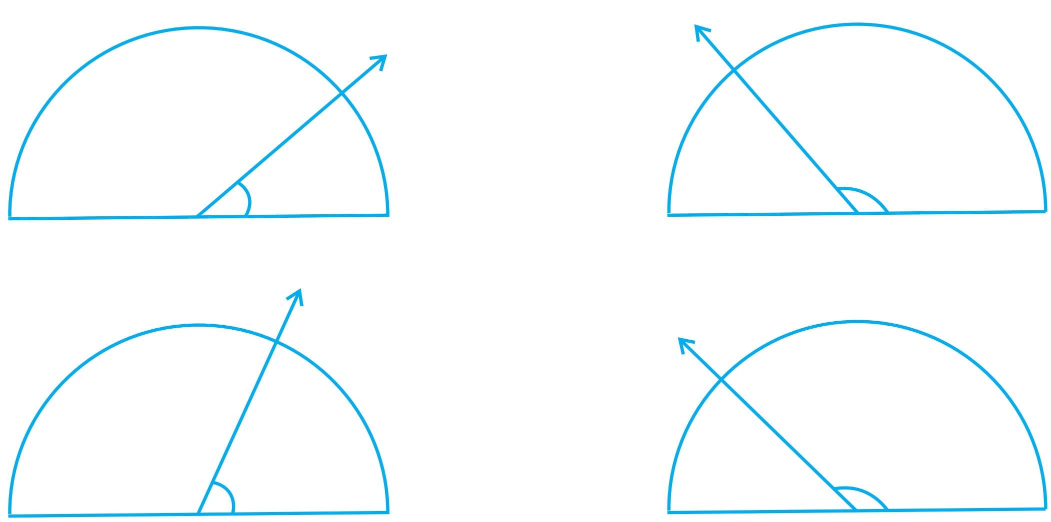


6. या दोन कोनांपैकी कोणाचे माप जास्त आहे? आधी अंदाज घ्या आणि मग मोजून पडताळून पहा.

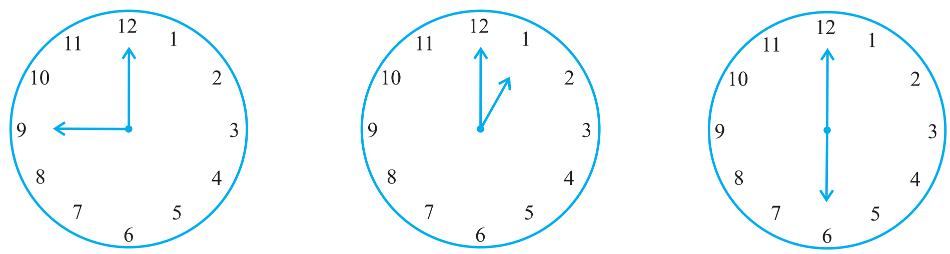


7. लघुकोन, काटकोन, विशालकोन, सरळकोन वापरून पुढील रिकाम्या जागा भरा.
   (a) असा कोन, ज्याचे माप काटकोनाच्या मापापेक्षा कमी आहे, त्याला .... म्हणतात.
   (b) असा कोन, ज्याचे माप काटकोनाच्या मापापेक्षा जास्त आहे, त्याला .... म्हणतात.
   (c) असा कोन, ज्याचे माप दोन काटकोनांच्या बेरजेइतके आहे, त्याला .... म्हणतात.
   (d) जर दोन कोनांच्या मापांची बेरीज, काटकोनाच्या मापाइतकी असेल तर त्यांतील प्रत्येक कोन .... असतो.
   (e) जर दोन कोनांच्या मापांची बेरीज एका सरळकोनाच्या मापाइतकी असेल आणि त्यांपैकी एक कोन लघुकोन असेल तर, दुसरा कोन .... असतो.

8. पुढील आकृत्यांमध्ये दिलेल्या प्रत्येक कोनाचे माप शोधा. (प्रथम डोळ्यांनी पाहून मापाविषयी अंदाज घ्या आणि मग कोपमापकाने मोजा.) :



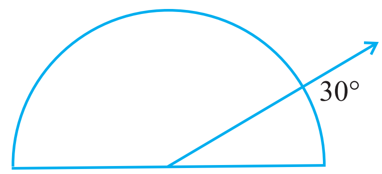
9. पुढील प्रत्येक आकृतीमधील घड्याळाच्या काट्यांमधील कोनाचे माप शोधा.



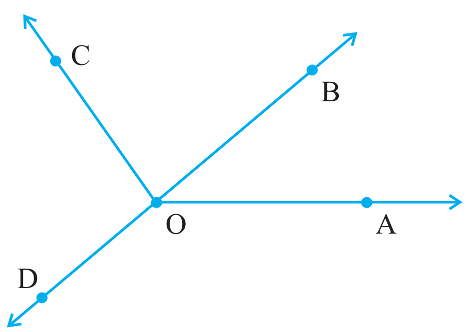
सकाळी 9:00 वाजता दुपारी 1.00 वाजता संध्याकाळी 6.00 वाजता

10. शोधा.

शेजारील आकृतीत कोनमापक 30° चा कोन दर्शवित आहे. ही आकृती एका विशालक भिंगातून (magnifying glass) पहा. कोन मोठा होतो का? का कोनाचे माप मोठे होते?



11. मोजा आणि प्रत्येक कोनाचे वर्गीकरण करा.



कोन	∠AOB	∠AOC	∠BOC	∠DOC	∠DOA	∠DOB
माप						
प्रकार						

5.6 लंब रेषा

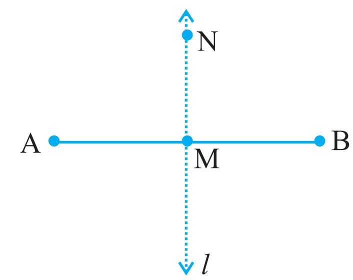
जर दोन रेषा परस्परांना छेदत असतील आणि त्यांच्यामधील कोन काटकोन असेल तर त्या रेषा परस्परांना लंब आहेत असे म्हणतात. **(perpendicular)** जर रेषा AB रेषा CD ला लंब असेल तर ते $AB \perp CD$ असे लिहितात.

विचार करा, चर्चा करा आणि लिहा.

जर $AB \perp CD$ असेल तर $CD \perp AB$ सुद्धा असे आपण म्हणू शकतो का?

आपल्या अवतीभवती असणाऱ्या लंब रेषा!

लंब रेषा (किंवा लंब रेषाखंड)ची अनेक उदाहरणे तुम्ही तुमच्या अवतीभवती असलेल्या वस्तूंमधून देऊ शकता. यांपैकी एक आहे इंग्रजी वर्णमालेतील अक्षर T अजून असं एखादं इंग्रजी वर्णाक्षर आहे का की जे लंबता स्पष्ट करते? (लंब रेषांचं उदाहरण आहे?)



एक पोस्टकार्ड घ्या. त्याच्या कडा परस्परांना लंब आहेत का? समजा AB हा रेषाखंड आहे. त्याच्या मध्यबिंदूला M नाव द्या. रेषा MN रेषाखंड AB ला बिंदू M मध्ये लंब आहे. रेषा MN, AB ला दोन समान भागांत विभागते का?

रेषा MN, AB ला लंब आहे का?

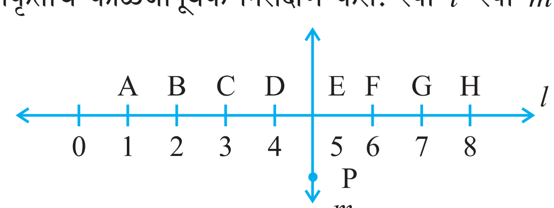
याप्रकारे रेषा MN, रेखाखंड AB ला दुभागते. (म्हणजेच दोन समान भागात विभागते.) आणि रेषाखंड AB ला लंब सुद्धा आहे.

म्हणून आपण असे म्हणू शकतो की रेषा MN ही, रेषाखंड AB चा लंब–दुभाजक **(perpendicular bisector)** आहे.

याची रचना करायला तुम्ही नंतर शिकणार आहात.

उदाहरणसंग्रह 5.5

1. पुढीलपैकी लंबरेषांची उदाहरणे कोणती?
   (a) टेबलाच्या वरच्या पृष्ठभागाच्या लगतच्या बाजू.
   (b) रेल्वे मार्गावरील रूळ
   (c) L वर्णाक्षर बनविणारे रेषाखंड
   (d) V वर्णाक्षर बनविणारे रेषाखंड
2. समजा रेषाखंड PQ रेखाखंड XY ला लंब आहे. समजा PQ आणि रेख XY, बिंदू A मध्ये छेदतात. तर $\angle PAY$ चे माप किती?
3. तुमच्या कंपासपेटीत दोन गुण्या आहेत. (set-squares) त्याच्या कोपऱ्यात तयार झालेल्या कोनांची मापे काय आहेत? त्यांच्या कोनांच्या मापांमध्ये असं एखादं माप आहे का की जे दोघांसाठी सामाईक (common) आहे?
4. पुढील आकृतीचे काळजीपूर्वक निरीक्षण करा. रेषा l रेषा m ला लंब आहे.



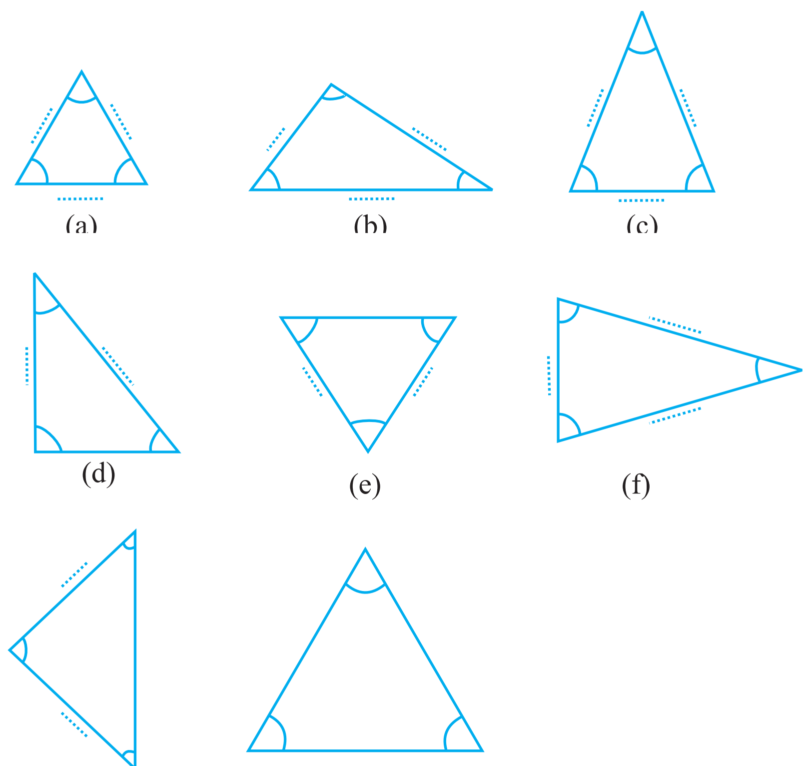
   (a) $CE = EG$ आहे का?
   (b) रेषा PE, रेखाखंड CG ला दुभागते का?
   (c) रेषा PE ज्यांची लंबदुभाजक आहे अशा कोणत्याही दोन रेषाखंडांची नावे लिहा.
   (d) पुढील विधाने सत्य आहेत का?
      (i) $AC > FG$
      (ii) $CD = GH$
      (iii) $BC < EH$

5.7 त्रिकोणाचे वर्गीकरण

तुम्हांला सर्वांत कमी बाजू असलेला 'बहुभुज' आठवतो आहे का? तो त्रिकोण (triangle) आहे. चला तर मग आता आपण किती विविध प्रकारचे त्रिकोण तयार होऊ शकतात ते पाहूया.

हे करा

कोनमापक आणि पट्टी वापरून पुढे दिलेल्या त्रिकोणाच्या कोनांची आणि बाजूंची मापे ठरवा आणि दिलेल्या कोष्टकात ती भरून कोष्टक पूर्ण करा.



(a) (b) (c) (d) (e) (f) (g) (h)

त्रिकोणाच्या कोनांची मापे	कोनांवरून तुम्ही काय म्हणू शकता?	त्रिकोणाच्या बाजूंची मापे
(a) ...60^0..., ...60^0.., ...60^0.....,	सगळे कोन समान आहेत.	
(b) ...., ..., ...,	.... कोन.......,	
(c) ...., ..., ...,	.... कोन ....,	
(d) ...., ..., ...,	.... कोन ....,	
(e) ...., ..., ...,	.... कोन ....,	
(f) ...., ..., ...,	.... कोन.......,	
(g) ...., ..., ...,	.... कोन.......,	
(h) ...., ..., ...,	.... कोन.......,	

वरील कोन, त्रिकोण आणि त्यांच्या बाजूंच्या मापांचे लक्षपूर्वक निरीक्षण करा. त्यांच्याबद्दल विशेष काही सांगता येईल का?

तुम्हांला काय मिळते?

- सर्व कोन समान असणारे त्रिकोण

  जर एखाद्या त्रिकोणाने सर्व कोन समान आहेत तर त्याच्या बाजूसुद्‌धा .... आहेत.
- सर्व बाजू समान असणारे त्रिकोण

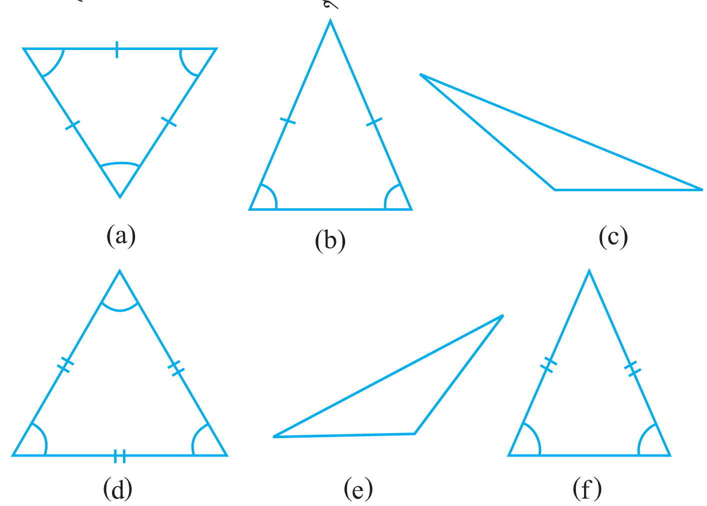
  जर त्रिकोणाच्या सर्व बाजू समान आहेत, तर त्यांचे कोनसुद्‌धा .... आहेत.
- ज्याच्या दोन बाजू आणि दोन कोन समान आहेत असे त्रिकोण.

  जर त्रिकोणाच्या दोन बाजू समान असतील तर त्याचे .... कोन समान असतात.
- कोणत्याही दोन बाजू समान नसणारे त्रिकोण. जर एखाद्‌धा त्रिकोणात कोणतेही दोन कोन समान नसतील, तर त्यांच्या कोणत्याही दोन भुजा (बाजू) समान नसतात.

  जर त्रिकोणाच्या तीनही बाजू समान नसतील तर त्याचे तीनही कोन सुद्‌धा .... नसतात.

आणखी काही त्रिकोण घ्या आणि वरील गोष्टी पडताळून पहा. त्यासाठी आपल्याला पुन्हा त्या त्रिकोणांचे कोन आणि त्यांच्या बाजूंची मापे घ्यावी लागतील.

वेगवेगळ्या प्रकारे त्रिकोणांचे वर्गीकरण केले गेले आहे आणि त्यांना विशिष्ट नावे दिली गेली आहेत. ही नावे काय आहेत ते आता आपण पाहूया.



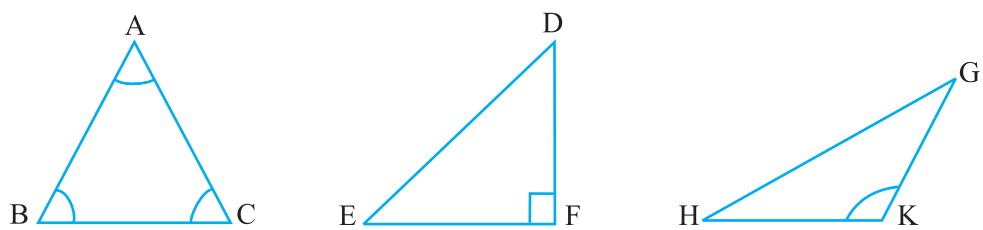
बाजूंवरून पडणारे त्रिकोणांचे प्रकार

ज्या त्रिकोणाच्या तीनही बाजू असमान असतात, त्याला विषमभुज त्रिकोण **(Scalene triangle)** म्हणतात. [(c), (e)] ज्या त्रिकोणाच्या दोन बाजू समान (लांबीच्या) असतात, त्याला समद्विभुज त्रिकोण **(Isosceles triangle)** म्हणतात. [(b), (f)]

ज्या त्रिकोणाच्या तीनही बाजू समान असतात, त्याला समभुज त्रिकोण **(Equilateral triangle)** म्हणतात. [(a), (d)] या व्याख्यांचा वापर करून, ज्यांच्या बाजू आपण आधीच मोजल्या आहेत, त्या सर्व त्रिकोणांचे वर्गीकरण करा.

कोनांवरून पडणारे त्रिकोणांचे प्रकार

जर त्रिकोणाचा प्रत्येक कोन 90° पेक्षा लहान असेल तर त्रिकोणाला 'लघुकोन त्रिकोण' म्हणतात. **(acute angled triangle)** जर त्रिकोणाचा कोणताही एक कोन काटकोन असेल तर त्याला 'काटकोन त्रिकोण' **(right angled triangle)** म्हणतात. जर त्रिकोणांचा कोणताही एक कोन 90° पेक्षा मोठा असेल तर त्याला 'विशालकोन त्रिकोण' **(obtuse angled triangle)** म्हणतात.



लघुकोन त्रिकोण काटकोन त्रिकोण विशालकोन त्रिकोण

ज्या त्रिकोणांचे कोन आपण आधी मोजलेले आहेत त्यांचे वर्गीकरण वरील व्याख्यांनुसार करा. त्यांपैकी किती त्रिकोण काटकोन त्रिकोण होते?

हे करा

पुढील त्रिकोणांच्या कच्च्या आकृत्या **(rough sketches)** काढायचा प्रयत्न करा :

(a) विषमभुज लघुकोन त्रिकोण

(b) समद्विभुज विशालकोन त्रिकोण

(c) समद्विभुज काटकोन त्रिकोण

(d) विषमभुज काटकोन त्रिकोण

पुढील आकृत्या काढणे शक्य आहे असे तुम्हांला वाटते का?

(e) विशालकोन समभुज त्रिकोण

(f) समभुज काटकोन त्रिकोण

(g) एक त्रिकोण ज्यात दोन काटकोन आहेत

विचार करा, चर्चा करा आणि तुमचे निष्कर्ष लिहा.

उदाहरणसंग्रह 5.6

1. पुढील त्रिकोणाच्या प्रकारांची नावे लिहा :

   (a) 7 सेमी, 8 सेमी, 9 सेमी बाजू असलेला त्रिकोण

   (b) ΔABC ज्यामध्ये $AB = 8.7$ सेमी $AC = 7$ सेमी आणि $BC = 6$ सेमी आहे.

   (c) ΔPQR ज्यामध्ये $PQ = QR = RP = 5$ सेमी आहे.

   (d) ΔDEF ज्यामध्ये $m\angle D = 90^\circ$ आहे.

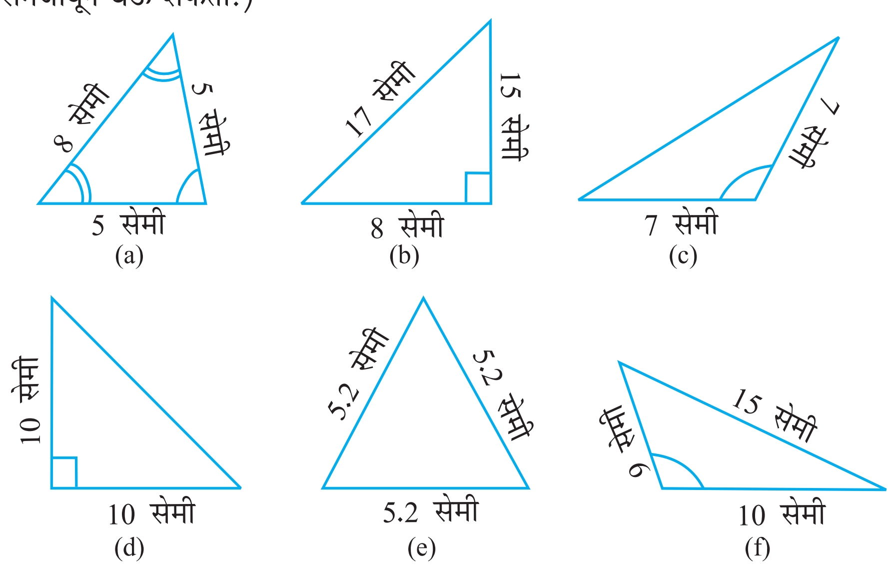
   (e) ΔXYZ ज्यामध्ये $m\angle Y = 90^\circ$ आणि $XY = YZ$ आहे.

   (f) ΔLMN ज्यामध्ये $m\angle L = 30^\circ$, $m\angle M = 70^\circ$ आणि $m\angle N = 80^\circ$ आहे.

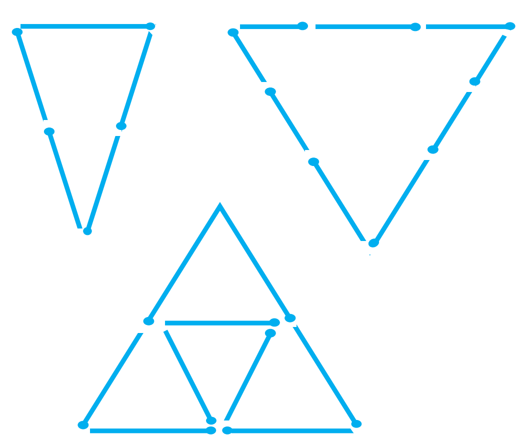
2. जोड्या जुळवा.

त्रिकोणांची मापे		त्रिकोणांचे प्रकार	
(i)	समान लांबीच्या तीन बाजू	(a)	विषमभुज काटकोन त्रिकोण
(ii)	समान लांबीच्या दोन बाजू	(b)	समद्विभुज काटकोन त्रिकोण
(iii)	वेगवेगळ्या लांबीच्या सर्व बाजू	(c)	विशालकोन त्रिकोण
(iv)	3 लघुकोन	(d)	काटकोन त्रिकोण
(v)	1 काटकोन	(e)	समभुज त्रिकोण
(vi)	1 विशालकोन	(f)	लघुकोन त्रिकोण
(vii)	दोन समान लांबीच्या बाजूंबरोबर 1 काटकोन	(g)	समद्विभुज त्रिकोण

3. पुढील त्रिकोणांमधील प्रत्येकाला दोन प्रकारे नाव द्या. (कोनाचा प्रकार तुम्ही केवळ निरीक्षणातूनच समजावून घेऊ शकता.)



4. आगपेटीतील काड्यांच्या मदतीने त्रिकोण बनविण्याचा प्रयत्न करा. यांपैकी काही त्रिकोण शेजारील आकृतीत दाखविले आहेत. पुढील साहित्य वापरून तुम्ही त्रिकोण बनवू शकाल?



(a) आगपेटीतील 3 काड्या
(b) आगपेटीतील 4 काड्या
(c) आगपेटीतील 5 काड्या
(d) आगपेटीतील 6 काड्या

(प्रत्येक वेळी तुम्हांला आगपेटीतील दिलेल्या सर्व काड्या वापरायच्या आहेत हे लक्षात असू द्या.)

प्रत्येक परिस्थितीत तयार झालेल्या त्रिकोणाच्या प्रकाराचे नाव लिहा. जर तुम्ही त्रिकोण नाही बनवू शकलात तर त्यामागील कारणाचा विचार करा.

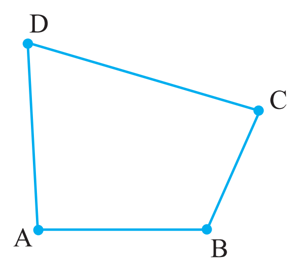
5.8 चौकोन

आपल्याला आठवत असेल की चार भुजा (बाजू) असलेल्या बहुभुजाकृतीस चौकोन **(quadrilateral)** म्हणतात.

हे करा

1. दोन दांडू (काठ्या) घेऊन त्यांची टोके एकमेकांशी जुळतील अशी ठेवा. यानंतर आणखी दोन दांडू (काठ्या) अशाच घेऊन त्यांची दोन टोके पहिल्या दोन काठ्यांच्या टोकांबरोबर असतील अशा ठेवा. याप्रकारे आपणांस कोणती आकृती मिळते?

शेजारी असलेला हा एक चौकोन आहे. याच्या चार बाजू $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, ____, ____ आहेत.
या चौकोनाचे $\angle BAD$, $\angle ADC$, $\angle DCB$, आणि ______ असे चार कोन अहेत.
$\overline{AC}$ हा त्याचा कर्ण आहे. आणखी कोणता कर्ण आहे? सर्व बाजूंची लांबी व कोनांची मापे मोजा.



2. ज्याप्रमाणे चार दांडूंच्या साहाय्याने पहिली कृती केली आहे त्याप्रमाणे आपण खालीलप्रमाणे चौकोन करू शकतो काय?
   (a) चारही कोन लघुकोन आहेत.
   (b) एक कोन विशालकोन आहे.
   (c) एक कोन काटकोन आहे.
   (d) दोन कोन विशालकोन आहेत.
   (e) दोन कोन काटकोन आहेत.
   (f) कर्ण हे परस्पर विरुद्ध काटकोनात आहेत.

आयत

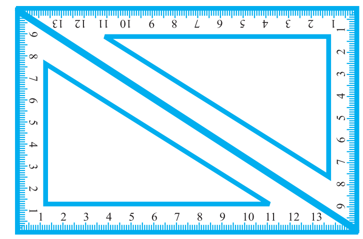
हे करा

आपल्या कंपासपेटीत दोन गुण्ये आहेत. एक 30°–60°–90° व दुसरा 45°–45°–90° मापाचा आहे.

(a) आपल्या दोघांकडे प्रत्येकी 30°–60°–90° यामध्ये गुण्ये आहेत. ते आपण आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे ठेवा. तयार झालेल्या चौकोनाचे नाव काय आहे? यामध्ये प्रत्येक कोन काय मापाचा आहे?

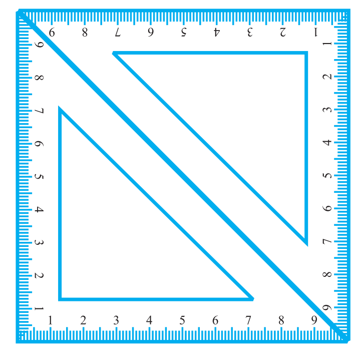
या चौकोनाला आयत **(rectangle)** असे म्हणतात.

आयताचा आणखी एक गुणधर्म आपण पाहू शकतो. याच्या संमुख बाजू (समोरासमोरील) समान आहेत. याचे आणखी कोणते गुणधर्म आहेत?



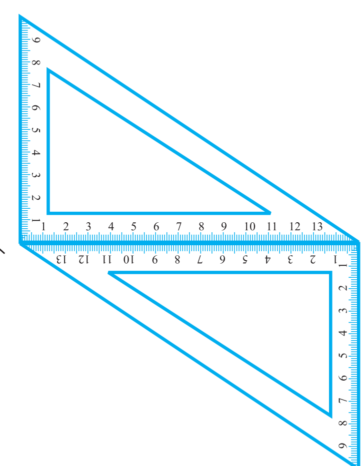
(b) दुसरे 45°–45°–90° हे गुण्ये आकृतीप्रमाणे ठेवले तर आपल्याला वेगळ्या प्रकारच्या चौकोन मिळतो. या चौकोनाला चौरस (square) म्हणतात.

चौरसाच्या चारही भुजांची (बाजूंची) लांबी समान आहे. याचे कोन व कर्ण यांबाबतीत आपण काय सांगू शकतो? चौरसाचे आणखी काही गुणधर्म पाहता येतात का पहा.

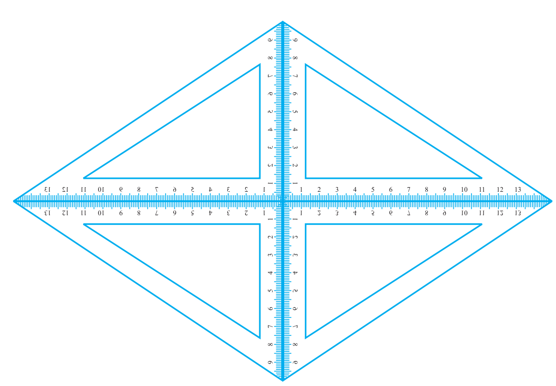


(c) जर आपण 30°–60°–90° याचे दोन गुण्ये आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे ठेवले तर आपल्याला वेगळ्या प्रकारचा चौकोन मिळतो. या चौकोनाला समांतरभुज चौकोन **(parallelogram)** म्हणतात. याच्या संमुख बाजू एकमेकांस समांतर असतात. या संमुख बाजू समान मापाच्या आहेत का?

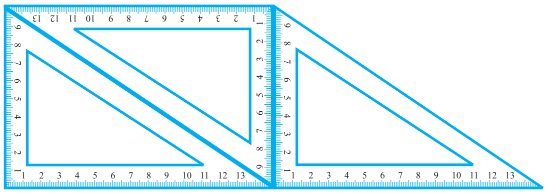
याचे कर्ण समान मापाचे आहेत का?



(d) आपण चार 30°–60°–90° गुण्ये आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे ठेवले तर आपणांस समभुज **(rhombus)** चौकोन मिळतो.

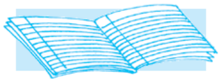


(e) जर आपण आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे गुण्ये घेऊन ठेवले तर आपल्याला ज्याच्या दोन भुजा समांतर आहेत असा चौकोन मिळतो. त्याला समलंब (trapezium) चौकोन असे म्हणतात.



आपण शोधलेल्या गोष्टींच्या गोषवाऱ्यासंदर्भात खालील तक्ता दिला आहे. तो पूर्ण करा.

चौकोन	संमुख बाजू		सर्व बाजूं–	संमुख कोन	कर्ण	
	समांतर	समान	बरोबर	बरोबर	बरोबर	परस्पर लंब
समांतरभुज	आहेत	आहेत	नाही	आहेत	नाही	नाही
आयत			नाही			
चौरस						आहेत
समभुज				आहेत		
समलंब		नाहीत				



प्रश्नावली 5.7

1 सत्य (T) व असत्य (F) सांगा.

(a) आयताचा प्रत्येक कोन काटकोन असतो.

(b) आयताच्या संमुख बाजूंची लांबी समान असते.

(c) चौरसाचे कर्ण परस्परांशी लंब असतात.

(d) समभुज चौकोनाच्या सर्व बाजू समान लांबीच्या असतात.

(e) समांतर भुज चौकोनाच्या सर्व बाजू समान लांबीच्या असतात.

(f) समलंब चौकोनाच्या संमुख बाजू समांतर असतात.

2 खालील विधानांसाठी कारण द्या.

(a) चौरसास एका विशिष्ट प्रकारचा आयत म्हटले जाते.

(b) आयताला विशिष्ट प्रकारचा समांतरभुज चौकोन समजले जाते.

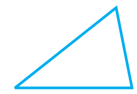
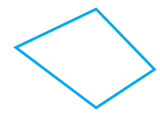
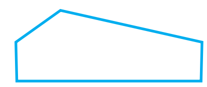
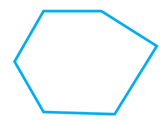
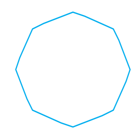
(c) चौरसाला विशिष्ट प्रकारचा समभुज समजले जाते.

(d) चौरस, आयत आणि समांतरभुज चौकोन हे चौकोनही आहे.

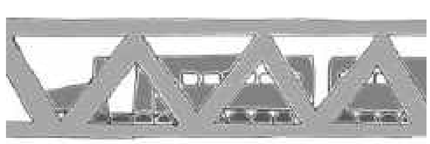
(e) चौरस हा एक समांतरभुज चौकोन आहे.

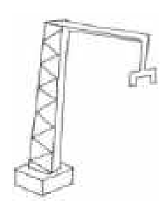
5.9 बहुभुज

आत्तापर्यंत आपण 3 बाजू व 4 बाजू असलेल्या बहुभुजाकृती (polygons) पाहिल्या आहेत. त्यांना अनुक्रमे त्रिकोण व चौकोन म्हणतात. आता आपण चार बाजूंपेक्षा अधिक बाजू असलेल्या बहुभुजाकृती पाहणार आहोत. या बहुभुजाकृतींमध्ये आपण त्यांच्या बाजूंच्या संख्येच्या आधारे वर्गीकरण करणार आहोत.

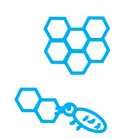
बाजूंची संख्या	नाव	आकृती
3	त्रिकोण	
4	चौकोन	
5	पंचकोन	
6	षट्कोन	
8	अष्टकोन	

या प्रकारचे आकार (shapes) आपण रोजच्या व्यवहारात पाहात असतो. खिडक्या, दरवाजे, भिंती, कपाटे, फळे, अभ्यासाची पुस्तके इ. सर्व आयताकृती असतात. फरशीच्या टाईल्सही आयताकृती असतात. त्रिकोणाच्या बळकटपणामुळे त्याचा उपयोग अभियांत्रिकीमध्ये अधिक प्रमाणात केला जातो.





त्रिकोणाचा वस्तू निर्माण प्रक्रियेत उपयोग

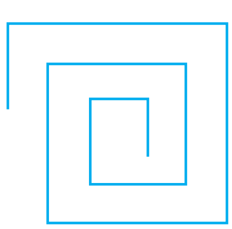


मधमाशी आपले घर बनविण्यात मध्यभागी षट्कोनाचा आकार उपयोगात आणते.

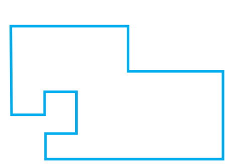
आपल्या परिसरात आपण हे आकार कोठे कोठे पाहतो त्याचे निरीक्षण करा.

प्रश्नावली 5.8

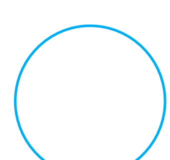
1. खालीलपैकी कोणत्या आकृत्या बहुभुज आहेत ते सांगा. यांपैकी जी आकृती बहुभुज नाही ते सकारण सांगा.



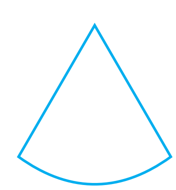
(a)



(b)

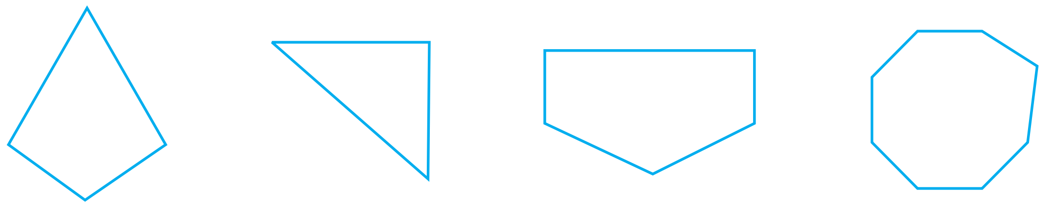


(c)



(d)

2. प्रत्येक बहुभुजाचे नाव लिहा.



(a) (b) (c) (d)

यांपैकी प्रत्येकाची आणखी दोन उदाहरणे सांगा.

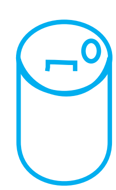
3. एका सुसम षट्कोनाचे (reguler hexagon) चित्र काढा. त्यांपैकी कोणतेही तीन शिराबिंदू जोडून त्रिकोण तयार करा. आपण कोणत्या प्रकारचा त्रिकोण काढला आहे ते ओळखा.
4. एका सुसम अष्टकोनाचे (reguler octagon) चित्र काढा. (आपणांस हवे असल्यास चौरस रेखांकित कागद वापरू शकता.) (squared paper) या अष्टकोनापैकी चार शिरोबिंदूंना जोडून एक आयत काढा.
5. कोणत्याही बहुभुजाकृतीचे (लगतचे सोडून) दोन शिरोबिंदू जोडल्यास आपल्याला कर्ण मिळतो. (ही त्याची बाजू नसते) एका पंचकोनाचे चित्र काढा व त्याचे सर्व कर्ण दाखवा.

5.10 त्रिमितीय आकार

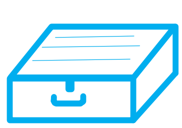
रोजच्या जीवनात आपण पाहात असलेले काही आकार (shapes) खाली दिले आहेत. हे सर्व भरीव (solid) आहेत. सपाट (flat) नाहीत :

हा चेंडू एक गोल (sphere) आहे.

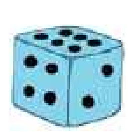
आइस्क्रीम हा शंकूच्या (cone) आकारातील आहे.



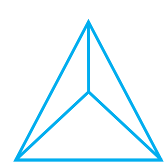
हा डबा एक वृत्तचिती (cylinder) आहे.



ही पेटी एक इष्टिकाचिती (cuboid) आहे.



हा फासा (die) एक घन (cube) आहे.

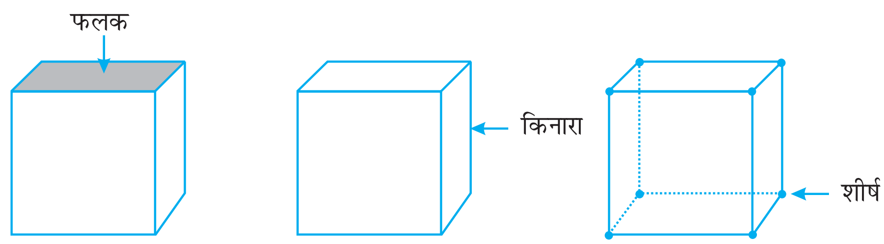


हा एक पिरामिड (pyramid) चा आकार आहे.

गोलाकार आकार असणाऱ्या पाच वस्तूंची नावे सांगा.
शंकूचा आकार असणाऱ्या पाच वस्तूंची नावे सांगा.

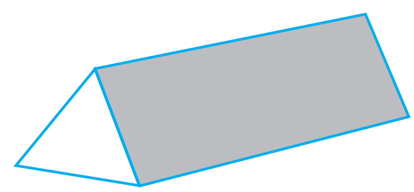
पृष्ठ, बाजू व शिरोबिंदू

अनेक त्रिमितीय आकारांमध्ये (three dimensional shapes) ते आकार पाहून आपण त्यांची पृष्ठे, बाजू व शिरोबिंदू ओळखू शकतो. पृष्ठ, बाजू व शिरोबिंदू म्हणजे काय?



उदाहरणासाठी एक घन (cube) घ्या.

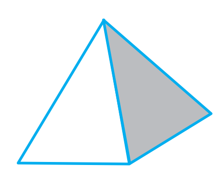
याचा वरील सपाट भाग म्हणजे एक **पृष्ठ** होय. दोन पृष्ठे एका रेषाखंडात मिळतात ती एक **बाजू** होय व तीन बाजू ज्या बिंदूत मिळतात तो एक **शिरोबिंदू** होय. शेजारी एका **(prism)** लोलकाचे चित्र दिले आहे. आपण प्रयोगशाळेत हा पाहिला आहे का? याची दोन पृष्ठे त्रिकोणाकृती आहेत. म्हणून याला त्रिकोणाकृती लोलक **(triangulur prism)** असे म्हणतात.



त्रिकोणाकृती पृष्ठाला याचा **पाया (base)** असेही म्हणतात. या लोलकाची दोन त्रिकोणाकृती एकसमान पृष्ठे आहेत. एक पाया (identical) व दुसरा वरील पृष्ठभाग (top) म्हणतात. या दोन पृष्ठभागांव्यतिरिक्त इतर पृष्ठे समांतरभुज चौकोन आहेत.

जर लोलकाचा पाया आयताकृती असेल तर त्या लोलकाला **आयताकार लोलक (Rectangular prism)** म्हणतात. आयताकारी लोलकाला दुसरे काय नाव आहे ते आपल्याला आठवते आहे का?

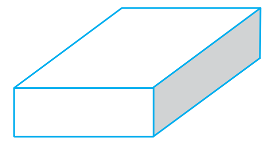
एक **पिरॅमिड** म्हणजे ज्याचे एक पृष्ठ म्हणजे कोणतीही बहुभुजाकृती व इतर सर्व पृष्ठे त्रिकोणाकृती असतात.



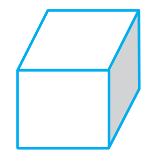
शेजारील आकृतीत एक चौरसाकृती (square pyramid) पिरॅमिड दाखविला आहे. याचा पाया एक चौरस आहे. आपण एका त्रिकोणाकृती पिरॅमिडची कल्पना करू शकता काय? त्याची आकृती काढण्याचा प्रयत्न करा.

हे करा

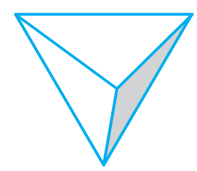
1. एक आयताकृती बॉक्स हा आयताकृती घन आहे. याला 6 पृष्ठे आहेत. प्रत्येक पृष्ठाला चार बाजू आहेत. प्रत्येक पृष्ठाला चार टोके आहेत. यांना शिरोबिंदू म्हणतात.



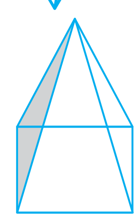
2. एक आयताकृती घन असा आहे की त्याच्या सर्व बाजू समान लांबीच्या आहेत.
   याला _______ पृष्ठे असतात.
   प्रत्येक पृष्ठाला _______ बाजू आहेत.
   प्रत्येक पृष्ठाला _______ शिरोबिंदू आहेत.



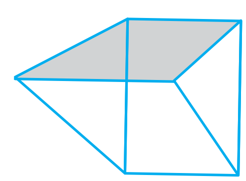
3. ज्या पिरॅमिडचा पाया त्रिकोणाकृती असतो, त्याला चतु:पृष्ठीय (tetrahedron) असेही म्हणतात.
   पृष्ठे : _______
   बाजू : _______
   शीरोबिंदू : _______

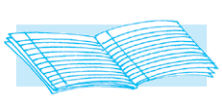


4 एका चौरसाकृती पिरॅमिडचा पाया एक चौरस असतो.
   पृष्ठे : _______
   बाजू : _______
   शीरोबिंदू : _______



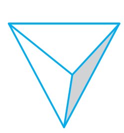
5 एक त्रिकोणाकृती लोलक साधारणत: एका कॅलिडियोस्कोपसारखा (Kaleidoscope) असतो.
   पृष्ठे : _______
   बाजू : _______
   शीरोबिंदू : _______

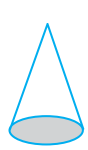


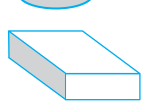


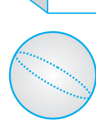
उदाहरणसंग्रह 5–9

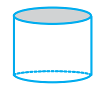
1. जोड्या लावा.

(a) शंकू (i) 

(b) गोल (ii) 

(c) वृत्तचिती (iii) 

(d) इष्टिकाचिती (iv) 

(e) पिरॅमिड (v) 

या आकारांची प्रत्येकी आणखी दोन उदाहरणे द्या.

2. खालील वस्तू कोणत्या भूमितीय आकारातील आहेत?
   - (a) आपली कंपास पेटी
   - (b) वीट
   - (c) काडेपेटी
   - (d) रस्ते बनवायला लागणारा रोलर (roller)
   - (e) लाडू

आपण काय शिकलो?

1. एका रेषाखंडाच्या दोन अंत्यबिंदूंमधील अंतरास त्याची लांबी म्हणतात.
2. रेषाखंडांची लांबी मोजण्यासाठी एक मोजपट्टी व एक कर्कटक यांचा उपयोग होतो.
3. जेव्हा घड्याळातील एक काटा एका जागेवरून दुसरीकडे जातो तेव्हा आपल्याला कोणत्या कोनाचे एक उदाहरण मिळते?

   घड्याळाच्या एका काट्याचे पूर्ण फिरणे म्हणजे एक वर्तुळकोन होय.

   काटकोन $\frac{1}{4}$ घटक कोन असतो व सरळ कोन हा $\frac{1}{2}$ वर्तुळकोन असतो (degrees) कोनांचे अंशामधील माप काढण्यासाठी आपण कोनमापकाचा उपयोग करतो.

   काटकोनाचे माप 90° व सरळकोनाचे माप 180° असते. ज्या कोनाचे माप काटकोनापेक्षा कमी असते त्याला लघुकोन व ज्या कोनाचे माप काटकोनापेक्षा जास्त असते त्याला विशालकोन म्हणतात.

   एक प्रविशाल कोन हा सरळ कोनापेक्षा मोठा व वर्तुळ कोनापेक्षा लहान असतो.
4. जर दोन रेषांमधील कोन 90° असेल तर त्या परस्परांस लंब आहेत असे म्हणतात.
5. एका रेषेचा लंबदुभाजक त्या रेषेला लंब असतो व त्या रेषेला दुभागतो.
6. कोनांच्या आधारे त्रिकोणांचे खालीलप्रमाणे वर्गीकरण करता येते.

त्रिकोणाचे कोन	त्रिकोणाचे नाव
प्रत्येक कोन लघुकोन	लघुकोन त्रिकोण
एक कोन काटकोन	काटकोन त्रिकोण
एक कोन विशालकोन	विशालकोन त्रिकोण

7. बाजूंच्या लांबीवरून त्रिकोणांचे खालीलप्रमाणे वर्गीकरण करता येते.

त्रिकोणाच्या बाजूंची लांबी	नाव
तीन बाजू असमान लांबीच्या	विषमभुज त्रिकोण
दोन बाजूंची लांबी समान	समद्विभुज त्रिकोण
तीन बाजू एकसमान लांबीच्या	समभुज त्रिकोण

8. बाजूंच्या संख्येच्या आधारावर बहुभुजांचे खालील प्रकार आहेत.

बाजूंची संख्या	बहुभुजाचे नाव
3	त्रिकोण
4	चौकोन
5	पंचकोन
6	षट्कोन
8	अष्टकोन

9. चौकोनाचे त्यांच्या गुणधर्माच्या आधारे वर्गीकरण करता येते.

गुण	चौकोनाचा प्रकार
समांतर रेषांच्या दोन जोड्या	समांतरभुज चौकोन
4 काटकोन असलेला समांतरभुज	आयत
4 समान बाजू असलेला समांतर भुज	समभुज चौकोन
चारही कोन काटकोन असलेला समभुज	चौरस

10. आपण आपल्या परिसरात (आजूबाजूला) अनेक त्रिमितीय आकार पाहतो. त्यांतील काही घन, गोल, दंडगोल, शंकू व पिरॅमिड आहेत.

पूर्णांक

प्रकरण 6

6.1 प्रस्तावना

सुनीताच्या आईजवळ 8 केळी आहेत. सुनिताला आपल्या मैत्रिणींबरोबर सहलीला जायचे आहे. तिला आपल्याबरोबर 10 केळी न्यावयाची आहेत. तिची आई तिला 10 केळी देऊ शकेल काय? तिच्याजवळ 10 केळी नाहीत. त्यामुळे तिने शेजारणीकडून 2 केळी उधार आणली आणि परत देण्याचे आश्वासन दिले. सुनिताला 10 केळी दिल्यानंतर तिच्या आईजवळ किती केळी शिल्लक राहतील? तिच्याजवळ एकही केळे नाही परंतु 2 केळी परत करावयाची आहेत. जेव्हा तिच्याकडे काही केळी येतील, समजा 6 केळी आली तर ती त्यांतील 2 केळी परत करेल व तिच्याजवळ 4 केळी शिल्लक राहतील.

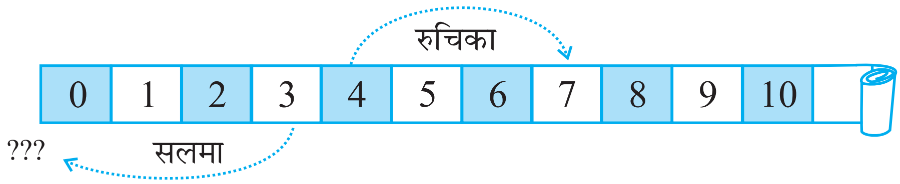
रोनाल्डो एक पेन खरेदी करण्यास बाजारात जातो. त्याच्याजवळ 12 रु. आहेत. परंतु पेनची किंमत 15 रु. आहे. दुकानदार त्याच्या नावावर 3 रु. उधार म्हणून वहीत लिहून ठेवतो. परंतु 3 रु. रोनाल्डोकडून घ्यावयाचे आहेत की द्यावयाचे आहेत, हे तो कसे लक्षात ठेवील? तो काही विशिष्ट रंग अथवा चिन्ह यासाठी वापरू शकेल का?

एका पट्टीवर समान अंतरावर 0 ते 5 अंक लिहिले आहेत. रुचिका व सलमा याच्या साहाय्याने एक खेळ खेळत आहेत.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

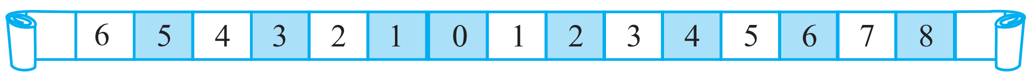
सुरुवातीला दोघीजणी शून्य अंकावर एक एक रंगीत टोकन ठेवतात. एका पिशवीत दोन फासे (dice) ठेवले आहेत. आणि ते एकापाठोपाठ एक काढले जातात. या फाशांपैकी एक फासा लाल रंगाचा आहे व दुसरा निळ्या रंगाचा आहे. लाल रंगाचा फासा आल्यास तो फेकल्यावर जो अंक वर असेल तेवढी घरे टोकन पुढे सरकवायचे आहे व जर फासा निळा असेल तर तो फेकल्यावर जो अंक वर असेल तेवढी घरे टोकन मागील घरात ठेवले जाते. प्रत्येक खेळीनंतर फासे पिशवीत परत ठेवले जातात. एका व्यक्तीनंतर दुसरी व्यक्ती फासे फेकेल. ज्याचे टोकन 25 या अंकावर प्रथम जाईल ती व्यक्ती खेळ जिंकते असे समजले जाते. त्या खेळाला सुरुवात करतात. रुचिका पिशवीत हात घालून फासा काढते तो लाल रंगाचा असतो. तो फेकल्यावर वरच्या बाजूस 4 अंक मिळतो म्हणूत ती पट्टीवर 4 या अंकावर टोकन ठेवते. नंतर सलमा पिशवीत हात घालून फासा काढते. तोही लालच येतो. तो फेकल्यावर त्यावर 3 हा अंक येतो. म्हणून ती तिचे टोकन पट्टीवर 3 अंकावर ठेवते.

दुसऱ्यावेळी रुचिकाला लाल फाशावर 3 हा अंक मिळतो आणि सलमाला निळ्या फाशावर 4 हा अंक मिळतो. आपण विचार करू शकतो का की दुसऱ्या प्रयत्नानंतर त्या आपले टोकन कोणत्या अंकावर ठेवतील? रुचिका पुढे जाते व आपले टोकन 4 + 3 म्हणजेच 7 व्या अंकावर ठेवते.



सलमा आपले टोकन शून्यावर ठेवते. रुचिकाला ते पटत नाही. ती म्हणते हे शून्याच्याही पलीकडे ठेवायला हवे. सलमाला ते पटते पण शून्याच्या मागे तर कोणताच अंक नाही. तिने काय करावे?

तेव्हा सलमा आणि रुचिकाने ही पट्टी दुसऱ्या बाजूस वाढविली व तिला निळा रंग दिला.



सलमाने असे सुचविले की ती शून्याच्या मागे एक अंक आहे. म्हणून त्याला निळा एक असे करता येईल. जर टोकन निळ्या एकवर असेल तर त्याच्या मागील स्थान निळा दोन, निळा दोन मागील स्थान निळा तीन असेल. याप्रमाणे शून्याच्या मागे जावयाचे असे त्या ठरवितात. परंतु त्यांना निळा कागद मिळत नाही. रुचिका असे म्हणते की आपण विरुद्ध दिशेला चाललो आहोत तर आपण दुसऱ्या एका चिन्हाचा प्रयोग करूया. पाहा, शून्यापेक्षा कमी संख्या दाखवण्यासाठी आपल्याला एका चिन्हाचा वापर करावा लागतो. यासठी त्या संख्येच्या मागे ऋण (–) चिन्हाचा उपयोग केला जातो. यावरून असे

–8	–7	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7	8

लक्षात येते की ऋण (negative) चिन्ह असलेली संख्या शून्यापेक्षा कमी असते. यांना ऋण असे म्हणतात.

हे करा

(कोण कुठे आहे)

एक ठिकाण शून्य या स्थानाने निश्चित करा. असे समजा की या ठिकाणापासून चालण्याचा प्रारंभ करतात. असे समजा की शून्यापासून उजवीकडे किती पावले चालले की '+' या चिन्हाने दाखविले जाते. व शून्यापासून डावीकडे चाललेल्या पावलांसाठी '-' चिन्हाने दाखविले जाते. जर मोहन शून्यापासून उजवीकडे 5 पावले चालला तर ते +5 याने दाखविले जाते व जर डेविड शून्यापासून डावीकडे 5 पावले चालला तर ते -5 याने दाखविले जाऊ शकते. आता खालील बाबी + अथवा - या चिन्हाने दाखवा.

a) शून्याच्या डावीकडे 8 पावले

b) शून्याच्या उजवीकडे 7 पावले

c) शून्याच्या उजवीकडे 11 पावले

d) शून्याच्या डावीकडे 6 पावले

हे करा

(माझ्या मागे कोण येते आहे?)

मागील उदाहरणात आपण पाहिले की आपल्याला धन संख्यांच्या बरोबर जावयाचे असेल तर शून्याच्या उजवीकडे जाणार आहोत. जर याप्रकारे केवळ एक पाऊल चालले तर आपल्याला त्या

–8	–7	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7	8

संख्येच्या पुढील संख्या (अनुवर्ती संख्या) (Successor) मिळते.

खालील संख्यांच्या (Successor) अनुवर्ती संख्या लिहा :

संख्या	अनुवर्ती संख्या
10	
8	
-5	
-3	
0	

जर आपणास ऋण संख्यबरोबर जावयाचे असेल तर आपल्याला डाव्या बाजूस जावे लागेल.

जर आपण डाव्या बाजूने एक पाऊल गेलो तर आपल्याला त्या संख्येच्या आधीची संख्या (Predecessor) मिळेल.

–8	–7	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7	8

खालील संख्यांच्या आधीची (Predecessor) संख्या लिहा

संख्या	आधीची संख्या
10	
8	
5	
3	
0	

6.1.1 मला चिन्हाने दाखवा.

आपण असे पाहिले की काही बाबतीत संख्यांच्या पूर्वी ऋण (-) चिन्ह लागते. उदा. जर आपण रोनाल्डने दुकानदाराला द्यावयाची रक्कम दाखवायचे ठरविले तर आपण – लिहू.

खाली एका दुकानदाराचे वहीतील पान दाखविलेले आहे. त्यात काही वस्तूंची विक्री करून त्याला नफा झाला की तोटा हे दाखविले आहे.

वस्तूचे नाव	नफा	तोटा	योग्य चिन्हाद्वारे स्पष्टीकरण
सरसूचे तेल	₹ 150		....
तांदूळ		₹ 250	....
मिरची	₹ 225		....
गहू	₹ 200		....
शेंगदाणा तेल		₹ 330	....

नफा आणि तोटा या एकमेकांच्या विरुद्ध स्थिती आहेत. जर नफा हा '+' चिन्हाने दाखविला जातो तर तोटा '–' या चिन्हाने दाखवला जातो. वरील खाते उताऱ्यात योग्य चिन्हांनी रिकाम्या जागा भरा.

जिथे आपण चिन्हांचा उपयोग करतो अशा आणखी काही बाबी खाली दिल्या आहेत.

जसजसे आपण खाली जातो तसतशी उंची कमी होत जाते. याप्रमाणे समुद्र सपाटीपासूनची वरची उंची धन जिन्हाने दाखवू शकतो.

जर मिळवलेली रक्कम धन '+' चिन्हाने दाखविली जाते तर खर्च केलेली रक्कम ऋण '–' चिन्हाने दाखवावी लागेल. याप्रमाणे 0°C च्यावरील तापमान '+' चिन्हाने व 0°C खालील तापमान '–' दाखविता येईल.

उदाहरणार्थ 0° C च्या खाली 10° म्हणजे – 10°C असे लिहितात.

प्रयत्न करा

खालील गोष्टी योग्य चिन्हांच्या साहाय्याने लिहा :

(a) समुद्रसपाटीपासून 100 मी खाली.

(b) $0°C$ च्या $25°C$ वर तापमान.

(c) $0°C$ च्या $15°C$ खाली तापमान.

(d) 0 पेक्षा कमी कोणत्याही पाच संख्या.

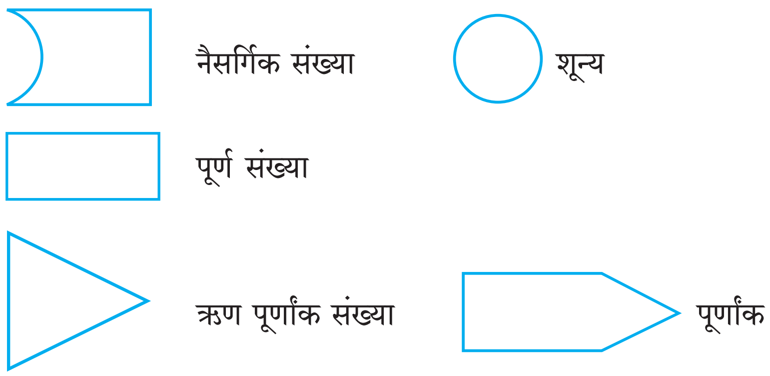
6.2 पूर्णांक

सर्वप्रथम माहीत असलेल्या नैसर्गिक संख्या 1, 2, 3, 4,... या आहेत. जर आपण नैसर्गिक संख्यांच्या गटात शून्याचा अंतर्भाव केला तर आपल्याला एक नवा गट मिळतो. या गटातील संख्यांना पूर्ण संख्या म्हणतात. याप्रमाणे 0, 1, 2, 3, 4,... या पूर्ण संख्या आहेत. या संख्यांचा आपण प्रकरण 2 मध्ये अभ्यास केला आहे. आता आपल्याला माहीत आहे की ऋण संख्या –1, –2, –3, –4, –5, ... अशाही असतात.जर आपण पूर्ण संख्या व या ऋण संख्या एकत्र केल्या तर एक गट मिळतो.

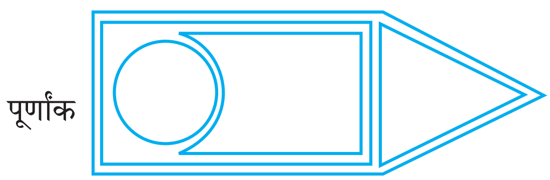
हा गट 1, 2, 3, ..., –1, –2, –3, –4, ... असा आहे.

या गटात 1, 2, 3, ... या धन पूर्णांक व –1, –2, –3, ... यांना ऋण पूर्णांक संख्या म्हणतात.

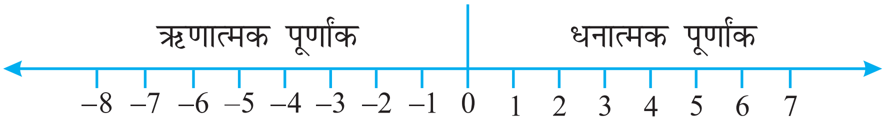
हे आपण आकृतीच्या साहाय्याने पाहू. आकृतीसमोर लिहिल्याप्रमाणे या आकृत्या संख्यांचा संग्रह दाखवितात असे मानू...



पूर्णांक हे खालील आकृतीद्वारा दाखविता येईल. यामध्ये या आधीच्या सर्व संख्यांचे संग्रह आहेत.



6.2.1 संख्या रेषेवर पूर्णांक दाखविणे



एक रेषा काढून त्यावर वरील आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे समान अंतरावर काही बिंदू घ्या. या बिंदूंपैकी एका बिंदूला '0' म्हणून घ्या शून्याच्या उजव्या बाजूला धन पूर्णांक +1, +2, +3 इ. या फक्त 1, 2, 3 ..... याप्रमाणे दाखविले आहेत. शून्याच्या डाव्या बाजूला ऋण पूर्णांक आहेत ते –1, –2, –3... असे दाखविले आहेत.

या आकृतीत –6 दाखविण्यासाठी आपल्याला शून्याच्या डाव्या बाजूला –6 बिंदू (पावले) जावे लागेल. (आकृती 6.1)

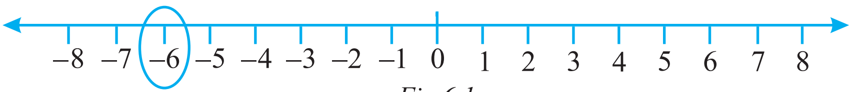


Fig 6.1

या रेषेवर +2 दाखविण्यासाठी आपल्याला शून्याच्या उजवीकडे 2 बिंदू (पावले) जावे लागेल. (आकृति 6.2)

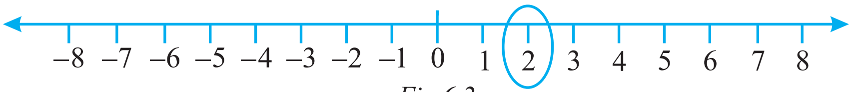


Fig 6.2

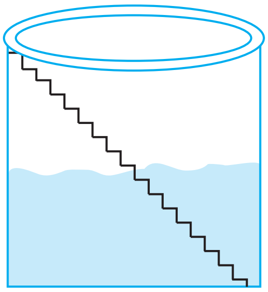
प्रयत्न करा

संख्या रेषेवर – 3, –7, – 4, – 8, – 1 आणि – 3 दाखवा.

6.2.2 पूर्णांकातील क्रम

रमण व इमरान एका गावात राहतात. तेथे पायऱ्या असलेली विहीर आहे. या विहिरीत तळापर्यंत एकूण 25 पायऱ्या आहेत.

एक दिवस रमण व इमरान विहीरीच्या आत उतरले व त्यांच्या लक्षात आले की पाणी खालून आठव्या पायरीपर्यंत आहे. त्यांनी हे पाहण्याचा निर्णय घेतला की पाऊस पडल्यावर विहीरीत किती पाणी येईल? त्यांनी आता असलेल्या पाण्याची पातळी शून्यने दाखविली व त्यावरील पायऱ्यांवर अनुक्रमे 1,2,3,4,.... लिहिले. पावसानंतर त्यानी पाहिले की पाण्याची पातळी 6व्या पायरी पर्यंत वाढली आहे. काही महिन्यानंतर त्यांनी पाहिले की पाण्याची पातळी शून्याच्या खाली तीन पायऱ्या गेली आहे. पाण्याची पातळी खाली गेलेल्या लगतच्या पायऱ्यांना क्रमांक देण्याचा ते विचार करू लागले. आपण त्यांना काही मदत करू शकतो का?

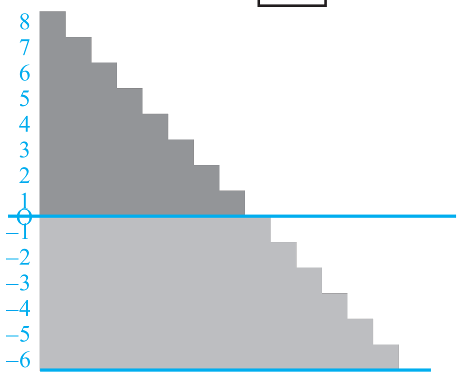


एकाएकी रमणला एका मोठ्या पाण्याच्या बांधावरती शून्याच्या खाली लिहिलेल्या संख्या आठवल्या. इमरान असे म्हणतो की शून्याच्या वरील व खालील संख्या या मधील फरक दाखवण्यासाठी काहीतरी पद्धत असली पाहिजे. तेव्हा रमणला आठवते की शून्याच्या खाली असलेल्या संख्यांना ऋण चिन्ह होते. यासाठी त्यांनी शून्याखालील पायरीला −1 अंक दिला. शून्याच्या खालील दुसऱ्या पायरीला −2 अंक दिला.

म्हणजे आता पाण्याची पातळी −3 आहे. (शून्याच्या खाली तीन पायऱ्या) या नंतर पाण्याचा उपयोग झाल्याने पाण्याची पातळी आणखी एक पायरी खाली जाते व −4 होते. आपण पहात असाल की −4 < −3 आहे.

वरील उदाहरण पाहून खालील रिकाम्या चौकटी > अथवा < चिन्हांचा उपयोग करुन भरा.

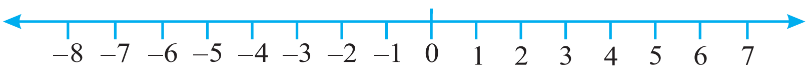
0 $\boxed{}$ – 1   – 100 $\boxed{}$ – 101



– 50 $\boxed{}$ −70   50 $\boxed{}$ – 51

– 53 $\boxed{}$ −5   – 7 $\boxed{}$ −1

पुन्हा एकदा पूर्णांक हे संख्यारेषेवर दाखविलेले पाहू.



आकृति 6.3

आपल्याला माहीत आहे की 7 > 4 आहे आणि संख्या रेषेवर संख्या 7 ही 4च्या उजवीकडे आहे.

याप्रमाणे 4 > 0 आणि 4 ही संख्या '0' च्या उजवीकडे आहे. आता 0 ही संख्या −3 च्या उजवीकडे आहे म्हणून 0 > −3 आहे. पुन्हा संख्या −3 ही −8 च्या उजवीकडे आहे म्हणून 3 > −8 आहे.

यांप्रमाणे आपण पाहतो की संख्यारेषेवर जेव्हा आपण उजवीकडे जातो तेव्हा संख्यांची किंमत वाढत जाते व जेव्हा आपण डावीकडे जातो तेव्हा संख्यांची किंमत कमी होत जाते

म्हणून $-3 < -2, -2 < -1, -1 < 0, 0 < 1, 1 < 2, 2 < 3$

म्हणून पूर्णांकांच्या संख्येचा गट...., $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$...., असा लिहिला जातो.

प्रयत्न करा

खालील संख्यांच्या जोडी मध्ये तुलना करून < अथवा > या चिन्हांचा उपयोग करा.

0 $\square$ - 8 ; - 1 $\square$ – 15

5 $\square$ - 5 ; 11 $\square$ 15

0 $\square$ 6 ; - 20 $\square$ 2

वरील तुलना पाहून रोहिणी खालील निष्कर्ष काढते.

(a) कोणताही धन पूर्णांक ऋण पूर्णांकापेक्षा मोठा असतो.

(b) शून्य धन पूर्णांकापेक्षा लहान असतो.

(c) शून्य ऋण पूर्णांकापेक्षा मोठा असतो.

(d) शून्य हा धन पूर्णांकही नाही व ऋण पूर्णांकही नाही.

(e) संख्यारेषेवर कोणतीही संख्या शून्याच्या उजवीकडे जितक्या लांब अंतरावर असेल तितकी मोठी असते.

(f) संख्यारेषेवर कोणतीही संख्या शून्याच्या डावीकडे जितक्या लांब अंतरावर असते तितकी लहान असते.

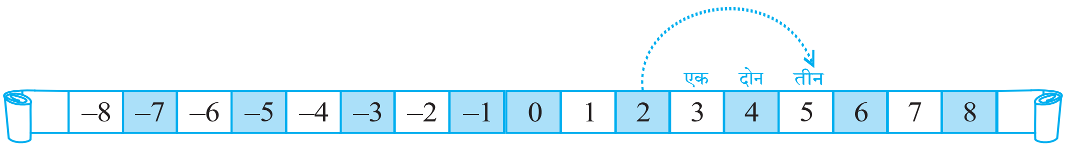
आपण याच्याशी सहमत आहात का? उदाहरण द्या.

उदाहरण 1 : संख्यारेषा पाहून खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या. -8 व -2 यांमध्ये कोणत्या पूर्णांक संख्या येतात. यामधील कोणती संख्या सर्वात मोठी व कोणती संख्या सर्वात लहान आहे?

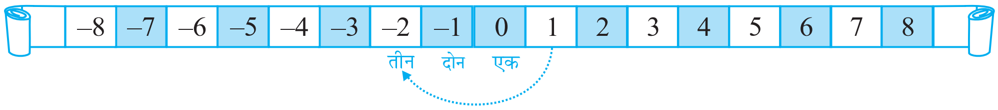
उत्तर : -8 व -2 यामध्ये येणाऱ्या पूर्णांक संख्या -7, -6, -5, -4 आणि -3 या आहेत. यातील -3 ही सर्वात मोठी व -7 ही सर्वात लहान संख्या आहे.

जर मी शून्यावर नसेन तर माझ्या चालण्याने काय होईल?

सलमा आणि रुचिका खेळत असलेल्या पहिल्या खेळाचा विचार करू. रुचिकाचा बिल्ला (टोकन) 2वर आहे. तिला पिशवीतून लाल फासा मिळतो व तो फेकल्यावर 3 संख्येचे दान पडते. याचा अर्थ ती 2 च्या उजवीकडे 3 घरे जाईल व त्याप्रमाणे ती 5 वर येईल.



आता जर सलमाचा बिल्ला 1 वर आहे व तिला पिशवीतून निळा फासा मिळतो. फासा फेकल्यावर तिला 3 चे दान पडते. याचा अर्थ ती 1 च्या डावीकडे 3 घरे जाईल. याप्रमाणे ती –2 वर पोहोचेल.
संख्या रेषा पाहून खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या.



उदाहरण 2 : (a) –3 वर एक बिल्ला आहे. –9 वर जाण्यासाठी कोणत्या दिशेने व किती पावले जावे लागेल?

(b) आपण जर –6 पासून उजवीकडे 4 पावले चाललो तर कोणत्या संख्येवर पोहोचू?

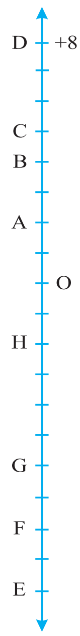
उत्तर : (a) आपल्याला –3च्या डावीकडे 6 पावले जावे लागेल.

(b) आपण –2 वर जाऊन पाहोचू.

(c) जर आपण – 6 च्या डावीकडे 4 पावले गेलो तर आपण – 2 वर पोहोचू.

उदाहरणसंग्रह 6.1

1. खालील गोष्टींचे विरुद्धार्थी लिहा.
   (a) वजनात वाढ (b) उत्तरेला 30 किमी
   (c) इसवीसन पूर्व 326 (d) 700 रु चा तोटा
   (e) समुद्रसपाटीपासून 100 मी उंच.
2. खालील वाक्यातील संख्यांच्या बाबतीत त्यांच्या संदर्भावरून योग्य चिन्ह वापरून पूर्णांकाच्या रूपात लिहा.
   (a) एक विमान जमिनीपासून दोन हजार मीटर उंचीवरून उडत आहे.
   (b) एक पाणबुडी समुद्रसपाटीपासून आठशे मीटर खोलीवरून चालली आहे.
   (c) खात्यामध्ये 200 रुपये जमा करा.
   (d) खात्यामधून 800 रुपये काढले.
3. खालील संख्या संख्यारेषेवर दाखवा.
   (a) +5 (b) –10 (c) +8 (d) –1 (e) –6
4. शेजारील आकृतीमध्ये एक उभी संख्यारेषा आहे. त्यावर पूर्णांक दाखविले आहेत. ती रेषा पाहा व खालील बिंदूंचे स्थान पाहीत करा.
   (a) D हा बिंदू –8 पूर्णांक आहे तर +8 हा कोणता बिंदू आहे.
   (b) G हा ऋण पूर्णांक आहे की धन पूर्णांक?
   (c) B आणि E च्या लगतचे पूर्णांक लिहा.
   (d) या संख्यारेषेवर दाखविलेल्या बिंदूंपैकी कोणाची किंमत सगळ्यात कमी आहे?
   (e) सर्व बिंदू त्यांच्या किमतीप्रमाणे उतरत्या क्रमाने लिहा.

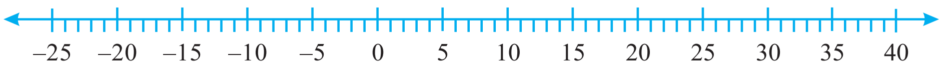


5. वर्षातील एका दिवसाचे भारतातील 5 ठिकाणांचे तापमान खाली दिले आहे.

ठिकाण	**तापमान**	
सियाचिन	0^0 च्या खाली 10^0 C	....
सिमला	0^0 च्या खाली 2^0 C	....
अहमदाबाद	0^0 च्या वर 30^0 C	....
दिल्ली	0^0 च्या वर 20^0 C	....
श्रीनगर	0^0 च्या खाली 5^0 C	....

(a) या ठिकाणांचे तापमान पूर्णांकांच्या स्वरूपात रिकाम्या जागी लिहा.

(b) खालील संख्यारेषा तापमान – डिग्री सेल्सिअसमध्ये दाखविते.



वरील ठिकाणांची नावे त्यांच्या तापमानाप्रमाणे या संख्यारेषेवर दाखवा.

(c) कोणते ठिकाण सर्वात अधिक थंड आहे.

(d) ज्यांचे तापमान 10^0 C च्या वर आहे अशा ठिकाणांची नावे लिहा.

6. खालील संख्यांच्या जोडीमधील कोणती संख्या संख्यारेषेवर दुसऱ्या संख्येच्या उजवीकडे आहे?

(a) 2,9 (b)) –3, –8 (c) 0, –1 (d) –11, 10 (e) –6, 6 (f) 1, –100

7. खालील संख्येच्या जोडीच्या मधे येणारे सर्व पूर्णांक लिहा. (वाढत जाणाऱ्या क्रमाने.)

(a) 0 आणि –7 (b) –4 आणिा 4 (c) –8 आणि –15 (d) –30 आणि –23

8. (a) –20 पेक्षा मोठे चार ऋण पूर्णांक लिहा.

(b) –10 पेक्षा लहान चार ऋण पूर्णांक लिहा.

9. खालील विधाने सत्य की असत्य ते लिहा. जर असत्य असतील तर सत्य होईल असे लिहा.

(a) संख्या रेषेवर –8, –10 च्या उजव्या बाजूस आहे.

(b) संख्या रेषेवर –100, –50 च्या उजव्या बाजूस आहे.

(c) सर्वात लहान ऋण पूर्णांक –1 आहे.

(d) –26 हा पूर्णांक –25 पेक्षा मोठा आहे.

10. एक संख्या रेषा काढा. आणि खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

(a) जर आपण –2 च्या उजवीकडे 4 पावले चाललो तर आपण कोणत्या संख्येपाशी जाऊन पाहोचू.

(b) जर आपण 1च्या डावीकडे 5 पावले गेलो तर आपण कोणत्या संख्येपाशी पाहोचू?

(c) जर आपण संख्यारेषेवर –8 वर आहोत तर –13 वर पोहोचण्यासाठी आपल्याला कोणत्या दिशेस जावयास लागेल?

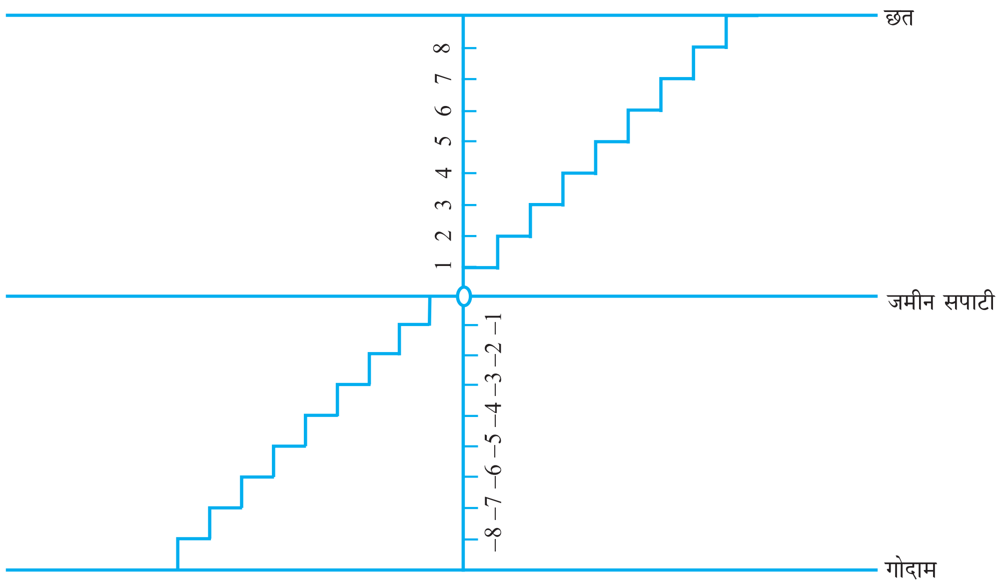
(d) जर आपण संख्यारेषेवर –6 वर आहोत तर –1 वर पोहोचण्यासाठी आपल्याला कोणत्या दिशेस जावयास लागेल?

6.3 पूर्णांकावरील क्रिया

हे करा

(वर अथवा खाली जाणे.)

मोहनच्या घरात घराच्या छतावर जाण्यासाठी आणि खाली गोदामात जाण्यासाठी जिने तयार केले आहेत. आपण जमिनीलगतच्या सपाटीस शून्य मानू. छतावर जाण्यासाठीच्या पायऱ्यांना घन पूर्णांक मानू आणि खाली जाणाऱ्या पायऱ्यांना ऋण पूर्णांक मानू.



खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या व आपली उत्तरे पूर्णांकामध्ये लिहा.

(a) जमिनीपासून 6 पायऱ्या वर चढा.

(b) जमिनीपासून 4 पायऱ्या खाली उतरा.

(c) जमिनीपासून 5 पायऱ्या वर चढा आणि तेथून 3 पायऱ्या आणखी वर चढा.

(d) जमिनीपासून 6 पायऱ्या खाली उतरा व तेथून आणखी 2 पायऱ्या खाली उतरा.

(e) जमिनीपासून 5 पायऱ्या खाली उतरा व तेथून 12 पायऱ्या वर चढा.

(f) जमिनीपासून 8 पायऱ्या खाली उतरा व तेथून 5 पायऱ्या वर चढा.

(g) जमिनीपासून 7 पायऱ्या वर चढा व तेथून 10 पायऱ्या खाली उतरा.

अमिनाने हे खालीलप्रमाणे लिहिले.

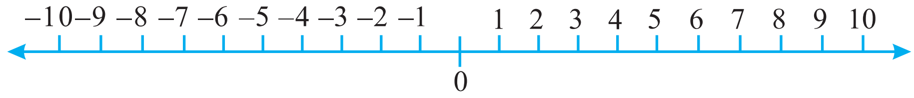
(a) $+6$ (b) -4 (c) $(+3) + (+5) = +8$ (d) $(-6) + (-2) = -4$

(e) $(-5) + (+12) = 7$ (f) $(-8) + (+5) = -3$ (g) $(+7) + (-10) =$

या उत्तरांमध्ये काही चुका आहेत. तुम्हाला ही उत्तरे तपासून बरोबर करता येतील का?

प्रयत्न करा

जमिनीवर संख्यारेषेप्रमाणे एक आकृती काढा. वरील उदाहरणात दिलेल्या प्रश्नांप्रमाणे काही प्रश्न तयार करा आणि मग ते आपल्या मित्रांना सोडवण्यास द्या.



एक खेळ

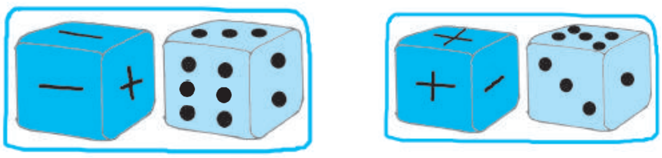
ज्या पट्टीवर +25 पासून –25 पर्यंत पूर्णांक लिहिले आहेत. ती पट्टी घ्या.

–7	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7

दोन फासे घ्या एका फाशावर 1 ते 6 पर्यंतच्या संख्या लिहा. व दुसऱ्या फाशावर तीन '+' चिन्ह व तीन '–' चिन्ह असतील असे पाहा.

प्रत्येक खेळाडूला वेगवेगळ्या रंगाची बटणे (बिल्ले) द्या. प्रत्येक खेळाडू संख्यापट्टीवर शून्यावर बटणे ठेवतील. दोन्ही फासे फेकल्यावर खेळाडू त्या फाशांवर काय मिळाले ते पाहील. जर पहिल्या फाशावर 3 आणि दुसऱ्या फाशावर – आले तर याचा अर्थ –3 मिळाले असा होईल. पहिल्या फाशावर 5 आले आणिा दुसऱ्या फाशावर + आले तर आपण +5 मिळाले असा अर्थ होईल.

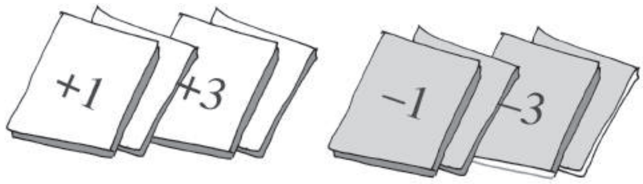
– 3 + 5



जेव्हा एखाद्या खेळाडूला + चिन्ह मिळते तेव्हा तो पुढील बाजूस (+25च्या बाजूला) व – चिन्ह मिळते तेव्हा तो विरुद्ध बाजूस (–25 च्या बाजूला) जाईल.

प्रत्येक खेळाडू दोन फासे एका वेळेस फेकतो. ज्या खेळाडूचे बटण –25 वर जाते तो खेळातून बाद होतो व ज्या खेळाडूचे बटण +25 वर जाते तो जिंकतो. फाशांऐवजी आपण 12 पत्त्यांच्या आकाराची कार्डे घेऊन त्यावर +1, +2, +3, +4, +5, +6 आणि –1, –2, –3, –4, –5, –6 असे लिहून व कार्ड पिसून एक कार्ड काढू शकतो.

कमला, रेशमा आणि मीनू हा खेळ खेळत आहेत.

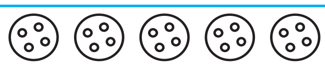
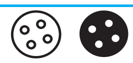


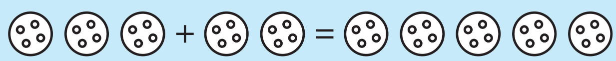
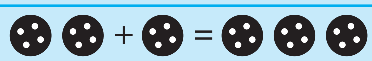
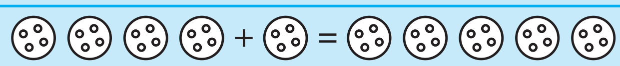
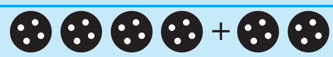
कमलाला तीन लागोपाठच्या प्रयत्नांत +3, +2, +6 मिळाले. तिने आपला बिल्ला +11 वर ठेवला. रेशमाने −5 +3 आणि −1 मिळाले. तिने आपला बिल्ला −3 वर ठेवला. मीनूला तीन प्रयत्नांत +4, −3 आणि −2 मिळाले. तिचा बिल्ला −1 अथवा +1 यापैकी कोठे ठेवला जाईल?

हे करा

दोन वेगवेगळ्या रंगांची पांढरी व काळी बटणे घ्या एक पांढरे बटण म्हणजे +1 आणि एक काळे बटण म्हणजे −1 समजा. एक पांढरे बटण व एक काळे बटण मिळून शून्य होईल. [1 + (−1) = 0]

खालील कोष्टकात काही पूर्णांक बटणांच्या साहाय्याने दाखविले आहेत.

रंगीत बटन	पूर्णांक
	= 5
	= − 3
	= 0

	$(+3) + (+2) = +5$
	$(-2) + (-1) = -3$
	....
 = ...	....

या रंगीत बटनांच्या मदतीने पूर्णांकांची बेरीज करा. खालील सारणी पूर्ण करा.
जेव्हा आपल्याकडे दोन धन पूर्णांक असतील तर त्यांची बेरीज करा. जसे (+3) + (+2) = +5 [= 3+2] जर दोन ऋण पूर्णांक असतील तरीही त्यांची बेरीज करा. पण बेरजेला वजा चिन्ह द्या. जसे (−2) + (−1) = −3

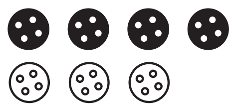
प्रयत्न करा

खालील क्रिया करा.

(a) (−11) + (−12) (b) (+10) + (+4)
(c) (−32) + (−25) (d) (+33) + (+40)

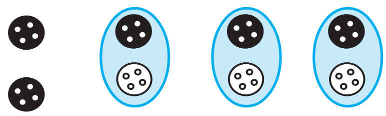
आता या बटणांच्या साहाय्याने एक धन पूर्णांक व एक ऋण पूर्णांक यांच्या बेरजा करा. एक पांढरे बटण व एक काळे बटण यांना जोडीने बाजूला करा. [कारण $(+1) + (-1) = 0$]. उरलेली बटणे मोजा.

(a) $(-4) + (+3)$

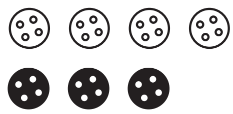


$= (-1) + (-3) + (+3)$

$= (-1) + 0 = -1$

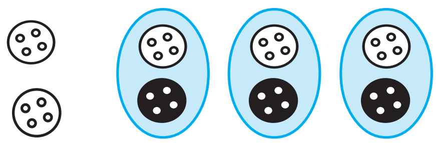


(b) $(+4) + (-3)$



$= (+1) + (+3) + (-3)$

$= (+1) + 0 = +1$



आपण पाहू शकतो की $4-3$ चे उत्तर 1 आहे आणि $-4 + 3 = -1$ आहे.

म्हणजेच आपल्याला जेव्हा एक ऋण पूर्णांक व एक धन पूर्णांक यांची बेरीज करावयाची असेल तेव्हा या पूर्णांकांचे संख्यात्मक मूल्य पहावे लागेल. (दोन्हींमधील मोठी संख्या कोणती ते पाहण्यासाठी + व – या चिन्हांचा विचार सोडावा लागेल.) खाली काही उदाहरणे दिली आहेत.

(c) $(+5) + (-8) = (+5) + (-5) + (-3) = 0 + (-3) = -3$

(d) $(+6) + (-4) = (+2) + (+4) + (-4) = (+2) + 0 = +2$

प्रयत्न करा

खालील प्रत्येक क्रिया करा.

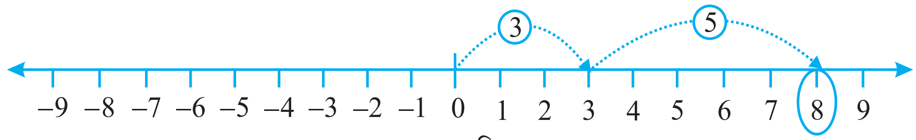
(a) $(-7) + (+8)$ (b) $(-9) + (+13)$

(c) $(+7) + (-10)$ (d) $(+12) + (-7)$

6.3.1 संख्यारेषेवर पूर्णांकांची बेरीज

वेगवेगळ्या बटणांच्या साहाय्याने पूर्णांकांची बेरीज करणे प्रत्येक वेळी सोपे जाते असे नाही. बेरजेसाठी आपण संख्यारेषेचा वापर करायला हवा का?

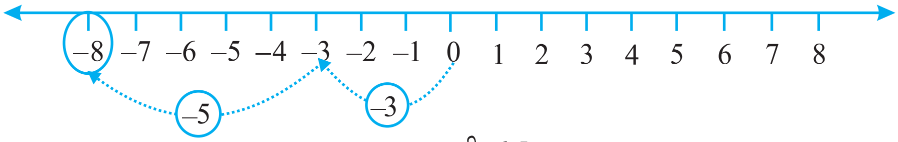
(i) संख्यारेषेवर 3 आणि 5ची बेरीज करू



आकृति 6.4

संख्यारेषेवर आपण शून्यापासून 3 पावले उजवीकडे जाऊ आपण 3 वर पोहोचतो. आता 3 पासून 5 पावले उजवीकडे जाऊ आपण 8 वर पोहोचतो. (आकृती 6.4) याप्रमाणे 3+5 = 8 मिळतात.

(ii) संख्यारेषेवर –3 आणि –5 यांची बेरीज करू.



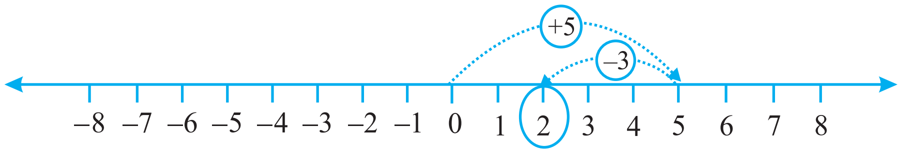
आकृती 6.5

संख्यारेषेवर आपण 0 पासून सुरुवात करून 3 पावले डावीकडे जाऊ व –3 वर पोहोचल्यावर 5 पावले आणखी डावीकडे जाऊ.(आकृती 6.5)

याप्रमाणे (–3) + (–5) = –8 मिळतात.

आपण पाहिले की आपण दोन ऋण पूर्णांकांची बेरीज केली तर एक ऋण पूर्णांक मिळतो.

(iii) आपल्याला संख्यारेषेवर (+5) आणि (–3) यांची बेरीज करावयाची आहे.

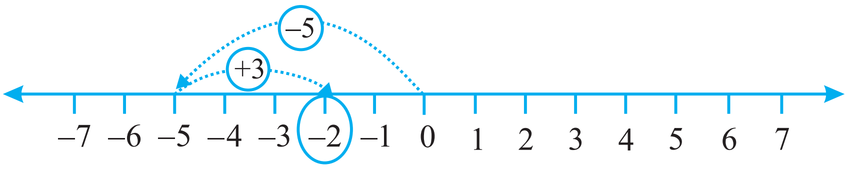


आकृती 6.6

पहिल्यांदा शून्यापासून सुरुवात करून आपण 5 पावले उजवीकडे जाऊ व 5 वर पोहोचू. नंतर 5 पासून 3 पावले डावीकडे जाऊ व आपण 2 वर पोहोचू. (आकृती 6.6)

याप्रमाणे (+5) + (–3) = 2 येते.

(iv) याप्रमाणे आपण संख्यारेषेवर (–5) आणि +3 यांची बेरीज करू.



आकृती 6.7

आपण 0 पासून सुरुवात करून डावीकडे 5 पावले जाऊ व −5 वर पोहोचतो. नंतर −5 पासून 3 पावले उजवीकडे जाऊ. आपण −2 वर पोहोचतो.

याप्रमाणे (−5) + (+3) = −2 येते. (आकृती 6.7)

जर कोणत्याही पूर्णांकात एक धन पूर्णांक मिळविला तर येणारा पूर्णांक दिलेल्या पूर्णांकापेक्षा मोठा असतो व कोणत्याही पूर्णांकात एक ऋण पूर्णांक मिळविला तर येणारा पूर्णांक हा दिलेल्या पूर्णांकापेक्षा लहान असतो.

प्रयत्न करा

1. संख्यारेषेचा उपयोग करून खालील क्रिया करा.

   (a) (−2) + 6 (b) −6 +2

   अशाच दोन बेरजा तयार करा व संख्यारेषेच्या साहाय्याने त्या सोडवा.

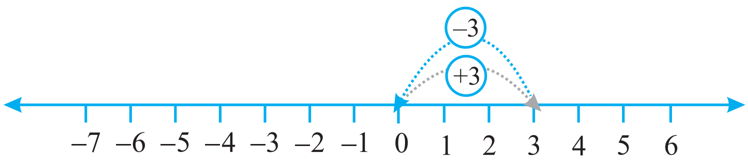
2. संख्यारेषेचा उपयोग करून खालील बेरजा करा.

   (a) (+7) + (−11) (b) (−13) + (+10)

   (c) (−7) + (+9) (d) (+10) + (−5)

असे 5 प्रश्न तयार करा व त्या बेरजा काढा

चला 3 आणि −3 यांची बेरीज करू. 0 पासून सुरुवात करून प्रथम 3 पावले उजवीकडे जाऊ. +3 वर पोहोचल्यावर 3 पावले डावीकडे जाऊ. आपण कोठे पोहोचतो?



आकृती 6.8

आकृती 6.8मध्ये आपण पाहू शकतो की आपण 0 वर पोहोचलो आहोत. म्हणजेच 3 + (−3) = 0 आहे. याप्रमाणे आपण +2 व −2 यांची बेरीज केली तर 0 मिळेल. याप्रमाणे संख्यांच्या जोडीत +3, −3 अथवा +2, −2 यांच्या बेरजा केल्यास 0 मिळेल. अशा संख्यांना दुसरीचा बेरीज व्यस्त (Additive inverse) म्हणतात.

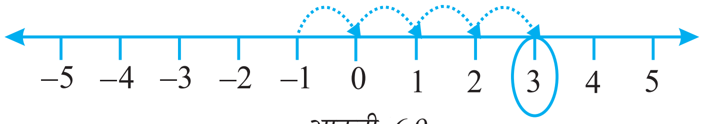
0 चा बेरीज व्यस्त काय आहे? −7 चा बेरीज व्यस्त काय?

उदाहरण 3 : संख्यारेषेचा उपयोग करून पूर्णांक लिहा.

(a) जो −1 पेक्षा 4 ने अधिक (मोठा) आहे.

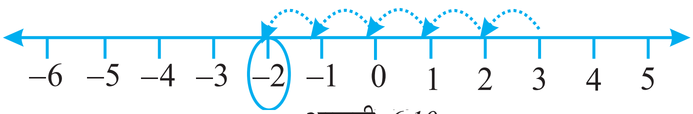
(b) जो 3 पेक्षा 5 ने कमी आहे.

उत्तर : (a) आपल्याला −1 पेक्षा 4ने अधिक असा पूर्णांक हवा आहे. आपण −1 पासून सुरुवात करू आणि 4 पावले उजवीकडे जाऊ. आपण 3 वर जाऊन पोहोचू आकृती 6.9 मध्ये पाहा. म्हणून −1 पेक्षा 4 ने अधिक पूर्णांक 3 आहे.



आकृती 6.9

(b) आपल्याला 3 पेक्षा 5 ने कमी पूर्णांक हवा आहे. आपण 3 ने सुरुवात करू व 3 पासून 5 पावले डावीकडे जाऊ. याप्रमाणे आपण –2 वर पोहोचू. आकृती 3.10 पाहा.



आकृती 6.10

म्हणून 3 पेक्षा 5 ने कमी असलेला पूर्णांक –2 आहे.

उदारहण 4 : (–9) + (+4) + (–6) + (+3) ही बेरीज काढा.

उत्तर : आपण धन संख्या एकत्र व ऋण संख्या एकत्र अशी पुन: मांडणी करू.

(–9) + (+4) + (–6) + (+3)

= (–9) + (–6) + (+4) + (+3) = (–15) + (+7)

= –8 + (–7) + (+7) = 8 + 0 = –8

उदारहण 5 : (30) + (–23) + (–63) + (+55) किंमत काढा.

उत्तर : 30 + (+55) + (–23) + (–63)

= 85 + (–86) = –1

उदारहण 6 : (–10), (92), (84) आणि (–5) यांची बेरीज करा.

उत्तर : (–10) + (92) + (84) + (–15)

= (–10) + (–15) + (92) + 84

= (–25) + 196 = 151

उदाहरणसंग्रह 6.2

1. **संख्यारेषेचा उपयोग करून पूर्णांक काढा.**
   (a) 5 पेक्षा 3 ने अधिक　　(b) –5 पेक्षा 3 ने अधिक
   (c) 2 पेक्षा 6 ने कमी　　(d) –2 पेक्षा 3 ने कमी

2. **संख्यारेषेचा उपयोग करून बेरीज करा.**
   (a) 9 + (–6)　　(b) 5 + (–11)
   (c) (–1) + (–7)　　(d) –5 + 10
   (e) (–1) + (–2) + (–3)　　(f) (–2) + 8 + (–4)

3. संख्या रेषेचा उपयोग न करता बेरजा करा.

(a) 11 + 4 (b) (–13) + (+18)

(c) (–10) + (+19) (d) (–250) + (+150)

(e) (–380) + (–270) (f) (–217) + (–100)

4. खालील बेरजा करा.

(a) 137 व –354 (b) –52 आणि 52

(c) –312, 39 व 192 (d) –50, –200 व 300

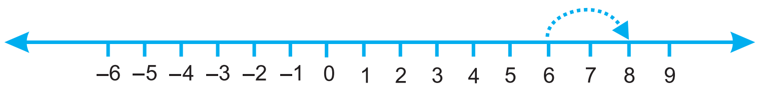
5. खालील किमती काढा.

(a) (–7) + (–9) + 4 +16

(b) (37) + (–2) + (–65) + (–8)

6.4 संख्यारेषेच्या साहाय्याने पूर्णांकांची वजाबाकी

आपण संख्यारेषेवर दोन पूर्णांकांची बेरीज पाहिली आहे. उदा. 6+2 पाहा. आपण 6 वरून सुरुवात करतो आणि 2 पावले उजवीकडे जातो. आपण 8 वर पोहोचतो. म्हणून 6+2 = 8 आहेत. (आकृती 6.11)



आकृती 6.11

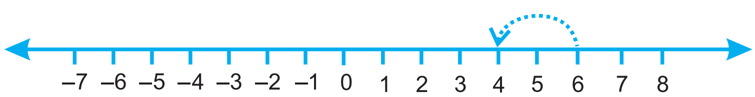
आपण हे देखील पाहिले की संख्यारेषेवर 6 आणि (–2) यांची बेरीज करण्यासाठी आपण 6 ने सुरुवात करतो व 2 पावले. डावीकडे जातो. आपण 4 वर पोहोचतो. म्हणून आपल्याला 6 + (–2) = 4 मिळतात. (आकृती 6.12)

आकृती 6.12

याप्रमाणे धन पूर्णांकाची बेरीज करायला संख्यारेषेवर उजवीकडे जाऊ व ऋण पूर्णांकाची बेरीज करायला संख्यारेषेवर डावीकडे जाऊ.

पूर्ण संख्यांच्या बाबतीतही संख्या रेषेचा उपयोग करताना आपण 6 मधून 2 वजा करताना 2 पावले डावीकडे गेलो होतो. (आकृती 6.13)

म्हणून 6–2 =4 आहे.



आकृती 6.13

आपण 6 – (–2) साठी काय करू? संख्या रेषेवर आपण डाव्या बाजूला जाऊ की उजव्या बाजूला जाऊ?

जर आपण डाव्या बाजूला गेलो तर आपण 4 वर पोहोचू. मग आपल्याला म्हणावे लागेल की 6 – (–2) = 4 हे बरोबर नाही. आपल्याला माहीत आहे की 6–2 = 4 आहे. आणि 6 –2 = 6 – (–2) होत नाही. म्हणून आपल्याला उजव्या बाजूला जायला हवे. (आकृती 6.14)

आकृती 6.14

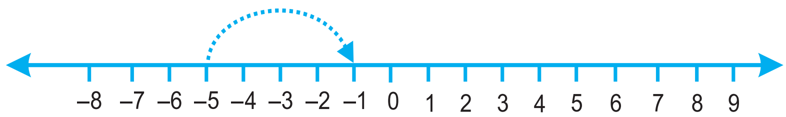
याचाच अर्थ असा की जेव्हा आपण एक ऋण पूर्णांक वजा करतो तेव्हा आपल्याला एक मोठा पूर्णांक मिळतो. याचाच दुसऱ्याप्रकारे विचार करा. –2 याचा बेरीज व्यस्त +2 आहे. याचाच अर्थ 6 मधून –2 वजा करावयाचे म्हणजे 6 मध्ये –2 चा बेरीज व्यस्त मिळवायचा.

म्हणून 6 – (–2) = 6 + 2

आता आपण –5 –(–4) संख्यारेषेच्या साहाय्याने काढू.

आपण असे म्हणू शकतो की हे –5 +4 च्या बरोबर आहे. कारण –4चा बेरीज व्यस्त 4 आहे. आपण संख्यारेषेवर –5 पासून सुरुवात करून 4 पावले उजवीकडे जाऊ : (आकृती 6.15.). आपण –1 वर पोहोचू.

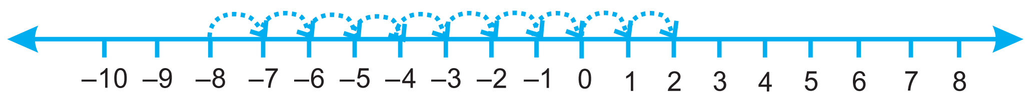
म्हणजेच –5 +4 = –1 आहे. याप्रमाणे –5 – (–4) = –1 होईल.



आकृती 6.15

उदाहरण 7 : संख्या रेषेचा उपयोग करून (–8) – (–10) याची किंमत काढा.

उत्तर : –10 चा बेरीज व्यस्त –10 आहे. म्हणून (–8) – (–10) = –8 + 10 आहे.



आकृति 6.16

संख्यारेषेवर आपण –8 पासून 10 पावले उजवीकडे जाऊ. आपण 2 वर पोहोचतो. (आकृती 6.16) म्हणून –8 – (–10) = 2 आहे. याप्रमाणे एका पूर्णांकातून दुसरा पूर्णांक वजा करताना आपण असे करू शकतो की वजा करावयाच्या पूर्णांकाचा बेरीज व्यस्त हा पहिल्या पूर्णांकात मिळवू. (बेरीज करू).

उदाहरण 8 : (–10) मधून –4 वजा करा.

उत्तर : (–10) – (–4) = (–10) + (–4 चा बेरीज व्यस्त)

= –10 + 4 = –6

उदाहरण 9 : -3 मधून $+3$ वजा करा.

उत्तर : $-3 - (+3) = (-3) + (+3$ चा बेरीज व्यस्त$)$

$= (-3) + (-3) = -6$

उदाहरणसंग्रह 6.3

1. **वजाबाकी करा.**

   (a) $35 - (-20)$ (b) $72 - (90)$

   (c) $(-15) - (-18)$ (d) $(-20) - (-13)$

   (e) $23 - (-12)$ (f) $(-32) - (-40)$

2. **रिकाम्या जागी >, <, = यापैकी योग्य चिन्ह लिहा.**

   (a) $(-3) + (-6)$.......................... $(-3) - (-6)$

   (b) $(-21) + (-10)$.......................... $(-31) - (-11)$

   (c) $45 - (-11)$.......................... $57 + (-4)$

   (d) $(-25) - (-42)$.......................... $(-42) - (-25)$

3. **रिकाम्या जागा भरा.**

   (a) $(-8) + \ldots\ldots = 0$ (b) $13 + \ldots\ldots = 0$

   (c) $12 + (-12) = \ldots\ldots$ (d) $(-4) + \ldots\ldots = -12$

   (e) $\ldots\ldots -15 = -10$

4. **खालील किमती काढा.**

   (a) $(-7) - 8 - (-25)$ (b) $(-13) + 32 - 8 - 1$

   (c) $(-7) + (-8) + (-190)$ (d) $50 - (40) - (-2)$

आपण काय चर्चा केली?

1. आपल्याला अनेक वेळा ऋण संख्यांची आवश्यकता असते. जेव्हा आपल्याला संख्यारेषेवर शून्यापेक्षा कमी म्हणजे शून्याखाली विचार करायचा असतो तेव्हा याची गरज असते यांना ऋण संख्या म्हणतात. याचा उपयोग आपल्याला तापमान, नदी अथवा तलावातील पाण्याची पातळी, आपले बँकेतील खाते, उधारी या संदर्भात होतो.

2. ...., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4,.... या संख्यांना पूर्णांक संख्या म्हणतात. -1, -2, -3, -4,..... या संख्या ऋण आहेत. यांना ऋण पूर्णांक म्हणतात. 1, 2, 3, 4,.... या संख्यांना धन पूर्णांक म्हणतात.

3. कोणत्याही संख्येत एक मिळविल्यास त्याची पुढची (अनुवर्ती) संख्या मिळते व एक वजा केल्यास त्याच्या आधीची संख्या मिळते.

4. आपण पाहिले की,

   (a) बेरजेच्या बाबतीत जर समान चिन्ह असेल तर बेरीज करून ते चिन्ह देतो.

      (i) दोन धन पूर्णांकांच्या बेरजेपासून एक धन पूर्णांक मिळतो

      [उदा.$(+3) + (+2) = +5$]

      (ii) दोन ऋण पूर्णांकांची बेरीज केली असता एक ऋण पूर्णांक मिळतो.

      [उदा.$(-2) + (-1) = -3$]

   (b) दोन भिन्न चिन्हांच्या संख्यांच्या बेरजेमध्ये वजाबाकी करून मोठ्या संख्येचे चिन्ह देतात.

   (दोन भिन्न चिन्हांच्या संख्येच्या बेरजेमध्ये चिन्हाशिवाय मोठ्या संख्येतून लहान संख्या वजा करून मोठ्या संख्येचे चिन्ह देतात.)

   (c) जेव्हा एक धनपूर्णांक व एक ऋण पूर्णांक यांची बेरीज असेल तेव्हा चिन्हाशिवायच्या मोठ्या संख्येतून लहान संख्या वजा करून मोठ्या संख्येचे चिन्ह देतात.

   [उदा : $(+4) + (-3) = +1$ आणि $(-4) + (+3) = +1$]

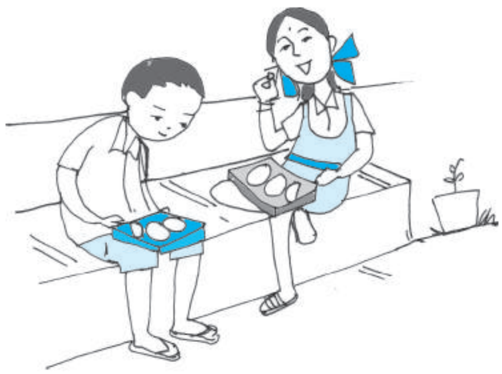
5. आपण पाहिले की पूर्णांकांची बेरीज अथवा वजाबाकी संख्या रेषेवर दाखविता येते.

अपूर्णांक

प्रकरण 7

7.1 प्रस्तावना

सुभाष इयत्ता IV व V वीमध्ये अपूर्णांक (Fractions) शिकला होता. परंतु याबाबतीत ते त्याला नीटसे समजले नव्हते. त्यामुळे जेव्हा वेळ मिळेल आणि संधी मिळेल तेथे तो त्याचा उपयोग करून बघत असे. एकदा तो आपला मधल्या सुट्टीतील खाण्याचा डबा विसरला. त्याची मैत्रीण फरीदाने त्याला डबा खायला बोलाविले. तिच्या डब्यात पाच पुऱ्या होत्या. म्हणून सुभाष आणि फरीदाने दोन-दोन पुऱ्या घेतल्या व पाचव्या पुरीचे फरीदाने बरोबर दोन भाग (अर्धे भाग) केले व तिने एक अर्धा भाग आणि सुभाषने एक अर्धा भाग घेतला. याप्रमाणे सुभाष व फरीदाने प्रत्येकी दोन पुऱ्या व एक अर्धी पुरी घेतली.

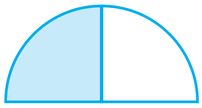


2 पुऱ्या + अर्धी पुरी – सुभाष 2 पुऱ्या + अर्धी पुरी – फरीदा

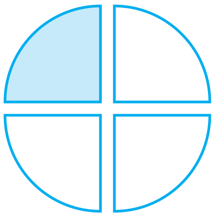
आपल्या दैनंदिन व्यवहारात कोणकोणत्या प्रसंगात अपूर्णांकांचा वापर करावा लागतो?

सुभाषला माहीत आहे की अर्धा हा $\frac{1}{2}$ असा लिहितात. पुरी खाताना त्याने अर्ध्या पुरीचे पुन्हा दोन भाग केले व फरीदाला विचारले. हा तुकडा पूर्ण पुरीचा कितवा भाग अथवा कोणता

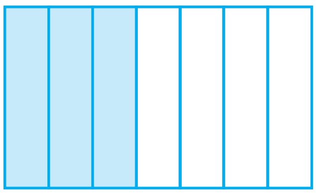
अपूर्णांक आहे. काहीही उत्तर न देता फरीदाने आपल्याकडील अर्ध्या पुरीचे दोन सारखे भाग करून सुभाषने केलेल्या भागांबरोबर ठेवले. ती म्हणाली की हे चारही भाग मिळून एक पूर्ण भाग होत आहे. प्रत्येक भाग हा पूर्ण पुरीचा एक चतुर्थांश (चवथा भाग) आहे व चार भाग मिळून $\frac{4}{4}$ अथवा 1 पूर्ण होईल. जेवत असताना त्यांनी आधी ते काय शिकले त्याची उजळणी केली. 4 समान भागांपैकी 3 भाग $\frac{3}{4}$ ने दाखवितात. याप्रमाणे जर आपण एका वस्तूचे 7 समान भाग करून त्यापैकी 3 घेतले तर ते म्हणजे $\frac{3}{7}$ मिळतात. (आकृती 7.3). $\frac{1}{8}$ म्हणजे आपण आठ समान भाग करून त्यापैकी एक घेतो. (आकृती 7.4)



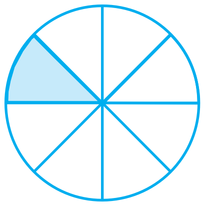
आकृती 7.1



आकृती 7.2



आकृती 7.3



आकृती 7.4

फरीदा म्हणाली अपूर्णांक म्हणजे अशी संख्या आहे की **जी एका पूर्ण वस्तूचा भाग दाखविते. पूर्ण म्हणजे एक पूर्ण वस्तू अगर वस्तूंचा समूह असतो. सुभाष म्हणाला की आपण जे भाग करू ते सर्व समान असले पाहिजेत.**

7.2 अपूर्णांक

पुन्हा एकदा अपूर्णांकांचा विचार करू.

अपूर्णांक म्हणजे एका समूहाचा अथवा एका वस्तूचा एक भाग. $\frac{5}{12}$ हा अपूर्णांक आहे. आपण हे 'पाच बारांश' असे वाचतो.

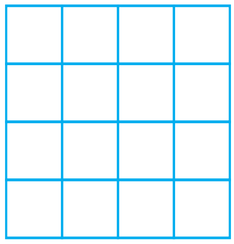
12 काय दाखवितो? ही समान भागांची संख्या आहे की ज्यांमध्ये पूर्ण वस्तूचे भाग केले आहेत.

5 काय दाखविते? ही संख्या 12 भागांपैकी किती भाग घेतले ती संख्या दाखविते.

येथे 5 ला **अंश (numerator)** आणि 12 ला **छेद (denominator)** असे म्हणतात.

$\frac{3}{7}$ मधील अंश सांगा. $\frac{4}{15}$ मधील छेद कोणता ?

हा खेळ खेळा



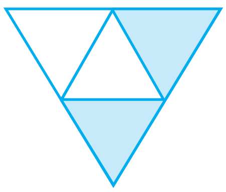
आपल्या मित्राबरोबर हा खेळ खेळू शकता. शेजारील आकृतीतील चौकट विचारात घ्या. त्याच्या आणखी प्रती काढा.

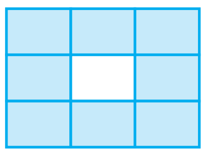
एखाद्या अपूर्णांकाचा विचार करा. उदा. $\frac{1}{2}$.

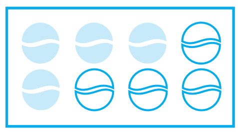
आपल्यापैकी प्रत्येक विद्यार्थी आकृतीतील $\frac{1}{2}$ भाग रंगवेल. अट अशी आहे की एकाने रंगविलेला भाग दुसऱ्यासारखा असता कामा नये.

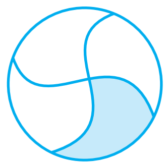
सराव 7.1

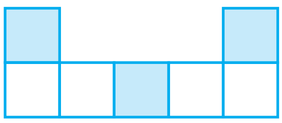
1. खालील आकृतीतील रंगविलेल्या भागासाठी अपूर्णांक लिहा.

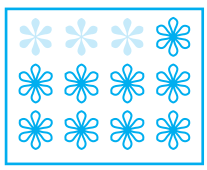

(i)

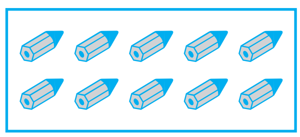

(ii)

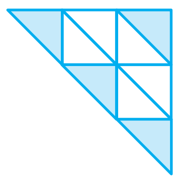

(iii)

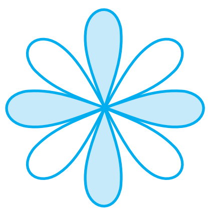

(iv)

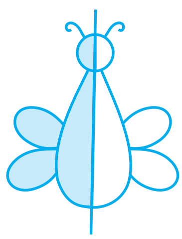

(v)


(vi)

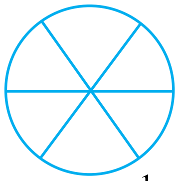

(vii)


(viii)

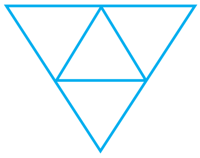

(ix)


(x)

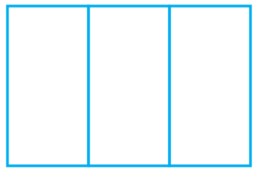
2. आकृतीखाली दिलेल्या अपूर्णांकांप्रमाणे आकृतीतील भाग छायांकित करा.



(i) $\frac{1}{6}$

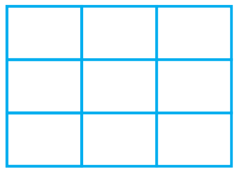


(ii)



(iii)

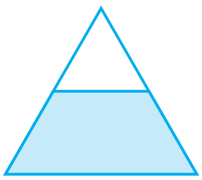
(iv)



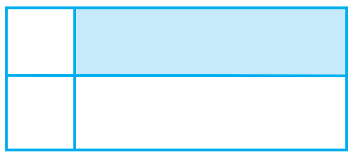
(v)

3. खाली काही चूक असेल तर शोधा.

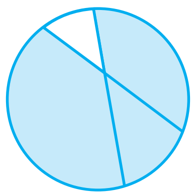
हे $\frac{1}{2}$ आहे



हे $\frac{1}{4}$ आहे



हे $\frac{3}{4}$ आहे

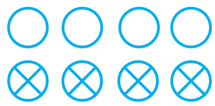


4. एका दिवसातील 8 तास म्हणजे कोणता अपूर्णांक?
5. एका तासाची 40 मिनिटे हे अपूर्णांक रुपात लिहा.
6. आर्या, अभिमन्यू आणि विवेक हे एकमेकांमध्ये वाटून बरोबर डबा खातात. आर्या एक जामचे व एक भाजीचे सॅण्डविच आणते. बाकीचे दोघेजण आपला डबा आणायला विसरतात. आर्या आपले सॅण्डविच इतरांबरोबर वाटून खायला तयार असते. पण प्रत्येकाला प्रत्येक सॅण्डविचचा समान भाग मिळायला हवा.

   (a) आर्या आपले सॅण्डविच प्रत्येकाला समान भाग मिळेल अशा पद्धतीने कसे वाटेल?

   (b) प्रत्येक मुलाला एका सॅण्डविचचा कितवा भाग मिळेल?
7. कांचन कपड्यांवर नक्षी काढण्याचे काम करते. 30 पैकी तिने आतापर्यंत 20 कपड्यांना रंग लावला आहे. एकूणपैकी किती नक्षी काढली ते अपूर्णांकात लिहा.
8. 2 ते 12 पर्यंत नैसर्गिक संख्या लिहा. यापैकी मूळ संख्या किती ते अपूर्णांकात लिहा.
9. 102 पासून 113 पर्यंत नैसर्गिक संख्या लिहा. यापैकी मूळ संख्या किती ते अपूर्णांकात लिहा.

10. खालील आकृतीत किती वर्तुळात X आहे ते अपूर्णांकात लिहा.



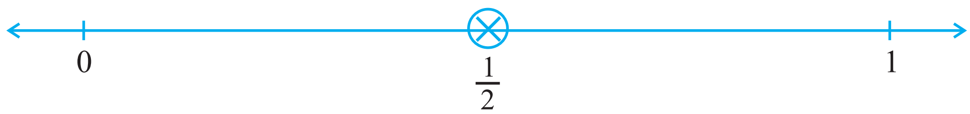
11. वाढदिवसाच्या दिवशी क्रिस्तिनला एक सी.डी. प्लेअर मिळतो. ती 3 सी.डी. विकत आणते व 5 सी.डी. तिला भेट मिळतात, तर एकूण सी.डी.पैकी तिने खरेदी केलेल्या सी.डी. या अपूर्णांकात किती?

7.3 संख्यारेषेवर अपूर्णांक

संख्यारेषेवर 0,1,2... दाखवायला आपण शिकलो आहोत. आपण अपूर्णांक संख्यारेषेवर दाखवू शकतो का? एक संख्या रेषा काढा. यावर आपण $\frac{1}{2}$ दाखवू शकतो का? $\frac{1}{2}$ ही 0 पेक्षा मोठी व 1 पेक्षा लहान आहे.

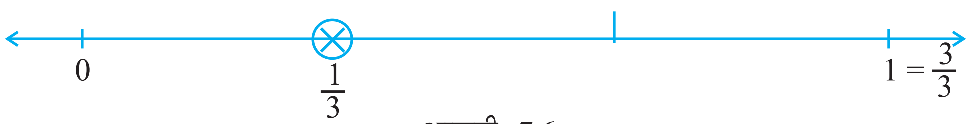
म्हणजे $\frac{1}{2}$ ही 0 आणि 1 यांच्या दरम्यान असायला हवी.

आपल्याला $\frac{1}{2}$ दाखवायचे आहे म्हणून आपण 0 आणि 1 यामधील अंतराचे दोन समान भाग करून एक भाग $\frac{1}{2}$ ने दाखवितो. (आकृती 7.5 मध्ये दाखविले आहे.)



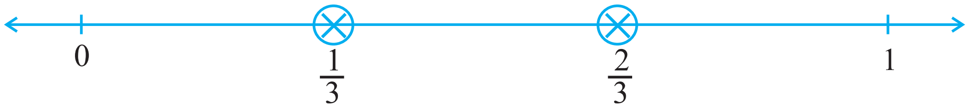
आकृती 7.5

संख्यारेषेवर $\frac{1}{3}$ दाखविण्यासाठी 0 आणि 1 यामधील अंतराचे किती समान भाग करायला हवेत? आपण 0 आणि 1 यामधील अंतराचे 3 समान भाग करू व एक भाग $\frac{1}{3}$ ने दाखवू. (आकृती 7.6) मध्ये दाखवले आहे.



आकृती 7.6

या संख्यारेषेवर $\frac{2}{3}$ दाखवू शकतो का? $\frac{2}{3}$ म्हणजे 3 समान भागांपैकी 2 भाग हे आकृती 7.7 मध्ये दाखविले आहे.



आकृती 7.7

याप्रमाणे आपण $\frac{0}{3}$ आणि $\frac{3}{3}$ संख्यारेषेवर कसे दाखवू?

$\frac{0}{3}$ म्हणजे 0 हा बिंदू आहे व $\frac{3}{3}$ म्हणजे 1 आहे. म्हणजेच $\frac{3}{3}$ म्हणजे 1 हा बिंदू दाखविला जाऊ शकतो. (आकृती 7.7 मध्ये दाखविले आहे.)

जर आपल्याला संख्यारेषेवर अपूर्णांक $\frac{3}{7}$ दाखवायचे असेल तर 0 आणि 1 यांच्या दरम्यानच्या अंतराचे किती समान भाग करावे लागतील? जर $\frac{3}{7}$ हा अपूर्णांक P या बिंदूने दाखविला तर 0 आणि P यांच्या दरम्यान किती समान भाग असतील? $\frac{0}{7}$ आणि $\frac{7}{7}$ हे कोठे असतील?

प्रयत्न करा

1. संख्यारेषेवर $\frac{3}{5}$ दाखवा.
2. संख्यारेषेवर $\frac{1}{10}, \frac{0}{10}, \frac{5}{10}$ आणि $\frac{10}{10}$ हे दाखवा.
3. 0 आणि 1 यांच्या दरम्यान आपण आणखी काही अपूर्णांक दाखवू शकतो का? असे पाच अपूर्णांक लिहा आणि संख्यारेषेवर दाखवा.
4. 0 आणि 1 यांच्या दरम्यान किती अपूर्णांक आहेत. विचार करा, चर्चा करा आणि आपले उत्तर लिहा.

7.4 उचित अपूर्णांक

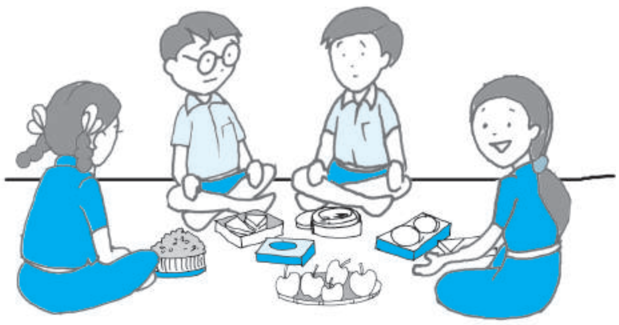
आपण अपूर्णांक संख्यारेषेवर कसे दाखवायचे ते पाहिले. $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{9}{10}, \frac{0}{3}, \frac{5}{8}$ हे अपूर्णांक वेगवेगळ्या संख्यारेषेवर दाखवा.

यापैकी कोणताही अपूर्णांक 1 च्या उजवीकडे आहे का? हे सर्व अपूर्णांक 1 पेक्षा लहान असल्याने 1 च्या डावीकडे आहेत. प्रत्यक्षात आपण 1 पेक्षा लहान अपूर्णांकच पाहिले आहेत. यांना उचित अपूर्णांक (छेदाधिक अपूर्णांक) म्हणतात. उचित अपूर्णांक हे एकाचा कितवा समान भाग ते दाखवितात. यामध्ये छेद हा एकाला किती समान भागात विभागायचे ते दाखवितो व अंश म्हणजे यापैकी किती भाग घ्यायचा ते दाखवितो. कोणत्याही उचित अपूर्णांकात अंश हा छेदापेक्षा लहान असतो.

प्रयत्न करा

1. उचित अपूर्णांक असे लिहा की
   (a) ज्याचा अंश 5 व छेद 7 आहे.
   (b) ज्याचा छेद 9 व अंश 5 आहे.
   (c) याच्या अंश व छेदाची बेरीज 10 आहे. आपण असे किती अपूर्णांक लिहू शकतो?
   (d) ज्याचा छेद त्याच्या अंशापेक्षा 4 ने अधिक आहे.
   (असे 5 अपूर्णांक सांगा. असे किती अपूर्णांक सांगता येतील?)
2. एक अपूर्णांक दिला असेल तर तो पाहून, तुम्ही कसे सांगू शकाल की तो
   (a) 1 पेक्षा लहान आहे (b) 1 च्या बरोबर आहे
3. रिकाम्या जागेत योग्य असे >, < व = हे भरा.
   (a) $\frac{1}{2}\ \square\ 1$ (b) $\frac{3}{5}\ \square\ 1$ (c) $1\ \square\ \frac{7}{8}$
   (d) $\frac{4}{4}\ \square\ 1$ (e) $\frac{0}{6}\ \square\ 1$ (f) $\frac{2005}{2005}\ \square\ 1$

7.5 अंशाधिक अपूर्णांक आणि मिश्र अपूर्णांक



अनघा, रवि, रेशमा आणि जॉनने वाटून खाऊ खाल्ला. त्यांनी आपल्याबरोबर पाच सफरचंदेही आणली होती. डबा खाऊन झाल्यावर त्यांना सफरचंदेही वाटून खावयाची होती. ते ती कशाप्रकारे वाटू शकतील?

अनघा म्हणाली आपण एक-एक पूर्ण व पाचव्यातील $\frac{1}{4}$ प्रत्येकाला घेऊ.

अनघा रवि रेशमा जॉन

रेशमा म्हणाली ते ठीक आहे. पण आपण प्रत्येक सफरचंदाचे चार भाग करून प्रत्येकातील एक चतुर्थांश घेऊ शकतो.

अनघा रवि रेशमा जॉन

रवि म्हणाला वाटण्याच्या दोन्ही पद्धतीत सर्वांना समान भाग मिळेल व तो 5 चतुर्थांश असेल. कारण 4 चतुर्थांश म्हणजे एक पूर्ण होईल. म्हणजेच प्रत्येकाला एक पूर्ण व एक चतुर्थांश भाग मिळेल. प्रत्येकाचा वाटा 5 भागिले 4 आहे. हे आपण $5 \div 4$ लिहू शकतो का? जॉनने सांगितले हे आपण $\frac{5}{4}$ असे लिहू शकतो. अनघा म्हणाली $\frac{5}{4}$ मध्ये अंश हा छेदापेक्षा अधिक आहे. ज्या अपूर्णांकात अंश हा छेदापेक्षा जास्त असतो. त्यांना अंशाधिक अपूर्णांक (improper fractions) म्हणतात.

म्हणजेच $\frac{3}{2}, \frac{12}{7}, \frac{18}{5}$ हे सर्व अंशाधिक अपूर्णांक आहेत.

1. छेद 7 असलेले पाच अंशाधिक अपूर्णांक लिहा.
2. छेद 11 असलेले पाच अंशाधिक अपूर्णांक लिहा.

रविने जॉनला विचारले हा अपूर्णांक दुसऱ्या पद्धतीने लिहिता येतो का? अनघाने जी पद्धत सांगितली त्याचा उपयोग लिहिताना होईल का?

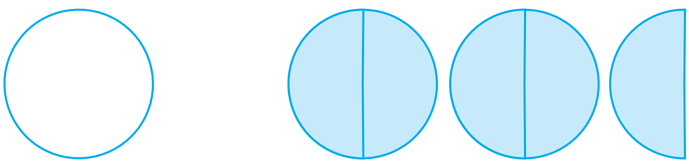
हा 1 आहे
(एक)

यामधील प्रत्येक $\frac{1}{4}$ आहे
(एक चतुर्थांश)

आकृती 7.8

जॉन म्हणाला अनघाने सांगितले त्याप्रमाणे लिहिता येते. त्या पद्धतीने प्रत्येकाला 1 पूर्ण वा एक चतुर्थांश असा वाटा मिळतो. हा $1+\frac{1}{4}$ आहे म्हणजेच $1\frac{1}{4}$ असेही लिहिले जाते. लक्षात ठेवा $1\frac{1}{4}$ आणि $\frac{5}{4}$ दोन्ही एकच आहे. (आकृती 7.8)

आठवा की फरीदाने किती पुऱ्या खाल्ल्या होत्या? तिने $2\frac{1}{2}$ पुऱ्या खाल्ल्या होत्या. (आकृती 7.9).



हा 1 आहे

हा $2\frac{1}{2}$ आहे

आकृती 7.9

$2\frac{1}{2}$ मध्ये किती अर्धे भाग छायांकित केले आहेत? यामध्ये 5 अर्धे-अर्धे भाग छायांकित आहेत.

म्हणजेच हा अपूर्णांक $\frac{5}{2}$ आहे. हा $\frac{5}{4}$ नाही हे दिसते आहे.

> **आपल्याला माहीत आहे का?**
> टेनिस रॅकेटचे माप हे मिश्र अपूर्णांकात असते. उदा. एक माप $3\frac{7}{8}$ इंच आणि दुसरे $4\frac{3}{8}$ इंच असते.

$1\frac{1}{4}$ आणि $2\frac{1}{2}$ यांसारख्या अपूर्णांकांना **मिश्र अपूर्णांक** म्हणतात. एका मिश्र अपूर्णांकात एक भाग पूर्ण असतो व एक अपूर्णांक असतो.

आपल्याला मिश्र संख्या कोठे कोठे मिळतात? काही उदाहरणे द्या.

उदाहरण 1 : खालील अपूर्णांक मिश्र संख्यांच्या स्वरूपात लिहा.

(a) $\frac{17}{4}$ (b) $\frac{11}{3}$ (c) $\frac{27}{5}$ (d) $\frac{7}{3}$

उत्तर : (a) $\frac{17}{4}$

$$\begin{array}{rl} & 4 \\ 4 & \overline{)17} \\ - & 16 \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array}$$

म्हणून 4 पूर्ण आणि $\frac{1}{4}$ म्हणजेच $4\frac{1}{4}$

(b) $\frac{11}{3}$

$$\begin{array}{rl} & 3 \\ 3 & \overline{)11} \\ - & 9 \\ \hline & 2 \\ \hline \end{array}$$

म्हणून 3 पूर्ण आणि म्हणजेच $3\frac{2}{3}$

[दुसऱ्या प्रकारे, $\frac{11}{3} = \frac{9+2}{3} = \frac{9}{3} + \frac{2}{3} = 3 + \frac{2}{3} = 3\frac{2}{3}$]

(c) आणि (d) मधील वरीलप्रमाणे दाखविण्याचा प्रयत्न करा.

याप्रमाणे अंशाधिक अपूर्णांक आपण मिश्र अपूर्णांकाच्या रूपात लिहू शकतो. यासाठी अंशाला छेदाने भागून आपल्याला भागाकार व बाकी काढावी लागेल आणि मग

मिश्र अपूर्णांक हा भागाकार$\frac{\text{बाकी}}{\text{भाजक}}$ या स्वरूपात लिहितात.

उदाहरण 2 : खालील मिश्र अपूर्णांक अंशाधिक अपूर्णांकाच्या स्वरूपात लिहा.

(a) $2\frac{3}{4}$ (b) $7\frac{1}{9}$ (c) $5\frac{3}{7}$

उत्तर : (a) $2\frac{3}{4} = \frac{(2\times4)+3}{4} = \frac{11}{4}$

(b)

(c) $5\frac{3}{7} = \frac{(5\times7)+3}{7} = \frac{38}{7}$

याप्रमाणे आपण एक मिश्र अपूर्णांक अंशाधिक अपूर्णांक स्वरूपात रूपांतरित करू शकतो. यासाठी पूर्ण संख्येला छेदाने गुणून त्यामध्ये अंश मिळवितो व $\frac{(\text{पूर्ण}\times\text{छेद})+\text{अंश}}{\text{छेद}}$ हा अपूर्णांक मिळतो.

उदाहरणसंग्रह 7.2

1. संख्या रेषा काढा व खालील अपूर्णांक बिंदूच्या स्वरूपात दाखवा.

   (a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}$ (b) $\frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{7}{8}$ (c) $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{8}{5}, \frac{4}{5}$

2. खालील अंशाधिक अपूर्णांक मिश्र अपूर्णांकाच्या रूपांतरित करा.

   (a) $\frac{20}{3}$ (b) $\frac{11}{5}$ (c) $\frac{17}{7}$

   (d) $\frac{28}{5}$ (e) $\frac{19}{6}$ (f) $\frac{35}{9}$

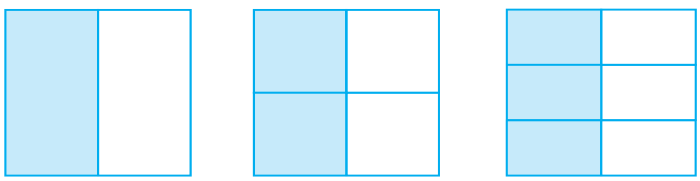
3. खालील अपूर्णांक अंशाधिक अपूर्णांकात रूपांतरित करा.

   (a) $7\frac{3}{4}$ (b) $5\frac{6}{7}$ (c) $2\frac{5}{7}$

   (d) $10\frac{3}{5}$ (e) $9\frac{3}{7}$ (f) $8\frac{4}{9}$

7.6 सममूल्य अपूर्णांक

खालील आकृतीतील अपूर्णांक पाहा. (आकृती 7.10) :



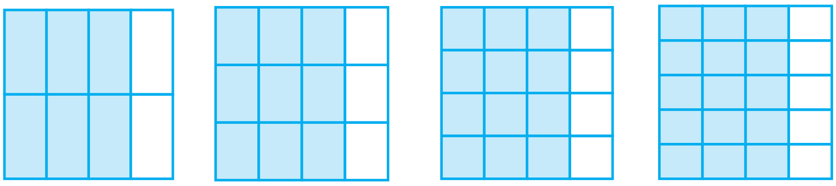
आकृती 7.10

हे अपूर्णांक $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}$ आहेत. हे एकूण भागांपैकी किती भाग घेतले ते दाखवित आहेत. जर आपण या अपूर्णांकांचे चित्रातील आकार एकमेकांवर ठेवले तर ते सर्व एकावर एक बरोबर बसतील. तुम्ही सहमत आहात का?

अशा अपूर्णांकांना सममूल्य अपूर्णांक म्हणतात. वरील अपूर्णांकांशी सममूल्य असणारे आणखी (Equivalent fractions) 3 अपूर्णांक सांगा.

प्रयत्न करा

1. आणि ; आणि आणि आणि हे सममूल्य अपूर्णांक आहेत? कारण सांगा.
2. सममूल्य अपूर्णांकाचे आणखी एक उदाहरण द्या.
3. आकृतीतील छायांकित भागासाठी अपूर्णांक ओळखा. हे सममूल्य अपूर्णांक आहेत का?



सममूल्य अपूर्णांकांचा अभ्यास

$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, ..., \frac{36}{72}$..., यामधील प्रत्येक अपूर्णांक हा सममूल्य अपूर्णांक आहे. हे सगळे एका पूर्ण भागाचा समान भाग दर्शवितात.

विचार करा, चर्चा करा आणि लिहा

अपूर्णांक एका पूर्ण भागाचा समान भागच का दाखवितात? यापैकी एक अपूर्णांक दुसऱ्यासारखा सममूल्य आपण कसा मिळवू शकतो?

आपण पाहतो की आहे.

याप्रमाणे अथवा

येईल.

एका दिलेल्या अपूर्णांकाचे सममूल्य अपूर्णांक माहीत करण्यासाठी आपण त्याचा अंश व छेद यांना एकाच शून्येतर संख्याने गुणतो.

रजनी म्हणते की या अपूर्णांकाचे सममूल्य अपूर्णांक

$\frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{2}{6}$, $\frac{1 \times 3}{3 \times 3} = \frac{3}{9}$, $\frac{1 \times 4}{3 \times 4} = \frac{4}{12}$ असे आहेत.

तुम्ही तिच्याशी सहमत आहात का? स्पष्ट करा.

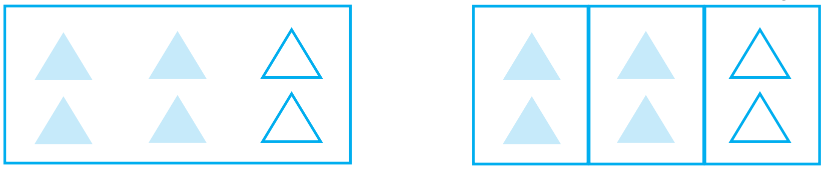
प्रयत्न करा

1. खालीलपैकी प्रत्येकाचे पाच सममूल्य अपूर्णांक माहीत करून घ्या.

(i) $\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{1}{5}$ (iii) $\frac{3}{5}$ (iv) $\frac{5}{9}$

इतर पद्धती

सममूल्य अपूर्णांक माहीत करून घेण्यासाठी आणखी पद्धती आहेत का? आकृती 7.11 पाहा.



येथे $\frac{4}{6}$ छायांकित आहे. येथे $\frac{2}{3}$ छायांकित आहे.

आकृती 7.11

यामध्ये छायांकित वस्तूंची संख्या समान आहे. म्हणजेच $\frac{4}{6}$ आणि $\frac{2}{3}$ हे सममूल्य अपूर्णांक आहेत.

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3} = \frac{4 \div 2}{6 \div 2}$$

एका दिलेल्या अपूर्णांकाचा सममूल्य अपूर्णांक मिळविण्यासाठी आपण त्या अपूर्णांकाचे अंश व छेद यांना एका समान शून्येतर संख्येने भागू शकतो.

$\frac{12}{15}$ चा एक सममूल्य अपूर्णांक $\frac{12 \div 3}{15 \div 3} = \frac{4}{5}$ आहे.

$\frac{9}{15}$ या अपूर्णांकाचा असा सममूल्य काढता येईल का ज्याचा छेद 5 असेल.

उदाहरण 3 : $\frac{2}{5}$ चा असा सममूल्य शोधा की ज्याचा अंश 6 आहे.

उत्तर : $2 \times 3 = 6$ हे आपल्याला माहीत आहे. सममूल्य अपूर्णांक मिळविण्यासाठी दिलेल्या अपूर्णांकाच्या अंश व छेद यांना 3 ने गुणले पाहिजे.

म्हणून $\frac{2}{5} = \frac{2 \times 3}{5 \times 3} = \frac{6}{15}$

म्हणून अपेक्षित सममूल्य अपूर्णांक आहे.

हे आपण चित्राच्या रूपात दाखवू शकाल का?

उदाहरण 4 : $\frac{15}{35}$ चा सममूल्य अपूर्णांक असा काढा की ज्याचा छेद 7 असेल.

उत्तर : आपल्याला $\frac{15}{35} = \frac{\square}{7}$ हवे आहे.

आपण दोन्हीचे छेद पाहू- $35 \div 5 = 7$ म्हणून आपण $\frac{15}{35}$ चे अंश आणि छेद दोघांना 5 ने भागावे लागेल.

म्हणून $\frac{15}{35} = \frac{15 \div 5}{35 \div 5} = \frac{3}{7}$

याप्रमाणे आपल्याला $\frac{15}{35} = \frac{3}{7}$ असे मिळेल.

गंमतीशीर गोष्ट

सममूल्य अपूर्णांकांच्या बाबतीत एक गंमतीशीर बाब आहे. दिलेले कोष्टक पूर्ण करा. पहिल्या दोन ओळी पूर्ण केल्या आहेत.

सममूल्य अपूर्णांक	पहिलीचे अंश दुसरीचा छेद यांचा गुणाकार	दुसरीचे अंश व पहिलीचा छेद यांचा गुणाकार	गुणाकार समान आहेत का?
$\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$	$1 \times 9 = 9$	$3 \times 3 = 9$	होय
$\frac{4}{5} = \frac{28}{35}$	$4 \times 35 = 140$	$5 \times 28 = 140$	होय
$\frac{1}{4} = \frac{4}{16}$			
$\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$			
$\frac{3}{7} = \frac{24}{56}$			

वरील कोष्टकावरून आपण काय निष्कर्ष काढू शकतो? या सर्वांमध्ये पहिल्या अपूर्णांकाचा अंश व दुसरीचा छेद यांचा गुणाकार हा दुसरीचे अंश व पहिलीचा छेद यांच्या गुणाकाराबरोबर असतो. या दोन्ही गुणाकारांना (अंश व छेद यांचा) तिरकस गुणाकार (cross multiplication) म्हणतात. सममूल्य अपूर्णांकांच्या इतर जोड्यांमध्येही तिरकस गुणाकार माहीत करून घ्या.

आपण असे सममूल्य अपूर्णांक मिळवू शकतो का की ज्यामध्ये हा तिरकस गुणाकार समान नाही? या नियमाप्रमाणे कधीकधी सममूल्य अपूर्णांक मिळविता येतो.

उदाहरण 5 : $\frac{2}{9}$ चा सममूल्य अपूर्णांक असा मिळवा की ज्याचा छेद 63 आहे.

उत्तर : दिलेले आहे $\frac{2}{9} = \frac{\square}{63}$

यासाठी असायला हवे.

पण $63 = 7 \times 9$ आहे. म्हणून $9 \times \square = 2 \times 7 \times 9$,

$= 14 \times 9 = 9 \times 14$

म्हणून

म्हणून $\square = 14$ असेल. (तुलना करून)

म्हणून $\frac{2}{9} = \frac{14}{63}$ आहे.

7.7 अपूर्णांकाचे संक्षिप्त रूप

$\frac{36}{54}$ हा एक अपूर्णांक दिला आहे. याचा सममूल्य अपूर्णांक असा मिळवू की ज्याच्या अंश व छेदामध्ये समान अवयव नसेल.

हे आपण कसे करू शकू? 36 आणि 54 या दोन्हीचा 2 हा एक अवयव आहे. म्हणून

$\frac{36}{54} = \frac{36 \div 2}{54 \div 2} = \frac{18}{27}$, 18 आणि 27 मध्येही सामाईक अवयव आहेत. हे 1, 3 आणि 9 आहेत.

म्हणून $\frac{18}{27} = \frac{18 \div 9}{27 \div 9} = \frac{2}{3}$

आता 2 आणि 3 मध्ये सामाईक अवयव नाही. म्हणून आपल्याला हवा असलेला अपूर्णांक $\frac{2}{3}$ आहे. अशा अपूर्णांकाला दिलेल्या अपूर्णांकाचे संक्षिप्तरुप (simplest form) असे म्हणतात.

एका अपूर्णांकाचे संक्षिप्तरुप (simplest form) म्हणजे असा सममूल्य अपूर्णांक की ज्यामध्ये त्याच्या अंश व छेदामध्ये 1 शिवाय दुसरा आणखी कोणताही सामाईक अवयव नसतो.

सर्वात सोपी रीत

दिलेल्या अपूर्णांकाचे सममूल्य सरळरूप माहीत करण्यासाठी सोपा रस्ता म्हणजे अंश व छेद यांचा म.सा.वि. काढून या म.सा.वि.ने अंश व छेद यांना भागावे म्हणजे आपल्याला सममूल्य संक्षिप्तरुप मिळते.

एक खेळ

खाली काही गमतीशीर सममूल्य अपूर्णांक दिले आहेत. यामध्ये 1 ते 9 पर्यंतचे अंक एकदाच आले आहेत.

$$\frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{58}{174}$$

$$\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{79}{158}$$

असे आणखी दोन सममूल्य अपूर्णांक शोधा.

$\frac{36}{24}$ हा अपूर्णांक पाहा.

36 आणि 24 चा म.सा.वि. 12 आहे.

म्हणून $\frac{36 \div 12}{24 \div 12} = \frac{3}{2}$

याप्रमाणे म.सा.वि. चा अपूर्णांकाचे सरळरूप मिळविण्यासाठी आपल्याला मदत होते.

प्रयत्न करा

1. खालील अपूर्णांकाचे संक्षिप्तरुप लिहा.

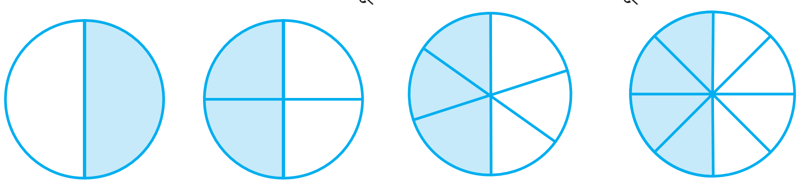
   (i) $\frac{15}{75}$ (ii) $\frac{16}{72}$ (iii) $\frac{17}{51}$ (iv) $\frac{42}{28}$ (v) $\frac{80}{24}$

2. $\frac{49}{64}$ हे संक्षिप्तरुप आहे का?

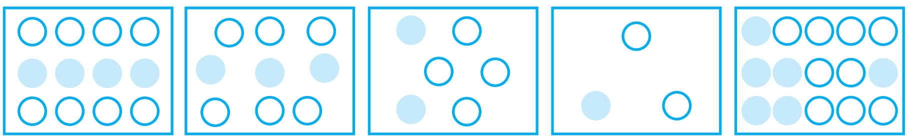
सराव 7.3

1. प्रत्येक चित्रातील छायांकित भागासाठी अपूर्णांक लिहा. हे सर्व सममूल्य आहेत का?

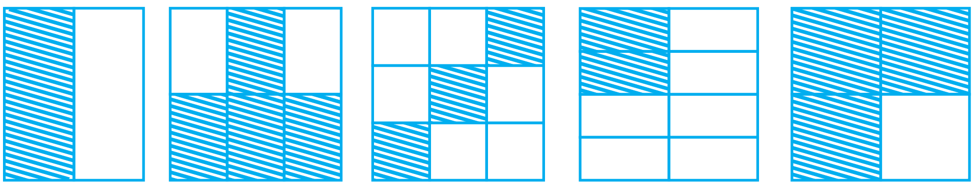
(a)



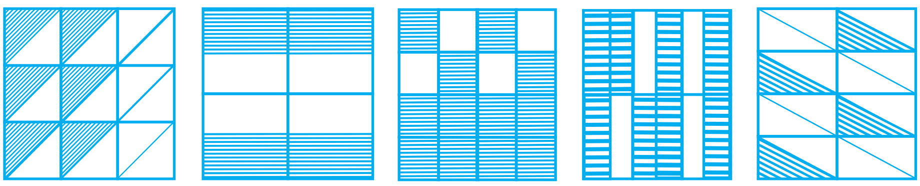
(b)



2. प्रत्येक आकृतीतील छायांकित भागासाठी अपूर्णांक लिहा व प्रत्येक ओळीतील सममूल्य अपूर्णांक शोधा.



(a) (b) (c) (d) (e)



(i) (ii) (iii) (iv) (v)

3. खालीलपैकी प्रत्येकात $\square$ या जागी योग्य संख्या लिहा.

(a) $\frac{2}{7}=\frac{8}{\square}$ (b) $\frac{5}{8}=\frac{10}{\square}$ (c) $\frac{3}{5}=\frac{\square}{20}$

(d) $\frac{45}{60}=\frac{15}{\square}$ (e) $\frac{18}{24}=\frac{\square}{4}$

4. $\frac{3}{5}$ चे असे सममूल्य असा काढा की

(a) ज्याचा छेद 20 आहे. (b) अंश 9 आहे.

(c) छेद 30 आहे. (d) अंश 27 आहे.

5. $\frac{36}{48}$ चा सममूल्य असा काढा की

(a) अंश 9 आहे. (b) छेद 4 आहे.

6. खालील अपूर्णांक सममूल्य आहेत की नाही ते शोधा :

(a) $\frac{5}{9}, \frac{30}{54}$ (b) $\frac{3}{10}, \frac{12}{50}$ (c) $\frac{7}{13}, \frac{5}{11}$

7. खालील अपूर्णांक संक्षिप्तरुपात लिहा.

(a) $\frac{48}{60}$ (b) $\frac{150}{60}$ (c) $\frac{84}{98}$

(d) $\frac{12}{52}$ (e) $\frac{7}{28}$

8. रमेशजवळ 20, शीलूजवळ 50 आणि जमालजवळ 80 पेन्सिली होत्या. 4 महिन्यांमध्ये रमेशने 10, शीलूने 25 आणि जमालने 40 पेन्सिली वापरल्या. प्रत्येकाने वापरलेल्या पेन्सिलींचा अपूर्णांक लिहा. हे सर्व सममूल्य आहेत का?

9. सममूल्यांच्या जोड्या शोधा व प्रत्येकासाठी आणखी दोन सममूल्य लिहा.

(i)	$\frac{250}{400}$	(a)	$\frac{2}{3}$
(ii)	$\frac{180}{200}$	(b)	$\frac{2}{5}$
(iii)	$\frac{660}{990}$	(c)	$\frac{1}{2}$
(iv)	$\frac{180}{360}$	(d)	$\frac{5}{8}$
(v)	$\frac{220}{550}$	(e)	$\frac{9}{10}$

7.8 समच्छेदी अपूर्णांक

समान छेद असलेल्या अपूर्णांकांना समच्छेदी अपूर्णांक (like fractions) म्हणतात.

म्हणजे $\frac{1}{15}, \frac{2}{15}, \frac{3}{15}, \frac{8}{15}$ हे सर्व समच्छेदी अपूर्णांक आहेत.

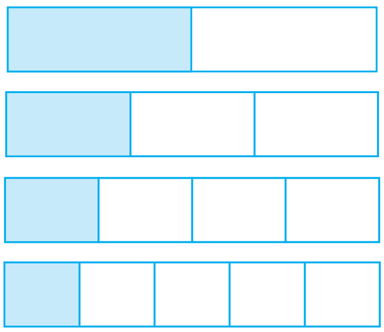
$\frac{7}{27}$ आणि $\frac{7}{28}$ हे समच्छेदी आहोत का? यांचे छेद समान नाहीत. हे **असमच्छेदी अपूर्णांक (unlike fractions)** आहेत.

असमच्छेदी अपूर्णांकांच्या पाच जोड्या लिहा.

7.9 अपूर्णांकांची तुलना

सोहनीच्या ताटात $3\frac{1}{2}$ पोळ्या होत्या. रीताच्या ताटात $2\frac{2}{4}$ पोळ्या होत्या. कोणाच्या ताटात जास्त पोळ्या आहेत. सोहनीच्या ताटात 3 पेक्षा अधिक पोळ्या आहेत व रीताच्या ताटात 3 पेक्षा कमी पोळ्या आहेत. म्हणजेच सोहनीच्या ताटात जास्त पोळ्या आहेत.

आता आकृती 7.12 मध्ये दाखविलेले $\frac{1}{2}$ आणि $\frac{1}{3}$ या अपूर्णांकांचा विचार करा. एका संपूर्ण भागाचा $\frac{1}{2}$ शी संबंधित छायांकित भाग आणि त्याच अपूर्णांकाचा शी संबंधित छायांकित भाग



आकृती 7.12

पाहा $\frac{1}{2}$ चा संबंधित भाग हा पेक्षा अधिक आहे. म्हणजेच $\frac{1}{2}$ हा पेक्षा मोठा आहे.

सर्वसाधारणपणे कोणता अपूर्णांक मोठा आहे हे सांगणे इतके सोपे नसते. उदा. मोठा आहे की ? यासाठी आपण आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे पाहून सांगू शकतो. (आकृती 7.12). पण आकृत्या काढणे नेहमीच शक्य असते असे नाही. हे विशेषतः छेद 13 असेल तर शक्य नसते. यासाठी आपल्याला अपूर्णांकाची तुलना करण्यासाठी एक पद्धत शोधायला हवी.

यासाठी आपण प्रथम समच्छेदी अपूर्णांकांची तुलना करू.

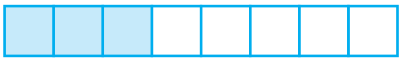
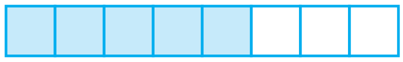
प्रयत्न करा

1. एका ज्यूसच्या बाटलीतील भाग ज्यूस तुम्हाला व भाग ज्यूस बहिणीला मिळतो. कोणाला अधिक ज्यूस मिळतो.

7.9.1 समच्छेदी अपूर्णांकांची तुलना

समान छेद असलेले अपूर्णांक समच्छेदी अपूर्णांक असतात. खालीलपैकी कोणते अपूर्णांक समच्छेदी आहेत?

आपण व या दोन समच्छेदी अपूर्णांकांची तुलना करू.

 $\frac{3}{8}$  $\frac{5}{8}$

दोन्ही अपूर्णांकांत 8 समान भाग केले आहेत व आणि साठी त्यातील अनुक्रमे 3 आणि 5 भाग घेतले. हे स्पष्ट दिसते की 5 भागांच्या संबंधित छायांकित भाग हा 3 भागांच्या छायांकित भागापेक्षा मोठा आहे. म्हणून आहे. लक्षात घ्या की विचारात घेतलेले भाग अंशाशी संबंधित आहेत. म्हणजेच दोन अपूर्णांकातील छेद समान असताना ज्याचा अंश मोठा आहे तो अपूर्णांक मोठा असतो. आणि मध्ये हा मोठा अपूर्णांक आहे. आणि मध्ये हा मोठा आहे.

प्रयत्न करा

1. कोणता अपूर्णांक मोठा आहे?

   (i) की (ii) की (iii) की

2. खालील अपूर्णांक किमतीच्या चढत्या क्रमाने व उतरत्या क्रमाने लिहा.

   (a) $\frac{1}{8}, \frac{5}{8}, \frac{3}{8}$

   (b) $\frac{1}{5}, \frac{11}{5}, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{7}{5}$

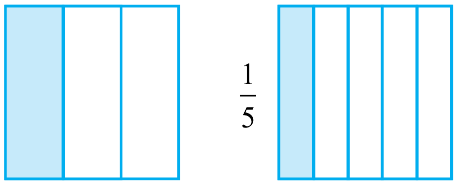
   (c) $\frac{1}{7}, \frac{3}{7}, \frac{13}{7}, \frac{11}{7}, \frac{7}{7}$

7.9.2 असमच्छेदी अपूर्णांकांची तुलना

जर छेद समान नसतील तर ते अपूर्णांक असमच्छेदी असतात. उदा. आणि असमच्छेदी अपूर्णांक आहेत. आणि असमच्छेदी आहेत.

समान अंश असलेले असमच्छेदी अपूर्णांक

$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{5}$



असमच्छेदिक अपूर्णांक आणि विचारात घ्या. यांचे अंश समान आहेत.

मोठा की ?

साठी एका पूर्णाचे 3 भाग करून त्यातील 1 भाग घेतो व साठी एका पूर्णाचे 5 समान भाग करून त्यातील एक घेतो. लक्षात घ्या की साठी पेक्षा कमी भागात विभागणी केली आहे. म्हणून मध्ये मिळालेला भाग मध्ये मिळालेल्या भागाच्यापेक्षा मोठा आहे. यामुळे एका पूर्णाचा दाखविणारा भाग हा दाखविणाऱ्या भागापेक्षा मोठा आहे. म्हणून

2 21 23 2 32 4 4
3 15 10 95 5 77 9 11
याचप्रमाणे आपण म्हणू शकतो की येथे पहिल्याप्रमाणेच स्थिती आहे. फक्त अंश 1 नसून 2 आहे. साठी पेक्षा एका पूर्णाचे जास्त समान भाग करावे लागले. म्हणून मधील प्रत्येक समान भाग हा च्या प्रत्येक समान भागापेक्षा मोठा आहे. आपण समान भागांच्या संख्या बघतो. (अंश समान आहे) म्हणून पूर्णाचा दाखविणारा भाग पूर्णाच्या भागापेक्षा मोठा आहे.

म्हणून .

वरील उदाहरणावरून आपण पाहतो की, जर दोन अपूर्णांकांचे अंश समान असतील तर छेद लहान असणारा अपूर्णांक हा मोठा असतो.

याप्रमाणे

याला चढत्या क्रमाने मांडा. हे सर्व असमच्छेदी अपूर्णांक आहेत. पण यांचे अंश समान आहेत. म्हणून ज्याचा छेद मोठा तितका तो अपूर्णांक लहान असेल. चा छेद सर्वात

मोठा आहे म्हणून हा सर्वात लहान आहे. म्हणून क्रमाने पुढील तीन अपूर्णांक आहेत.

सर्वात मोठा अपूर्णांक आहे. (याचा छेद सर्वात लहान आहे.) म्हणून अपूर्णांकांचा चढता क्रम

असा आहे.

प्रयत्न करा

1. खालील अपूर्णांक किमतीच्या चढत्या व उतरत्या क्रमाने मांडूया.

   (a) $\frac{1}{12}, \frac{1}{23}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{50}, \frac{1}{9}, \frac{1}{17}$

   (b) $\frac{3}{7}, \frac{3}{11}, \frac{3}{5}, \frac{3}{2}, \frac{3}{13}, \frac{3}{4}, \frac{3}{17}$

2. वरील प्रकाराची तीन उदाहरणे तयार करा आणि अपूर्णांक चढत्या आणि उतरत्या क्रमाने मांडा.

आपल्याला $\frac{2}{3}$ आणि $\frac{3}{4}$ या दोन असमच्छेदी अपूर्णांकांची तुलना करावयाची आहे. जेव्हा या दोन अपूर्णांकांचे छेद आपण समान करून घेऊ तेव्हाच हे शक्य होईल. जेव्हा छेद समान होतील तेव्हा त्यांच्या अंशांची तुलना करून अपूर्णांकांची तुलना करणे अधिक सोपे होते.

पुन्हा एकदा $\frac{2}{3}$ आणि $\frac{3}{4}$ या दोन अपूर्णांकांचा विचार करू.

आता $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{10}{15} = ...$

याप्रमाणे $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16} = ...$

$\frac{2}{3}$ आणि $\frac{3}{4}$ यांच्या सममूल्य अपूर्णांकांमध्ये 12 हा छेद असलेले हे आहेत.

अर्थात $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ आहे, आणि $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ आहे.

आहे म्हणून $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$ आहे.

उदाहरण 6 : आणि यांची तुलना करा.

उत्तर : हे असमच्छेदी अपूर्णांक आहेत. यांचे अंशही वेगवेगळे आहेत. यांचे सममूल्य अपूर्णांक लिहू.

यातील समान छेद असलेले सममूल्य

$$\text{आणि } \frac{5}{6} = \frac{25}{30} \text{ आहेत.}$$

$\frac{25}{30} > \frac{24}{30}$ आहे म्हणून $\frac{5}{6} > \frac{4}{5}$ आहे.

लक्षात घ्या की सममूल्य अपूर्णांकांचा छेद 30 आहे. हा 5×6 आहे. हा 5 आणि 6 चा एक सामाईक गुणक आहे.

जेव्हा दोन असमच्छेदी अपूर्णांकांची तुलना करावयाची असते. तेव्हा आपल्याला दोघांचे असे सममूल्य अपूर्णांक शोधावे लागतात की ज्यामध्ये त्यांच्या छेदांचा सामाईक गुणक असेल.

उदाहरण 7 : आणि यांची तुलना करा.

उत्तर : हे असमच्छेदी अपूर्णांक आहेत. आपल्याला 6 आणि 15 यांचे सामाईक गुणक असलेले सममूल्य अपूर्णांक शोधावे लागतील.

$\frac{3\times 5}{5\times 5} = \frac{24}{30}$ $\frac{25}{30}, \frac{13\times 2}{15\times 2} = \frac{26}{30}$

आता आहे.

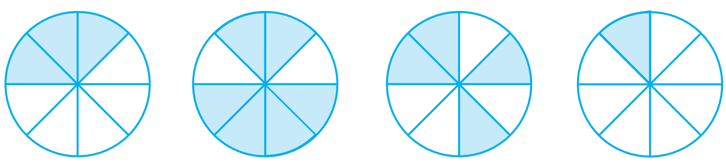
$\frac{26}{30} > \frac{25}{30}$ आहे म्हणून $\frac{13}{15} > \frac{5}{6}$ आहे.

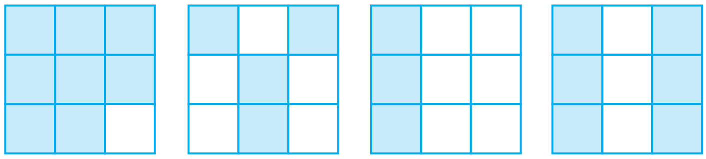
ल.सा.वि. का?

6 आणि 15 चा गुणाकार 90 आहे. म्हणजेच 90 हा 6 आणि 15 चा एक सामाईक गुणक आहे. आपण 30 ऐवजी 90 ही वापरू शकतो. परंतु लहान संख्यांचा वापर करणे अधिक सोयीचे व सुलभ असते. यामुळे सर्व सामाईक गुणकातील सर्वात छोटा सामाईक गुणक घ्यायला हावा. म्हणून छेद समान करण्यासाठी ल.सा.वि.ला प्राधान्य दिले जाते.

उदाहरणसंग्रह 7.4

1. खालील प्रत्येक चित्रासाठी अपूर्णांक लिहा. त्यामध्ये '<', '=', '>' यापैकी योग्य चिन्हे वापरून अपूर्णांक किमतीच्या चढत्या व उतरत्या क्रमाने लिहा.

(a) 

(b) 

(c) $\frac{2}{6}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{8}{6}$ आणि $\frac{6}{6}$ हे संख्यारेषेवर दाखवा.

दिलेल्या अपूर्णांकांमध्ये '<' , '>' यापैकी योग्य चिन्ह लिहा.

$\frac{5}{6}$ $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}\square 0$, ,

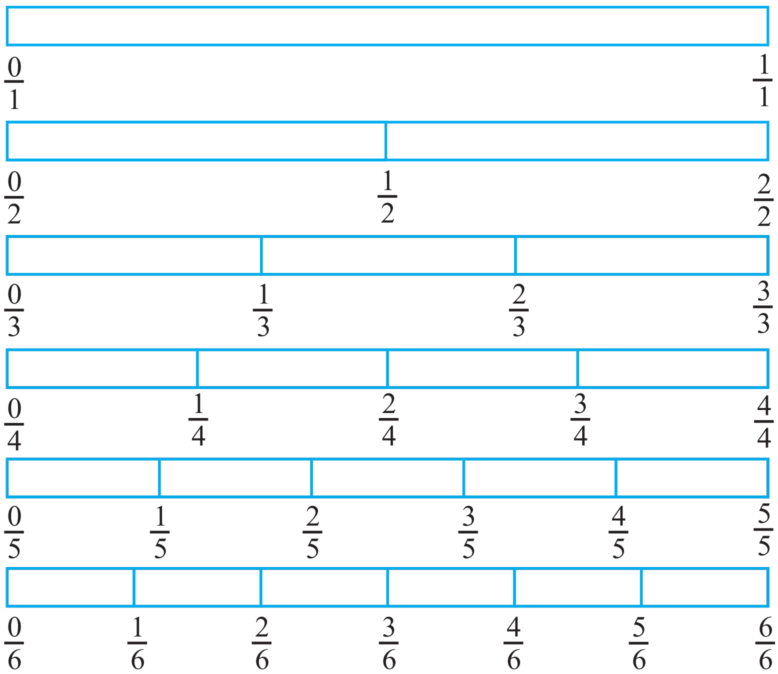
2. अपूर्णांकांची तुलना करून योग्य चिन्ह लिहा.

(a) (b)

(c) (d)

3. अपूर्णांकांच्या अशा 5 जोड्या लिहून योग्य चिन्ह लिहा.

4. खालील आकृती पाहा आणि अपूर्णांकांमध्ये '>', '=', '<' यापैकी योग्य चिन्ह लिहा.



(a) (b) (c)

(d) (e)

असेच पाच प्रश्न आणखी तयार करा आणि मित्रांबरोबर सोडवा.

5. किती लवकर करता पाहूया! योग्य चिन्ह लिहा. (<, =, >)

(a) (b) (c)

(d) (e) (f)

(g) (h) (i)

(j)

6. खालील अपूर्णांक वेगवेगळ्या संख्या दर्शवितात. त्यांना सरळरूप देऊन सममूल्य अपूर्णांकांचे गट तयार करा.

(a) $\frac{2}{12}$ (b) $\frac{3}{15}$ (c) $\frac{8}{50}$

(d) $\frac{16}{100}$ (e) $\frac{10}{60}$ (f) $\frac{15}{75}$

(g) $\frac{12}{60}$ (h) $\frac{16}{96}$ (i) $\frac{12}{75}$

(j) $\frac{12}{72}$ (k) $\frac{3}{18}$ (l) $\frac{4}{25}$

7. खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा व ती कशी आली ते लिहा.

(a) $\frac{5}{9}, \frac{4}{5}$ सममूल्य आहेत का? (b) $\frac{9}{16}, \frac{5}{9}$ सममूल्य आहेत का?

(c) $\frac{4}{5}, \frac{16}{20}$ सममूल्य आहेत का? (d) $\frac{1}{15}, \frac{4}{30}$ सममूल्य आहेत का?

8. एका पुस्तकाच्या 100 पानांपैकी इलाने 25 पाने वाचली. ललिताने या पुस्तकाचा $\frac{1}{2}$ भाग वाचला. कोणी कमी पाने वाचली?

9. रफिकने 1 तासाच्या $\frac{3}{6}$ वेळ व्यायाम केला व रोहितने 1 तासाच्या $\frac{3}{4}$ वेळ व्यायाम केला. कोणी जास्त वेळ व्यायाम केला?

10. 25 विद्यार्थिनींच्या अ या तुकडीतील 20 विद्यार्थिनींनी प्रथम श्रेणी मिळविली. 30 विद्यार्थिनींच्या ब या तुकडीतील 24 विद्यार्थिनींनी प्रथम श्रेणी मिळविली. कोणत्या तुकडीतील विद्यार्थिनींनी एकूणातील अधिक भाग प्रथम श्रेणी मिळविली?

7.10 अपूर्णांकांची बेरीज व वजाबाकी

आपण नैसर्गिक संख्या पूर्ण संख्या व पूर्णांक संख्या यांचा अभ्यास केला. आता आपण अपूर्णांकांचा अभ्यास करणार आहोत.

जेव्हा आपण नवीन प्रकारच्या संख्या मिळवितो त्यावेळी त्या संख्यांवर क्रिया करता येतात का ते पाहतो. म्हणजे आपण त्यांची बेरीज करू शकतो का? वजाबाकी करू शकतो का? संख्यांच्या बाबतीत आधी पाहिलेले गुणधर्म यांना लागू होतात का? यांच्यासाठी नवीन कोणते गुणधर्म आहेत? या संख्या आपल्या दैनंदिन व्यवहारात कशा उपयुक्त आहेत, असा विचार आपण करतो.

हे उदाहरण पाहा. एक चहाचा दुकानदार दुकानात सकाळी $2\frac{1}{2}$ लीटर व संध्याकाळी $1\frac{1}{2}$ लीटर दुधाचा वापर करतो. तर तो दिवसभरात किती दुधाचा वापर करतो?

शेखरने दुपारी 2 पोळ्या खाल्ल्या व रात्री $1\frac{1}{2}$ पोळी खाल्ली, तर त्याने एकूण किती पोळ्या खाल्ल्या.

या दोन्ही उदाहरणात अपूर्णांकांची बेरीज करायला लागेल. यापैकी काही बेरजा आपण तोंडी व सहज करू शकतो.

प्रयत्न करा

1. आईने सफरचंदाचे चार समान भाग केले. तिने मला 2 भाग व माझ्या भावाला एक भाग दिला, तर आम्हा दोघांना मिळून कितवा भाग दिला?
2. आईने नीलू आणि तिच्या भावाला गहू निवडायला सांगितले. नीलूने एकूणापैकी गहू निवडले व भावाने एकूणापैकी गहू निवडले. दोघांनी मिळून एकूणापैकी किती भाग गहू निवडले.
3. सोहन आपल्या वह्यांना कव्हर घालत होता. सोमवारी त्याने वह्यांनी कव्हरे घातली व मंगळवारी आणखी वह्यांना कव्हरे घातली व उरलेली कव्हरे बुधवारी घातली. बुधवारी त्याने एकूणापैकी किती भाग वह्यांना कव्हरे घातली?

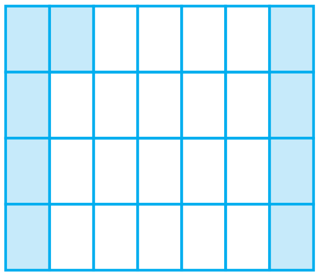
हे करा

आपल्या मित्रांच्या साहाय्याने असे 10 प्रश्न तयार करा व सोडवा.

7.10.1 समच्छेद अपूर्णांकांची बेरीज व वजाबाकी

सर्व अपूर्णांकांची बेरीज तोंडी करता येत नाही. वेगवेगळ्या परिस्थितीत ही बेरीज कशी करायची ते पाहू. हे शिकण्याची आवश्यकता आहे. आपण समच्छेद अपूर्णांकांपासून सुरुवात करू.

7×4 मापाचा एक आखीव चौकडीचा कागद घ्या. (आकृती 7.13). या कागदात प्रत्येक ओळीत 7 चौकोन आहेत व प्रत्येक स्तंभात 4 चौकोन आहेत.

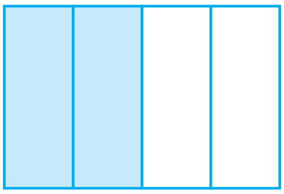


आकृती 7.13

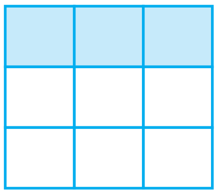
यामध्ये एकूण चौकोन किती आहेत? यातील 5 चौकोनांमध्ये हिरवा रंग भरा. हिरव्या रंगाने एकूणापैकी किती भाग भरला आहे. आता उरलेल्यापैकी 4 चौकोनांमध्ये पिवळा रंग भरा. पिवळ्या रंगाने एकूणपैकी किती भाग रंग भरला आहे? एकूणापैकी किती भाग रंगाने भरला आहे? यावरून $\frac{5}{28}+\frac{4}{28}=\frac{9}{28}$ आहे हे दिसते आहे.

आणखी उदाहरण पाहा :

आकृती 7.14 (i) मध्ये आकृतीचा दोन चतुर्थांश भाग छायांकित आहे, याचा अर्थ 4 पैकी दोन भाग किंवा आकृतीचा $\frac{1}{2}$ भाग छायांकित आहे.



आकृती 7.14 (i)



आकृती 7.14 (ii)

अर्थात $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1+1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ आहे.

आकृती 7.14 (ii) पाहा.

आकृती 7.14 (ii) $\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{1+1+1}{9}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ दाखविते.

आपण या उदाहरणावरून काय शिकलो? दोन वा अधिक समच्छेद अपूर्णांकांची बेरीज खालीलप्रमाणे करतात.

पायरी 1 अंशांची बेरीज करा.

पायरी 2 (दोन अथवा सर्व) छेद तसेच ठेवा.

पायरी 3 उत्तर खालीलप्रमाणे लिहा. $\dfrac{\text{पायरी 1 चे उत्तर}}{\text{पायरी 2 चे उत्तर}}$

आता याप्रमाणे $\frac{3}{5}$ आणि $\frac{1}{5}$ यांची बेरीज करा.

$\frac{3}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3+1}{5}=\frac{4}{5}$

आता $\frac{7}{12}$ व $\frac{3}{12}$ यांची बेरीज करा.

प्रयत्न करा

1. आकृतीच्या साहाय्याने बेरीज करा.

   (i) $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$ (ii) $\frac{2}{5}+\frac{3}{5}$ (iii) $\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}$

2. या बेरजेचे उत्तर काय?

   चित्राच्या साहाय्याने कसे दाखवाल? कागदाच्या घड्या घालून हे कसे दाखवाल?

3. प्रश्न 1 व 2 प्रमाणे 5 प्रश्न तयार करा.

   आपल्या मित्रांच्या साहाय्याने ते सोडवा.

वजाबाकीचा अभ्यास

शर्मिलाजवळ केकचा $\frac{5}{6}$ भाग होता. तिने केकचा $\frac{2}{6}$ भाग आपल्या छोट्या भावाला दिला. तिच्याजवळ किती भाग राहिला?

एका आकृतीच्या साहाय्याने हे सोप्या रीतीने पाहता येईल. लक्षात घ्या की येथे समच्छेद अपूर्णांक आहेत. (आकृती 7.15).

आकृती 7.15

$\frac{5}{6}-\frac{2}{6}=\frac{5-2}{6}=\frac{3}{6}$ म्हणजे $\frac{1}{2}$ हे उत्तर मिळते.

(हे समच्छेद अपूर्णांकांच्या बेरीज करण्याप्रमाणेच आहे ना?)

आपण समच्छेद अपूर्णांकांमधील फरक खालीलप्रमाणे काढतो.

पायरी 1 मोठ्या अंशातून छोटा अंश वजा करा.

पायरी 2 छेद तसाच ठेवा.

पायरी 3 अपूर्णांक असा लिहा $\frac{\text{पायरी 1 चे उत्तर}}{\text{पायरी 2 चे उत्तर}}$

आपण $\frac{3}{10}$ मधून $\frac{8}{10}$ वजा करू शकू का?

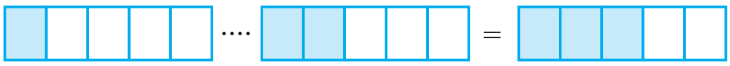
प्रयत्न करा

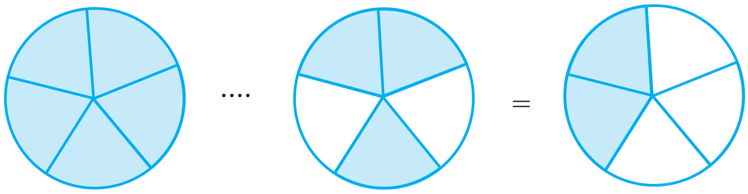
1. आणि यांतील फरक काढा.
2. आईने पुरणाच्या एका पोळीचे पाच समान भाग केले. सीमाने त्यातील एक भाग खाल्ला. मी आणखी एक भाग खाल्ला तर पोळीचा किती भाग शिल्लक राहिला?

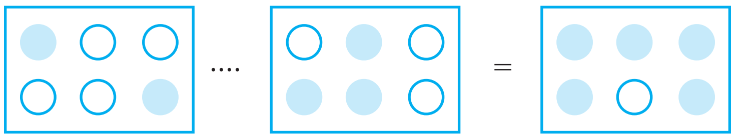
3. माझ्या मोठ्या बहिणीने टरबुजाचे 16 समान भाग केले. मी त्यातील 7 तुकडे खाल्ले. माझ्या मित्राने 4 तुकडे खाल्ले. आम्ही दोघांनी मिळून किती टरबूज खाल्ले? मी आपल्या मित्रापेक्षा किती जास्त टरबूज खाल्ले? किती टरबूज शिल्लक राहिले?
4. अशा प्रकारचे पाच प्रश्न तयार करा व मित्रांच्या साहाय्याने सोडवा.

सराव 7.5

1. खालील अपूर्णांकांची बेरीज व वजाबाकी करून लिहा.

(a) 

(b) 

(c) 

2. सोडवा.

(a) $\frac{1}{18}+\frac{1}{18}$ (b) $\frac{8}{15}+\frac{3}{15}$ (c) $\frac{7}{7}-\frac{5}{7}$

(d) $\frac{1}{22}+\frac{21}{22}$ (e) $\frac{12}{15}-\frac{7}{15}$

(f) $\frac{5}{8}+\frac{3}{8}$ (g) $1-\frac{2}{3}\ \left(1=\frac{3}{3}\right)$

(h) $\frac{1}{4}+\frac{0}{4}$ (i)

3. शुभमने आपल्या खोलीच्या भिंतीवर $\frac{2}{3}$ भागावर चित्र काढले. त्याची बहीण माधवी हिने त्याला मदत म्हणून भिंतीचा $\frac{1}{3}$ भाग रंगविला. दोघांनी मिळून एकूण किती भाग रंगवला?

4. रिकाम्या जागा भरा.

(a) $\frac{7}{10}-\square=\frac{3}{10}$ (b) $\square-\frac{3}{21}=\frac{5}{21}$

(c) (d)

5. जावेदला संत्र्यांच्या टोपलीतील $\frac{5}{7}$ संत्री मिळाली. टोपलीमध्ये किती भाग संत्री शिल्लक राहिली?

7.10.2 अपूर्णांकांची बेरीज व वजाबाकी

आपण समच्छेद अपूर्णांकांची बेरीज व वजाबाकी शिकलो. ज्या अपूर्णांकांचे छेद समान नाहीत त्यांची बेरीज व वजाबाकी करणेही फारसे अवघड नाही. जेव्हा आपल्याला दोन अपूर्णांकांची बेरीज अथवा वजाबाकी करायची आहे तर दोन अपूर्णांकांचे छेद समान येतील असे बदलून घेणे आवश्यक आहे व नंतर पुढे क्रिया करायला हवी.

मध्ये किती मिळविले की $\frac{1}{2}$ मिळतात? याचा अर्थ इच्छित संख्या मिळविण्यासाठी $\frac{1}{2}$ मधून वजा करायला हवेत.

व $\frac{1}{2}$ हे असमच्छेदिक अपूर्णांक आहेत. यांची वजाबाकी करण्यास प्रथम समान छेद येतील असे ते बदलावे लागतील. $\frac{1}{2}$ व यांचे समान छेद असलेले अपूर्णांक अनुक्रमे $\frac{5}{10}$ आणि $\frac{2}{10}$ आहेत.

कारण $\frac{1}{2} = \frac{1\times 5}{2\times 5} = \frac{5}{10}$ आणि $\frac{1}{5} = \frac{1\times 2}{5\times 2} = \frac{2}{10}$ आहे.

म्हणून

उदाहरण 8 : मधून वजा करा.

उकल : आपल्याला समान छेद असलेले आणि चे सममूल्य अपूर्णांक तयार करावे लागतील. येथे छेद 4 आणि 6 चा ल.सा.वि. 12 आहे.

म्हणून

उदाहरण 9 : आणि ची बेरीज करा.

उकल : 5 आणि 3 चा ल.सा.वि. 15 आहे.

म्हणून

उदाहरण 10 : सोडवा. $\frac{3}{5} - \frac{7}{20}$

उकल : 5 आणि 20 चा ल.सा.वि. 20 आहे.

म्हणून $\frac{3}{5}-\frac{7}{20}=\frac{3\times4}{5\times4}-\frac{7}{20}=\frac{12}{20}-\frac{7}{20}$

$=\frac{12-7}{20}=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$

प्रयत्न करा

1. $\frac{2}{5}$ आणि $\frac{3}{7}$ यांची बेरीज करा.
2. $\frac{5}{7}$ मधून $\frac{2}{5}$ वजा करा.

आपण मिश्र अपूर्णांकांची बेरीज अथवा वजाबाकी कशी करतो?

मिश्र अपूर्णांक हा एक पूर्णांक व एक छेदाधिक अपूर्णांक यांच्या बेरजेच्या रूपात किंवा एका अंशाधिक अपूर्णांकाच्या रूपात लिहिता येतो. मिश्र अपूर्णांकांची बेरीज अथवा वजाबाकी करताना त्यांचे पूर्णांक आणि अपूर्णांक यांवर वेगवेगळ्या क्रिया करतात किंवा पहिल्यांदा मिश्र अपूर्णांक हे अंशाधिक अपूर्णांकांच्या रूपात लिहितात आणि मग बेरीज अथवा वजाबाकी करतात.

उदाहरण 11 : $2\frac{4}{5}$ आणि $3\frac{5}{6}$ यांची बेरीज करा.

उकल $\frac{5\times5}{6\times5}$: $2\frac{4}{5}+3\frac{5}{6}=2+\frac{4}{5}+3+\frac{5}{6}=5+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}$.

आता (कारण 5 आणि 6 चा ल.सा.वि. 30)

$=$ $=\frac{30+19}{30}$

$=$

म्हणून $5+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}=$

$=6+\frac{19}{30}=6\frac{19}{30}$

म्हणून $=6\frac{19}{30}$

विचार करा, चर्चा करा आणि लिहा

आपण याची उकल काढण्यासाठी दुसऱ्या प्रकारे विचार करू शकतो का?

उदाहरण 12 : सोडवा .

उकल : पूर्णांक 4 आणि 2 तसेच अपूर्णांक आणि यांची वेगळी वजाबाकी करता येते.

लक्षात घ्या $4 > 2$ आहे आणि $\frac{2}{5} > \frac{1}{5}$ आहे.

म्हणून $4\frac{2}{5} - 2\frac{1}{5} = (4-2) + \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}\right) = 2 + \frac{1}{5} = 2\frac{1}{5}$

उदाहरण 13 : सोडवा. $8\frac{1}{4} - 2\frac{5}{6}$

उकल : येथे $8 > 2$ आणि $\frac{1}{4} < \frac{5}{6}$ आहे. आपण याची उकल खालीलप्रमाणे करू शकतो.

$8\frac{1}{4} = \frac{(8\times4)+1}{4} = \frac{33}{4}$ आणि $2\frac{5}{6} = \frac{2\times6+5}{6} = \frac{17}{6}$

आता

$$\frac{33}{4} - \frac{17}{6} = \frac{33\times3}{12} - \frac{17\times2}{12} \quad \text{(कारण 4 आणि 6 चा ल. सा. वी. 12 आहे)}$$

$$= \frac{99-34}{12} - \frac{65}{12} = 5\frac{5}{12}$$

प्रश्नसंग्रह 7.6

1. सोडवा.

(a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{7}$ (b) $\frac{3}{10} + \frac{7}{15}$ (c) $\frac{4}{9} + \frac{2}{7}$ (d) $\frac{5}{7} + \frac{1}{3}$

(e) $\frac{2}{5} + \frac{1}{6}$ (f) $\frac{4}{5} + \frac{2}{3}$ (g) $\frac{3}{4} \int \frac{1}{3}$ (h) $\frac{5}{6} \int \frac{1}{3}$

(i) $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}$ (j) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ (k) $1\frac{1}{3} + 3\frac{2}{3}$ (l) $4\frac{2}{3} + 3\frac{1}{4}$

(m) $\frac{16}{5} \int \frac{7}{5}$ (n) $\frac{4}{3} \int \frac{1}{2}$

2. सरिताने $\frac{2}{5}$ मी. रिबिन खरेदी केली व ललिताने $\frac{3}{4}$ मी. रिबिन खरेदी केली. दोघींनी मिळून एकूण किती रिबिन खरेदी केली.

3. नैनाला $1\frac{1}{2}$ केक अणि नजमाला $1\frac{1}{3}$ केक मिळाले. दोघींना मिळून किती केक मिळाले?

4. रिकाम्या जागा भरा. (a) $\square - \frac{5}{8} = \frac{1}{4}$ (b) $\square - \frac{1}{5} = \frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{2} - \square = \frac{1}{6}$

5. बेरजेचे व वजाबाकीचे कोष्टक पूर्ण करा.

(a)

$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	

(b)

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	

6. $\frac{7}{8}$ मी. लांबीच्या तारेचे दोन तुकडे होतात. एका तुकड्याची लांबी $\frac{1}{4}$ मी. आहे तर दुसऱ्या तुकड्याची लांबी किती?

7. नंदिनीचे घर तिच्या शाळेपासून $\frac{9}{10}$ किमी अंतरावर आहे. ती काही अंतर चालत जाते व $\frac{1}{2}$ अंतर बसने जाऊन शाळेत पोहोचते तर ती किती अंतर चालत जाते?

8. आशा आणि सॅम्युअलकडे पुस्तके ठेवण्याची एकाच मापाची कपाटे आहेत. आशाच्या कपाटात $\frac{5}{6}$ भाग पुस्तके आहेत तर सॅम्युअलच्या कपाटात $\frac{2}{5}$ भाग पुस्तके आहेत. कोणाचे कपाट किती जास्त पुस्तकांनी भरले आहे.

9. शाळेच्या मैदानाला फेरी मारण्यास जयदेवला $2\frac{1}{5}$ मिनिट लागते. राहुलला अशीच फेरी मारण्यास $\frac{7}{4}$ मिनिटे लागतात. दोघांपैकी कोण कमी वेळात फेरी मारतो व किती कमी वेळात?

आपण काय शिकलो

1. (a) अपूर्णांक संख्या म्हणजे एका पूर्णाचा किती भाग ते दाखविते व संख्यारेषेवर बिंदूच्या साहाय्याने दाखविता येते. एक पूर्ण म्हणजे एक वस्तू अगर वस्तूंचा समूह असू शकतो.

   (b) मोजलेल्या भागांना अपूर्णांकांच्या रूपात दाखविण्यासाठी सर्व भाग समान असणे आवश्यक आहे.

2. मध्ये 5 हा अपूर्णांकाचा अंश व 7 हा छेद असतो.

3. अपूर्णांक हा संख्यारेषेवर दाखविता येतो. प्रत्येक अपूर्णांक म्हणजे संख्यारेषेवरील एक निश्चित बिंदू असतो.

4. छेदाधिक अपूर्णांकांत अंश हा छेदापेक्षा मोठा असतो आणि अंशाधिक अपूर्णांकात छेद हा अंशापेक्षा लहान असतो. अंशाधिक अपूर्णांक हा पूर्ण भाग आणि कितवा भाग या स्वरूपात दाखविता येतो. या स्वरूपात याला मिश्र अपूर्णांक म्हणतात.

5. दोन अपूर्णांक एकच संख्या दाखवित असतील तर त्यांना सममूल्य अपूर्णांक म्हणतात. प्रत्येक अंशाधिक अथवा छेदाधिक अपूर्णांकास सममूल्य असतोच. एका दिलेल्या अपूर्णांकाच्या अंश व छेदास एकाच शून्येतर संख्येने गुणल्यास अथवा भागल्यास आपल्याला सममूल्य अपूर्णांक मिळतो.

6. ज्या अपूर्णांकात अंश व छेद यांच्यामध्ये एक शिवाय अन्य गुणक नसेल तर त्याला अपूर्णांकाचे सरळरूप म्हणतात.

दशांश अपूर्णांक

प्रकरण 8

8.1 प्रस्तावना

सविता आणि शमा बाजारात काही वस्तू खरेदी करण्यास जात होत्या. सविता म्हणाली, "माझ्याजवळ 5 रुपये 75 पैसे आहेत" शमा म्हणाली "माझ्याजवळ 7 रुपये 50 पैसे आहेत " त्या दोघींना हे दशांश चिन्ह वापरून लिहिणे माहीत होते.

सविता म्हणाली, माझ्याजवळ 5.75 रुपये आहेत आणि शमा म्हणाली, माझ्याजवळ 7.50 रुपये आहेत. त्यांनी बरोबर लिहिले का?

आपल्याला माहीत आहे की, दशांश चिन्हाने दशांश अपूर्णांक दाखविला जातो. या प्रकरणात आपण दशांश अपूर्णांकासंबधी आणखी शिकणार आहोत.

8–2 दशांश अपूर्णांक

रवि आणि राजूने आपापल्या पेन्सिलींची लांबी मोजली. रविच्या पेन्सिलीची लांबी 7 सेमी 5 मिमी होती आणि राजूच्या पेन्सिलीची लांबी 8 सेमी 3 मिमी होती. ही लांबी सेमी व मिमी बरोबरीने दशांश चिन्हाचा वापर करून लिहू शकतो का?

आपल्याला माहीत आहे की, 10 मिमी = 1 सेमी

म्हणून 1 मिमी $= \frac{1}{10}$ सेमी

आता रविच्या पेन्सिलीची लांबी = 7 सेमी 5 मिमी

= 7 सेमी

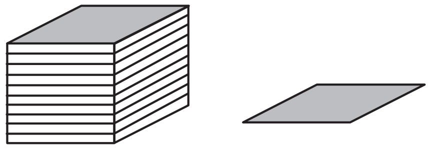
म्हणजेच 7 सेमी आणि 1 सेमीचा 5 दशांश भाग.

राजूच्या पेन्सिलीची लांबी = 8 सेमी 3 मिमी

= 8 सेमी

म्हणजेच 8 सेमी आणि 1 सेमी चा तीन दशांश भाग

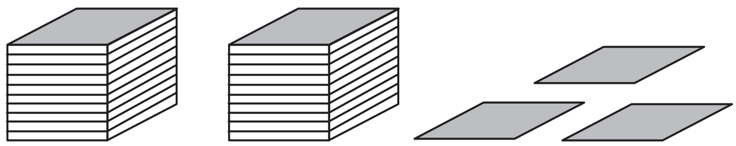
आधी शिकलेले पुन्हा आठवूया.

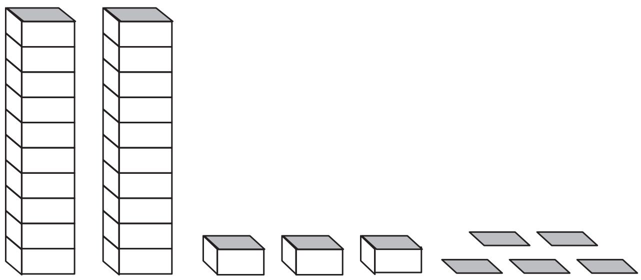


जर आपण एक एकक म्हणजे एक गठ्ठा असे दाखविले तर एक एकक म्हणजे एक गठ्ठा, दोन एकक म्हणजे दोन गठ्ठे याप्रमाणे दाखविता येते.

एक गठ्ठा जर,दहा समान भागात विभागला तर प्रत्येक भाग हा एका गठठ्याच्या (एक दशांश) आहे. दोन भाग, दोन दशांश भाग दाखवितो. पाच भाग पाच दशांश भाग याप्रमाणे, एकेकाचे दोन गठ्ठे आणि एका गठ्ठ्यातील तीन भाग खालीलप्रमाणे दाखविता येतात.

एकेकांचे	दशांश
(1)	($\frac{1}{10}$)
2	3





हेच आपण 2.3 असेही लिहू शकतो. हे आपण दोन दशांशचिन्ह 3 असे वाचतो.

आता आपण जेथे 1 पेक्षा आधिक एकक आहेत, असे उदाहरण पाहू. गठ्ठ्यांची एक चवड 10 एकक दाखविते. म्हणून येथे दाखविलेली संख्या खालीलप्रमाणे आहे.

दशम	एकक	दशांश
(10)	(1)	($\frac{1}{10}$)
2	3	5

म्हणून $20 + 3 + \quad = 23.5$

हे तेवीस दशांशचिन्ह पाच (तेवीस पॉईंट 5) असे वाचू.

प्रयत्न करा

1. खालीलसाठी आपण दशांशचिन्ह वापरून लिहू शकता का?

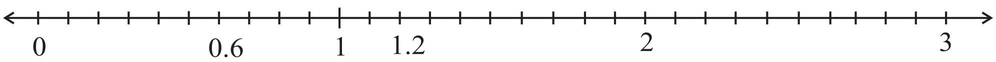
शतक (100)	दशक (10)	एकक (1)	दशांश $(\frac{1}{10})$
5	3	8	1
2	7	3	4
3	5	4	6

2. रवि आण राजूच्या पेन्सिलींची लांबी दशांश चिन्हाचा वापर करून सेंमी. मध्ये लिहा.
3. प्रश्न 1 प्रमाणे आणखी तीन उदाहरणे तयार करा.

संख्या रेषेवर स्थापणे

अपूर्णांक संख्यारेषेवर कसे स्थापन करावयाचे ते आपण पाहिले. आता दशांश अपूर्णांक संख्यारेषेवर कसे स्थापन करावयाचे ते पाहू. 0.6 संख्यारेषेवर स्थापन करू.

0.6 शून्यापेक्षा मोठा आहे आणि एकपेक्षा कमी आहे. यामध्ये 6 दशांश आहेत. संख्यारेषेवरील 0 आणि 1 यामधील लांबीचे समान 10 भाग करा आणि त्यातील सहावा भाग जेथे येतो तेथील बिंदू म्हणजे 0.6 ही संख्या होय.



0 आणि 1 मधील पाच दशांश अपूर्णांकातील संख्या लिहा आणि त्या संख्यारेषेवर दाखवा.

2.3 संख्यारेषेवर दाखवू शकू का? 2.3 मध्ये किती पूर्ण (एकक) व किती दशांश आहेत? संख्यारेषेवर हे कोठे येईल?

1.4 संख्यारेषेवर दाखवा.

उदाहरण 1 : खालील संख्या स्थानीय अंकांच्या किंमतीप्रमाणे कोष्टकात लिहा.
(a) 20.5 (b) 4.2

उकल : अंकांच्या स्थानीय किंमतीप्रमाणे कोष्टक तयार करा.

	दशक (10)	एकक (1)	दशांश $(\frac{1}{10})$
20.5	2	0	5
4.2	0	4	2

उदाहरण 2 : दशांश चिन्हाचा वापर करून लिहा:

(a) दोन एकक आणि 5 दशांश

(b) तीस आणि 1 दशांश

उकल : (a) दोन एकक आणि 5 दशांश

$$= 2 + \frac{5}{10} = 2.5$$

(b) तीस आणि 1 दशांश

$$= 30 + \frac{1}{10} = 30.1$$

उदाहरण 3 : दशांश चिन्हाचा वापर करून लिहा:

(a) $30 + 6 + \frac{2}{10}$ (b) $600 + 2 + \frac{8}{10}$

उकल : (a) $30 + 6 + \frac{2}{10}$

या संख्येत किती दशक किती एकक व किती दशांश आहेत ते पाहा.

यामध्ये 3 दशक, 6 एकक व 2 दशांश आहेत.

म्हणून दशांश रूप 36.2 होईल.

(b) $600 + 2 + \frac{8}{10}$

यामध्ये 6 शतक, दशक नाही, 2 एकक आणि 8 दशांश आहेत.
म्हणून दशांश रूप 602.8 होईल.

अपूर्णांकाचे दशांश रूप

ज्या अपूर्णांकाचा छेद 10 असतो तो दशांश रूपात कसा लिहितात ते आपण पाहिले.

खालील अपूर्णांक दशांश रूपात लिहायचा प्रयत्न करू. (a) $\frac{22}{10}$ (b) $\frac{1}{2}$

(a) आपल्याला माहीत आहे. $\frac{22}{10} = \frac{20+2}{10}$

$$= \frac{20}{10} + \frac{2}{10} = 2 + \frac{2}{10} = 2.2$$

म्हणून $= 2.2$ (दशांश रूपात)

(b) $\frac{1}{2}$ मध्ये छेद 2 आहे. दशांश अपूर्णांकात लिहिण्याच्या दृष्टीने छेद 10 असणे आवश्यक आहे. याचा सममूल्य काढायला आपण शिकलो आहोत. $\frac{1}{2} = \frac{1\times5}{2\times5} = \frac{5}{10} = 0.5$

यामुळे $\frac{1}{2}$ चे दशांश रुप 0.5 आहे.

प्रयत्न करा

$\frac{3}{2}, \frac{4}{5}, \frac{8}{5}$ यांना दशांश रूप द्या.

दशांश अपूर्णांक, अपूर्णांकाच्या स्वरुपात

ज्याचा छेद 10, 2 व 5 आहे ते दशांश रूपात कसे लिहायचे, हे आपण पाहिले आहे.

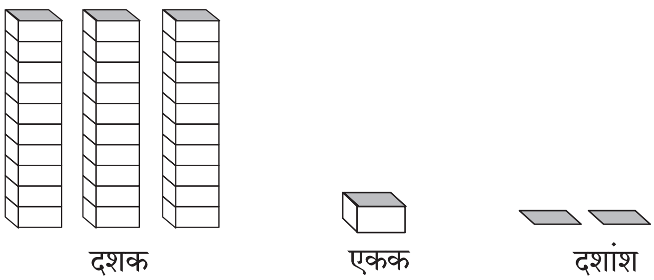
आपण 1.2 हे अपूर्णांच्या रूपात लिहू शकतो, चला पाहूया.

$2 = 1 + \frac{2}{10} =$ 10 2 12

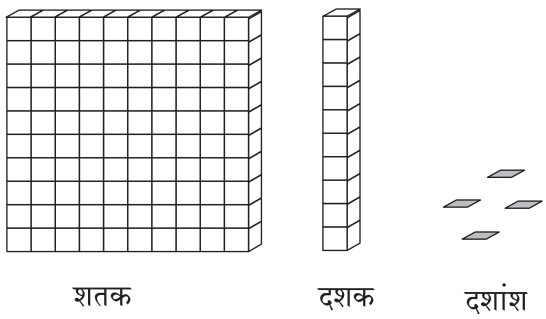
उदाहरणसंग्रह 8.1

1. खाली दिलेल्या सारणीत संख्या लिहा.

(a)



(b)



शतक (100)	दशक (10)	एकक (1)	दशांश $(\frac{1}{10})$

2. खालील दशांश संख्या स्थानिक मूल्याप्रमाणे सारणीत लिहा.

   (a) 19.4 (b) 0.3 (c) 10.6 (d) 205.9

3. खालील संख्या दशांश रूपात लिहा.:

   (a) 7 दशांश

   (b) 2 दशक 9 दशांश

   (c) चौदा दशांश चिन्ह सहा

   (d) एक शतक आणि 2 एकक

   (e) सहा शतक दशांशचिन्ह आठ

4. खालील संख्या दशांश रूपात लिहा.:

   (a) $\frac{5}{10}$ (b) $3 + \frac{7}{10}$ (c) $200 + 60 + 5 + \frac{1}{10}$

   (d) $70 + \frac{8}{10}$ (e) $\frac{88}{10}$ (f) $4\frac{2}{10}$ (g) $\frac{3}{2}$

   (h) $\frac{2}{5}$ (i) $\frac{12}{5}$ (j) $3\frac{3}{5}$ (k) $4\frac{1}{2}$

5. खालील दशांशारूपातील संख्या अपूर्णांकात लिहून त्यांना संक्षिप्तरुप द्या.

   (a) 0.6 (b) 2.5 (c) 1.0 (d) 3.8

   (e) 13.7 (f) 21.2 (g) 6.4

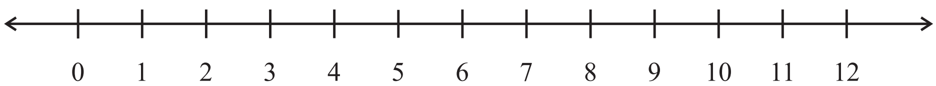
6. सेमी वापरून दशांशरूपात लिहा.

   (a) 2 मिमी (b) 30 मिमी (c) 116 मिमी (d) 4 सेमी 2 मिमी

   (e) 11 सेमी 52 मिमी (f) 83 मिमी

7. खालील संख्या संख्यारेषेवर कोणत्या दोन संख्यांच्या दरम्यान आहेत? यातील कोणती पूर्ण संख्या दिलेल्या दशांश संख्यांच्या अधिक जवळ आहे.

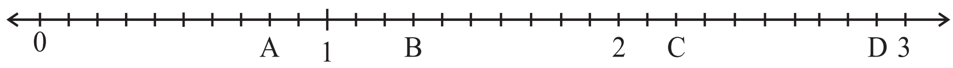
   (a) 0.8 (b) 5.1 (c) 2.6 (d) 6.4 (e) 9.0 (f) 4.9



8. खालील संख्या संख्यारेषेवर दाखवा.

   (a) 0.2 (b) 1.9 (c) 1.1 (d) 2.5

9. संख्यारेषेवर स्थापित A, B, C, D या चार बिंदूंसाठी दशांशरूपातील संख्या लिहा.



10. (a) रमेशच्या वहीची लांबी 9 सेमी 5 मिमी आहे. सेंमीमध्ये याची लांबी काय?

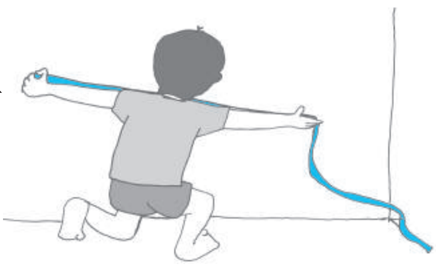
(b) हरभऱ्याच्या एका रोपट्याची उंची 65 मिमी आहे. याची लांबी सेमीमध्ये दाखवा.

8.3 शतांश

डेव्हिड आपल्या खोलीची लांबी मोजत होता. ज्याची लांबी 4 मी आणि 25 सेमी आहे.

त्याला ही लांबी मीटरमध्ये लिहायची आहे. तुम्ही त्याला मदत करू शकता का? एक सेमी म्हणजे मीटरचा कितवा भाग होतो?

1 सेमी $= \frac{1}{100}$ मी अथवा 1 मीटरचा शंभरावा भाग.



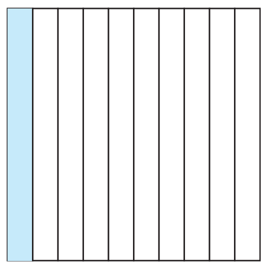
याप्रमाणे 25 सेमी = $\frac{25}{100}$ मी $\frac{1}{100}$ चा अर्थ 1 मीटरचे

100 समान भाग करून त्यातील 1 भाग. हे आपण $\frac{1}{10}$ साठी केले आहे. हे चित्राने ही दाखवू.

एका चौरसाचे दहा समान भाग करू.

छायांकित भाग चौरसाचा कितवा भाग आहे?

हा $\frac{1}{10}$ म्हणजेच एक दशांश 0.1 (आकृती (i) पहा.)



आकृती (i)

खालील प्रत्येक आयतांचे दहा समान भाग करा.

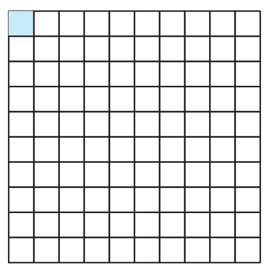
याप्रमाणे आपल्याला 100 छोटे चौरस मिळतील (आकृती (ii) पहा.)

यातील प्रत्येक छोटा चौरस मोठ्या चौरसाचा कितवा भाग आहे?

प्रत्येक छोटा चौरस मोठ्या चौरसाचा $\frac{1}{100}$ अथवा एक दशांश भाग आहे.

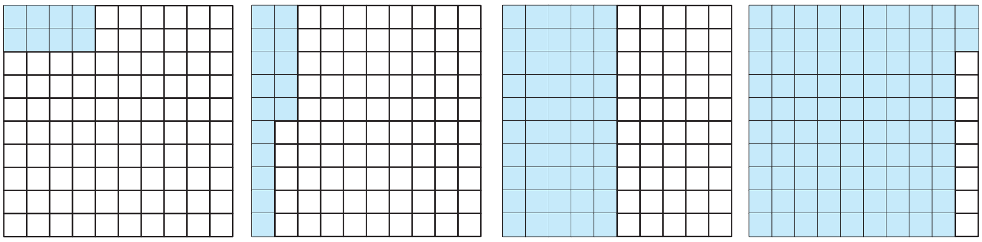
दशांश रूपात आपण $\frac{1}{100} = 0.01$ लिहू आणि हे 'शून्य पॉईंट शून्य एक)' शून्य पूर्णांक एक शतांश असे वाचू.

जर आपण मोठ्या चौरसाचे 8 छोटे चौरस छायांकित केले, 15 चौरस छायांकित केले, 50 चौरस छायांकित केले, 92 चौरस छायांकित केले, तर ते पूर्ण चौरसाचे कितवे भाग होतील?



आकृती (ii)

वरील प्रश्नाचे उत्तर शोधण्यासाठी खालील आकृती पाहा.



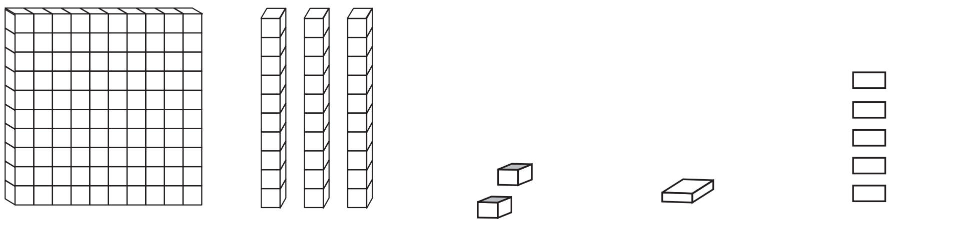
छायांकित भाग	अपूर्णांक	दशांश रुप
8 चौरस	$\frac{8}{100}$	0.08
15 चौरस	$\frac{15}{100}$	0.15
50 चौरस	________	________
92 चौरस	________	________

आणखी काही स्थानिक किमतीचे कोष्टक पाहू.

एकक (1)	दशांश ($\frac{1}{10}$)	शतांश($\frac{1}{100}$)
2	4	3

वरील कोष्टकातील संख्या $2 + \frac{4}{10} + \frac{3}{100}$ आहे. दशांश रूपात आपण ही 2.43 लिहू व 'दोन दशांश चिन्ह चार तीन' अशी वाचू.

उदाहरण 4 : प्रत्येक चित्राखाली दिल्याप्रमाणे कोष्टकात स्थानिक किंमतीप्रमाणे दशांश रूपात संख्या लिहा.



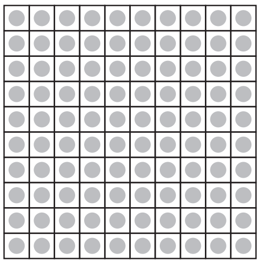
शंभराचा 1 समूह   दहाचे 3 समूह   एककाचे 2 समूह   दशांशाचा 1 समूह   शतांशाचे 5 समूह

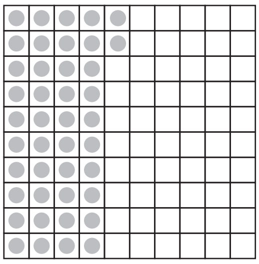
उकल :

शतक (100)	दशक (10)	एकक (1)	दशांश ($\frac{1}{10}$)	शतांश ($\frac{1}{100}$)
1	3	2	1	5

म्हणून, संख्या असेल $100 + 30 + 2 + \frac{1}{10} + \frac{5}{100} = 132.15$

उदाहरण 5 : कोष्टकातील रिकाम्या जागी दशांश रूपात संख्या लिहा.





एकक (1)	दशांश $(\frac{1}{10})$	शतांश $(\frac{1}{100})$

उकल :

एकक (1)	दशांश $(\frac{1}{10})$	शतांश $(\frac{1}{100})$
1	4	2

म्हणून संख्या 1.42 आहे.

उदाहरण 6 : दिलेल्या स्थानिक किंमतीच्या कोष्टकातील संख्या दशांश रुपात लिहा.

शतक (100)	दशक (10)	एकक (1)	दशांश $(\frac{1}{10})$	शतांश $\frac{1}{100}$
2	4	3	2	5

उकल : संख्या आहे. $2 \times 100 + 4 \times 10 + 3 \times 1 + 2 \times \frac{1}{10} + 5 \times \frac{1}{100}$

$= 200 + 40 + 3 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100} = 243.25$

> आपण पाहिले की डावीकडून उजवीकडे जाताना स्थानिक किंमत आधीच्या किंमतीच्या $\frac{1}{10}$ होते.

पहिल्या अंकाला 100 ने गुणले. पुढच्या 4 या अंकाला 10 ने गुणले. (100 चा $\frac{1}{10}$); पुढील 3 या अंकाला 1 ने गुणावे. यानंतर पुढच्या गुणक $\frac{1}{10}$ आणि नंतर $\frac{1}{100}$ (हा $\frac{1}{10}$ चा $\frac{1}{10}$) आहे.

दशांश रूपातील संख्येत दशांश चिन्ह नेहमी एकक आणि दशांश संख्या यांच्यामध्ये असते.

याप्रमाणे आपण स्थानिक किंमतीचे कोष्टक शतांशावरून (शंभराच्या $\frac{1}{10}$ भाग) सहस्त्रांशापर्यंत वाढवू शकतो.

पुढील काही उदाहरणे सोडवू :

उदाहरण 7 : दशांश रूपात लिहा.:

(a) $\frac{4}{5}$ (b) $\frac{3}{4}$ (c) $\frac{7}{1000}$

उकल : (a) ज्याचा छेद 10 आहे अशा $\frac{4}{5}$ चा सममूल्य अपूर्णांक शोधायला हवा.

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \times 2}{5 \times 2} = \frac{8}{10} = 0.8$$

(b) येथे आपल्याला $\frac{3}{4}$ चा सममूल्य अपूर्णांक असा शोधायला हवा की, ज्याचा छेद 10 अथवा 100 असेल. 4 ला गुणून 10 येतील. अशी पूर्ण संख्या नाही. म्हणून आपल्याला छेद 100 येईल, असे पहावे लागेल.

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 25}{4 \times 25} = \frac{75}{100} = 0.75$$

(c) $\frac{7}{1000}$, येथे दशांश व शतांश स्थानी शून्य आहे.

म्हणून, आपल्याला $\frac{7}{1000} = 0.007$ लिहिता येते.

उदाहरण 8 : खालील संख्या अपूर्णांकाच्या संक्षिप्त रूपात लिहा :

(a) 0.04 (b) 2.34 (c) 0.342

उकल : (a) $0.04 = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$

(b) $2.34 = 2 + \frac{34}{100} = 2 + \frac{34 \div 2}{100 \div 2} = 2 + \frac{17}{50} = 2\frac{17}{50}$

(c) $0.342 = \frac{342}{1000} = \frac{342 \div 2}{1000 \div 2} = \frac{171}{500}$

उदाहरण 9 : प्रत्येक अपूर्णांक दशांश रूपात लिहा :

(a) $200 + 30 + 5 + \frac{2}{10} + \frac{9}{100}$ (b) $50 + \frac{1}{10} + \frac{6}{100}$

(c) $16 + \frac{3}{10} + \frac{5}{1000}$

उकल : (a) $200 + 30 + 5 + \frac{2}{10} + \frac{9}{100}$

$= 235 + 2 \times \frac{1}{10} + 9 \times \frac{1}{100}$

$= 235.29$

(b) $50 + \frac{1}{10} + \frac{6}{100}$

$= 50 + 1 \times \frac{1}{10} + 6 \times \frac{1}{100}$

$= 50.16$

(c) $16 + \frac{3}{10} + \frac{5}{1000}$

$= 16 + 3 \times \frac{1}{10} + 0 \times \frac{1}{100} + 5 \times \frac{1}{1000}$

$= 16.305$

उदाहरण 10 : खालील संख्या दशांश रूपात लिहा.:

(a) तिनशे सहा आणि सात शतांश

(b) अकरा दशांश चिन्ह दोन तीन पाच

(c) नऊ आणि पंचवीस सहस्रांश

उकल : (a) तिनशे सहा आणि सात शतांश

$= 306 + \frac{7}{100}$

$= 306 + 0 \times \frac{1}{10} + 7 \times \frac{1}{100} = 306.07$

(b) अकरा दशांशचिन्ह दोन तीन पाच = 11.235

(c) नऊ आणि पंचवीस सहस्रांश

$= 9 +$

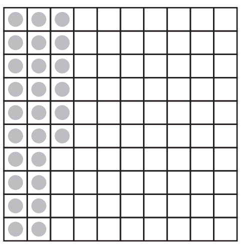
(पंचवीस सहस्रांश $= \frac{25}{1000} = \frac{20}{1000} + \frac{5}{1000} = \qquad + \qquad$)

म्हणून संख्या $= 9 + \frac{0}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000} = 9.025$

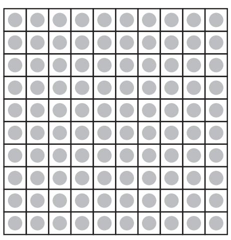
उदाहरणसंग्रह 8.2

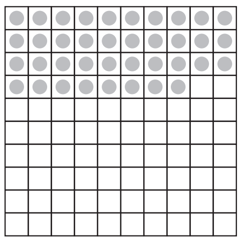
1. या चौकटींच्या साहाय्याने सारणी पूर्ण करा आणि दशांश रूपात लिहा.

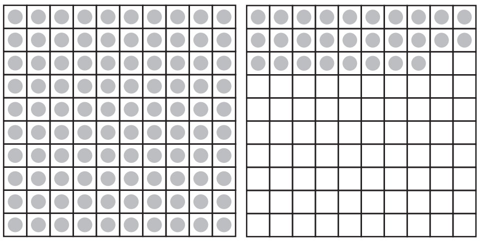
(a)



(b)





(c) 

	एकक	दशक	शतांश	संख्या
(a)				
(b)				
(c)				

2. 'स्थानिक किंमत' कोष्टक पाहून दशांश रूप लिहा.:

	शतक 100	दशक 10	एकक 1	दशांश $\frac{1}{10}$	शतांश $\frac{1}{100}$	सहस्त्रांश $\frac{1}{1000}$
(a)	0	0	3	2	5	0
(b)	1	0	2	6	3	0
(c)	0	3	0	0	2	5
(d)	2	1	1	9	0	2
(e)	0	1	2	2	4	1

3. खालील दशांश रूपातील संख्या स्थानिक किंमत कोष्टकात लिहा :

   (a) 0.29 (b) 2.08 (c) 19.60 (d) 148.32 (e) 200.812

4. खालील संख्या दशांश रूपात लिहा :

   (a) $20+9+\frac{4}{10}+\frac{1}{100}$ (b) $137+\frac{5}{100}$

   (c) $\frac{7}{10}+\frac{6}{100}+\frac{4}{1000}$ (d) $23+\frac{2}{10}+\frac{6}{1000}$

   (e) $700+20+5+\frac{9}{100}$

5. खालील दशांश रूपातील संख्या शब्दात लिहा :

   (a) 0.03 (b) 1.20 (c) 108.56 (d) 10.07

   (e) 0.032 (f) 5.008

6. खालील संख्या, संख्यारेषेवरील कोणत्या दोन बिंदूंमध्ये असणार आहेत?

   (a) 0.06 (b) 0.45 (c) 0.19 (d) 0.66 (e) 0.92 (f) 0.57

7. खालील संख्या अपूर्णांकांच्या सरळ रूपात लिहा :

   (a) 0.60 (b) 0.05 (c) 0.75 (d) 0.18 (e) 0.25

   (f) 0.125 (g) 0.066

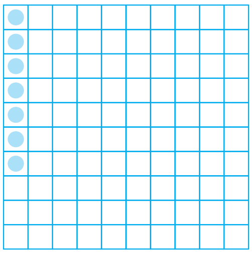
8.4 दशांश संख्यांची तुलना

0.07 आणि 0.1 यातील कोणती संख्या मोठी आहे. सांगू शकाल का?

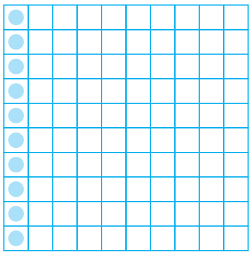
दोन समान आकाराचे चौरस कागद घ्या. त्यांचे समान असे 100 भाग करा. 0.07 =

दाखविण्यासाठी यातील 100 पैकी 7 छायांकित करावे लागतील.

आता, $0.1 = \frac{1}{10} = \frac{10}{100}$, म्हणून 0.1 दाखविण्यासाठी 100 पैकी 10 भाग छायांकित करावे लागतील.



$0.07 = \frac{7}{100}$



$0.1 = \frac{1}{10} = \frac{10}{100}$

यාප्रमाणे, 0.1 > 0.07

आता, 32.55 आणि 32.5 ची तुलना करू. इथे आपण प्रथम पूर्णांकांची तुलना करतो. आपल्या असे लक्षात येते की, दोन्ही संख्यांचे पूर्ण भाग 32 हे समान आहेत. तरीही या दोन संख्या समान नाहीत. आपण यांच्या दशांश स्थानांच्या संख्येची तुलना करू. 32.55 आणि 32.5 यामध्ये दशांश स्थानी असलेल्या संख्याही समान आहेत. आता आपण शतांश स्थानावरील संख्येची तुलना करू.

$\frac{7}{00}2 + \frac{5}{10} + \frac{5}{100}$ 32.55 = और $32.5 = 32 + \frac{5}{10} + \frac{0}{100}$

म्हणून 32.55 > 32.5, किंवा 32.55 मधील शतांश स्थानचा अंक हा 32.5 मधील शतांश स्थानावरील अंकापेक्षा मोठा आहे.

उदाहरण 11 : कोणती संख्या मोठी आहे?

(a) 1 व 0.99 (b) 1.09 व 1.093

उकल : (a) $1 = 1 + \frac{0}{10} + \frac{0}{100}$, $0.99 = 0 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100}$

संख्या 1 मधील पूर्णभाग 1 हा, संख्या 0.99 मधील पूर्ण भाग 0 पेक्षा मोठा आहे.

म्हणून, 1 > 0.99

(b) $1.09 = 1 + \frac{0}{10} + \frac{9}{100} + \frac{0}{1000}$

$1.093 = 1 + \frac{0}{10} + \frac{9}{100} + \frac{3}{1000}$

दोन्ही संख्यात शतांश स्थानापर्यंतचे अंक समान आहेत. पण 1.093 मधील सहस्त्राच्या स्थानावरील अंक हा 1.09 मधील सहस्त्राच्या स्थानावरील अंकापेक्षा मोठा आहे.

म्हणून 1.093 > 1.09

उदाहरणसंग्रह 8.3

1. कोणती संख्या मोठी आहे. कारण लिहा.

(a) 0.3 की 0.4 (b) 0.07 की 0.02 (c) 3 की 0.8

(d) 0.5 की 0.05 (e) 1.23 की 1.2 (f) 0.099 की 0.19

(g) 1.5 की 1.50 (h) 1.431 की 1.490 (i) 3.3 की 3.300

(j) 5.64 की 5.603

(k) अशीच पाच उदाहरणे लिहून त्यातील मोठी संख्या शोधा.

8.5 दशांश अपूर्णांकांचा उपयोग

8.5.1 रक्कम

आपल्याला माहीत आहे की 100 पैसे = ₹ 1

म्हणून 1 पैसा $= ₹\ \frac{1}{100} = ₹\ 0.01$

याप्रमाणे, 65 पैसे = ₹ = ₹ 0.65

आणि 5 पैसे = ₹ = ₹ 0.05

105 पैसे म्हणजे कसे लिहू.

येथे 1 रुपया 5 पैसे म्हणून = ₹ 1.05

प्रयत्न करा

(i) 2 रुपये 5 पैसे आणि 2 रुपये 50 पैसे हे दशांशात लिहा.

(ii) 20 रुपये 7 पैसे आणि 21 रुपये 75 पैसे हे दशांशात लिहा.

8.5.2 लांबी

मोहनला आपल्या टेबलाच्या वरच्या पृष्ठभाग मोजायचा होता. त्याच्याकडे 50 सेमी लांबीची मोजपट्टी होती. त्याने मोजले तेव्हा वरील पृष्ठभागाची लांबी 156 सेमी होती. ही लांबी मीटरमध्ये किती असेल?

1 सेमी = मी. अथवा 0.01 मी

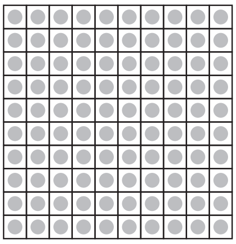
म्हणून 56 सेमी = मी = 0.56 मी

याप्रमाणे टेबलाच्या पृष्ठभागावरील पृष्ठभागाची लांबी

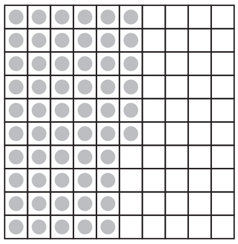
156 सेमी = 100 सेमी + 56 सेमी

= 1 मी + मी = 1.56 मी

महेशला ही लांबी चित्राद्वारे दाखवायची आहे. त्याने समान आकाराच्या चौरसाकृती कागदाचे 100 समान भाग केले आणि प्रत्येक भाग म्हणजे 1 सेमी मानले.



100 सेमी



56 सेमी

प्रयत्न करा

1. 4 मिमी हे दशांशाचा उपयोग करून सेमी मध्ये लिहू शकता का?
2. 7 सेमी 5 मिमी हे दशांशाचा उपयोग करून सेमी मध्ये कसे लिहाल?
3. 52 हे दशांशाचा उपयोग करून किमी मध्ये लिहू शकाल का? दशांशाचा उपयोग करून 340 मी. किमी मध्ये कसे लिहाल? 2008 मी. हे कि.मी. मध्ये कसे लिहाल?

8.5.3 वजन

नंदूने 500 ग्रॅम बटाटे, 250 ग्रॅम सिमला मिरची, 700 ग्रॅम कांदे, 500 ग्रॅम टोमॅटो, 100 ग्रॅम आले आणि 300 ग्रॅम मुळे खरेदी केले. भाज्यांचे एकूण वजन किती? आपण त्यांची बेरीज करू.

500 ग्रॅ. + 250 ग्रॅ. + 700 ग्रॅ. + 500 ग्रॅ. + 100 ग्रॅ. + 300 ग्रॅ. = 2350 ग्रॅ.

आपल्याला माहीत आहे की 1000 ग्रॅ. = 1 कि. ग्रॅ.

म्हणून, 1 ग्रॅ. = कि. ग्रॅ. = 0.001 कि. ग्रॅ.

म्हणून, 2350 किग्रॅ = 2000 ग्रॅ + 350 ग्रॅ = किग्रॅ + किग्रॅ

= 2 किग्रॅ + 0.350 किग्रॅ (किग्रॅ = 0.001 किग्रॅ)

= 2.350 किग्रॅ

म्हणून 2350 ग्रॅ = 2 किग्रॅ 350 ग्रॅ = 2.350 किग्रॅ

म्हणून पिशवीत एकूण 2.350 किग्रॅ भाजी होती.

प्रयत्न करा

1. 456 ग्रॅ. हे दशांशाचा उपयोग करून कि.ग्रॅ. मध्ये लिहू शकता का?
2. 2 कि.ग्रॅ. 9 ग्रॅ. हे दशांशाचा उपयोग करून कि.ग्रॅ. मध्ये कसे लिहिता येईल?

सराव 8.4

1. दशांशचिन्हाचा उपयोग करून ₹ मध्ये लिहा.

(a) 5 पैसे (b) 75 पैसे (c) 20 पैसे

(d) 50 रुपये 90 पैसे (e) 725 पैसे

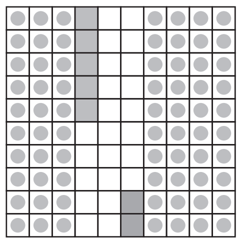
2. दशांशचिन्हाचा उपयोग करून मीटरमध्ये लिहा.
   (a) 15 सेमी (b) 6 सेमी
   (c) 2 मी 45 सेमी (d) 9 मी 7 सेमी (e) 419 सेमी
3. दशांशचिन्हाचा उपयोग करून सेमी मध्ये लिहा.
   (a) 5 मिमी (b) 60 मिमी (c) 164 मिमी
   (d) 9 सेमी 8 मिमी (e) 93 मिमी
4. दशांशचिन्हाचा उपयोग करून किमी मध्ये लिहा.
   (a) 8 मी (b) 88 मी (c) 8888 मी
   (d) 70 किमी 5 मी
5. दशांशचिन्हाचा उपयोग करून किग्रॅ मध्ये लिहा.
   (a) 2 ग्रॅ (b) 100 ग्रॅ (c) 3750 ग्रॅ
   (d) 5 किग्रॅ 8 ग्रॅ (e) 26 किग्रॅ 50 ग्रॅ

8.6 दशांश अपूर्णांकाची बेरीज

हे करा ंची बेरीज करा.

एक चौरस घेऊन त्याचे 100 समान भाग करा.

या चौरसात 0.35 दाखविण्यासाठी 3 दशांश आणि 5 शतांश रंगवा.



यामध्येच 0.42 दाखविण्यासाठी 4 दशांश आणि 2 शतांश रंगवा.

आता चौरसातील किती दशांश आणि किती शतांश रंगवले आहेत. ते मोजा.

म्हणून, 0.35 + 0.42 = 0.77

	एकक	दशांश	शतांश
	0	3	5
+	0	4	2
	0	7	7

याचप्रमाणे आपण जशी पूर्ण संख्यांची बेरीज करतो. तशीच दशांशांचीही बेरीज करू शकतो.

0.68 आणि 0.54 यांची बेरीज करता येईल का?

	एकक	दशांश	शतांश
	0	6	8
+	0	5	4
	1	2	2

म्हणून, 0.68 + 0.54 = 1.22

प्रयत्न करा

बेरीज करा.

(i) 0.29 + 0.36 (ii) 0.7 + 0.08

(iii) 1.54 + 1.80 (iv) 2.66 + 1.85

उदाहरण 12 : लताने ₹ 9.50 रुपयाचे एक पेन व 2.50 रुपयाची एक पेन्सिल खरेदी केली. तिने एकूण किती रुपयाची खरेदी केली?

उकल : पेनच्या खरेदीचा खर्च = ₹ 9.50

पेन्सिलच्या खरेदीचा खर्च = ₹ 2.50

एकूण खर्च = ₹ 9.50

+ ₹ 2.50

= ₹ 12.00

उदाहरण 13 : सॅमसनने 5 किमी 52 मी अंतर बसने, 2 किमी 265 मी. अंतर मोटारने आणि उरलेले 1 किमी 30 मी. अंतर पायी प्रवास केला. त्याने एकूण किती प्रवास केला?

उकल : बसने केलेला प्रवास = 5 किमी 52 मी = 5.052 किमी

मोटरने केलेला प्रवास = 2 किमी 265 मी = 2.265 किमी

पायी केलेला प्रवास = 1 किमी 30 मी = 1.030 किमी

एकूण प्रवास

5.052 किमी

2.265 किमी

\+ 1.030 किमी

8.347 किमी

म्हणून एकूण प्रवास = 8.347 किमी

उदाहरण 14 : राहूलने 4 किग्रॅ 9 ग्रॅ सफरचंद, 2 किग्रॅ 60 ग्रॅम द्राक्षे आणि 5 किग्रॅ 300 ग्रॅम आंबे खरेदी केले. खरेदी केलेल्या फळांचे एकूण वजन किती?

उकल : सफरचंदांचे वजन = 4 किग्रॅ 90 ग्रॅ = 4.090 किग्रॅ

द्राक्षांचे वजन = 2 किग्रॅ 60 ग्रॅ = 2.060 किग्रॅ

आंब्यांचे वजन = 5 किग्रॅ 300 ग्रॅ = 5.300 किग्रॅ

म्हणून खरेदी केलेल्या फळांचे एकूण वजन

4.090 किग्रॅ

2.060 किग्रॅ

\+ 5.300 किग्रॅ

11.450 किग्रॅ

खरेदी केलेल्या फळांचे एकूण वजन = 11.450 किग्रॅ

उदाहरणसंग्रह 8.5

1. बेरीज करा.
   (i) 0.007 + 8.5 + 30.08 (ii) 15 + 0.632 + 13.8
   (iii) 27.076 + 0.55 + 0.004 (iv) 25.65 + 9.005 + 3.7
   (v) 0.75 + 10.425 + 2 (vi) 280.69 + 25.2 + 38
2. रशीदने गणिताचे पुस्तक 35.75 रुपयांना व विज्ञानाचे पुस्तक 32.60 रुपयाला खरेदी केले. रशीदने एकूण किती रुपयाची पुस्तके खरेदी केली?
3. राधिकाच्या आईने तिला 10.50 रुपये दिले आणि वडिलांनी 15.80 रुपये दिले. तिच्या आई वडिलांनी मिळून तिला एकूण किती रुपये दिले?
4. नसरीन आपल्या कुडत्यासाठी 3 मी 20 सेमी कापड खरेदी केले आणि सलवारीसाठी 2 मी 5 सेमी कापड खरेदी केले. दोन्हींसाठी मिळून एकूण किती कापड खरेदी केले?
5. नरेश सकाळी 2 किमी 35 मी. अंतर चालला व सायंकाळी 1 किमी 7 मी. अंतर चालला. तर दिवसभरात एकूण किती अंतर चालला?
6. सुनीताला आपल्या शाळेत जाण्यासाठी 15 किमी 268 मी. अंतर बसने, 7 किमी 7 मी अंतर मोटरने आणि 500 मी अंतर पायी प्रवास करावा लागतो. तर तिची शाळा घरापासून किती अंतरावर आहे?
7. रविने 5 किग्रॅ 400 ग्रॅ तांदूळ, 2 किग्रॅ 20 ग्रॅ साखर आणि 100 किग्रॅ 850 ग्रॅ कणिक खरेदी केली. त्याने खरेदी केलेल्या वस्तूंचे एकूण वजन किती?

8.7 दशांश अपूर्णांकांची वजाबाकी

2.58 मधून 1.32 वजा करा.

	एकक	दशांश	शतांश
	2	5	8
−	1	3	2
	1	2	6

आपण कोष्टक तयार करू.

म्हणून, 2.58 – 1.32 = 1.26

दशांश अपूर्णांकांची वजाबाकी करताना शतांश स्थानाच्या अंकातून शतक स्थानाच्या अंक, दशांश स्थानाच्या अंकातून दशांश स्थानाचा अंक एककातून एकक असे वजा करतात.

कधी कधी दशांश अपूर्णांकांची वजाबाकी करताना मूळ संख्या पुन्हा लिहून घ्यावी लागते.

म्हणून, 3.5 मधून 1.74 वजा करा.

	एकक	दशांश	शतांश
	3	5	0
–	1	7	4

येथे शतक स्थानातील शून्यामधून दुसऱ्या संख्येतील शतक स्थानचे 4 वजा करता येत नाहीत. म्हणून संख्यांची मांडणी वेगळी करून घ्यावी लागेल.

$$\begin{array}{rcccc} & \overset{2}{\cancel{3}} & . & \overset{14}{\cancel{5}} & \overset{10}{0} \\ - & 1 & . & 7 & 4 \\ \hline & 1 & . & 7 & 6 \\ \hline \end{array}$$

म्हणून, 3.5 – 1.74 = 1.76

प्रयत्न करा

5.46 मधून 1.85 वजा करा. 8.28 मधून 5.25 वजा करा.

2.29 मधून 0.95 वजा करा. 5.68 मधून 2.25 वजा करा.

उदाहरण 15 : अभिषेक जवळ ₹ 7.45 रुपये आहेत. तो 5.30 रुपयाचे चॉकलेट खरेदी करतो. त्याच्याजवळ आता किती रुपये शिल्लक असतील?

उकल : एकूण रक्कम = ₹ 7.45

चॉकलेटसाठी खर्च = ₹ 5.30

उरलेली रक्कम = ₹ 7.45 – ₹ 5.30

= ₹ 2.15

उदाहरण 16 : उर्मिलाचे घर तिच्या शाळेपासून 5 किमी 350 मी अंतरावर आहे. ती 1 किमी 70 मी पायी जाते आणि राहिलेले अंतर बसने प्रवास करते. बसने ती किती अंतर जाते ते काढा.

उकल : शाळेपासून धराचे अंतर = 5.350 किमी

पायी गेलेले अंतर = 1.070 किमी

म्हणून बसने केलेला प्रवास = 5.350 किमी – 1.070 किमी

= 4.280 किमी

= 4.280 किमी

= 4 किमी 280 मी

उदाहरण 17 : कांचन 5 किग्रॅ 200 ग्रॅम वजनाचे एक टरबूज खरेदी करते. त्यातील 2 किग्रॅ 750 ग्रॅम वजनाचे टरबूज शेजाऱ्यास देते. तर कांचनजवळ किती वजनाचे टरबूज राहिले.

उकल : टरबुजांचे एकूण वजन = 5.200 किग्रॅ.

शेजाऱ्याला दिलेल्या टरबुजाचे वजन = 2.750 किग्रॅ.

राहिलेल्या टरबुजाचे वजन = 5.200 किग्रॅ. – 2.750 किग्रॅ.

= 2.450 किग्रॅ.

उदाहरणसंग्रह 8.6

1. वजाबाकी करा.
   (a) 20.75 रुपया मधून 18.25 रु. (b) 250 मी मधून 202.54 मी.
   (c) 8.4 रुपया मधून ₹ 5.40 (d) 5.206 किमी मधून 2.051 किमी
   (e) 2.107 किग्रॅ मधून 0.314 किग्रॅ.

2. किंमत काढा.
   (a) 9.756 – 6.28 (b) 21.05 – 15.27
   (c) 18.5 – 6.79 (d) 11.6 – 9.847

3. राजू एक पुस्तक ₹ 35.65 रुपयास खरेदी करतो. त्याने दुकानदाराला 50 रु. दिले. दुकानदार त्याला किती रुपये परत देईल?

4. राणीजवळ 18.50 रु. होते. तिने 11.75 रुपयाचे आइस्क्रीम खरेदी केले. तिच्याजवळ किती रुपये शिल्लक राहिले?

5. टीनाजवळ 20 मी 5 सेमी लांबीचे कापड आहे. त्यातील 4 मी 50 सेमी कापड पडद्यासाठी कापले. टीनाजवळ आता किती कापड शिल्लक राहिले?

6. नमिता दररोज 20 किमी 50 मी अंतर प्रवास करते. यातील 10 किमी 200 मी अंतर ती बसने प्रवास करते व उरलेला रिक्शाने प्रवास करते. नमिता रिक्शाने किती अंतर प्रवास करते?

7. आकाश 10 किग्रॅ भाजी खरेदी करतो. यामध्ये 3 किग्रॅ 500 ग्रॅ कांदा, 2 किग्रॅ 75 ग्रॅ टोमॅटो आणि उरलेले बटाटे आहेत. तर बटाट्याचे वजन किती?

आपण काय शिकलो ?

1. एका पूर्णचे (एककाचे) भाग समजण्यासाठी आपण त्या पूर्णला संपूर्ण तुकड्यात दाखवतो. त्या तुकड्याचे 10 समान भाग केल्यावर त्यातील प्रत्येक भाग त्या एककाचा (एक दशांश) होतो. आपण तो दशांशात 0.1 असा लिहितो. या बिंदूला दशांशचिन्ह म्हणतात आणि तो एकक स्थान आणि दशांश स्थानाच्यामध्ये लिहितात.
2. छेद 10 असलेला प्रत्येक अपूर्णांक दशांश रूपात लिहिता येतो तर प्रत्येक दशांश संख्या अपूर्णांकरूपात लिहिता येते.
3. एका तुकड्याचे 100 समान भाग केले असता प्रत्येक भाग त्या एककाचा $\frac{1}{100}$ (एक शतांश) होतो. दशांश रूपात हे 0.01 असे लिहितात.
4. छेद 100 असलेला प्रत्येक अपूर्णांक दशांश रूपात लिहिता येतो तर प्रत्येक दशांश संख्या अपूर्णांक रूपात लिहिता येते.
5. स्थानिक किंमत सारणीत जसजसे आपण डावीकडून उजवीकडे जातो. तसतसा पुढचा विभाजक मागच्याचा $\frac{1}{10}$ पट होतो.

   स्थानिक किंमत सारणी आपण आणखीही वाढवू शकतो. शतांश स्थानापासून (शतांशाचा $\frac{1}{10}$) सहस्रांश $\frac{1}{1000}$ स्थानापर्यंत, जे आपण दशांशात 0.001 असे लिहितो.
6. दशांश संख्या संख्यारेषेवर दाखविता येतात.
7. प्रत्येक दशांश अपूर्णांक रूपात लिहिता येते.
8. दोन दशांश संख्यांची तुलना करता येते. तुलना संख्येच्या पूर्ण भागापासून (जे दशांश चिन्हाच्या डावीकडील अंक असतात) सुरू होते. जर पूर्ण भाग समान असतील तर दशांश स्थानाच्या अंकांची तुलना केली जाते. जर तेही समान असतील तर पुढचा अंक पाहिला जातो व असाच क्रम पुढे चालू राहतो.
9. दशांश अपूर्णांकाचा वापर किंमत, लांबी, वजन यांची एकके दर्शविण्यासाठी होतो.

माहितीचे व्यवस्थापन

प्रकरण 9

9.1 प्रस्तावना

तुम्ही तुमच्या शिक्षकांना रोज हजेरी पुस्तकात विद्यार्थ्यांच्या हजेरीची नोंद करताना किंवा प्रत्येक चाचणीत किंवा परीक्षेत तुम्हाला मिळालेल्या गुणांची नोंद करताना नक्कीच पाहिलं असेल त्याचप्रमाणे क्रिकेटचा धावफलकही तुम्ही पाहिला असेल. असे दोन धावफलक खाली दाखविले आहेत :-

गोलंदाजाचे नाव	षटक	निर्धाव षटक	दिलेल्या धावा	बाद केलेले फलंदाज
A	10	2	40	3
B	10	1	30	2
C	10	2	20	1
D	10	1	50	4

फलंदाजाचे नाव	धावा	खेळलेले चेंडू	वेळ (मिनिटात)
E	45	62	75
F	55	70	81
G	37	53	67
H	22	41	55

तुम्हाला माहीत आहे की खेळात कोण जिंकले कोण हरले एवढीच माहिती नोंदवली जात नाही. तर धावफलकामुळे खेळाची काही महत्त्वाची माहिती तुम्हाला मिळू शकते. उदाहरणार्थ, सर्वांत अधिक धावा करणाऱ्या खेळाडूने किती वेळ, किती चेंडूंचा सामना केला हे आपल्याला समजू शकते.

यानुसार आपल्या दैनंदिन जीवनात आपण संख्या, आकृती, नावे इत्यादीशी संबंधित अनेक प्रकारच्या सारणी पाहतो.

या सारणी आपल्याला 'सामग्री' उपलब्ध करून देतात. 'सामग्री' म्हणजे काही सूचना देण्यासाठी एकत्रित केलेला संख्यांचा संग्रह होय.

9.2 सामग्रीची नोंद

एका वर्गातील विद्यार्थी सहलीला जायची तयारी करत आहेत असे उदाहरण आपण घेऊ. केळे, सफरचंद, संत्रे किंवा पेरू यापैकी एक फळ निवडायला शिक्षकांनी विद्यार्थ्यांना सांगितले. याची यादी बनविण्याचे काम उमावर सोपवले. तिने सर्व मुलांची यादी केली आणि प्रत्येकापुढे त्याने निवडलेले फळ लिहिले. ही यादी, मुलांच्या आवडीनुसार त्यांना फळ देण्यासाठी उपयोगी पडेल.

राघव	—	केळे	भावना	—	सफरचंद
प्रीती	—	सफरचंद	मनोज	—	केळे
अमर	—	पेरू	डोनाल्ड	—	सफरचंद
फातिमा	—	संत्रे	मारिया	—	केळे
अमिता	—	सफरचंद	उमा	—	संत्रे
रमण	—	केळे	अख्तर	—	पेरू
राधा	—	संत्रे	रितु	—	सफरचंद
फरिदा	—	पेरू	सलमा	—	केळे
अनुराधा	—	केळे	कविता	—	पेरू
रति	—	केळे	जावेद	—	केळे

वर्गातील किती मुलांना केळी हवी आहेत ही माहिती शिक्षकांना हवी असेल तर त्यांना यादीतील एक-एक नाव वाचून केळ्यांची संख्या मोजावी लागेल. अशा तऱ्हेने एकूण किती केळी हवी आहेत ते कळेल.

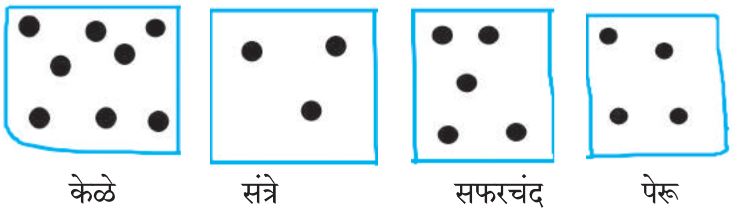
सफरचंद, पेरू आणि संत्री यांची वेगवेगळी संख्या समजण्यासाठी सुद्धा प्रत्येक फळासाठी हीच कृती पुन्हा पुन्हा करावी लागेल. ही कृती क्लिष्ट आणि वेळखाऊ आहे. ही कृती विद्यार्थी संख्या 50 असेल तर आणखीच क्लिष्ट होईल.

यासाठी उमा एक-एक करून त्या फळांची नावे अशी लिहून घेईल.

केळे, सफरचंद, पेरू, संत्रे, सफरचंद, केळे, संत्रे, पेरू, केळ, केळे, सफरचंद, केळे, संत्रे, पेरू, सफरचंद, केळे, सफरचंद, केळे, पेरू, केळे.

हे करून शिक्षकांचे काम सोपं होईल असं आपल्याला वाटतं का? त्यांना अजूनही पूर्वीप्रमाणे फळांना एक-एक करत मोजावं लागेल.

सलमाच्या डोक्यात एक वेगळा विचार आला. तिने फरशीवर चार चौरस काढले. प्रत्येक चौरस फक्त एकाच प्रकारच्या फळासाठी ठेवला. ती मुलांना सांगते की आपल्या आवडत्या फळाच्या चौरसात एक गोटी ठेवा. अर्थात, ज्याने केळे निवडलंय तो विद्यार्थी केळ्याच्या चौरसात एक गोटी ठेवेल याप्रमाणे प्रत्येक विद्यार्थी करेल.



प्रत्येक चौरसातील गोट्यांची संख्या मोजून प्रत्येक प्रकारच्या किती फळांची आवश्यकता आहे. हे सलमा लगेच सांगू शकते.

ही कृती 40 विद्यार्थ्यांसाठी कोणतीही चार फळे घेऊन करण्याचा प्रयत्न करा. तुम्ही गोट्यांच्या जागी बाटलीची झाकणे किंवा अन्य काहीही घेऊ शकता.

9.3 सामग्रीची मांडणी

सलमाने जी माहिती मिळवली ती माहिती रोनाल्ड एक पेन आणि कागद घेऊन मिळवू शकतो. त्याला गोट्यांची आवश्यकता नाही. तो मुलांना, 'या चौरसात दगड ठेवा' अशी सूचना देत नाही. तो खालीलप्रमाणे सारणी करतो :

केळे	✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✓ ✓	8
संत्रे	✓ ✓ ✓	3
सफरचंद	✓ ✓ ✓ ✓ ✓	5
पेरू	✓ ✓ ✓ ✓	4

तुम्हाला रोनाल्डची सारणी समजली का?

(✓) हे चिन्ह काय दर्शविते?

चार विद्यार्थ्यांनी पेरू निवडला. पेरू समोर किती (✓) चिन्हे आहेत?

वर्गात एकूण किती विद्यार्थी आहेत? ही सर्व माहिती मिळवा.

या पद्धतींबद्दल चर्चा करा. कोणती पद्धती सर्वात चांगली आहे? का?

जर खूप मोठ्या सामग्रीतून अधिक माहिती मिळवायची असेल तर कोणती पद्धत अधिक उपयुक्त ठरेल?

उदाहरण 1 : माध्यान्ह भोजन योजनेसाठी एक शिक्षक प्रत्येक विद्यार्थ्याची भोजनाची आवड जाणून घेऊ इच्छितात. शिक्षक हे माहिती एकत्र करण्याचं काम मारियावर सोपवतात. मारिया हे काम एक कागद पेन्सिल घेऊन करते. भोजनाची आवड एका रकान्यात लिहून, प्रत्येक विद्यार्थ्याच्या आवडीनुसार त्या रूचीपुढे एक उभी रेघ (|) ओढते.

<table>
<tr><th>भोजन – आवड</th><th>विद्यार्थी संख्या</th></tr>
<tr><td>फक्त भात</td><td>|||||||||||||||||</td></tr>
<tr><td>फक्त पोळी</td><td>|||||||||||||</td></tr>
<tr><td>भात–पोळी दोन्हीही</td><td>||||||||||||||||||||</td></tr>
</table>

वरची सारणी पाहून उमेशने विद्यार्थ्यांना मोजण्याची एक पद्धती सुचवली. त्याने मारियाला या (|) चिन्हांचा खालीलप्रमाणे दहा–दहाचा गट करायला सांगितला.

<table>
<tr><th>भोजन – आवड</th><th>विद्यार्थी संख्या</th><th></th></tr>
<tr><td>फक्त भात</td><td>|||||||||| |||||||</td><td>17</td></tr>
<tr><td>फक्त पोळी</td><td>|||||||||| |||</td><td>13</td></tr>
<tr><td>भात–पोळी दोन्हीही</td><td>|||||||||| ||||||||||</td><td>20</td></tr>
</table>

राजने त्याला आणखी सोपे बनविण्यासाठी खालीलप्रमाणे दहा–दहाच्या ऐवजी पाच–पाचचे गट करावेत असे सांगितले.

<table>
<tr><th>भोजन – आवड</th><th>विद्यार्थी संख्या</th><th></th></tr>
<tr><td>फक्त भात</td><td>||||| ||||| ||||| ||</td><td>17</td></tr>
<tr><td>फक्त पोळी</td><td>||||| ||||| |||</td><td>13</td></tr>
<tr><td>भात–पोळी दोन्हीही</td><td>||||| ||||| ||||| |||||</td><td>20</td></tr>
</table>

शिक्षकांनी सुचविले की पाच–पाचच्या प्रत्येक गटात पाचवी खूण एका तिरक्या रेषेने करावी. जसे '~~||||~~' या चिन्हात दाखवले आहे. या ताळ्याच्या खुणा आहेत. याप्रमाणे ~~||||~~ || हे दाखविते की मोजल्यावर हे पाच अधिक दोन (अर्थात सात) आहेत. ~~||||~~ ~~||||~~ हे दाखविते की पाच अधिक पाच (अर्थात दहा) आहेत.

याप्रमाणे, सारणी अशी दिसेल :-

भोजन – आवड	विद्यार्थी संख्या	
फक्त भात	~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~ ||	17
फक्त पोळी	~~||||~~ ~~||||~~ |||	13
भात-पोळी दोन्हीही	~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~	20

उदाहरण 2 : एकताला तिच्या VI वीच्या वर्गातील विद्यार्थांच्या बुटांच्या मापांची सामग्री गोळा करायला सांगितली. तिने खालीलप्रमाणे सामग्री लिहिली.

5	4	7	5	6	7	6	5	6	6	5
4	5	6	8	7	4	6	5	6	4	6
5	7	6	7	5	7	6	4	8	7	

जावेदला खालील माहिती हवी आहे.

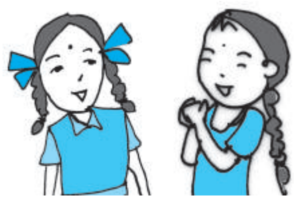
(i) जास्तीत जास्त विद्यार्थी वापरत असलेल्या बुटांचे माप.

(ii) कमीत कमी विद्यार्थी वापरत असलेल्या बुटांचे माप.

तुम्ही ही माहिती मिळवू शकता का?

एकताने ताळ्याच्या खुणा वापरून ही सारणी तयार केली.

बुटांचे माप	ताळ्याच्या खुणा	विद्यार्थ्यांची संख्या
4	~~||||~~	5
5	~~||||~~ |||	8
6	~~||||~~ ~~||||~~	10
7	~~||||~~ ||	7
8	||	2



आता वर विचारलेल्या प्रश्नांची उत्तरे सहजपणे देता येतील. तुम्ही या प्रकारची कृती आपल्या वर्गात ताळ्याच्या खुणा वापरून करू शकता.

हे करा

1. आपल्या वर्गमित्रांच्या घरातील व्यक्तींची संख्या मिळवा व ती सारणीच्या रूपात मांडा. त्यावरून काढा की :

   (a) कमीत कमी वेळा आलेली संख्या.

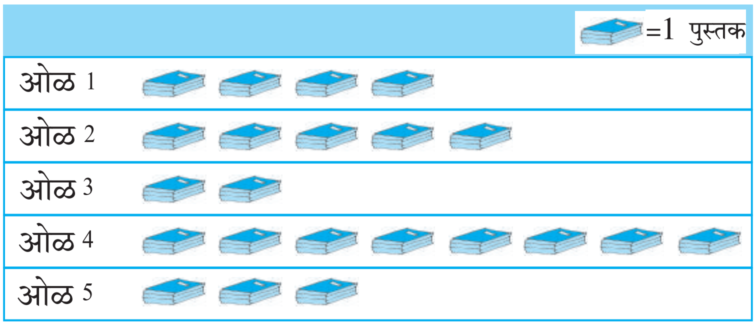
   (b) जास्तीत जास्त वेळा आलेली संख्या.

   (c) समान वेळा आलेली संख्या.

घरातील व्यक्तींची संख्या	ताळ्याच्या खुणा	तेवढ्या व्यक्ती असलेल्या घरांची संख्या

9.4 चित्रालेख

एका कपाटात पाच खण आहेत. प्रत्येक खणात पुस्तके ओळीने ठेवली आहेत. अधिक माहिती खालील सारणीत दिली आहे.



कोणत्या ओळीत पुस्तकांची संख्या सर्वांत अधिक आहे? कोणत्या ओळीत पुस्तकांची संख्या सर्वांत कमी आहे? एकही पुस्तक नाही अशी एखादी ओळ आहे का?

वरील आलेख पाहून तुम्ही या प्रश्नांची उत्तरे देऊ शकता. यातील चित्रे सामग्री समजण्यासाठी आपल्याला मदत करतात याला चित्रालेख म्हणतात.

एक **चित्रालेख, सामग्रीला चित्रे, वस्तू किंवा वस्तूंच्या भागाच्या रूपात दाखवितो. हा केवळ पाहूनच सामग्री संबंधित प्रश्नांची उत्तरे देता येतात.**

हे करा

दैनिके आणि मासिकांमध्ये मुख्यतः वाचकांना आकर्षित करण्यासाठी चित्रालेखांचा वापर करतात.

अशा तऱ्हेने प्रकाशित केलेले एक किंवा दोन चित्रालेख मिळवा आणि आपल्या वर्गात लावा. हे चित्रालेख काय दाखवतात ते समजून घेण्याचा प्रयत्न करा.

एका चित्रालेखात दाखविलेली माहिती समजण्यासाठी काही सरावाची आवश्यकता आहे.

9.5 एका चित्रालेखाचे अर्थबोधन

उदाहरण 3 : खालील चित्रालेख गेल्या आठवड्यातील 30 विद्यार्थ्यांच्या वर्गातील अनुपस्थिती दर्शवितो.

(a) कोणत्या दिवशी सर्वांत जास्त विद्यार्थी अनुपस्थित राहिले?

(b) कोणत्या दिवशी पूर्ण उपस्थिती होती?

(c) या आठवड्यातील एकूण अनुपस्थिती किती?

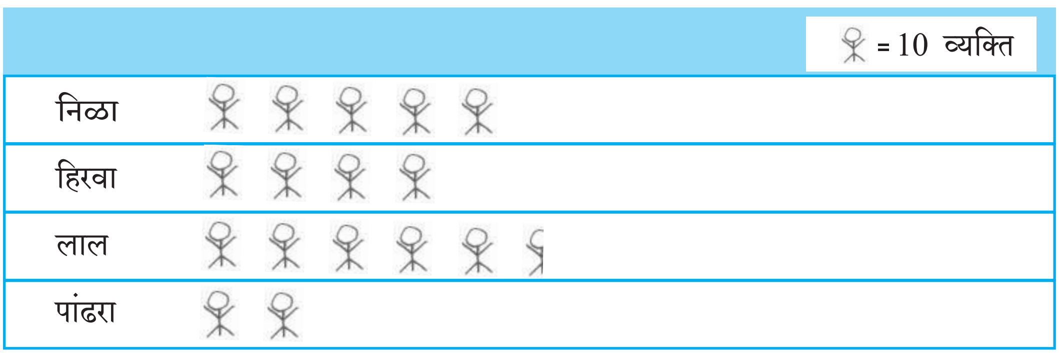
उत्तर : (a) शनिवारी सर्वांत जास्त विद्यार्थी अनुपस्थित होते.

(ही माहिती दाखविणाऱ्या शनिवारच्या ओळीत 8 चित्रे आहेत, इतर दिवशी चित्रांची संख्या कमी आहे.)

(b) गुरुवारच्या ओळीत चित्र नाही. याचा अर्थ त्या दिवशी कोणताही विद्यार्थी अनुपस्थित नाही. म्हणजेच त्या दिवशी वर्गात पूर्ण उपस्थिती होती.

(c) इथे एकूण 20 चित्रे आहेत. म्हणून या आठवड्यात एकूण अनुपस्थिती 20 होती.

उदाहरण 4 : एका विशिष्ट ठिकाणी राहणाऱ्या व्यक्तींना आवडणाऱ्या फ्रिजच्या (Fridges) च्या रंगांची माहिती खालील चित्रालेखात दाखविलेली आहे :



(a) निळा रंग आवडणाऱ्या व्यक्तींची संख्या लिहा.

(b) किती व्यक्तींना लाल रंग आवडतो?

उत्तर : (a) निळा रंग आवडणाऱ्या 50 व्यक्ती आहेत.

[ = 10 व्यक्ती म्हणून अशी 5 चित्रे 5×10 व्यक्ती दर्शवितात.]

(b) लाल रंग आवडणाऱ्या व्यक्तींची संख्या काढताना जरा विचार करावा लागेल.
5 पूर्ण चित्रांच्या, $5 \times 10 = 50$ व्यक्ती मिळतील.
शेवटच्या अर्ध्या चित्रासाठी आपण अंदाजे 5 व्यक्ती घेऊ शकू.
म्हणून लाल रंग आवडणाऱ्या व्यक्तींची संख्या 55 आहे.

विचार करा, चर्चा करा आणि लिहा :

वरील उदाहरणात लाल रंग आवडणाऱ्या व्यक्तींची संख्या $50 + 5 = 55$ घेतली. जर तुमच्या मित्राने $50 + 8 = 58$ घेतले तर ते तुम्हाला मान्य आहे का?

उदाहरण 5 : एका शाळेतील इयत्ता VI तील 30 विद्यार्थी रोज कोणत्या वाहनाने शाळेत येतात, याची पाहणी केली. मिळालेली माहिती चित्रालेखाद्वारे खालीलप्रमाणे दाखविली आहे.

वाहतुकीचे साधन	विद्यार्थ्यांची संख्या (☺ = 1 विद्यार्थी)
स्वत:ची कार	☺ ☺ ☺ ☺
सार्वजनिक बस	☺ ☺ ☺ ☺ ☺
शाळेची बस	☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺
सायकल	☺ ☺ ☺
पायी	☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

या चित्रालेखावरून तुम्ही काय निष्कर्ष काढू शकता?

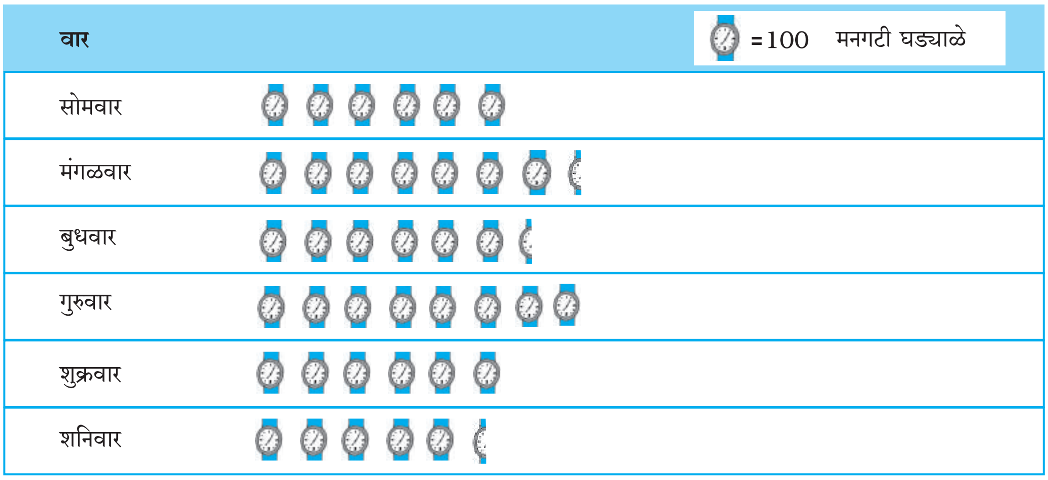
(a) स्वत:च्या गाडीने येणाऱ्या विद्यार्थ्यांची संख्या 4 आहे.

(b) जास्तीत जास्त विद्यार्थी (11) शाळेच्या बसने येतात. हे वाहतुकीचे सर्वांत जास्त लोकप्रिय साधन आहे.

(c) सायकलचा वापर केवळ तीन विद्यार्थीच करतात.

(d) इतर वाहने वापरणाऱ्या विद्यार्थ्यांची संख्या अशाचप्रकारे काढता येईल.

उदाहरण 6 : एका आठवड्यात, एका कारखान्यात बनविलेल्या मनगटी घड्याळांची संख्या खालील चित्रालेखात दाखविली आहे.



(a) कोणत्या दिवशी सर्वांत कमी मनगटी घड्याळे बनविली गेली?

(b) कोणत्या दिवशी सर्वांत जास्त मनगटी घड्याळे बनविली गेली?

(c) ह्या विशेष सप्ताहात बनविलेल्या मनगटी घड्याळांची अंदाजे संख्या लिहा.

आपण एक सारणी बनवून मोजू शकतो.

वार	बनविलेल्या मनगटी घड्याळांची संख्या
सोमवार	600
मंगळवार	700 पेक्षा जास्त पण 800 पेक्षा कमी
बुधवार	....
गुरुवार	....
शुक्रवार	....
शनिवार	....

वरील सारणी पूर्ण करून उत्तर मिळवा.

उदाहरणसंग्रह 9.1

1. गणिताच्या एका चाचणीत 40 विद्यार्थ्यांना खालीलप्रमाणे गुण मिळाले. ताळ्यांच्या खुणा वापरून या गुणांची सारणी करा.

8	1	3	7	6	5	5	4	4	2
4	9	5	3	7	1	6	5	2	7
7	3	8	4	2	8	9	5	8	6
7	4	5	6	9	6	4	4	6	6

(a) किती विद्यार्थ्यांनी 7 किंवा त्यापेक्षा जास्त गुण मिळविले ते शोधा.

(b) किती विद्यार्थ्यांनी 4 पेक्षा कमी गुण मिळविले?

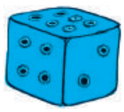
2. इयत्ता VI च्या 30 विद्यार्थ्यांची मिठाईची आवड खालीलप्रमाणे

लाडू, बर्फी, लाडू, जिलेबी, लाडू, रसगुल्ला

जिलेबी, लाडू, बर्फी, रसगुल्ला, लाडू, जिलेबी
जिलेबी, रसगुल्ला, लाडू, रसगुल्ला, जिलेबी, लाडू
रसगुल्ला, लाडू, लाडू, बफी, रसगुल्ला, रसगुल्ला
जिलेबी, रसगुल्ला, लाडू, रसगुल्ला, जिलेबी, लाडू

(a) ताळ्याच्या खुणा वापरून या मिठाया एका सारणीत मांडा.

(b) कोणती मिठाई विद्यार्थ्यांना अधिक आवडते?



3. कॅथरिनने एक फासा 40 वेळा फेकल्यावर, प्रत्येकवेळी तिला मिळालेली संख्या खालीलप्रमाणे:

1	3	5	6	6	3	5	4	1	6
2	5	3	4	6	1	5	5	6	1
1	2	2	3	5	2	4	5	5	6
5	1	6	2	3	5	2	4	1	5

ताळ्याच्या खुणा वापरून दिलेल्या सामग्रीची सारणी तयार करा आणि शोधा :

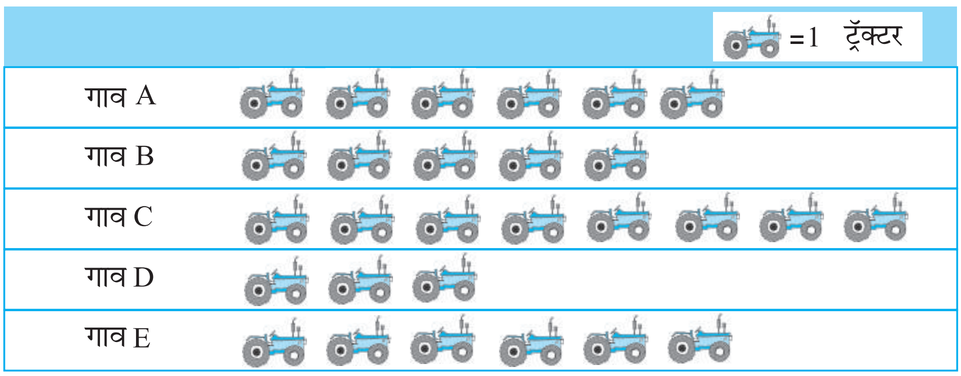
(a) कमीत कमी वेळा आलेली संख्या

(b) जास्तीत जास्त वेळा आलेली संख्या

(c) समान वेळा आलेल्या संख्या

संख्या	ताळ्याच्या खुणा	किती वेळा
1		
2		
3		
4		
5		
6		

4. खालील चित्रालेख पाच गावातील ट्रॅक्टरांची संख्या दाखवितो :



चित्रालेख पाहून खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या.

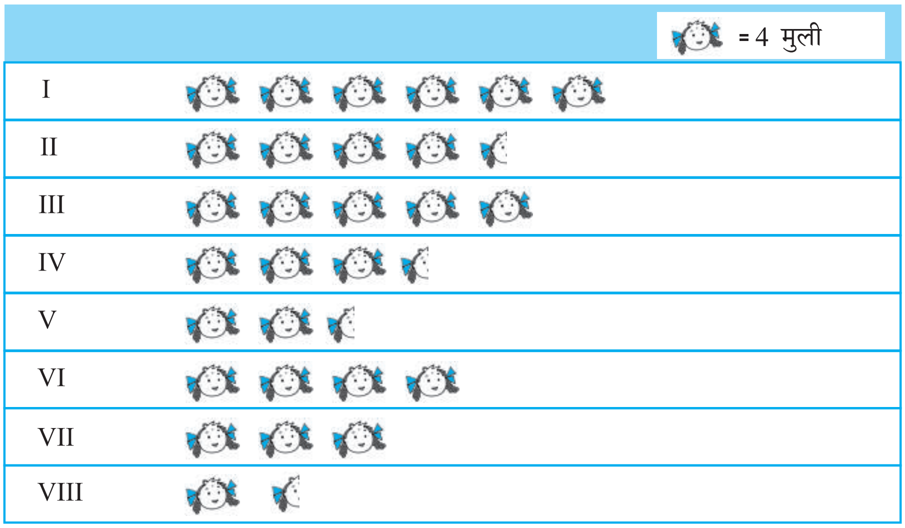
(i) कोणत्या गावात ट्रॅक्टरांची संख्या कमीत कमी आहे?

(ii) कोणत्या गावात ट्रॅक्टरांची संख्या जास्तीत जास्त आहे?

(iii) C गावामध्ये B पेक्षा किती ट्रॅक्टर अधिक आहेत?

(iv) पाच गावात मिळून एकूण किती ट्रॅक्टर आहेत?

5. खालील चित्रालेख एका सह-शिक्षण माध्यमिक विद्यालयाच्या प्रत्येक वर्गातील मुलींची संख्या दाखविते.



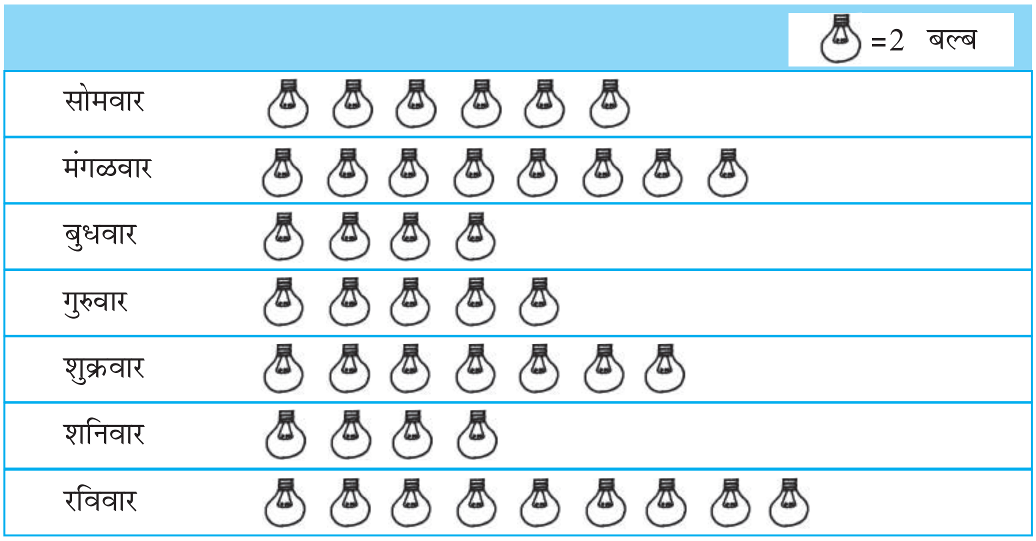
हा चित्रालेख पाहून खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या.

(a) कोणत्या वर्गात मुलींची संख्या कमीत कमी आहे?

(b) इयत्ता VI वी मधील मुलींची संख्या इयत्ता V वी मधील मुलींच्या संख्येपेक्षा कमी आहे का?

(c) इयत्ता VII वी मध्ये किती मुली आहेत?

6. एका आठवड्यातील वेगवेगळ्या दिवसाची विजेच्या बल्बची विक्री खाली दाखविली आहे.



चित्रालेख पाहून खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या.

(a) शुक्रवारी किती बल्ब विकले गेले?

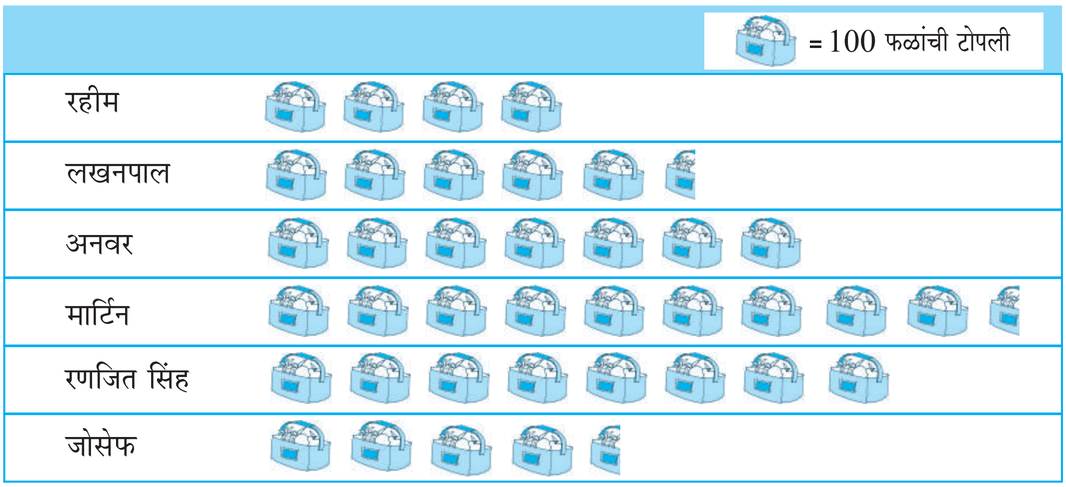
(b) कोणत्या दिवशी विकल्या गेलेल्या बल्बची संख्या सर्वाधिक आहे?

(c) आठवड्यातील कोणकोणत्या दिवशी समान बल्ब विकले गेले?

(d) कोणकोणत्या दिवशी कमीत कमी बल्ब विकले गेले?

(e) एका मोठ्या पेटीत 9 बल्ब येतात तर या आठवड्यात किती पेट्या लागल्या?

7. एका विशिष्ट मोसमात एका गावातील 6 फळ विक्रेत्यांनी विकलेल्या फळांच्या टोपल्यांची संख्या खालील चित्रालेखात दाखविली आहे :



हा चित्रालेख पाहून खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

(a) कोणत्या फळ विक्रेत्याने सर्वांत जास्त फळांच्या टोपल्या विकल्या?

(b) अनवरने फळांच्या किती टोपल्या विकल्या?

(c) ज्यांनी 600 किंवा त्यापेक्षा अधिक टोपल्या विकल्या ते विक्रेते पुढच्या मोसमात गोदाम खरेदी करण्याची योजना बनवत आहेत. तुम्ही त्यांची नावे सांगू शकाल का?

9.6 चित्रालेख काढणे

चित्रालेख काढणे हे मनोरंजक आहे. परंतु काही वेळा अशी काही चिन्हे जशी की  (ज्याचा वापर मागे दिलेल्या उदाहरणात केला आहे), ज्यांचा एकाकांच्या पटीच्या रूपात वापर होऊ शकतो तसेच जी काढायला अवघड असतात अशा जागी आपण सोपी चिन्हे वापरू शकतो.

जर  5 विद्यार्थी दाखवतो, तर तुम्ही 4 किंवा 3 विद्यार्थी कसे दाखवाल? या परिस्थितीत आपण खालील प्रकारे कल्पना करून उत्तर काढू शकतो.

 5 विद्यार्थी दाखवतो, तर  4 विद्यार्थी दाखवतो,

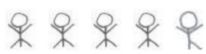
 3 विद्यार्थी दाखवतो,  2 विद्यार्थी दाखवतो,

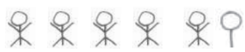
 1 विद्यार्थी दाखवतो. यानंतर दाखवण्याचे काम सुरू करा.

उदाहरण 7 : एका वर्गातील 30 विद्यार्थ्यांची एका आठवड्यातील उपस्थिती खालीलप्रमाणे आहे. ती चित्रालेखाद्वारे दाखवा.

वार	उपस्थित विद्यार्थ्यांची संख्या
सोमवार	24
मंगळवार	26
बुधवार	28
गुरुवार	30
शुक्रवार	29
शनिवार	22

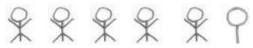
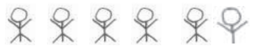
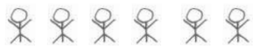
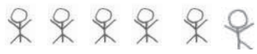
उत्तर : पूर्वी केलेल्या कल्पनेनुसार

24 ला  याने दाखवले जाऊ शकते.

26 ला  याने दाखवले जाऊ शकते.

इत्यादी.

अशात-हेने तयार केलेला चित्रालेख असा असेल

वार	उपस्थित विद्यार्थ्यांची संख्या
सोमवार	
मंगळवार	
बुधवार	
गुरुवार	
शुक्रवार	
शनिवार	

इथे '5 पेक्षा कमी' ला एका चित्राच्या रूपात कसे दाखवायचे हे एकप्रकारे ठरवले आहे. याप्रमाणे प्रत्येक वेळी चित्रांचे तुकडे करणे शक्य नसते. अशा स्थितीत आपण काय करू?

खालील उदाहरणाचा अभ्यास करा :

उदाहरण 8 : एका वर्षाच्या पहिल्या चार महिन्यात, एका विश्रामगृहासाठी खरेदी केलेल्या विजेच्या बल्बची संख्या खालीलप्रमाणे आहे :

महिना	बल्बची संख्या
जानेवारी	20
फेब्रुवारी	26
मार्च	30
एप्रिल	34

ही माहिती चित्रालेखाद्वारे दाखवा.

उत्तर :

 म्हणजे 10 बल्ब असे मानू	
जानेवारी	
फेब्रुवारी	
मार्च	
एप्रिल	

इथे जानेवारी आणि मार्चसाठी चित्र काढणे अवघड नाही. परंतु 26 आणि 34 हे चित्राद्वारे सोपे नाही. आपण 26 च्या जवळच्या 5 पर्यंत म्हणजे 25 आणि 34 साठी 35 घेऊ शकतो. मग फेब्रुवारीसाठी $2\frac{1}{2}$ बल्ब आणि एप्रिलसाठी बल्ब दाखवू शकतो.

अभ्यास 9.2

1. पाच गावात पशुंची एकूण संख्या अशी आहे :

गाव A	:	80
गाव B	:	120
गाव C	:	90
गाव D	:	40
गाव E	:	60

$\otimes$ हे चिन्ह 10 पशू दाखवते त्याचा वापर करून एक चित्रालेख काढा आणि खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या.

(a) किती चिन्हे गाव E चे पशू दाखवतील.

(b) कोणत्या गावात पशुंची संख्या जास्तीत जास्त आहे.

(c) कोणत्या गावात जास्त पशू आहेत : गाव A की गाव C मध्ये?

2. वेगवेगळ्या वर्षी एका शाळेच्या विद्यार्थ्यांची एकूण संख्या खालील सारणीद्वारे दाखवली आहे:

वर्ष	विद्यार्थ्यांची संख्या
1996	400
1998	535
2000	472
2002	600
2004	623

A. 100 विद्यार्थ्यांसाठी हे चिन्ह वापरून, एक चित्रालेख तयार करा आणि खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या.

(a) वर्ष-2002 मध्ये एकूण विद्यार्थ्यांसाठी किती चिन्हे दाखवाल?

(b) वर्ष-1998 मध्ये एकूण विद्यार्थ्यांसाठी किती चिन्हे दाखवाल?

B. 50 विद्यार्थ्यांसाठी एक वेगळे चिन्ह वापरून, एक चित्रालेख तयार करा : कोणता चित्रालेख अधिक माहितीप्रद आहे?

9.7 स्तंभालेख

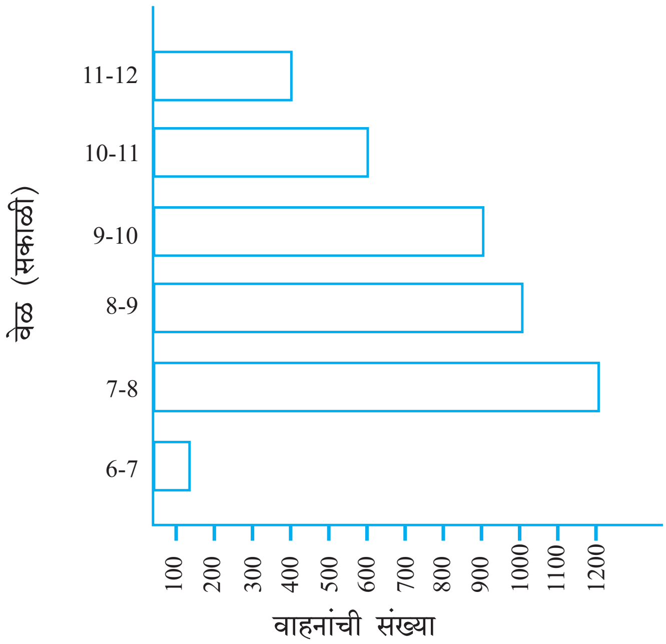
दिलेली सामग्री चित्रालेखाद्वारे दाखवणे हे फक्त वेळखाऊच नाही तर कधी कधी अवघडसुद्धा असते. म्हणून सामग्री चित्ररूपाने दाखवण्यासाठी इतर पद्धती पाहू.

ज्यांच्यात समान अंतर आहे असे समान रुंदी असलेले उभे (vertical) किंवा आडवे (horizontal) स्तंभ काढले जातात. याप्रकारे काढलेल्या प्रत्येक स्तंभाची लांबी दिलेली संख्या दाखवते. सामग्री दाखवण्यासाठी या पद्धतीला स्तंभ आरेख (bar diagram) किंवा स्तंभ आलेख (bar graph) म्हणतात.

9.7.1 स्तंभालेखाचे अर्थबोधन

एका विशिष्ट दिवशी रहदारी पोलिसांकडून दिल्लीच्या एका गर्दीच्या चौकातून जाणाऱ्या वाहनांच्या बाबतीत केलेला अभ्यास या उदाहरणाचा विचार करू. सकाळी 6 ते दुपारी 12 पर्यंत प्रत्येक तासाला त्या चौकातून जाणाऱ्या वाहनांची संख्या खाली दिलेल्या स्तंभालेखात दाखवली आहे. एक एकक सांकेतिक रूपात एक घर दाखवते. (1 एकक =1 घर)

प्रमाण 1 एकक = 100 वाहने



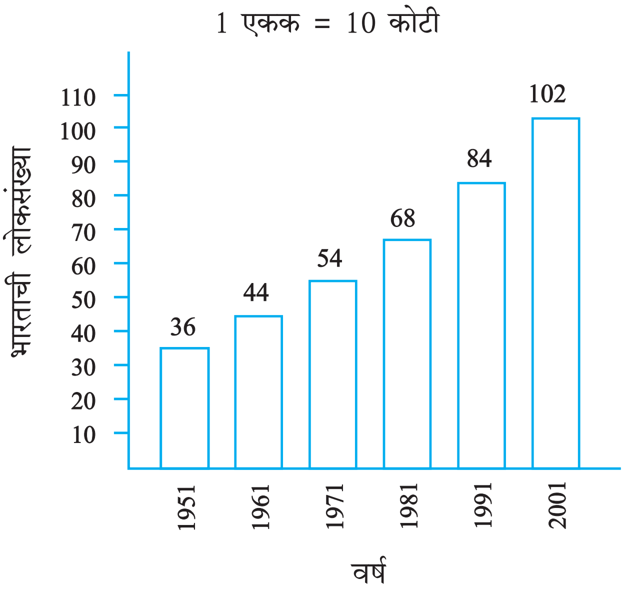
आपण पाहू शकतो की, सर्वांत जास्त रहदारी, सर्वांत मोठ्या लांबीच्या स्तंभाने अर्थात् 1200 वाहनांनी दाखवली आहे आणि ती सकाळी सात ते आठ या वेळात आहे, तर या पाठोपाठचा लहान स्तंभ 8 ते 9 या वेळेत आहे.

याप्रमाणे कमीत कमी रहदारी दाखवणारा सर्वांत छोटा स्तंभ (अर्थात् 140 वाहने) सकाळी 6 ते 7 या वेळेत आहे. या छोट्या स्तंभाच्या कमी रहदारी दाखवणारा पुढचा स्तंभ 11 ते 12 या वेळेत आहे.

दोन अति व्यस्त तास (Peak hours 8.00 ते 10.00) या वेळेत एकूण वाहतूक (शाळा, कार्यालय आणि व्यापारी संस्था यासाठी) 1000+900 = 1900 वाहने अशी आहे जी दोन स्तंभांनी दाखवली आहे.

जर सामग्रीमध्ये मोठे आकडे असतील तर आपल्याला एका वेगळ्या प्रमाणाची गरज भासेल. उदाहरणार्थ, भारताची लोकसंख्या वाढीची स्थिती पहा. या संख्या कोटीमध्ये आहेत. म्हणून आपण 1 एकक = 1 व्यक्ती घेतली तर स्तंभ काढणे शक्य नाही. यासाठी असे प्रमाण घ्या की 1 एकक 10 कोटी दाखवेल. या स्थितीचा स्तंभालेख बाजूच्या आकृतीत दाखवला आहे.

म्हणून 5 एकक उंचीचा स्तंभ 50 कोटी तर 8 एकक उंचीचा स्तंभ 80 कोटी दाखवेल.

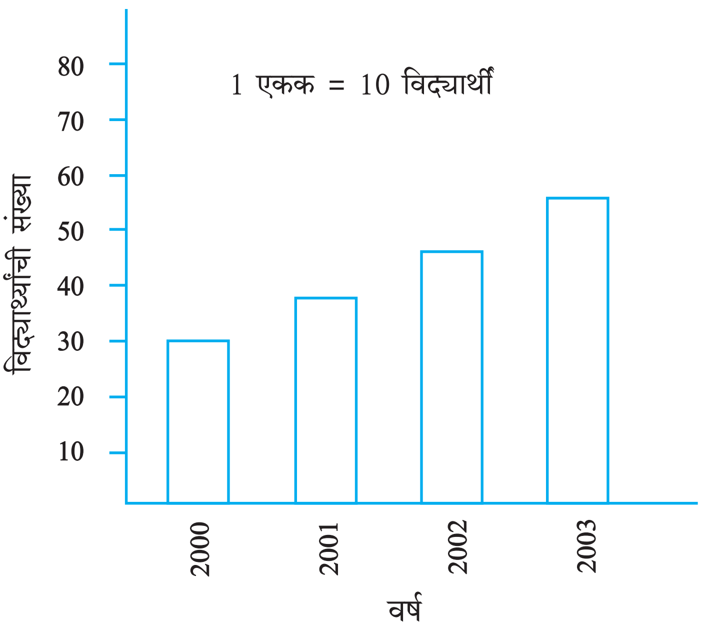


उदाहरण 9 : एका शाळेतील, एका वर्गाचा स्तंभालेख खाली दिला आहे. त्याचा अभ्यास करून पुढील प्रश्नांची उत्तरे द्या.

(a) या आलेखाचे प्रमाण काय आहे?

(b) प्रत्येक वर्षी शाळेत किती नवे विद्यार्थी प्रवेश घेतात?

(c) वर्ष 2003 मधील विद्यार्थी संख्या वर्ष 2000 मधील विद्यार्थी संख्येच्या दुप्पट आहे का?



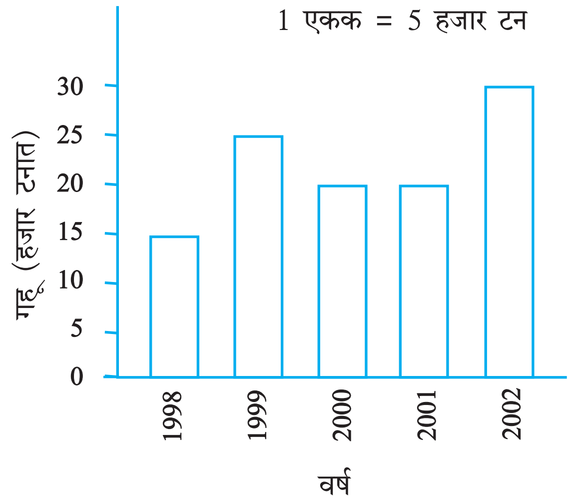
उत्तर (a) प्रमाण : 1 एकक = 10 विद्यार्थी

आता (b) आणि (c) तुम्ही सोडवा.

उदाहरणसंग्रह 9.3

1. खाली दिलेला स्तंभालेख सन 1998–2002 मध्ये सरकारने खरेदी केलेल्या गव्हाचे परिमाण दाखवतो.

1 एकक = 5 हजार टन



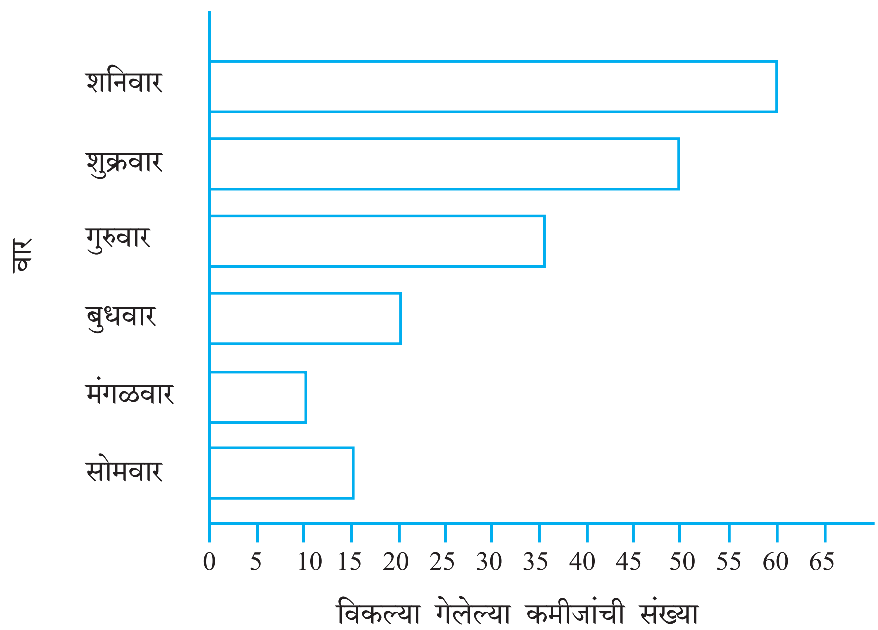
हा आलेख वाचा आणि आपली निरीक्षणे नोंदवा.

(a) कोणत्या वर्षी गव्हाची जास्तीत जास्त खरेदी झाली?

(b) कोणत्या वर्षी गव्हाची कमीत कमी खरेदी झाली?

2. हा स्तंभलेख एका दुकानात सोमवर ते शनिवार दररोज झालेल्या कमीज विक्रीची संख्या दाखवतो.

1 एकक = 5 कमीज



आता खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या.

(a) वरील स्तंभालेखात कोणती माहिती दिली आहे?

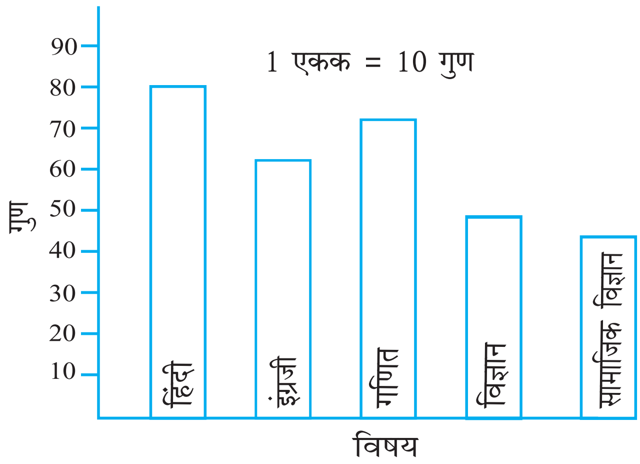
(b) कमीजांची संख्या दाखवण्यासाठी आडव्या रेषेवर कोणते प्रमाण घेतले आहे?

(c) कोणत्या दिवशी जास्तीत जास्त कमीज विकले गेले? त्या दिवशी किती कमीज विकले गेले?

(d) कोणत्या दिवशी कमीत कमी कमीज विकले गेले?

(e) गुरुवारी किती कमीज विकले गेले?

3. अजीजला सहामाही परीक्षेत वेगवेगळ्या विषयात मिळालेले गुण या स्तंभालेखात दाखविले आहेत. त्यावरून खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.



(a) हा स्तंभालेख कोणती माहिती देतो?

(b) कोणत्या विषयात अजीजला सर्वाधिक गुण मिळाले?

(c) कोणत्या विषयात त्याला कमीत कमी गुण मिळाले?

(d) विषयांची नावे लिहून त्यापुढे मिळालेले गुण लिहा.

9.7.2 स्तंभालेख काढणे

रोनाल्डने आपल्या सहाध्यायींबरोबर आवडणाऱ्या फळांची सारणी (9.3 मध्ये) केली ते उदाहरण आठवा–

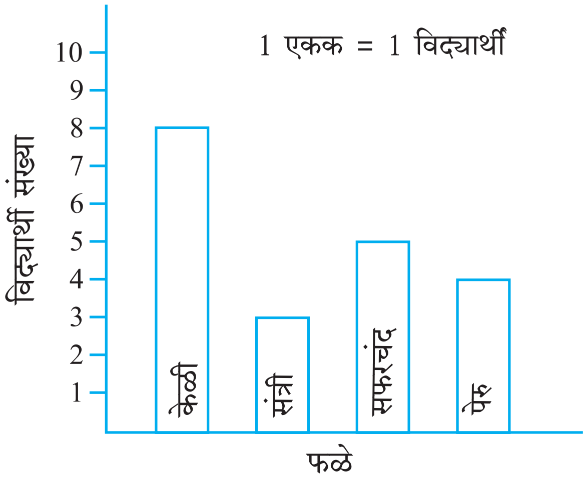
फळाचे नाव	केळे	संत्रे	सफरचंद	पेरू
विद्यार्थ्यांची संख्या	8	3	5	4

प्रथम एक आडवी आणि एक उभी रेषा काढून आडव्या रेषेवर फळे दाखवणारे स्तंभ काढू आणि उभ्या रेषेवर विद्यार्थी संख्या दाखवणारे अंक लिहू.

एक सोपे एकक निवडूया, याचा अर्थ आपण 1 एकक म्हणजे किती विद्यार्थी ते ठरवू.

इथे आपण 1 एकक = 1 विद्यार्थी घेऊ.

आपल्याला खाली दाखविलेला स्तंभालेख मिळेल.



उदाहरण 10 : खालील सारणी इमराजच्या कुटुंबाचा वेगवेगळ्या बाबींवर होणारा मासिक खर्च दाखवते.

बाब	**खर्च (रुपयात)**
घरभाडे	3000
अन्नधान्य	3400
शिक्षण	800
वीजवापर	400
परिवहन	600
इतर	1200

या सामग्रीला स्तंभालेखात दाखविण्यासाठीच्या पायऱ्या खालीलप्रमाणे :

(a) एक आडवी आणि एक उभी अशा दोन परस्पर लंबरेषा काढा.

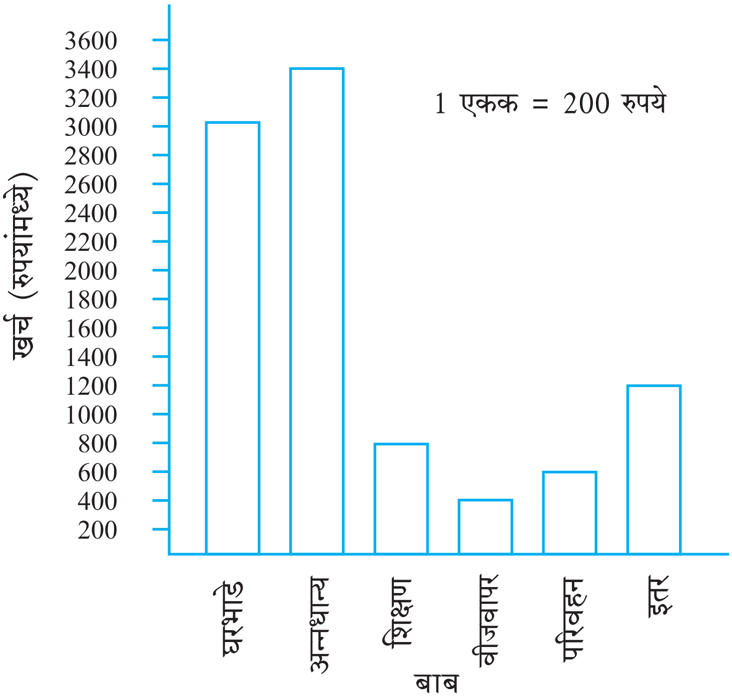
(b) आडव्या रेषेवर बाब आणि उभ्या रेषेवर संगत खर्च (रु.त) नोंदवा.

(c) समान अंतरावर समान रुंदीचे स्तंभ काढा.

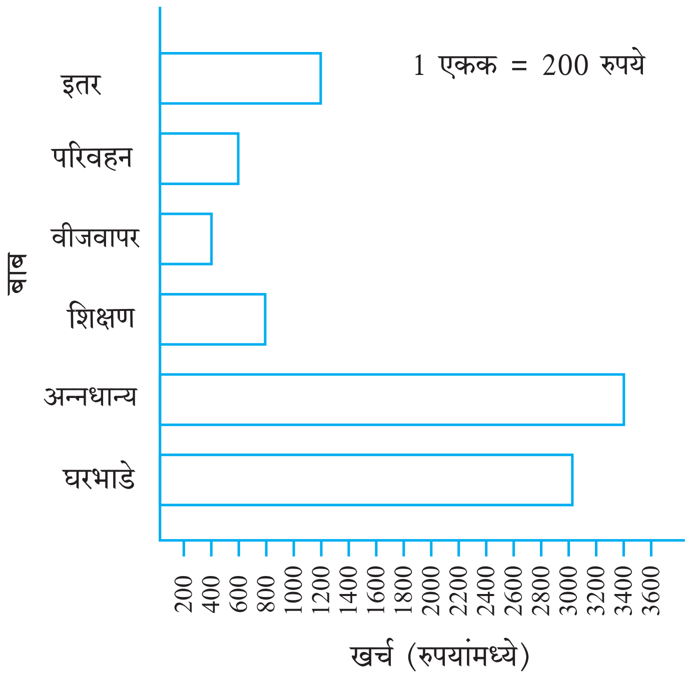
(d) उभ्या रेषेवर एक योग्य प्रमाण घ्या.

समजा 1 एकक = 200 रु. आहे. याप्रमाणे संगत किमती लिहा.

घरभाडे	:	3000	÷	200	=	15 एकक
अन्नधान्य	:	3400	÷	200	=	17 एकक
शिक्षण	:	800	÷	200	=	4 एकक
वीजवापर	:	400	÷	200	=	2 एकक
परिवहन	:	600	÷	200	=	3 एकक
इतर	:	1200	÷	200	=	6 एकक



हीच सामग्री 'बाब' आणि 'खर्च' यांची अक्षांवर परस्पर अदलाबदल करून खालीलप्रमाणेही दाखविता येईल.



हे करा

1. आपल्या मित्रांबरोबर ज्यातून सामग्री मिळेल अशा पाच परिस्थितीबाबत विचार विनिमय करा. त्या माहितीचा वापर करून सारणी बनवा आणि त्यावरून स्तंभालेख काढा.

उदाहरणसंग्रह 9.4

1. एका शाळेतील 120 विद्यार्थ्यांना त्यांच्या फावल्या वेळात कोणती कृती करायला आवडते. याचे सर्वेक्षण केले असता खालील सामग्री मिळाली.

आवडती कृती	विद्यार्थी संख्या
खेळणे	45
गोष्टीचे पुस्तक वाचणे	30
दूरदर्शन पहाणे	20
संगीत ऐकणे	10
चित्र रंगवणे	15

1 एकक = 5 विद्यार्थी हे प्रमाण घेऊन एक स्तंभालेख काढा. खेळण्याव्यतिरिक्त कोणती कृती जास्तीत जास्त विद्यार्थ्यांना आवडते.

2. लागोपाठ आलेल्या सहा दिवसांत एका दुकानदाराने विकलेल्या गणित पुस्तकांची संख्या खाली दिलेली आहे.

वार	विकल्या गेलेल्या पुस्तकांची संख्या
रविवार	65
सोमवार	40
मंगळवार	30
बुधवार	50
गुरुवार	20
शुक्रवार	70
शनिवार	15

तुमच्या पसंतीचे प्रमाण घेऊन वरील माहितीचा स्तंभालेख काढा.

3. सन 1998 ते 2002 मध्ये एका कारखान्यात तयार केलेल्या सायकलींची संख्या खालील सारणीत दाखवली आहे.

वर्ष	तयार केलेल्या सायकलींची संख्या
1998	800
1999	600
2000	900
2001	1100
2002	1200

ही सामग्री एका स्तंभालेखाद्वारे दाखवा. आपल्या पसंतीचे प्रमाण निवडा.

(a) कोणत्या वर्षात जास्तीत जास्त सायकली तयार केल्या गेल्या?

(b) कोणत्या वर्षात कमीत कमी सायकली तयार केल्या गेल्या?

4. एका शहरामधील व्यक्तींची संख्या वेगवेगळ्या वयाच्या गटानुसार खालील सारणीत दिली आहे.

वय–गट (वर्षांत)	1-14	15-29	30-44	45-59	60-74	75 आणि त्यापेक्षा जास्त
व्यक्तींची संख्या	2 लाख	1 लाख 60 हजार	1 लाख 20 हजार	1 लाख 20 हजार	80 हजार	40 हजार

ही सामग्री एका स्तंभालेखाद्वारे दाखवा (1 एकक = 20 हजार)

खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या.

(a) कोणत्या दोन वयोगटांमध्ये व्यक्तींची संख्या समान आहे?

(b) 60 वर्ष आणि 60 पेक्षा अधिक वय असलेल्यांना वरिष्ठ नागरिक म्हणतात. या शहरात किती वरिष्ठ नागरिक आहेत?

आपण काय शिकलो?

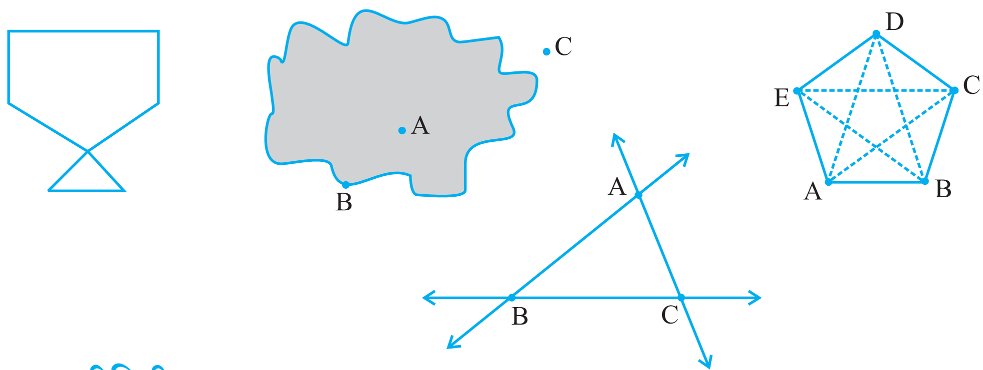
1. आपण पाहिले की, सामग्री म्हणजे काही माहिती देण्यासाठी एकत्रित केलेल्या संख्यांचा समूह आहे.
2. दिलेल्या सामग्रीतून काही विशिष्ट माहिती त्वरित मिळवावयाची असेल तर सामग्री ताळ्याच्या खुणा वापरून सारणीमध्ये मांडली जाते.
3. आपण शिकलो की, चित्रालेख सामग्रीला चित्रे, वस्तू आणि वस्तूंच्या भागांच्या रूपात कसे दाखवितो. आपण चित्रालेखाचे अर्थबोधनही शिकलो आणि संबंधित प्रश्नांची उत्तरे देणेही शिकलो. आपण काही वस्तूंची चिन्हे वापरून चित्रालेख काढणेही शिकलो. उदाहरणार्थ,  = 100 पुस्तके.
4. सामग्री एक स्तंभ आरेख किंवा स्तंभ आलेख या स्वरूपात कशी मांडली जाते याचीही आपण चर्चा केली. एका स्तंभालेखात समान रुंदीचे स्तंभ समान अंतरावर आडवे किंवा उभे काढले जातात. प्रत्येक स्तंभाची लांबी इच्छित माहिती दाखविते.
5. असे करण्यासाठी आधी आलेखासाठी एक प्रमाण निवडण्याचीही चर्चा केली. उदाहरणार्थ, 1 एकक = 10 विद्यार्थी. आपण स्तंभालेख वाचनाचा अभ्यासही केला आहे. आपण त्यावरून अर्थबोधनही शिकलो आहोत.

महत्त्वमापन

प्रकरण 10

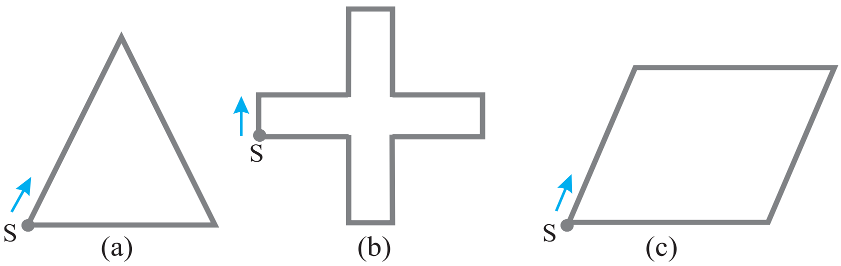
10.1 प्रस्तावना

जेव्हा आपण प्रतलीय आकृत्यांबद्दल, ज्या खाली दिल्या आहेत, बोलतो तेव्हा आपण त्या आकृत्यांच्या क्षेत्र आणि सीमा यांच्याबद्दलही बोलतो. विचार करतो. या आकृत्यांची तुलना करण्यासाठी आपल्याला काही मापांची आवश्यकता असते. आपण अशा काही आकृत्या पाहू.



10.2 परिमिती

खाली दिलेली आकृती 10.1 पहा. तुम्ही या आकृत्या एखादी तार किंवा दोऱ्याच्या मदतीने बनवू शकता.



आकृति 10.1

जर तुम्ही बिंदू S पासून सुरुवात करून रेषाखंडावरून चालत चालत गेलात तर पुन्हा बिंदू S पाशी पोहोचाल. याप्रकारे तुम्ही आकृतीच्या चारही बाजूंनी किंवा भोवती एक पूर्ण चक्कर मारली आहे. हे अंतर या आकृतींना बनविण्यासाठी लागणाऱ्या तारेच्या लांबीएवढे आहे.

या अंतराला बंद आकृतीची परिमिती असे म्हणतात. वेगळ्या शब्दात आपण असे म्हणू शकतो की, या आकृत्या बनविण्यासाठी लागलेल्या तारेची लांबी ही परिमिती आहे.

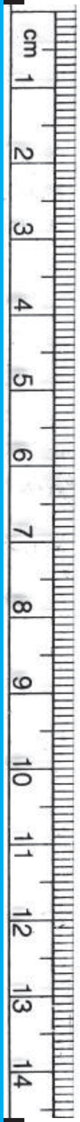
आपल्या दैनंदिन जीवनात परिमिती या संकल्पनेचा बराच वापर होतो.

- एक शेतकरी, ज्याला आपल्या शेताच्या चारी बाजूंनी कुंपण लावायचे असते.
- एक अभियंता, ज्याला आपल्या घराभोवती चारी बाजूंनी भिंत बांधायची असते.
- एक व्यक्ती, जिला खेळासाठी एक पथ (track) तयार करायचा असतो.

या सर्व व्यक्ती 'परिमिती' या संकल्पनेचा वापर करतात.

जिथे तुम्हाला परिमिती समजण्याची आवश्यकता आहे अशा पाच स्थितींची उदाहरणे द्या.

म्हणजेच बंद आकृती भोवती तिच्या सीमेवरून एक वेळ जाऊन जे अंतर काढलेले असते, त्याला त्या आकृतीची परिमिती म्हणतात.



प्रयत्न करा

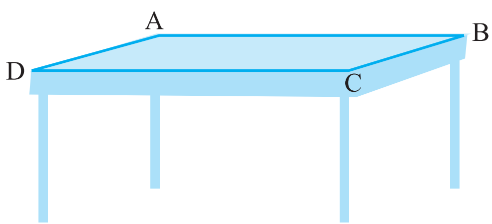
1. आपल्या अभ्यासाच्या टेबलच्या वरील भागाच्या चारही बाजू मोजून लिहा.

AB = _____ सेमी

BC = _____ सेमी

CD = _____ सेमी

DA = _____ सेमी



आता चारही बाजूंच्या लांबीची बेरीज

= AB + BC + CD + DA

= ___ सेमी + ___ सेमी + ___ सेमी + ___ सेमी

= _____ सेमी

परिमिती किती हे तुम्ही सांगू शकता का?

2. आपल्या वहीच्या एका पृष्ठाच्या चारी बाजूंची लांबी मोजून लिहा :

= AB + BC + CD + DA = ___ सेमी + ___ सेमी + ___ सेमी + ___ सेमी

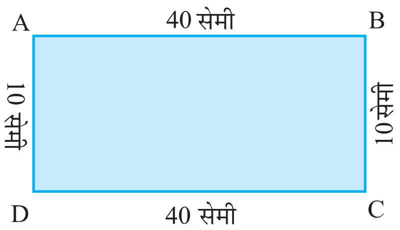
= _____ सेमी

पानाची परिमिती किती आहे?

3. मीरा 150 मी लांबी आणि 80 मी रुंदी असलेल्या बागेत जाते. ती या बागेत एक पूर्ण फेरी मारते, तर ती किती अंतर काटते?

4. खालील आकृतींच्या परिमिती काढा.

(a)

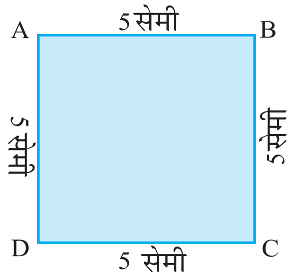


परिमिती = AB + BC + CD + DA

= __+__+__+__

= ______

(b)

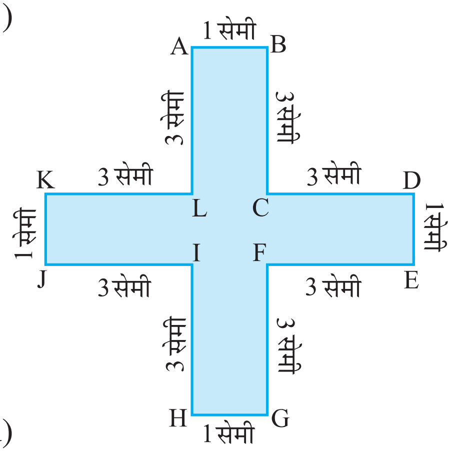


परिमिती = AB + BC + CD + DA

= __+__+__+__

= ______

(c)

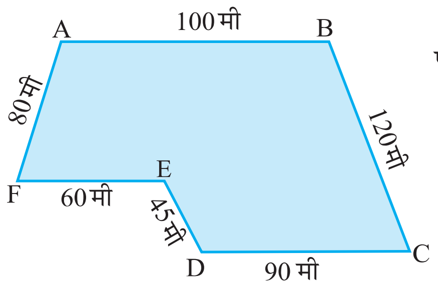


परिमिती = AB + BC + CD + DE + EF + FG+GH+HI+IJ+JK+KL +LA

= __ + __ + __ + __ + __ + __ + __ + __ + __ + __ + __ + __

= ______

(d)



परिमिती = AB + BC + CD + DE + EF + FA

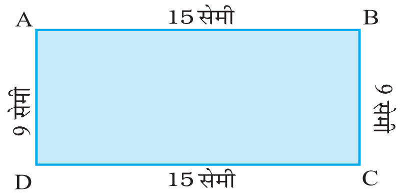
= __ + __ + __ + __ + __ + __

= ______

म्हणून, रेषाखंडानी तयार झालेल्या बंद आकृतीची परिमिती तुम्ही कशी काढाल? साधारणपणे, सर्व बाजूंच्या (जे रेषाखंड आहेत) लांबीची बेरीज करून.

10.2.1 आयताची परिमिती

आपण आयत ABCD (आकृती 10.2) चा विचार करू ज्याची लांबी आणि रुंदी अनुक्रमे 15 सेमी आणि 9 सेमी आहे. आयताची परिमिती किती होईल?



आकृति 10.2

आयताची परिमिती = चारही बाजूंच्या लांबीची बेरीज

$= AB + BC + CD + DA$

$= AB + BC + AB + BC$

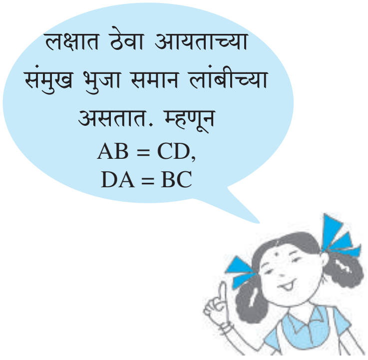
$= 2 \times AB + 2 \times BC$

$= 2 \times (AB + BC)$

= 2 × (15सेमी + 9सेमी)

= 2 × (24सेमी)

= 48 सेमी



म्हणून वर दिलेल्या उदाहरणात आपण पाहिले की
आयताची परिमिती = लांबी + रुंदी + लांबी + रुंदी = 2 (लांबी + रुंदी)

प्रयत्न करा

खालील आयतांच्या परिमिती काढा.

आयताची लांबी	आयताची रुंदी	सर्व बाजूंच्या लांबीची बेरीज करून काढलेली परिमिती	परिमिती सूत्राने 2 × (लांबी + रुंदी)
25 सेमी	12 सेमी	= 25 सेमी + 12 सेमी + 25 सेमी + 12 सेमी = 74 सेमी	= 2 ×(25 सेमी + 12 सेमी) = 2 × (37 सेमी) = 74 सेमी
0.5 मी	0.25 मी		
18 सेमी	15 सेमी		
10.5 सेमी	8.5 सेमी		

अर्थात आयताची परिमिती = 2 × (लांबी + रुंदी)

आता ही संकल्पना प्रायोगिक रूपात पाहू.

उदाहरण 1 : शबाना एका आयताकृती टेबलच्या 3 मीटर लांब व 2 मीटर रुंद अशा आच्छादनाला चारी बाजूंनी किनार (lace) लावू इच्छिते, तर तिला किती लांबीची किनार लागेल ?

उत्तर : आयताकार टेबलाच्या आच्छादनाची लांबी = 3 मी

आयताकार टेबलाच्या आच्छादनाची रुंदी = 2 मी

शबाना टेबल अच्छादनाच्या चारी बाजूंना किनार लावू इच्छिते.

किनारीची लांबी, आयताकार टेबल आच्छादनाच्या परिमिती एवढी आहे.

आता आयताकार टेबल आच्छादनाची परिमिती

$= 2 \times$ (लांबी + रुंदी)

$= 2 \times$ (3 मी + 2 मी)

$= 2 \times 5$ मी = 10 मी

म्हणून आवश्यक किनारीची लांबी = 10 मी.

आकृती 10.3

उदाहरण 2 : एक धावपटू 50 मी लांब आणि 25 मी रुंदीच्या आयताकार बागेच्या भोवती 10 फेऱ्या मारतो, तर त्याने काटलेले एकूण अंतर काढा.

उत्तर : आयताकार बागेची लांबी = 50 मी

आयताकार बागेची रुंदी = 25 मी

धावपटूने 1 फेरीत काटलेले अंतर, बागेच्या परिमितीएवढे आहे.

आता, आयताकार बागेची परिमिती

$= 2 \times$ (लांबी + रुंदी)

$= 2 \times$ (50 मी + 25 मी)

$= 2 \times 75$ मी = 150 मी

धावपटूने 1 फेरीत काटलेले अंतर 150 मी आहे.

म्हणून 10 फेऱ्यात काटलेले अंतर $= 10 \times 150$ मी= 1500 मी

म्हणून धावपटूने काटलेले एकूण अंतर = 1500 मी

उदाहरण 3 : ज्याची लांबी आणि रुंदी अनुक्रमे 150 सेमी आणि 1 मी आहे. त्या आयताची परिमिती काढा.

उत्तर : आयताची लांबी = 150 सेमी

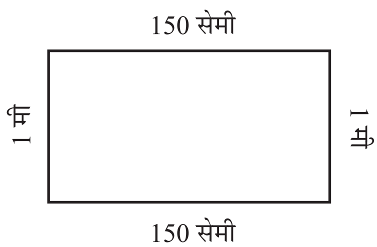
आयताची रुंदी = 1 मी

= 100 सेमी

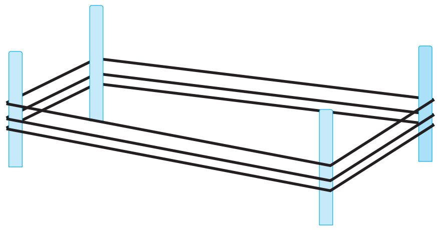
$= 2 \times$ (लांबी + रुंदी)

$= 2 \times$ (150 सेमी + 100 सेमी)

$= 2 \times$ (250 सेमी) = 500 सेमी = 5 मी



उदाहरण 4 : एका शेतकऱ्याच्या आयताकार शेताची लांबी आणि रुंदी क्रमाने 240 मी आणि 180 मी आहे. आकृती (10.4 मध्ये) दाखविल्याप्रमाणे त्याला शेताच्या चारी बाजूंनी दोरीने 3 पदरी कुंपण करावयाचे आहे, तर त्यासाठी लागणाऱ्या दोराची एकूण लांबी काढा.



आकृती 10.4

उत्तर : शेतकऱ्याला शेताला 3 पदरी कुंपण घालायचे आहे म्हणून दोराची लांबी शेताच्या परिमितीच्या तिप्पट असायला हवी.

शेताची परिमिती = 2 × (लांबी + रुंदी)

= 2 × (240 मी + 180 मी)

= 2 × 420 मी = 840 मी

एकूण आवश्यक दोरीची लांबी = 3 × 840 मी = 2520 मी

उदाहरण 5 : 250 मी लांब आणि 175 मी रुंद आयताकार बागेच्या भोवती कुंपण करण्याचा खर्च ₹ 12 प्रति मीटर या दराने काढा.

उत्तर : कुंपण लावून खर्च काढण्यासाठी आपल्याला बगीच्याच्या परिमितीची आवश्यकता आहे.

आयताकार बागेची परिमिती = 2 × (लांबी + रुंदी)

= 2 × (250 मी + 175 मी)

= 2 × (425 मी) = 850 मी

बागेभोवती 1 मीटर लांब कुंपण करण्याचा खर्च = ₹ 12

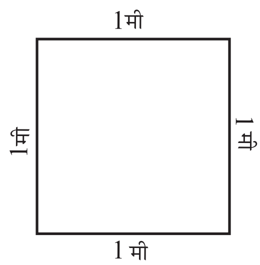
म्हणून बागेभोवती कुंपण लावण्याचा एकूण खर्च

= ₹ 12 × 850 = ₹ 10200

10.2.2 सुसम आकृत्यांची परिमिती

हे उदाहरण पाहू : आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे,

विश्वामित्र 1 मी बाजू असलेल्या चौरसाकृती चित्रा भोवती रंगीत पट्टी लावू इच्छितो. त्याला किती लांब रंगीत पट्टी लागेल?



आकृती 10.5

विश्वामित्र चौरसाकृती चित्राच्या भोवती रंगीत पट्टी लावू इच्छितो. म्हणून त्याला त्या चौरसाकृती चित्राची परिमिती काढावी लागेल.

म्हणून आवश्यक पट्टीची लांबी = 1 मी + 1 मी + 1 मी + 1 मी= 4 मी

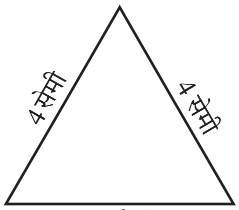
आपल्याला माहीत आहे की चौरसाच्या चारही बाजूंची लांबी समान असते म्हणून त्या लांबीची चार वेळा बेरीज करण्याऐवजी आपण चौरसाच्या एका बाजूच्या लांबीला 4 ने गुणू. म्हणून आवश्यक पट्टीची लांबी = 4 × 1 मी = 4 मीटर

या उदाहरणावरून असे दिसेल की

चौरसाची परिमिती = 4 × एका बाजूची लांबी

असेच आणखी चौरस काढून त्यांच्या परिमिती शोधा.

आता आपण 4 सेमी बाजू असलेला एक समभुज त्रिकोण (आकृती 10.6) पाहू. आपण त्याची परिमिती काढू शकतो का?



आकृती 10.6

या समभुज त्रिकोणाची परिमिती = (4 + 4 + 4) सेमी
= 3 × 4 सेमी
= 12 सेमी

याप्रकारे, आपल्याला दिसेल की

समभुज त्रिकोणाची परिमिती = 3 × एका बाजूची लांबी

तुम्ही सांगू शकाल का की एक चौरस आणि एक समभुज त्रिकोण यात काय साम्य आहे. या आकृतींमध्ये प्रत्येक भुजेची लांबी समान आहे. तसेच प्रत्येक कोनाचे माप समान आहे. अशा सर्व आकृतींना, **सुसम बंद आकृती (regular closed figures)** असे म्हणतात.

म्हणून एक चौरस तसेच समभुज त्रिकोण या सुसम बंद आकृती आहेत.

आपण पाहिले की,

एका चौरसाची परिमिती = 4 × एका बाजूची लांबी

एका समभुज त्रिकोणाची परिमिती = 3 × एका बाजूची लांबी

याप्रमाणे, एका सुसम पंचकोनाची परिमिती किती?

एका सुसम पंचकोनाची परिमिती = 5 × एका बाजूची लांबी

आणि एका सुसम षट्कोनाची परिमिती ________ होईल.

आणि एका सुसम अष्टकोनाची परिमिती किती असेल?

प्रयत्न करा

आपल्या भोवतीच्या अशा सुसम आकृत्या असलेल्या वस्तू शोधा आणि त्यांची परिमिती काढा.

उदाहरण 6 : शायना 70 मी बाजू असलेल्या चौरसाकृती बागेच्या कडेकडेने 3 फेऱ्या मारते, तर तिने काटलेले अंतर काढा.

उत्तर : चौरसाकृती बागेची परिमिती

$= 4 \times$ एका बाजूची लांबी

$= 4 \times 70$ मी $= 280$ मी

एका फेरीत काटलेले अंतर $= 280$ मी

म्हणून, 3×280 मी $= 840$ मी

उदाहरण 7 : पिंकी 75 मी बाजू असलेल्या चौरसाकृती मैदानाच्या कडेकडेने फेरी मारते. बॉब 160 मी लांब आणि 105 मी रुंद आयताकार मैदानाच्या कडेकडेने फेरी मारतो, तर दोघांपैकी कोण अधिक अंतर जातो आणि किती?

उत्तर : पिंकीने एका फेरीत काटलेले अंतर = चौरसाची परिमिती

$= 4 \times$ एका बाजूची लांबी

$= 4 \times 75$ मी $= 300$ मी

बॉबने एक फेरीत काटलेले अंतर= आयताची परिमिती

$= 2 \times$ (लांबी + रुंदी)

$= 2 \times (160$ मी $+ 105$ मी $)$

$= 2 \times 265$ मी $= 530$ मी

काटलेल्या अंतरातील फरक $= 530$ मी $- 300$ मी $= 230$ मी

म्हणून बॉब अधिक अंतर जातो आणि ते अंतर 230 मी जास्त आहे.

उदाहरण 8 : एका सुसम पंचकोनाची प्रत्येक बाजू 3 सेमी आहे तर परिमिती काढा.

उत्तर : या सुसम पंचकोनाला 5 बाजू आहेत प्रत्येक बाजूची लांबी 3 सेमी आहे.

सुसम पंचकोनाची परिमिती $= 5 \times 3$ सेमी $= 15$ सेमी

उदाहरण 9 : एका सुसम षट्कोनाची परिमिती 18 सेमी आहे. त्याच्या एका भुजेची लांबी काढा.

उत्तर : परिमिती $= 18$ सेमी

सुसम षट्कोनाला 6 भुजा असतात. म्हणून एका भुजेची लांबी काढण्यासाठी आपण परिमितीला 6 ने भागू.

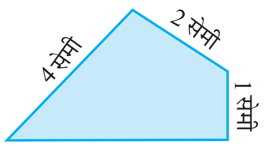
सुसम षट्कोनाच्या एका भुजेची लांबी $= 18$ सेमी $\div 6 = 3$ सेमी

म्हणून सुसम षट्कोनाच्या प्रत्येक भुजेची लांबी 3 सेमी.

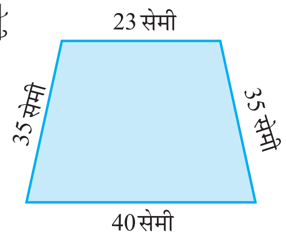
आता आपण आत्तापर्यंतच्या ज्ञानावर आधारित काही प्रश्नांची उत्तरे शोधू.

उदाहरणसंग्रह 10.1

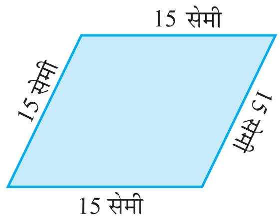
1. खालीलपैकी प्रत्येक आकृतीची परिमिती काढा :



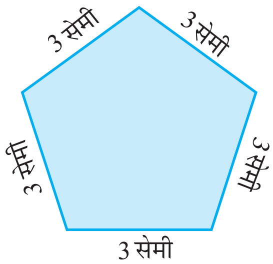
(a)



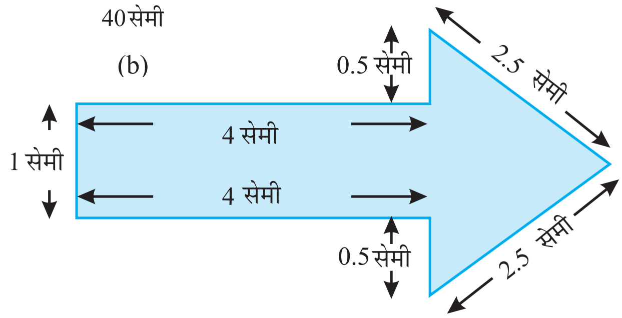
(b)



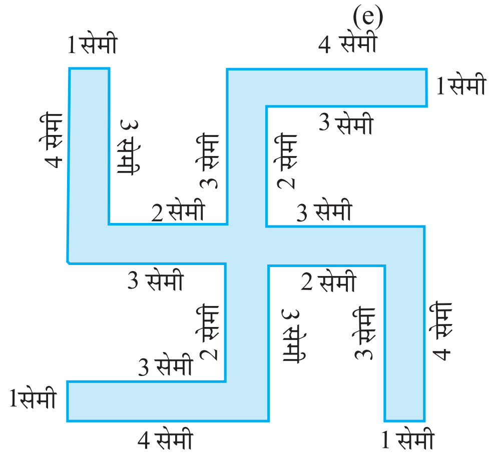
(c)



(d)



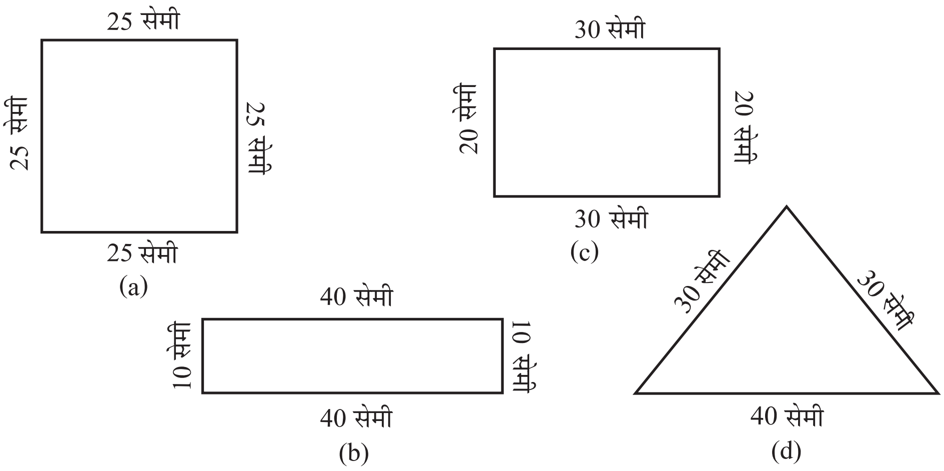
(e)



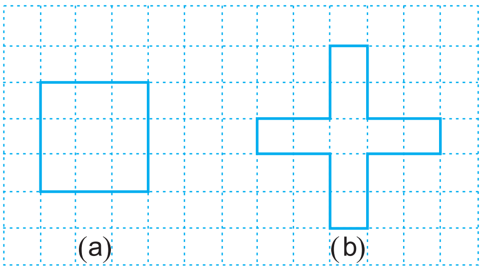
(f)

2. 40 सेमी लांब आणि 10 सेमी रुंद अशा आयताकार पेटीच्या झाकणाला चारी बाजूंनी एक पट्टी (Tape) लावून बंद केले आहे, तर किती लांब पट्टी लागेल?
3. एका टेबलाच्या पृष्ठभागाची मापे 2 मी 25 सेमी आणि 1 मी 50 सेमी आहे, तर त्याच्या पृष्ठभागाची परिमिती काढा.
4. 32 सेमी लांब आणि 21 सेमी रुंद अशा एका फोटोला लाकडी पट्टीने फ्रेम करायची आहे, तर आवश्यक पट्टीची लांबी काढा.

5. एका आयताकार भूखंडाची लांबी आणि रुंदी क्रमशः 0.7 किमी आणि 0.5 किमी आहे. त्याभोवती तारेचे 4 पदरी कुंपण लावायचे आहे, तर आवश्यक तारेची लांबी काढा.
6. खालील प्रत्येकाची परिमिती काढा.
   (a) एक त्रिकोण, ज्याच्या बाजू 3 सेमी, 4 सेमी आणि 5 सेमी आहे.
   (b) एक समभुज, त्रिकोण, ज्याच्या एका बाजूची लांबी 9 सेमी आहे.
   (c) एक समद्विभुज त्रिकोण ज्याच्या समान बाजू प्रत्येकी 8 सेमी व तिसरी बाजू 6 सेमी आहे.
7. 10 सेमी, 14 सेमी आणि 15 सेमी बाजू असलेल्या त्रिकोणाची परिमिती काढा.
8. प्रत्येक भुजा 8 सेमी मापाची आहे. अशा सुसम षट्कोनाची परिमिती काढा.
9. 20 सेमी परिमिती असलेल्या चौरसाची भुजा काढा.
10. एका सुसम पंचकोनाची परिमिती 100 सेमी आहे, तर प्रत्येक भुजेची लांबी काढा.
11. एका दोऱ्याच्या तुकड्याची लांबी 30 सेमी आहे. प्रत्येक भुजेची लांबी काढा. जर त्यापासून
    (a) एक चौरस बनविला
    (b) एक समभुज त्रिकोण बनविला
    (c) एक सुसम षट्कोन बनविला.
12. एका त्रिकोणाच्या दोन बाजू 12 सेमी आणि 14 सेमी आहेत. या त्रिकोणाची परिमिती 36 सेमी असल्यास तिसऱ्या बाजूची लांबी काढा.
13. 250 मी बाजू असलेल्या चौरसाकृती बागेच्या भोवती कुंपण करण्याचा खर्च रु. 20 प्रति मीटरप्रमाणे किती येईल?
14. 175 मी लांबी आणि 125 मी रुंदी असलेल्या आयताकृती बागेभोवती रु. 12 प्रति मी दराने कुंपण करण्यासाठी येणारा खर्च काढा.
15. स्वीटी 75 मी बाजू असलेल्या चौरसाभोवती पळते तर बुलबुल 60 मी लांबी आणि 45 मी रुंदी असलेल्या आयताभोवती पळते, तर कोण कमी अंतर पळते?
16. खालील प्रत्येक आकृतीची परिमिती काढा. उत्तरावरून काय निष्कर्ष काढाल?



17. अवनीतने प्रत्येक भुजा $\frac{1}{2}$ मी असलेल्या 9 चौरसाकृती टाईल खरेदी केल्या आणि त्याने ह्या टाईल चौरसाकृती आकारात ठेवल्या.



आकृती 10.7

(a) नव्या चौरसाची परिमिती किती? [(आकृती 10.7 (a)]

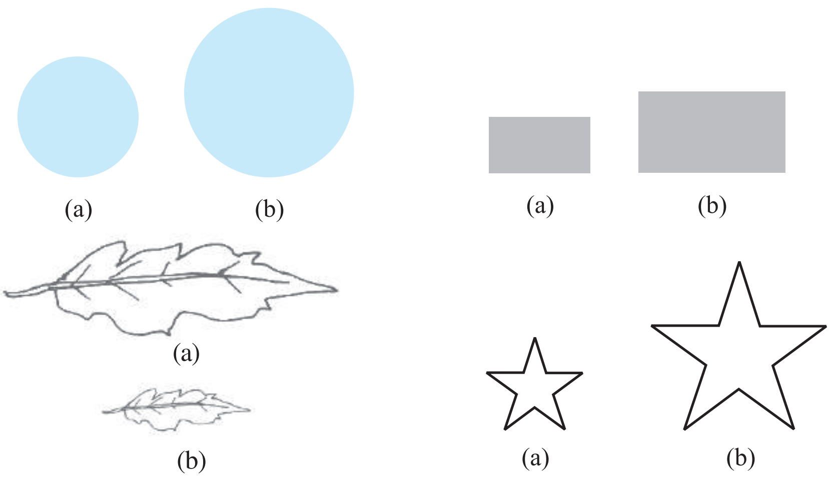
(b) शैरीला अशा पद्धतीने ठेवलेल्या टाईल आवडल्या नाहीत. तिने या टाईलना एका क्रॉसच्या रूपात मांडले, [(आकृती 10.7 (b)] तर त्याची परिमिती किती?

(c) कोणाची परिमिती जास्त आहे?

(d) अवनीत विचार करतो आहे, की अशी आणखी काही पद्धती आहे का की ज्यामुळे यापेक्षा जास्त परिमिती मिळेल? तुम्ही अशी काही रचना सुचवू शकाल का? (मात्र टाईलच्या बाजू एकमेकांशी जुळलेल्या असून त्या तुटलेल्या नसाव्यात.)

10.3 क्षेत्रफळ

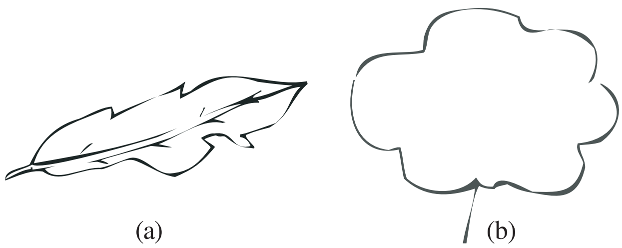
खाली दिलेल्या बंद आकृत्या पहा (आकृती 10.8). या आकृत्या सपाट पृष्ठावर काही जागा व्यापतात. आपण सांगू शकाल का की यातील कोणती आकृती जास्त क्षेत्र व्यापते.



आकृती 10.8

बंद आकृतीने व्यापलेल्या क्षेत्राच्या मापनाला त्याचे **क्षेत्रफळ** असे म्हणतात. म्हणून तुम्ही सांगू शकाल का की वर दिलेल्या आकृत्यांमध्ये कोणाचे क्षेत्रफळ जास्त आहे?

आता आपण शेजारी दिलेल्या आकृत्या पाहू (आकृती 10.9). यात कोणत्या आकृतीचे क्षेत्रफळ जास्त आहे? या आकृतींना नुसते पाहून ते सांगणे कठीण आहे. मग तुम्ही काय कराल?



आकृती 10.9

त्यांना एका चौरसांकित किंवा आलेख कागदावर ठेवा, जिथे प्रत्येक चौरसाचे माप 1 सेमी $\times$ 1 सेमी असेल.

या आकृत्यांची बाहेरील कड रेखाटा. या आकृतीने व्यापलेले चौरस पहा. तुम्हाला दिसेल की काही चौरसांनी पूर्ण, काहींनी अर्धी, काहींनी अर्ध्यापेक्षा कमी तर काहींनी अर्ध्यापेक्षा जास्त जागा व्यापली आहे.

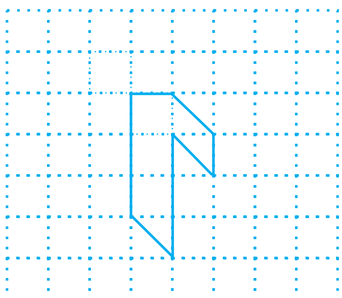
एखाद्या आकृतीने व्यापलेल्या सेमी चौरसांची संख्या हे त्या आकृतीचे क्षेत्रफळ असते.

परंतु इथे एक अडचण आहे. तुम्ही ज्या आकृतीचे क्षेत्रफळ मोजू इच्छिता, ती आकृती पूर्ण चौरस झाकून टाकू शकत नाही. यासाठी आपण खालीलप्रमाणे संकेत स्वीकारू

- एका पूर्ण चौरसाचे क्षेत्रफळ 1 चौरस एकक घेतो, जर हा चौरस सेमीचा कागद असेल तर एका पूर्ण चौरसाचे क्षेत्रफळ 1 चौरस सेमी होईल.
- ज्या चौरसांनी अर्ध्यापेक्षा कमी भाग व्यापलाय त्यांना मोजू नका.
- ज्या चौरसाने अर्ध्यापेक्षा जास्त भाग व्यापलाय अशा चौरसाला आपण एक पूर्ण चौरस म्हणून मोजणार आहोत.
- जर एखाद्या चौरसाचा नेमका अर्धा भाग व्यापला, तर त्याचे क्षेत्रफळ $\frac{1}{2}$ चौरस एकक घ्या.

या संकेतामुळे इच्छित क्षेत्रफळाचा चांगला अंदाज येऊ शकतो.

उदाहरण 10 : आकृती 10.10 मध्ये दाखविलेल्या आकृतीचे क्षेत्रफळ काढा.



आकृती 10.10

उत्तर : हा आकार रेषाखंडांनी मिळून बनला आहे. ही आकृती पूर्ण किंवा अर्ध्या चौरसांना व्यापते. यामुळे आपले काम आणखी सोपे बनले आहे.

(i) पूर्ण व्यापलेल्या चौरसांची संख्या = 3

(ii) अर्ध्या व्यापलेल्या चौरसांची संख्या = 3

पूर्ण चौरसांनी व्यापलेले क्षेत्रफळ $= 3 \times 1$ चौ एकक $= 3$ चौ एकक

अर्ध्या चौरसांनी व्यापलेले क्षेत्रफळ

$= 3 \times \frac{1}{2}$ चौ एकक $= 1\frac{1}{2}$ चौ एकक

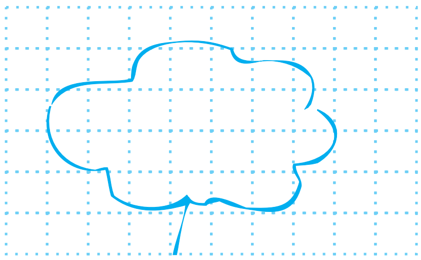
म्हणून एकूण क्षेत्रफळ $= 4\frac{1}{2}$ चौ एकक

उदाहरण 11 : चौरस मोजून आकृती 10.9 (b) चे अंदाजे क्षेत्रफळ काढा.

उत्तर : आलेख कागदावर या आकृतीची बाहेरील कड रेखाटा.

एकूण क्षेत्रफळ $= 11 + 3\frac{1}{2} + 7 = 19\frac{1}{2}$ चौरस एकक

व्यापलेले चौरस	संख्या	अंदाजे क्षेत्रफळ (चौरस एकक)
(i) पूर्ण व्यापलेले चौरस	11	11
(ii) अर्धे व्यापलेले चौरस	3	$3 \times \frac{1}{2}$
(iii) अर्ध्यापेक्षा अधिक व्यापलेले चौरस	7	7
(iv) अर्ध्यापेक्षा कमी व्यापलेले चौरस	5	0

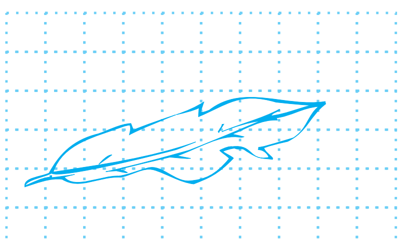


आकृती 10.11

उदाहरण 12 : चौरस मोजून आकृती 10.10(a) चे अंदाजे क्षेत्रफळ काढा.

उत्तर : आलेख कागदावर या आकृतीची बाहेरील कड रेखाटा.

व्यापलेले चौरस	संख्या	अंदाजे क्षेत्रफळ (चौरस एकक)
(i) पूर्ण व्यापलेले चौरस	1	1
(ii) अर्धे व्यापलेले चौरस	–	–
(iii) अर्ध्यापेक्षा अधिक व्यापलेले चौरस	7	7
(iv) अर्ध्यापेक्षा कमी व्यापलेले चौरस	9	0



आकृती 10.12

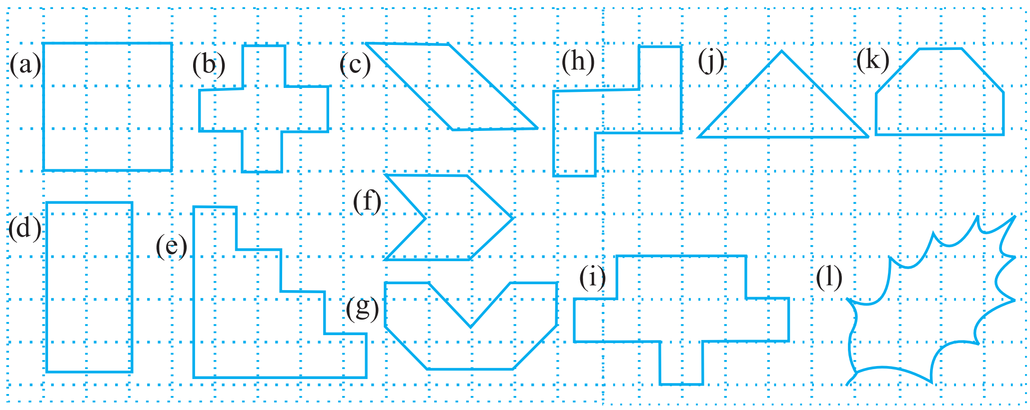
एकूण क्षेत्रफळ = 1 + 7 = 8 चौरस एकक

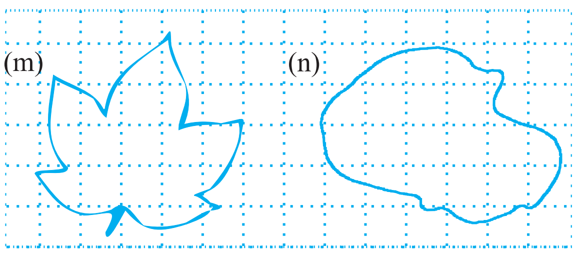
प्रयत्न करा

1. एका आलेख कागदावर एक वर्तुळ काढा. या वर्तुळातील चौरस मोजून वर्तुळाचे अंदाजे क्षेत्रफळ काढा.
2. आलेख कागदावर पाने, फुलांच्या पाकळ्या तसेच अशाच आणखी काही वस्तू ठेवा त्याची कड काढा व क्षेत्रफळ काढा.

उदाहरणसंग्रह 10.2

1. खालील आकृत्यांचे क्षेत्रफळ चौरस मोजून काढा.



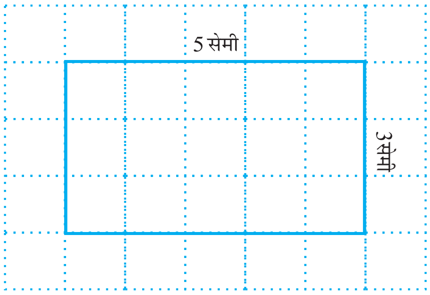


10.3.1 आयताचे क्षेत्रफळ

एका चौरसांकित कागदाच्या मदतीने आपण 5 सेमी लांबी आणि 3 सेमी रुंदी असलेल्या आयताचे क्षेत्रफळ किती आहे हे सांगू शकू का?

आलेख कागदावर आयत काढा (आकृती 10.13) हा आयत 1 सेमी $\times$ 1 सेमी चौरस असलेल्या 15 चौरसांना पूर्णपणे व्यापतो.

आयताचे क्षेत्रफळ = 15 चौरस सेमी, जे आपण (5×3) चौरस सेंमी (लांबी $\times$ रुंदी) या रूपातही लिहू शकतो.



आकृती 10.13

काही आयतांच्या बाजूंची मापे दिली आहेत. त्यांना आलेख कागदावर ठेवून चौरसांची संख्या मोजून त्यांचे क्षेत्रफळ काढा.

लांबी	रुंदी	क्षेत्रफळ
3 सेमी	2 सेमी	----------
5 सेमी	4 सेमी	----------
6 सेमी	5 सेमी	----------

यावरून आपण काय निष्कर्ष काढू?

आपण पाहिले की

आयताचे क्षेत्रफळ = (लांबी × रुंदी)

आलेख कागदाशिवाय आपण ज्याची लांबी 6 सेमी व रुंदी 4 सेमी अशा एका आयताचे क्षेत्रफळ काढू शकतो का?

हो, हे शक्य आहे.

आयताचे क्षेत्रफळ

= लांबी × रुंदी

प्रयत्न करा

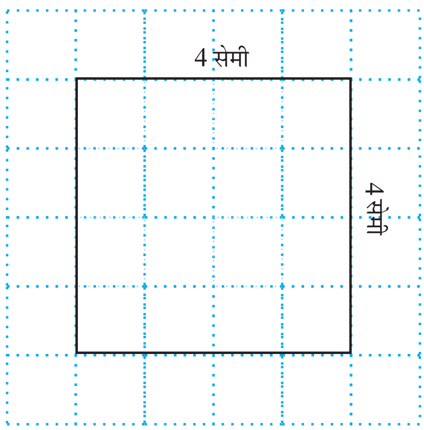
1. तुमच्या वर्गाच्या जमिनीचे (floor) क्षेत्रफळ काढा.
2. तुमच्या घराच्या एका दरवाज्याचे क्षेत्रफळ काढा.

= 6 सेमी × 4 सेमी = 24 चौरस सेमी

10.3.2 चौरसाचे क्षेत्रफळ

आपण आता ज्याच्या बाजूंची लांबी 4 सेमी आहे अशा चौरसाचा विचार करू (आकृती 10.14).

या चौरसाचे क्षेत्रफळ किती येईल.



आकृती 10.14

जर आपण या चौरसाला सेंटिमीटर आलेख कागदावर ठेवले, तर आपल्याला काय दिसेल?
हा 16 चौरसांना पूर्णपणे व्यापतो.
म्हणून चौरसाचे क्षेत्रफळ = 16 चौरस सेमी
= 4×4 चौरस सेमी
काही चौरसांच्या एका बाजूची लांबी दिली आहे.
आलेख कागदाच्या मदतीने त्यांची क्षेत्रफळे काढा.

एका बाजूची लांबी	**चौरसाचे क्षेत्रफळ**
3 सेमी	------
7 सेमी	------
5 सेमी	------

यावरून आपण काय निष्कर्ष काढू शकू?
आपण पाहिले की प्रत्येक स्थितीत,
चौरसाचे क्षेत्रफळ = बाजू × बाजू
आपण प्रश्न सोडवताना याचा उपयोग सूत्र रूपाने करू शकतो.

उदाहरण 13 : लांबी व रुंदी अनुक्रमे 12 सेमी आणि 4 सेमी असणाऱ्या आयताचे क्षेत्रफळ काढा.

उत्तर : आयताची लांबी = 12 सेमी
आयताची रुंदी = 4 सेमी
आयताचे क्षेत्रफळ = लांबी × रुंदी
= 12 सेमी × 4 सेमी = 48 चौरस सेमी

उदाहरण 14 : ज्याच्या एका बाजूची लांबी 8 मी आहे, अशा एका चौरसाकृती भूखंडाचे क्षेत्रफळ काढा.

उत्तर : चौरसाची बाजू = 8 मी
चौरसाचे (भूखंडाचे) क्षेत्रफळ = बाजू × बाजू
= 8 मी × 8 मी = 64 चौरस मी

उदाहरण 15 : एका आयताकृती कार्डबोर्डचे क्षेत्रफळ 36 चौरस सेमी असून त्याची लांबी 9 सेमी आहे, तर कार्डबोर्डची रुंदी काढा.

उत्तर : आयताकार कार्डबोर्डचे क्षेत्रफळ = 36 चौरस सेमी
लांबी = 9 सेमी
रुंदी = ?
आयताचे क्षेत्रफळ = लांबी × रुंदी

म्हणून रुंदी = $\frac{\text{क्षेत्रफळ}}{\text{लांबी}}$ = $\frac{36}{9}$ सेमी = 4 सेमी

म्हणून आयताकार कार्डबोर्डची रुंदी 4 सेमी आहे.

उदाहरण 16 : बॉब 3 मी रुंदी आणि 4 मी लांबी असणाऱ्या खोलीच्या जमिनीवर चौरसाकृती टाईल घालू इच्छितो. जर प्रत्येक चौरसाकृती टाईलची बाजू 0.5 मी असेल, तर जमीन झाकण्यासाठी किती टाईल लागतील?

उत्तर : खोलीत लागणाऱ्या सर्व टाईलचे एकूण क्षेत्रफळ हे जमिनीच्या क्षेत्रफळाएवढे असणार.

खोलीची लांबी = 4 मी

खोलीची रुंदी = 3 मी

जमिनीचे क्षेत्रफळ = लांबी × रुंदी

= 4 मी × 3 मी

= 12 चौरस मी

एका चौरसाकृती टाईलचे क्षेत्रफळ = बाजू × बाजू

= 0.5 मी × 0.5 मी

= 0.25 चौरस मी

आवश्यक टाईलची संख्या $= \dfrac{\text{जमीनीचे क्षेत्रफळ}}{\text{एका टाईलचे क्षेत्रफळ}}$

$= \dfrac{12}{0.25} = \dfrac{1200}{25} = 48$ टाईल्स

उदाहरण 17 : 1 मी 25 सेमी रुंदी आणि 2 मी लांबी असलेल्या कापडाच्या तुकड्याचे क्षेत्रफळ चौरस मीटरमध्ये काढा.

उत्तर : कापडाची लांबी = 2 मी

कापडाची रुंदी = 1 मी 25 सेमी = 1 मी + 0. 25 मी = 1.25 मी

(कारण 25 सेमी = 0.25 मी)

कापडाचे क्षेत्रफळ = कापडाची लांबी × कापडाची रुंदी

= 2 मी × 1.25 मी = 2.50 चौरस मी

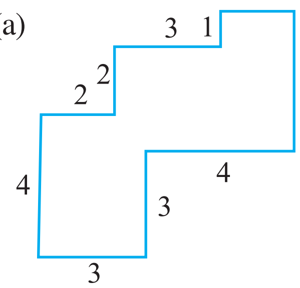
उदाहरणसंग्रह 10.3

1. खालीलप्रमाणे बाजू असलेल्या आयतांचे क्षेत्रफळ काढा.
   (a) 3 सेमी आणि 4 सेमी (b) 12 मी आणि 21 मी
   (c) 2 किमी आणि 3 किमी (d) 2 मी आणि 70 सेमी

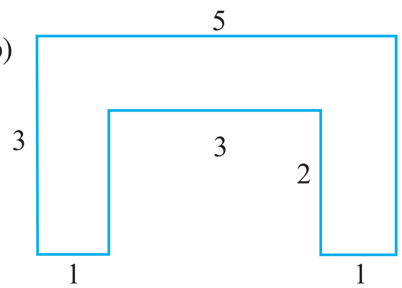
2. खालीलप्रमाणे बाजू असलेल्या चौरसांचे क्षेत्रफळ काढा.
   (a) 10 सेमी (b) 14 सेमी (c) 5 मी

3. तीन आयतांची लांबी व रुंदी खाली दिल्या आहेत.
(a) 9 मी आणि 6 मी (b) 3 मी आणि 3 मी (c) 4 मी आणि 14 मी
यातील कोणाचे क्षेत्रफळ सर्वांत जास्त आहे आणि कोणाचे क्षेत्रफळ सर्वांत कमी आहे?
4. 50 मी लांबी असलेल्या आयताकृती बागेचे क्षेत्रफळ 300 चौरस मीटर आहे, तर बागेची रुंदी काढा.
5. 500 मी लांबी तसेच 200 मी रुंदी असलेल्या एका आयताकार भूखंडावर ₹ 8 प्रति 100 चौरस मीटर या दराने टाईल लावण्यासाठी येणारा खर्च काढा.
6. एका टेबलाच्या वरच्या पृष्ठाचे माप 2 मी 25 सेमी $\times$ 1 मी 50 सेमी आहे, तर टेबलाचे क्षेत्रफळ चौरस मीटरमध्ये काढा.
7. एका खोलीची लांबी 4 मी 25 सेमी आणि रुंदी 3 मी 65 सेमी आहे. खोलीत फरशी झाकण्यासाठी घालाव्या लागणाऱ्या गालिचाचे क्षेत्रफळ वर्गमीटरमध्ये काढा.
8. एका फरशीची लांबी 5 मी आणि रुंदी 4 मी आहे. 3 मी बाजू असलेला एक चौरसाकृती गालिचा फरशीवर अंथरला आहे, तर फरशीच्या ज्या भागावर गालिचा नाही त्या भागाचे क्षेत्रफळ काढा.
9. 5 मी लांबी आणि 4 मी रुंदी असणाऱ्या एका आयताकार भूखंडावर फुलांसाठी 1 मी बाजू असलेले चौरसाकृती 5 वाफे बनविले, तर भूखंडाच्या उरलेल्या भागाचे क्षेत्रफळ काढा.
10. खालील आकृत्या आयतात विभागा आणि त्यांचे क्षेत्रफळ काढा. (बाजूंची मापे सेमीमध्ये दिली आहेत.)

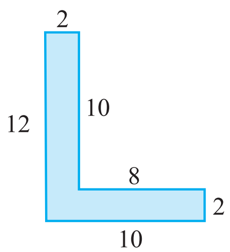
(a)



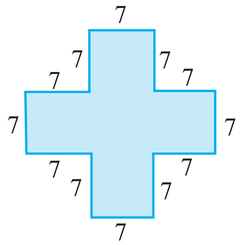
(b)



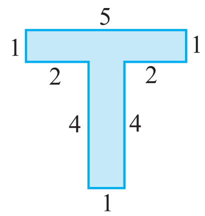
11. खालील आकृत्या आयतात विभागा आणि क्षेत्रफळ काढा. (बाजूची मापे सेमीमध्ये दिली आहेत.)



(a)



(b)



(c)

12. एका टाईलचे माप 5 सेमी $\times$ 12 सेमी आहे. एक क्षेत्र पूर्णपणे झाकण्यासाठी अशा किती टाईल लागतील, ज्यांची लांबी आणि रुंदी क्रमशः
    (a) 144 सेमी आणि 100 सेमी
    (b) 70 सेमी आणि 36 सेमी

आव्हान!

एका सेंटिमीटर चौरसांकित कागदावर, ज्या आयताचे क्षेत्रफळ 16 चौरस सेमी होईल असे शक्य होतील तितके आयत काढा.

(लांबी पूर्ण संख्याच घ्या.)

(a) कोणत्या आयताची परिमिती सर्वांत जास्त आहे?

(b) कोणत्या आयताची परिमिती सर्वांत कमी आहे?

जर आपण 24 चौरस सेमी क्षेत्रफळ असलेला आयत घेतलात, तर तुमची उत्तरे काय होतील?

दिलेल्या क्षेत्रफळासाठी जास्तीत जास्त परिमितीचा आयताचा आकार ठरविणे संभवनीय आहे का? सर्वांत कमी परिमितीच्या आयताच्या बाबतीत काय म्हणू शकाल? उदाहरण द्या आणि कारण सांगा.

आपण काय शिकलो?

1. बंद आकृतीभोवती तिच्या सीमेवरून एक वेळा जाऊन जे अंतर काटलेले असते, त्याला आकृतीची परिमिती म्हणतात.
2. (a) आयताची परिमिती $= 2 \times$ (लांबी + रुंदी)
   (b) चौरसाची परिमिती $= 4 \times$ बाजूची लांबी
   (c) समभुज त्रिकोणाची परिमिती $= 3 \times$ बाजूची लांबी
3. सर्व बाजू आणि कोन समान असलेल्या आकृतींना सुसम आकृती म्हणतात.
4. बंद आकृतीने व्यापलेल्या पृष्ठाच्या परिमाणाला त्याचे क्षेत्रफळ असे म्हणतात.
5. वर्गांकित कागदाचा वापर करून कोणत्याही आकृतीचे क्षेत्रफळ काढताना खालील संकेत वापरतात.
   (a) ज्या चौरसांचा अर्ध्यापेक्षा कमी भाग आकृतीने व्यापला आहे, त्यांना वगळते.
   (b) ज्या चौरसांचा अर्ध्यापेक्षा जास्त भाग आकृतीने व्यापला आहे, अशा चौरसांचा आपण एक पूर्ण चौरस धरतो.
   (c) ज्या चौरसांचा अर्धा भाग आकृतीने व्यापला आहे, अशांचे क्षेत्रफळ   चौरस एकक घेतो.
6. (a) आयताचे क्षेत्रफळ = लांबी $\times$ रुंदी
   (b) चौरसाचे क्षेत्रफळ = बाजू $\times$ बाजू

बीजगणित

प्रकरण 11

11.1 प्रस्तावना

आतापर्यंत आपला बहुतेक अभ्यास संख्या आणि आकृत्यांविषयी झाला आहे. आपण या संख्या, संख्यांवरील क्रिया आणि त्यांचे गुणधर्म यांविषयी शिकलो आहोत. आपण संख्यांचा वापर दैनंदिन जीवनातील अनेक समस्या सोडवताना केला आहे. गणिताचे असे क्षेत्र ज्याचा आपण अभ्यास केला आहे, त्याला **अंकगणित (arithmetic)** म्हटले जाते. आपण दोन आणि तीन मिती (dimensions) असलेल्या आकृत्या आणि त्यांचे गुणधर्म याविषयी शिकलो आहोत. आकृती किंवा आकार **(Shapes)** यांच्याविषयी अभ्यास करणाऱ्या क्षेत्राला **भूमिती (geometry)** म्हणतात. आता आपण गणिताचे जे क्षेत्र अभ्यासणार आहोत; त्याला **बीजगणित (Algebra)** म्हणतात.

या नवीन क्षेत्राचे मुख्य वैशिष्ट्य असे आहे की यामध्ये अक्षरांचा वापर केला जातो. अक्षरांचा वापर करून नियम आणि सूत्रे अधिक विस्तृत स्वरूपात लिहिणे शक्य होते. अक्षरांचा वापर केल्यामुळे आपण केवळ एक संख्या नव्हे तर एका राशीबद्दल बोलू शकतो. दुसरे असे की अक्षरे माहीत नसलेल्या राशींच्या जागी देखील वापरता येतात. या अज्ञात राशींना (unknowns) निश्चित करण्याच्या पद्धती शिकून आपण कोडी (puzzles) तसेच दैनंदिन जीवनातील अनेक गोष्टी सोडवण्यासाठी प्रभावशाली साधन शोधू शकतो. तिसरी गोष्ट म्हणजे ही अक्षरे संख्यांच्या जागी वापरली जातात. त्यामुळे यांच्यावर संख्यांप्रमाणेच विविध क्रिया करता येतात. यातून आपण बैजिक मांडणी (algebric expressions) आणि त्यांचे गुणधर्म यांचा अभ्यास करू शकतो.

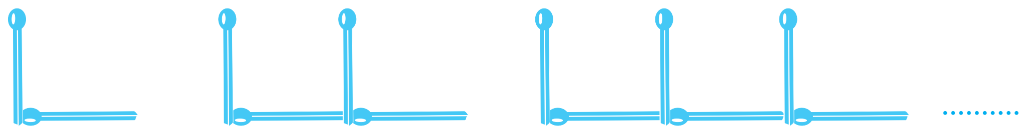
तुम्हांला बीजगणित हे खूपच मजेशीर आणि उपयुक्त वाटेल. समस्या सोडवण्यासाठी हे खूपच उपयुक्त आहे. चला, आपला अभ्यास सोप्या उदाहरणांमधून सुरू करू.

11.2 काडीपेटीच्या काड्यांनी बनले आकृतिबंध

अमीना आणि सरिता काडीपेटीच्या काड्यांपासून आकृतीबंध (pattern) बनवत आहेत. त्यांनी इंग्रजी वर्णमालेच्या अक्षरांचा सोपा आकृतिबंध बनवायचे ठरवले. आकृती 11.1 (a) मध्ये दाखवल्याप्रमाणे अमीनाने दोन काड्या घेऊन L हे अक्षर बनवले. मग, आकृती 11.1 (b) मध्ये दाखवल्याप्रमाणे सरीताने आणखी एक L अमीनाने बनवलेल्या L च्यापुढे ठेवला.

मग अमीना, आणखी एक L बनवून पुढे ठेवते. असाच क्रम पुढे चालू राहतो. आकृती 11.1 (c) मध्ये दाखवल्याप्रमाणे–

तेवढ्यात त्यांचा मित्र अप्पू येतो. तो पण या पॅटर्नकडे पाहतो. तो सतत प्रश्न विचारत असतो. तो



आकृती 11.1

मुलींना विचारतो. 'सात' L बनवण्यासाठी किती काड्या लागतील? अमीना आणि सरिता विचारपूर्वक काम करतात. त्यांनी 1L, 2L, 3L याप्रमाणे पॅटर्न बनवून तक्ता तयार कलेला.

सारणी-1

बनवलेल्या L ची संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	_	_
आवश्यक काड्यांची संख्या	2	4	6	8	10	12	14	16	_	_

अप्पूला तक्ता-1 द्वारे उत्तर मिळते. 7 L बनवण्यासाठी 14 काड्या लागतील.

तक्ता लिहिताना अमीनाच्या लक्षात येते, की आवश्यक काड्यांची संख्या L च्या दुप्पट आहे म्हणजे,

आवश्यक काड्यांची संख्या $= 2 \times$ L ची संख्या

चला, सोईसाठी L च्या संख्येसाठी n हे अक्षर मानू.

जर एक L बनवला तर $n = 1$ आहे जर 2L बनवले तर $n = 2$ इ. अशा प्रकारे n म्हणजे कोणतीही नैसर्गिक संख्या 1, 2, 3, 4, 5, ... होऊ शकते. मग आपण लिहूया.

आवश्यक संख्यांची संख्या $= 2 \times n$

$2 \times n$ लिहिण्याऐवजी आपण $2n$ लिहूया. लक्षात घ्या $2n$ म्हणजेच $2 \times n$ आहे.

अमीना तिच्या मित्रांना सांगते की, तिचा हा नियम कितीही L बनवण्यासाठी लागणाऱ्या काड्यांची संख्या सांगू शकतो.

अशा प्रकारे, $n = 1$ असल्यास आवश्यक काड्यांची संख्या $= 2 \times 1 = 2$;

$n = 2$ असल्यास आवश्यक काड्यांची संख्या $= 2 \times 2 = 4$;

$n = 3$ असल्यास आवश्यक काड्यांची संख्या $= 2 \times 3 = 6$ इत्यादी.

या संख्या तक्ता–1 मध्ये दिलेल्या संख्यांप्रमाणेच आहेत.

सरिता म्हणते, ''हा नियम खूपच प्रभावशाली आहे. या नियमाचा वापर करून मी 100 L बनवायला लागलेल्या काड्यांची संख्या सांगू शकते. एकदा नियम कळाला की, आकृतिबंध आखण्याची किंवा तक्ता बनवण्याची गरज नाही.''

काय तुम्ही सरिताच्या मताशी सहमत आहात काय?

11.3 चलाचा संबोध

वरच्या उदाहरणामध्ये, आपण L चा एक पॅटर्न बनवताना लागलेल्या काड्यांची संख्या काढण्यासाठी एक नियम शोधला होता. तो नियम म्हणजे:

आवश्यक काड्यांची संख्या $= 2n$

येथे n, L च्या आकृतिबंधाची संख्या आहे आणि n ला 1, 2, 3, 4, ... या किमती असू शकतात. तक्ता–1 परत पाहूया. सारणीमध्ये n ची किंमत बदलत जाते (वाढते). त्यामुळे आवश्यक काड्यांची संख्यादेखील बदलत जाते (वाढते).

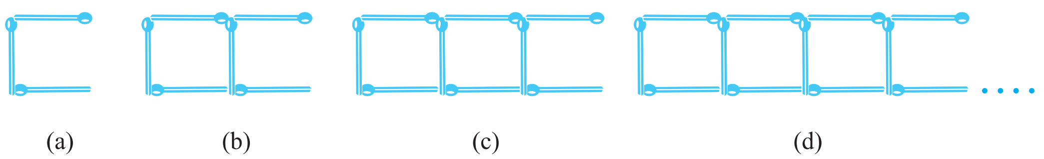
n चल (Variable) चे एक उदाहरण आहे. याची किंमत स्थिर (fixed) नाही. कोणतीही किंमत 1, 2, 3, 4, ... घेऊ शकतो. आपण आवश्यक काड्यांची संख्या काढण्यासाठी चल n चा वापर करून नियम लिहिला.

'चल' या शब्दाचा अर्थ आहे. जी वस्तू सतत बदलत असते. जिची किंमत स्थिर नाही, हा विविध किंमती धारण करू शकतो.

आपण 'चल' च्या बाबतीत आणखी शिकण्यासाठी काडीपेटीच्या काड्यांपासून बनवलेले आणखी काही आकृतिबंध (patterns) पाहूया.

11.4 काडेपेटीच्या काड्यांपासून आणखी काही आकृतिबंध

अमीना आणि सरिता काड्यांचे आकृतिबंध तयार करण्यात आता रस दाखवू लागल्या आहेत. आता त्यांनी C या अक्षराचा आकृतिबंध तयार करण्याचा प्रयत्न केला. एक C बनवायला त्या तीन काड्या वापरतात. आकृती 11.2(a) पाहा.



आकृती 11.2

तक्ता-2, C चा पॅटर्न बनवायला आवश्यक काड्यांची संख्या दाखवतो:

तक्ता-2

C ची संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	....	....	....
आवश्यक काड्यांची संख्या	3	6	9	12	15	18	21	24	....	....	....

वरील तक्त्यामधील राहिलेल्या संख्या पूर्ण करू शकता का?

सरिताने पुढील नियम दिला:

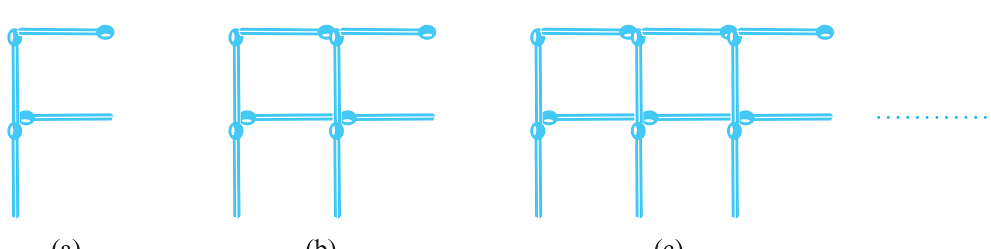
आवश्यक काड्यांची संख्या = $3n$

तिने C च्या संख्येसाठी n हे अक्षर वापरले आहे; n एक चल आहे जे 1, 2, 3, 4, ... इ. किंमत घेऊ शकते.

तुम्ही सरिताशी सहमत आहात का?

लक्षात ठेवा की $3n$ म्हणजेच $3 \times n$

आता यानंतर अमीना आणि सरिता यांना F चा पॅटर्न बनवायचा आहे. त्यांनी चार काड्या वापरून F बनवला. आकृती 11.3(a) पाहा.



आकृती 11.3

F चा पॅटर्न तयार करण्यासाठी आता तुम्ही नियम लिहू शकाल का?

काड्यांनी तयार करता येतील अशी वर्णमालेतील इतर अक्षरे आणि आकारांचा विचार करा. उदाहरणार्थ, U (⊔), V (\/), त्रिकोण (△), चौरस (□) इ. यांपैकी कोणतीही पाच अक्षरे

किंवा आकार घ्या आणि काड्यांचे आकृतिबंध तयार करायला लागणाऱ्या काड्यांची संख्या काढण्यासाठी नियम लिहा.

11.5 चलांची आणखी उदाहरणे

आपण एक चल दाखवण्यासाठी n हे अक्षर वापरले. राजू विचारतो, "m का नाही?" n मध्ये काही विशेष नाही. कोणतेही अक्षर घेतले तरी चालते.

चल दाखवण्यासाठी m, l, p, x, y, z अशी कोणतीही अक्षरे वापरली तरी चालतात. लक्षात ठेवा, चल अशी संख्या आहे, जिची संख्या स्थिर नाही. उदा. 5 असो किंवा 100 किंवा इतर कोणतीही संख्या चल नाही. त्यांची किंमत स्थिर (निश्चित) आहे. अशाच प्रकारे त्रिकोणाच्या कोनांची संख्या किंमतीने स्थिर म्हणजे 3 आहे. ही चल नाही. चौकोनाच्या कोनांची संख्या (4) स्थिर आहे. तीपण चल नाही. परंतु वरील उदाहरणांमध्ये n ही चल आहे. त्याला 1, 2, 3, 4, ... अशा वेगवेगळ्या किंमती असू शकतात.

आता आणखी एका परिस्थितीमध्ये चलांचा विचार करू.

शाळेच्या पुस्तक भांडारामधून विद्यार्थी स्वाध्यायपुस्तिका घ्यायला गेले. एका स्वाध्याय पुस्तिकेची किंमत 5 रु. आहे. मुन्नूला 5, अप्पूला 7, साराला 4 स्वाध्याय पुस्तिका खरेदी करायच्या आहेत. एका विद्यार्थ्याला स्वाध्याय पुस्तिका घ्यायला किती रक्कम द्यावी लागेल?

एक विद्यार्थी किती स्वाध्याय पुस्तिका खरेदी करणार आहे. यावर ती रक्कम अवलंबून आहे. विद्यार्थ्यांनी एक तक्ता तयार केला.

तक्ता-3

हव्या असलेल्या स्वाध्याय पुस्तिकांची संख्या	1	2	3	4	5	– –	m	– –
एकूण रक्कम (रुपयांत)	5	10	15	20	25	– –	$5m$	– –

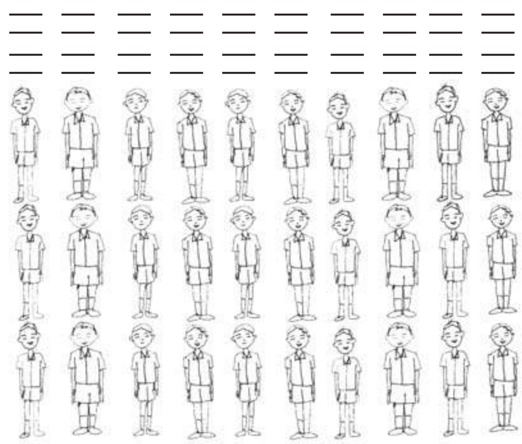
एका विद्यार्थ्याच्या स्वाध्यायपुस्तिकांच्या संख्येसाठी m हे चल वापरले आहे. m हे चल 1, 2, 3, 4, ... अशा कोणतीही किमतीसाठी वापरले जाऊ शकते. m स्वाध्यायपुस्तिकांची एकूण किंमत काढण्यासाठी खालील नियम दिला आहे:

एकूण किंमत (रुपयांमध्ये) = 5 × हवी असलेल्या स्वाध्यायपुस्तिकांची संख्या

$= 5m$

जर मुन्नूला 5 स्वाध्यायपुस्तिका घ्यायच्या असतील तर $m = 5$ अशी किंमत घेऊन मुन्नूला ₹ 5 × 5 = ₹ 25 खरेदी करायला बरोबर न्यावे लागतील.

आणखी एक उदाहरण घेऊ. एका शाळेत प्रजासत्ताक दिन साजरा करण्यासाठी मुले प्रमुख पाहुण्यांसमोर सामुदायिक कवायत करणार आहेत. एका ओळीत 10 मुले (आकृती 11.4) याप्रमाणे मुलांना उभे केले आहे. या कवायतीत किती मुले भाग घेऊ शकतील?



आकृति 11.4

मुलांची संख्या ओळींच्या संख्येवर अवलंबून आहे. जर 1 ओळ असेल तर मुलांची संख्या 10 असेल. जर 2 ओळी असतील तर मुलांची संख्या $2 \times 10 = 20$ असेल, जर r ओळी असतील तर मुलांची संख्या $10r$ असेल. येथे r एक चल आहे. जे ओळींची संख्या दाखवते आणि ही 1, 2, 3, 4, ... अशी कोणतीही किंमत असू शकते.

आतापर्यंत आपण जेवढी उदाहरणे पाहिली त्यामध्ये एक चल आणि एक संख्या यांचा गुणाकार आहे. परंतु विविध परिस्थिती अशा पण असू शकतात. जिथे संख्यांची चलासोबत बेरीज, वजाबाकी दाखवली जाते.

सरिताचे म्हणणे होते की, तिच्याकडे अमीना पेक्षा 10 जास्त मणी आहेत. जर अमीनाकडे 20 मणी आहेत. तर सरिताकडे 30 मणी आहेत. जर अमीनाकडे 30 मणी असतील तर सरिताकडे 40 मणी असतील. आपल्याला हे माहीत नाही की अमीनाकडे नेमके किती मणी आहेत. तिच्याकडील मण्यांची संख्या कितीही असू शकते. परंतु आपल्याला हे ठाऊक आहे की सरिताकडील मणी = अमीनाकडील मणी + 10.

आपण अमीनाकडील मणी x ने दाखवू. x हे एक चल आहे. ज्याची किंमत 1, 2, 3, 4,... ,10,... ,20,... ,30,... अशी कोणतीही असू शकते. x चा वापर करून आपण असे लिहू शकतो की, सरिता कडील मणी $= x + 10$ आहेत. $(x + 10)$ ही राशी, x अधिक (Plus) 10 असे वाचू शकतो. याचा अर्थ असा की, x ची किंमत 20 असेल तर $(x + 10)$ ची किंमत 30 होईल. जर x ची किंमत 30 असेल तर, $(x + 10)$ ची किंमत 40 होईल.

$(x + 10)$ या राशीला आणखी सोपे करू शकत नाही. $x + 10$ आणि $10x$ यामध्ये गोंधळ करू नका. $10x$ मध्ये x व 10 यांचा गुणाकारआहे तर, $(x + 10)$ मध्ये 10 आणि x यांची बेरीज आहे. याचा पडताळा आपण घेऊया. उदाहरणार्थ,

जर $x = 2$, तर $10x = 10 \times 2 = 20$ आहे आणि $x + 10 = 2 + 10 = 12$ आहे.

जर $x = 10$, तर $10x = 10 \times 10 = 100$ आहे आणि $x + 10 = 10 + 10 = 20$ आहे.

राजू आणि बाळू दोघे भाऊ आहेत. बाळू राजूपेक्षा 3 वर्षांनी लहान आहे. जर राजू 15 वर्षांचा असेल तर बाळू 12 वर्षांचा असेल, आपणास राजूचे वय माहीत नाही ते कितीही असू शकते.

समजा, राजूचे वय x वर्षे आहे. x एक चल आहे आणि बाळूचे वय $(x - 3)$ वर्षे असेल. $(x - 3)$ ही राशी x वजा (minus) 3 अशी वाचता येईल. आता, जर $x = 12$ असेल तर $(x - 3) = 9$ असेल आणि जर $x = 15$ असेल तर $(x - 3) = 12$ असेल.

उदाहरणसंग्रह 11.1

1. काड्यांपासून आकृतिबंध बनवण्यासाठी आवश्यक असलेल्या काड्यांची संख्या काढण्यासाठी नियम तयार करा.
   - (a) T या अक्षराचा T या रूपात काड्यांचा आकृतिबंध
   - (b) Z या अक्षराचा Z या रूपात काड्यांचा आकृतिबंध
   - (c) U या अक्षराचा U या रूपात काड्यांचा आकृतिबंध
   - (d) V या अक्षराचा V या रूपात काड्यांचा आकृतिबंध
   - (e) E या अक्षराचा E या रूपात काड्यांचा आकृतिबंध
   - (f) S या अक्षराचा S या रूपात काड्यांचा आकृतिबंध
   - (g) A या अक्षराचा A या रूपात काड्यांचा आकृतिबंध
2. आपण L, C आणि F या अक्षरांच्या आकृतिबंधासाठी लागणारे नियम आधीपासून जाणतो. प्रश्न 1 मध्ये दिलेल्या काही अक्षरांपासून तोच नियम मिळतो का? जो L मधून मिळाला होता. अशी कोणकोणती अक्षरे आहेत? आणि असे का घडते?
3. एका संचलनामध्ये जवानांचे संचलन (Cadets March) चालू आहे. एका ओळीत 5 जवान आहेत. जर ओळींची संख्या माहीत असेल तर जवानांची संख्या काढण्यासाठी कोणता नियम असेल? (ओळींची संख्या n माना.)
4. एका पेटीत 50 आंबे आहेत. तुम्ही पेटींच्या संख्येच्या पटीमध्ये आंब्याची एकूण संख्या कशी लिहाल? (पेटींची संख्या b माना.)
5. शिक्षक प्रत्येक विद्यार्थ्याला 5 पेन्सिली देतात. विद्यार्थ्यांची संख्या माहीत असेल तर तुम्ही हव्या असलेल्या पेन्सिलींची संख्या सांगू शकाल का? (विद्यार्थ्यांची संख्या s माना.)
6. एक चिमणी 1 मिनिटात 1 किमी उडते. तुम्ही चिमणीने पार केलेले अंतर (मिनिटांत) तिला उडण्यासाठी लागलेल्या वेळेच्या पदात मांडू शकाल? (मिनिटांमध्ये उडण्यासाठी लागणारा वेळ t माना.)

7. राधा ठिपक्यांची (Dots) रांगोळी काढत होती. (आकृती 11.5 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे खडूने ठिपके जोडून सुंदर रांगोळी बनवा) तिच्याकडे एका ओळीत 8 ठिपके आहेत. r ओळींच्या रांगोळीत एकूण किती ठिपके असतील? जर 8 ओळी असतील तर ठिपके किती असतील? जर 10 ओळी असतील, तर एकूण ठिपके किती?

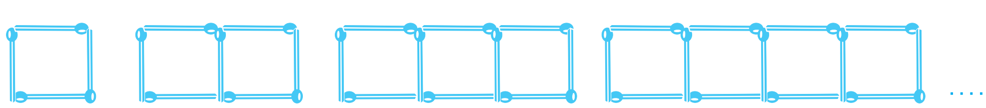
आकृती 11.5

8. लीला राधाची लहान बहीण आहे. लीला राधापेक्षा 4 वर्षांनी लहान आहे. तुम्ही लीलाचे वय राधाच्या वयाच्या संदर्भात पदामध्ये लिहू शकाल का? राधाचे वय x वर्ष आहे.

9. आईने लाडू बनवले आहेत. काही लाडू त्यांनी पाहुणे आणि घरातील सदस्यांना दिले. तरीही 5 लाडू शिल्लक राहिले. जर आईने l लाडू दिले असतील, तर एकूण किती लाडू बनवले होते?

10. मोठ्या खोक्यातील संत्री छोट्या खोक्यांमध्ये ठेवायची आहेत. एका मोठ्या खोक्यातील संत्री दोन लहान खोक्यांत मावतात आणि तरी 10 संत्री शिल्लक राहतात. जर एका छोट्या खोक्यातील संत्र्यांची संख्या x असेल, तर मोठ्या खोक्यातील संत्र्यांची संख्या किती आहे?

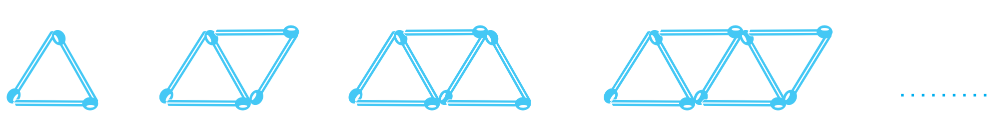
11. (a) काड्यांपासून चौरस आकाराचा आकृतिबंध केलेला पाहा (आकृती 11.6) हे चौरस वेगवेगळे नाहीत. दोन लगतच्या चौरसांमध्ये एक काडी सामाईक आहे. चौरस बनवण्यासाठी आवश्यक काड्यांची संख्या काढण्यासाठी आकृतिबंध पाहून नियम तयार करा. (**संकेत:** जर तुम्ही एक काडी काढली तर C चा पॅटर्न मिळेल.)



(a) (b) (c) (d)

आकृती 11.6

(b) आकृती 11.7 काड्यांपासून बनवलेला त्रिकोणांचा पॅटर्न दर्शवित आहे. वरील प्रश्न 11 (a) प्रमाणे, विस्तृत नियम शोधा. जो त्रिकोणांची संख्यांच्या पदात आवश्यक काड्यांची संख्या दाखवेल.



(a) (b) (c) (d)

आकृती 11.7

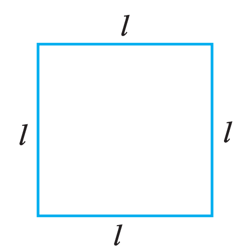
11.6 मूलभूत नियमांमध्ये चलांचा उपयोग

आता असे मूलभूत नियम पाहू जे आपण आधी शिकलो आहोत. जे चलांचा उपयोग करून मांडले जातात.

भूमितीचे नियम

आपण महत्त्वमापन (Mensuration) च्या घटकामध्ये चौरसाची परिमिती, आयतांची परिमिती बद्दल यापूर्वी शिकलो आहोत. आता आपण ते एका नियमाच्या स्वरूपात लिहिण्यासाठी पुन्हा एकदा पाहू.

1. चौरसाची परिमिती: आपल्याला हे ठाऊक आहे की, एक बहुभुजाकृती (3 किंवा त्याहून जास्त रेषाखंडांनी बनलेली बंदिस्त आकृती) ची परिमिती (perimeter) म्हणजे तिच्या बाजूंची बेरीज होय. चौरसाच्या चार बाजू असतात आणि प्रत्येक बाजूची लांबी समान असते. (आकृती 11.8)



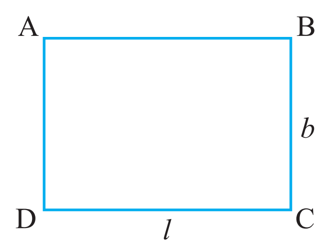
आकृती 11.8

म्हणून, चौरसाची परिमिती = चौरसाच्या सर्व बाजूंची बेरीज

$= l + l + l + l = 4 \times l = 4l$

अशा प्रकारे, आपण चौरसाच्या परिमितीचा एक नियम मिळवू शकतो. चल l चा वापर आपल्याला असा एक व्यापक नियम लिहिण्यात मदत करतो. जो संक्षिप्त आणि सोपा आहे.

2. आयताची परिमिती: आपल्याला माहीत आहे की, आयताला चार बाजू असतात. उदाहरणार्थ, आयत ABCD च्या चार बाजू AB, BC, CD आणि DA आहेत. (आकृती 11.9) आयताच्या समोरासमोरील बाजू नेहमी समान असतात. म्हणून आयत ABCD च्या बाजू AB आणि CD ची लांबी l आणि बाजू AD आणि BC ची लांबी b माना.



आकृती 11.9

म्हणून, आयताची परिमिती = AB ची लांबी + BC ची लांबी + CD ची लांबी + AD ची लांबी

$= l + b + l + b$

$= (l + l) + (b + b)$

$= 2l + 2b$

म्हणून, नियम आहे की,

आयताची परिमिती $= 2l + 2b$

या ठिकाणी l आणि b क्रमशः लांबी आणि रूंदी आहेत.

$l = b$ असतील तर काय होईल याची चर्चा करा.

जर आपण आयताची परिमिती p या चलाने दाखवली तर नियम असा बनेल.:

$$\boldsymbol{p = 2l + 2b}$$

टीप: येथे l आणि b हे दोन्ही चल आहेत. दोन्हींची किंमत वेगवेगळी आहे. म्हणजेच एका चलाची किंमत दुसऱ्या चलाच्या किंमतीवर अवलंबून नसते.

भूमितीच्या अध्ययनामध्ये तुमच्या समोर अनेक नियम आणि सूत्रे येतील. जी द्विमितीय आकृतीच्या परिमिती आणि क्षेत्रफाळांच्या तसेच, त्रिमितीय आकृत्यांचे पृष्ठफळ आणि आकारमानाशी संबंधित असतील. तसेच, बहुभुजाकृतीच्या आंतरकोनांची बेरीज, बहुभुजाकृतीचे बाह्यकोनांची संख्या इ. च्या सूत्रांची मांडणी करू शकतील. चलांचा जो संबोध तुम्ही शिकला आहोत तो असे अनेक व्यापक नियम आणि सूत्र लिहिण्यामध्ये अतिशय उपयुक्त ठरेल?

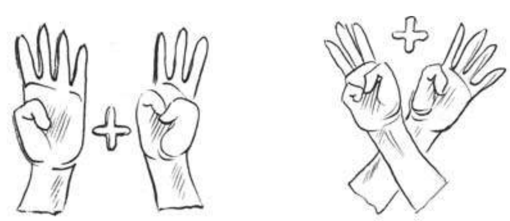
अंकगणिताचे नियम

3. दोन संख्यांच्या बेरजेची क्रमनिरपेक्षता

आपल्याला ठाऊक आहे की,

$4 + 3 = 7$ आणि $3 + 4 = 7$ आहे.

म्हणजेच, $4 + 3 = 3 + 4$



हा नियम कोणत्याही दोन पूर्ण संख्यांच्या बाबतीत सत्य आहे. संख्याच्या या नियमाला **बेरजेची क्रमनिरपेक्षता (commutativity)** म्हणतात. बेरजेमध्ये क्रम बदलला तरी संख्यांच्या बेरजेत कोणताही बदल होत नाही. चलांचा उपयोग आपल्याला या गुणधर्माची व्याप्ती संक्षिप्त रूपात मांडण्यासाठी करता येतो. समजा, a आणि b दोन चल आहेत.

तर, $\boldsymbol{a + b = b + a}$

एकदा का, आपण हा नियम वरील स्वरूपात लिहिला की, यात सर्व किंमती घालता येतात. जर $a = 4$ आणि $b = 3$ असेल तर $4 + 3 = 3 + 4$ मिळते. जर $a = 37$ आणि $b = 73$ असेल तर $37 + 73 = 73 + 37$

4. दोन संख्यांच्या गुणाकाराची क्रमनिरपेक्षता

आपण पूर्ण संख्यांच्या घटकात शिकलो आहोत की दोन संख्यांच्या गुणाकारामध्ये ज्या दोन संख्यांचा गुणाकार होतो. त्यांचा क्रम बदलला तरी गुणाकारावर काही परिणाम होत नाही.

उदाहरणार्थ,

$4 \times 3 = 12$ आणि $3 \times 4 = 12$

म्हणून $4 \times 3 = 3 \times 4$

या गुणधर्माला **गुणाकाराची क्रमनिरपेक्षता** म्हणतात. गुणाकारामध्ये संख्यांचा क्रम बदलूनही उत्तरामध्ये काही बदल होत नाही. बेरजेप्रमाणे a आणि b या चलाचा उपयोग करून आपण संख्यांच्या गुणाकाराची क्रमनिरपेक्षता व्यक्त करू शकतो.

$$a \times b = b \times a$$

लक्षात घ्या, की इथे a आणि b कोणत्याही संख्या असू शकतात. या व्यापक नियमामुळे विशिष्ट मांडणी. जसे $4 \times 3 = 3 \times 4$ किंवा $37 \times 73 = 73 \times 37$ इ. करता येतात.

5. वितरण गुणधर्म

समजा, आपल्याला 7×38 सोडवायला सांगितले. आपल्याला 38 चा पाढा येत नाही, म्हणून आपण खालील प्रकारे सोडवतो.

$$\begin{aligned} 7 \times 38 &= 7 \times (30 + 8) \\ &= 7 \times 30 + 7 \times 8 \\ &= 210 + 56 \\ &= 266 \end{aligned}$$

7, 30 आणि 8 या तीन ही संख्यांसाठी हे योग्य आहे. हा गुणधर्म **संख्यांच्या बेरजेवर गुणाकाराचे वितरण (distributivity of multiplication over addition of numbers)** म्हणून ओळखला जातो.

चलांचा वापर करून आपण संख्यांचा हा गुणधर्म आणखी व्यापक आणि संक्षिप्त रूपात मांडू शकतो. समजा, की a, b आणि c ही तीन चले आहेत आणि त्यांच्या कोणत्याही किंमती असू शकतात. तेव्हा,

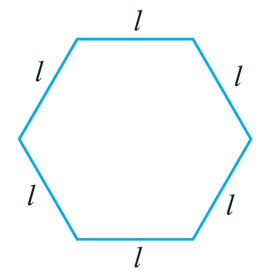
$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

संख्यांचे गुणधर्म खूपच गंमतीशीर असतात. तुम्ही यापैकी काही या वर्षी शिकणार आहात तर काही आपल्या गणित विषयात नंतर शिकाल. चलांचा वापर आपल्याला या गुणधर्मांना व्यापक आणि संक्षिप्त रूपात मांडण्यात मदत करतो. संख्यांचा आणखी एक गुणधर्म उदाहरणसंग्रह 11.2 च्या प्रश्न क्र. 5 मध्ये दिला आहे. संख्यांचे असेच आणखी काही गुणधर्म माहिती करून घ्या. तसेच चलांचा वापर करून ते अधिक व्यापक बनवा.

उदाहरणसंग्रह 11.2

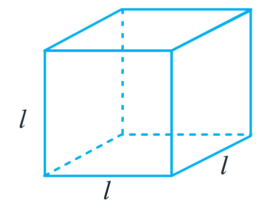
1. एका समभुज त्रिकोणाची बाजू l ने दाखवली आहे. या समभुज त्रिकोणाची परिमिती l चा वापर करून मांडा.

2. एका सुसम षटकोनाची (Regular hexagon) बाजू l ने दाखवली आहे. (आकृती 11.10) l चा वापर करून, या षटकोनाची परिमिती मांडा. (**संकेत:** सुसम षटकोनाच्या सर्व 6 बाजू समान असतात आणि सर्व कोन समान असतात.)



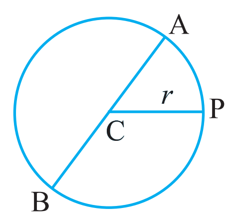
आकृती 11.10

3. घन (Cube) एक त्रिमितीय (three dimensional) आकृती आहे. (आकृती 11.11 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे) यात 6 पृष्ठभाग असतात आणि हे सर्व चौरस समान असतात. (identical) घनाची एका (बाजू)कडेची लांबी l ने दाखवली, घनाच्या सर्व बाजूंच्या पृष्ठभागांची बेरीज काढण्यासाठी एक सूत्र शोधा.



आकृती 11.11

4. वर्तुळाचा व्यास हा असा रेषाखंड आहे जो वर्तुळावरील दोन बिंदूंना जोडतो आणि केंद्रबिंदूतून जातो. शेजारील आकृती 11.12 मध्ये AB हा वर्तुळाचा व्यास आहे आणि C हे वर्तुळकेंद्र आहे. वर्तुळाचा व्यास (d) त्रिज्या (r) च्या रुपात मांडा.



आकृती 11.12

5. तीन संख्या 14, 27 आणि 13 यांच्या बेरजेचे निरीक्षण करा. आपल्याला ही बेरीज दोन प्रकारे मिळते.
   (a) आधी आपण 14 आणि 27 ची बेरीज करून 41 हे उत्तर मिळवतो. मग 41 आणि 13 ची बेरीज केल्यावर 54 ही बेरीज मिळवू शकतो.
   (b) आपण आधी 27 आणि 13 यांची बेरीज करून 40 हे उत्तर मिळवतो आणि मग ती 14 मध्ये मिळवून 54 हे उत्तर मिळवू शकतो. अशा प्रकारे $(14 + 27) + 13 = 14 + (27 + 13)$

   कोणत्याही तीन संख्यांसाठी असे करता येईल. याला संख्यांच्या बेरजेचा साहचर्य गुणधर्म म्हणतात. हा गुणधर्म आपण पूर्ण संख्या (associative) या घटकात शिकलो आहोत. तो a, b आणि c या चलांचा वापर करून एक व्यापक रूपात मांडा.

11.7 चलयुक्त राशी

अंकगणितात आपण $2 \times 10 + 3$, $3 \times 100 + 2 \times 10 + 4$ अशा राशी (expressions) पाहिल्या होत्या. या राशी 2, 3, 4, 10, 100 इ. सारख्या संख्यांनी बनतात. म्हणजे बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार आणि भागाकार यांचा वापर केला जाऊ शकतो. उदा. $2 \times 10 + 3$ सोडवण्यासाठी आपण 2 आणि 10 चा गुणाकार करून त्यात 3 मिळवले. इतर अंकगणितीय राशींची उदाहरणे खालीलप्रमाणे:

$3 + (4 \times 5)$,	$(-3 \times 4) + 5$,
$8 - (7 \times 2)$,	$14 - (5 - 2)$,
$(6 \times 2) - 5$,	$(5 \times 7) - (3 \times 4)$,
$7 + (8 \times 2)$	$(5 \times 7) - (3 \times 4 - 7)$, इत्यादी

राशी या चलांचा उपयोग करूनदेखील मिळवता येतात. खरे तर आपण चलयुक्त राशी यापूर्वी पाहिल्या आहेत. उदाहरणार्थ, $2n$, $5m$, $x + 10$, $x - 3$ इ. या राशी चलांवर बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार अशा क्रिया केल्यानंतर मिळतात. उदाहरणार्थ, राशी $2n$ चल n ला 2 ने गुणल्यावर बनते. $(x + 10)$ ही राशी x या चलामध्ये 10 मिळवल्यावर बनते.

आपल्याला माहीत आहे की, चल वेगवेगळ्या किंमती धारण करतात. त्यांची निश्चित किंमत नसते. पण या संख्या आहेत. म्हणूनच इतर संख्यांप्रमाणेच त्यांच्यावर बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार या क्रियादेखील करता येतात.

चलयुक्त राशीच्या संबंधात एक महत्त्वाची गोष्ट लक्षात घेण्यासारखी आहे. एक संख्यात्मक राशी उदा. $4 \times 3 + 5$ ची किंमत सहज काढता येते.

उदा. $4 \times 3 + 5 = 12 + 5 = 17$

परंतु $(4x + 5)$ या राशीत x हे चल आले असून त्यांची किंमत काढणे शक्य नाही. जर x ला किंमत दिली असेल तरच त्या राशीची किंमत काढता येईल. उदाहरणार्थ, $x = 3$ असेल, तर

$4x + 5 = 4 \times 3 + 5 = 17$ जे आधीदेखील प्राप्त झाले आहे.

खालील काही ओळींमध्ये, आपण पाहू की, काही राशी कशा पद्धतीने तयार होतात.

राशी	**कशाप्रकारे तयार केली**
(a) $y + 5$	y मध्ये 5 मिळवून
(b) $t - 7$	t मधून 7 वजा करून
(c) $10\,a$	a ला 10 ने गुणून
(d) $\frac{x}{3}$	x ला 3 ने भागून
(e) $-5\,q$	q ला -5 ने गुणून
(f) $3\,x + 2$	आधी x ला 3 ने गुणून आलेल्या उत्तरात 2 मिळवून
(g) $2\,y - 5$	आधी y ला 2 ने गुणून आलेल्या उत्तरातून 5 वजा करून

अशा प्रकारे आणखी दहा इतर राशी बनवा आणि कशा बनवल्या ते सांगा. आपल्याला दिलेल्या सूचनेप्रमाणे राशी बनवण्यात सक्षम बनले पाहिजे.

खालील उदाहरणे पाहा.:

दिलेल्या माहितीवरून राशी लिहा.:

(a)	z मधून 12 वजा करणे	$z - 12$
(b)	r मध्ये 25 मिळवणे	$r + 25$
(c)	p ला 16 ने गुणणे	$16\,p$
(d)	y ला 8 ने भागने	$\frac{y}{8}$
(e)	m ला -9 ने गुणणे	$-9\,m$
(f)	y ला 10 ने गुणून त्या उत्तरात 7 मिळवणे	$10\,y + 7$
(g)	n ला 2 ने गुणून उत्तरातून l वजा करणे.	$2\,n - l$

सरिता आणि अमीनाने राशींचा एक खेळ खेळण्याचे ठरवले. त्यांनी एक चल x आणि एक संख्या 3 घेतली आणि त्यापासून किती राशी बनतात, हे पाहिले. चारही मूलभूत क्रियांपैकी कोणतीही एकच क्रिया वापरण्याचे बंधन घातले आणि प्रत्येक राशीमध्ये x असलाच पाहिजे. तुम्ही त्यांची मदत करू शकता का?

सरिता $(x + 3)$ असे ठरवते.

अमीना $(x - 3)$ बनवते.

> $(3x + 5)$ होऊ शकते का?
> $(3x + 3)$ होऊ शकते का?

त्यापुढील ती $3x$ सांगते. तेव्हा सरिता लगेच $\frac{x}{3}$ सांगते. दिलेल्या अटीचे पालन करून फक्त चारच राशी बनतील का?

आता यानंतर, त्या y, 3 आणि 5 च्या साहाय्याने राशी बनवण्याचा प्रयत्न करतात.अट अशी आहे की, बेरीज, वजाबाकीपैकी एक आणि गुणाकार-भागाकारापैकी एक अशा क्रिया निवडू शकतील. प्रत्येक राशीमध्ये y असलाच पाहिजे.

खाली दिलेली उत्तरे बरोबर आहेत की नाहीत ते पडताळून पहा.

$y + 5, y + 3, y - 5, y - 3,$

$3y, 5y, \frac{y}{3}, \frac{y}{5}, 3y + 5, 3y - 5, 5y + 3, 5y - 3$

तुम्ही इतर काही राशी बनवू शकता का?

> $\left(\frac{y}{3}+5\right)$ अशी राशी बनेल का?
> $(y + 8)$ बनेल का?
> $15\,y$ तयार करता येईल का?

उदाहरणसंग्रह 11.3

1. 5, 7 आणि 8 या संख्या प्रत्येकी एकदाच वापरून आणि बेरीज, वजाबाकी आणि गुणाकार यांचा वापर करून जास्तीत जास्त (पदावल्या) राशी तयार करा.

   > (**संकेत :** तीन संभाव्य राशी. $5 + (8 - 7)$, $5 - (8 - 7)$ आणि $5 \times 8 + 7$ आहेत. इतर राशी बनवा.)

2. खालीलपैकी कोणत्या राशी केवळ संख्यात्मक राशी आहेत?

   (a) $y + 3$ (b) $7 \times 20 - 8z$

   (c) $5\,(21 - 7) + 7 \times 2$ (d) 5

   (e) $3x$ (f) $5 - 5n$

   (g) $7 \times 20 - 5 \times 10 - 45 + p$

3. खालील राशी बनवण्यासाठी वापरलेल्या क्रिया (बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार) ओळखा आणि राशी कोणत्या प्रकारे तयार केली आहे ते पाहा.:

   (a) $z + 1, z - 1, y + 17, y - 17,$ (b) $17y, \frac{y}{17}, 5\,z,$

   (c) $2y + 17, 2\,y - 17,$ (d) $7\,m, -7\,m + 3, -7\,m - 3$

4. खालील माहितीसाठी राशी लिहा:
   (a) p मध्ये 7 मिळवले (b) p मधून 7 वजा करणे
   (c) p ला 7 ने गुणणे (d) p ला 7 ने भागणे
   (e) $-m$ मधून 7 कमी करणे (f) $-p$ ला 5 ने गुणणे
   (g) $-p$ ला 5 ने भागणे (h) p ला -5 ने गुणणे
5. खालील माहितीवरून राशी लिहा.
   (a) $2m$ मध्ये 11 मिळवणे (b) $2m$ मधून 11 वजा करणे
   (c) y च्या 5 पटीत 3 मिळवणे (d) y च्या 5 पटीतून 3 कमी करणे
   (e) y ला -8 ने गुणणे
   (f) y ला 8 ने गुणून उत्तरात 5 मिळवणे
   (g) y ला 5 ने गुणून उत्तरातून 16 वजा करणे
   (h) y ला -5 ने गुणून उत्तरात 16 मिळवणे
6. (a) t आणि 4 यांचा वापर करून राशी बनवा. एकापेक्षा अधिक क्रियांचा वापर करू नका. प्रत्येक राशीत t असला पाहिजे.
   (b) y, 2 आणि 7 चा वापर करून राशी बनवा. प्रत्येक राशीमध्ये y असलाच पाहिजे. केवळ दोन वेगवेगळ्या क्रियांचा वापर करा.

11.8 व्यवहारात राशींचा वापर

आपल्या समोर अनेक व्यावहारिक प्रसंग आले आहेत. जेथे राशी उपयोगी ठरतात. चला, त्यापैकीच काही पुन्हा आठवू:

प्रसंग (साध्या भाषेत)	चल	राशींचा वापर करून केलेले वर्णन
1. सरिताजवळ अमीनापेक्षा 10 मणी जास्त आहेत.	समजा अमीनाकडे x मणी आहेत.	सरिताजवळ $(x + 10)$ मणी आहेत.
2. बाळू राजूपेक्षा 3 वर्षांनी लहान आहे.	राजूचे वय x वर्षे मानू	बाळूचे वय $(x - 3)$ वर्षे आहे.
3. विकासचे वय राजूच्या वयाच्या दुप्पट आहे	राजूचे वय x मानू	विकासचे वय $2x$ वर्षे आहे.
4. राजूच्या वडिलांचे वय राजूच्या वयाच्या तिपटीपेक्षा 2 ने जास्त आहे.	राजूचे वय x मानू	राजूच्या वडिलांचे वय $(3x + 2)$ वर्षे आहे

चला, असेच आणखी प्रसंग पाहू.:

प्रसंग (साध्या भाषेत)	चल	राशींचा वापर करून केलेले वर्णन
5. आजपासून 5 वर्षांनंतर सुझानचे वय किती होईल?	सुझानेच आजचे वय y वर्षे मानू.	5 वर्षांनंतर सुझानचे वय $(y + 5)$ वर्षे

6. 4 वर्षांपूर्वी सुझानचे वय किती असेल?	सुझानचे आजचे वय y वर्षे मानू	4 वर्षांपूर्वी सुझानचे वय $(y-4)$ वर्षे असेल.
7. गव्हाचे प्रतिकिग्रॅचा दर तांदळाच्या प्रतिकिग्रॅच्या दराहून 5 रु. नी कमी आहे	तांदळाचा प्रतिकिग्रॅचा दर p रु. मानू	गव्हाचा प्रतिकिग्रॅचा दर $(p-5)$ रु. आहे.
8. प्रतिलीटर तेलाचा भाव प्रतिकिग्रॅ तांदळाच्या भावाच्या 5 पट आहे.	तांदळाच्या प्रतिकिग्रॅचा भाव p रु. मानू.	तेलाचा प्रतिलीटरचा भाव $5p$ रु. होईल.
9. एका बसचा वेग त्याच रस्त्याहून जाणाऱ्या ट्रकच्या वेगापेक्षा ताशी 10 किमी जास्त आहे.	ट्रकचा वेग ताशी y किमी मानू	बसचा वेग ताशी $(y+10)$ किमी होईल

अशाच आणखी काही प्रसंगांविषयी माहिती घ्या. तुमच्या लक्षात येईल की, साध्या भाषेतील कितीतरी विधाने चलयुक्त राशींचा वापर करून होणाऱ्या विधानांमध्ये बदलता येऊ शकतात. पुढील भागात आपण पाहू की या राशींद्वारा बनलेल्या विधानांचा वापर आपण कशा पद्धतीने करतो.

उदाहरणसंग्रह 11.4

1. खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या.

(a) सरिताचे आजचे वय y वर्षे आहे, असे समजा.

(i) 5 वर्षांनंतर तिचे वय किती असेल?

(ii) 3 वर्षांपूर्वी तिचे वय किती होते?

(iii) सरिताच्या आजोबांचे वय तिच्या वयाच्या सहापट आहे. तिच्या आजोबांचे वय किती?

(iv) तिची आजी आजोबांपेक्षा 2 वर्षांनी लहान आहे. आजीचे वय किती?

(v) सरिताच्या वडिलांचे वय सरिताच्या वयाच्या तिपटीपेक्षा 5 ने जास्त आहे. तिच्या वडिलांचे वय काय?

(b) एका आयताकार हॉलची लांबी रुंदीच्या तिपटीपेक्षा 4 मी. ने कमी आहे. जर रुंदी b मीटर आहे, तर लांबी किती?

(c) एका आयताकार खोक्याची उंची h सेमी आहे. त्याची लांबी उंचीच्या 5 पट आहे आणि रुंदी लांबीपेक्षा 10 सेमीने कमी आहे. खोक्याची लांबी व रुंदी उंचीच्या स्वरुपात मांडा.

(d) मीना, बीना आणि लीना टेकडीच्या माथ्यावर पोचण्यासाठी पायऱ्या चढत आहेत. मीना s व्या पायरीवर आहे. बीना मीनापेक्षा 8 पायऱ्या पुढे आहे आणि लीना मीनापेक्षा 7 पायऱ्या मागे आहेत. वर जाण्यासाठी मीना जेवढ्या पायऱ्या चढली त्याच्या चौपटी पेक्षा 10 ने कमी एकूण पायऱ्यांची संख्या आहे. पायऱ्यांची एकूण संख्या s या स्वरुपात मांडा.

(e) एक बस ताशी v किमी वेगाने जात आहे. ती दासपूरहून विसापूरला जात आहे. 5 तास प्रवास झाल्यानंतरही विसापूर अजून 20 किमी लांब आहे. दासपूर ते विसापूर अंतर किती आहे? हे v चा उपयोग करून मांडा.

2. राशी वापरून केलेली विधाने साध्या भाषेतील विधानांमध्ये बदला.

(उदाहरणार्थ, एका क्रिकेटच्या सामन्यात सलीमने r धावा केल्या आणि नलिनने $(r + 15)$ धावा केल्या. साध्या भाषेत, नलिनने सलीमपेक्षा 15 धावा जास्त केल्या.

(a) एका स्वाध्याय पुस्तिकेची किंमत p रु. आहे. तीन पुस्तकाची किंमत $3p$ रु. आहे.

(b) टोनीने टेबलावर q गोट्या ठेवल्या. त्याच्याकडे डब्यात $8\ q$ गोट्या आहेत.

(c) आमच्या वर्गात n विद्यार्थी आहेत. शाळेत $20\ n$ विद्यार्थी आहेत.

(d) जग्गूचे वय z वर्षे आहे. त्याच्या काकांचे वय $4\ z$ आहे आणि काकीचे वय $(4z - 3)$ वर्षे आहे.

(e) ठिपक्यांच्या (dots) एका मांडणीमध्ये r ओळी आहेत. प्रत्येक ओळीत 5 ठिपके आहेत.

3. (a) मुन्नूचे वय x वर्षे दिले आहे, $(x - 2)$ म्हणजे काय याचा अंदाज करा.

(**संकेत:** मुन्नूच्या लहान भावाबद्दल विचार करा.) $(x + 4)$ $(3\ x + 7)$ हे काय दर्शवित असतील याचा अंदाज करा.

(b) साराचे सध्याचे वय y वर्षे आहे. तिच्या भविष्यातील आणि पूर्वीच्या वयांचा विचार करा. खालील राशी काय दर्शवित असतील?

$$y + 7, y - 3, y + 4\frac{1}{2}, y - 2\frac{1}{2}$$

(c) एका वर्गातील n विद्यार्थी फुटबॉल खेळतात. $2n$ ही राशी काय दर्शविते? $\frac{n}{2}$ काय दर्शवू शकते? (**संकेत:** फुटबॉल शिवाय इतर खेळांचा विचार करा.)

11.9 एकचल समीकरण म्हणजे काय?

आकृती 11.1 मध्ये काड्यांपासून बनवलेल्या L या अक्षराचा आकृतीबंध आठवा. तुमच्या सोईसाठी खाली पुन्हा दिला आहे.

(a) (b) (c)

विविध संख्यांइतके L बनवण्यासाठी आवश्यक काड्यांची संख्या तक्ता –1 मध्ये दिली होती. तो तक्ता इथे पुन्हा दिला आहे.

तक्ता-1

बनवलेल्या L ची संख्या	1 2 3	4 5 6 7 8 _ _ _ _ _
आवश्यक काड्यांची संख्या	2 4 6	8 10 12 14 16 _ _ _ _ _

आपल्याला हे ठाऊक आहे की आवश्यक काड्यांची संख्या पुढील नियमाने मिळते.

जर, बनवलेल्या L ची संख्या n असेल, तर काड्यांची संख्या $2n$

अप्पू वेगवेगळ्या प्रकारे विचार करतो. तो विचारतो की, आपल्याला हे ठाऊक आहे की, L ची संख्या दिली तर आवश्यक काड्यांची संख्या कशी काढतात. पण जर याच्याउलट माहिती दिली म्हणजे काड्यांची संख्या दिली असेल तर L ची संख्या कशी काढता येईल?

आपण स्वत:लाच एक प्रश्न विचारूया.

जर 10 काड्या दिल्या असतील, तर L किती होतील?

याचा अर्थ, जेव्हा काड्यांची संख्या $2n = 10$ असेल तेव्हा L ची संख्या (म्हणजे n) आपल्याला शोधायची आहे. काड्यांची संख्या $2n = 10$ ----(1) दिली आहे.

येथे आपण एक अट घातलेली पाहतो. जी n या चलाद्वारे पूर्ण व्हायला हवी. ही अट समीकरणाचे (equation) एक उदाहरण आहे.

आपल्या प्रश्नाचे उत्तर तक्ता–1 पाहून काढता येईल. n च्या विविध किंमती पहा. जर $n = 1$ तर काड्या = 2 म्हणजे आपली अट ($2n = 10$) ही पूर्ण होऊ शकत नाही. आपण पडताळून पाहू.

n	$2n$	अट पूर्ण होते का? होय/नाही
2	4	नाही
3	6	नाही
4	8	नाही
5	10	होय
6	12	नाही
7	14	नाही

आपल्याला असे आढळून येते की, फक्त $n = 5$ साठीच दिलेली अट म्हणजे $2n = 10$ पूर्ण होते. 5 सोडून इतर कोणत्याही किंमतीसाठी हे समीकरण पूर्ण होत नाही.

आणखी एक समीकरण पाहूया.

बाळू राजूपेक्षा 3 वर्षांनी लहान आहे. राजूचे वय x वर्षे घेतल्यास बाळूचे वय $(x - 3)$ वर्षे. समजा की, बाळूचे वय 11 वर्षे आहे. तर आता आपण आपल्या पद्धतीने राजूचे वय काढू.

बाळूचे वय $x - 3 = 11$ (2)

हे समीकरण x या चलात आहे. आपण x च्या विविध किंमतीसाठी $(x - 3)$ च्या किंमतीचा एक तक्ता बनवू.

x	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$x - 3$	0	1	–	–	–	–	–	–	–	9	10	11	12	13	–	–

ज्या जागा रिकाम्या ठेवल्यात त्या भरा. तक्त्यावरून असे दिसते की, $x = 14$ साठीच $x - 3 = 11$ ही अट पूर्ण होते. इतर किंमती जसे, $x = 16$ किंवा $x = 12$ साठी ही अट पूर्ण होत नाही. म्हणून राजूचे वय 14 वर्षे आहे.

वरील सगळ्याचा सारांश म्हणजे, **एकचल समीकरण ही चलाला दिलेली एक अट असते . ही केवळ चलाच्या एकाच निश्चित किंमतीने पूर्ण होते.** उदाहरणार्थ, समीकरण $2n = 10$ चे n चलाच्या केवळ 5 या किंमतीने समाधान होते. त्याचप्रमाणे $x - 3 = 11$ या समीकरणाचे n च्या 14 या किंमतीनेच समाधान होते.

लक्षात ठेवा की, एकचल समीकरणाच्या दोन्ही बाजूंमध्ये **समानतेचे चिन्ह** (=) असते. समीकरण सांगते की, डावी बाजू (LHS) ची किंमत उजवी बाजू (RHS) इतकी असते. जर डावी बाजू उजव्या बाजू एवढी नसेल तर ते समीकरण होऊ शकत नाही.

उदाहरणार्थ, $2n$ ही संख्या 10 पेक्षा मोठी आहे. अर्थात $2n > 10$ हे समीकरण नाही. तसेच $(x - 3) > 11$ आणि $(x - 3) < 11$ ही देखील समीकरणे नाहीत. $2n$ ही संख्या 10 पेक्षा लहान आहे, म्हणजेच $2n < 10$ हे सुद्धा समीकरण नाही. तसेच $(x - 3) > 11$ आणि $(x - 3) < 11$ ही विधानेसुद्धा समीकरणे नाहीत.

आता $8 - 3 = 5$ याचा विचार करू.

इथे डावी बाजू (=) उजवी बाजू आहे. दोन्हींकडे चल संख्या नाही. दोन्ही बाजूंना संख्या आहेत. याला संख्यात्मक समीकरण म्हणतात. साधारणत: समीकरण या शब्दाचा उपयोग केवळ एक किंवा जास्त चल असल्यावरच केला जातो.

खालील प्रश्न सोडवा.

कोणकोणती विधाने समीकरण आहेत? समीकरणामधील चल सुद्धा सांगा.

(a) $x + 20 = 70$	(आहे, x)
(b) $8 \times 3 = 24$	(नाही, हे संख्यात्मक समीकरण आहे.)
(c) $2p > 30$	(नाही)
(d) $n - 4 = 100$	(होय, n)
(e) $20b = 80$	(होय, b)
(f) $\frac{y}{8} < 50$	(नाही)

समीकरणाची आणखी काही उदाहरणे पाहू. (काही समीकरणांमध्ये चल दिले आहेत.)

अपेक्षित रिकाम्या जागा पूर्ण करा:

$x + 10 = 30$	(चल x)	(3)
$p - 3 = 7$	(चल p)	(4)
$3n = 21$	(चल _____)	(5)
$\frac{t}{5} = 4$	(चल _____)	(6)
$2l + 3 = 7$	(चल _____)	(7)
$2m - 3 = 5$	(चल _____)	(8)

11.10 एकचल समीकरणाची उकल

आपण मागील भागात पाहिले आहे की समीकरण

$2n = 10$ (1)

चे $n = 5$ ने समाधान. n ची इतर कोणतीही किंमत समीकरणाचे समाधान करू शकत नाही. **समीकरणामध्ये चलाची जी किंमत समीकरणाचे समाधान करते तिला समीकरणाची उकल (solution) म्हणतात.** अशा प्रकारे, $n = 5$ हे समीकरण $2n = 10$ ची उकल आहे.

लक्षात घ्या, $n = 6$ ही $2n = 10$ ची उकल नाही कारण, $n = 6$ म्हणजे, $2n = 2 \times 6 = 12$ आणि हे 10 नाहीत.

तसेच $n = 4$ ही पण उकल नाही.

सांगा बरे का नाही ?

$$x - 3 = 11 \qquad (2)$$

हे समीकरण पाहू, हे $x = 14$ ने पूर्ण होते. कारण $x = 14$ मुळे डावी बाजू $= 14 - 3 = 11 =$ उजवी बाजू होते. हे समीकरण $x = 16$ ने पूर्ण होत नाही. कारण $x = 16$ मुळे, समीकरणाची डावी बाजू $= 16 - 3 = 13$, जी उजवी बाजू नाही.

अशा प्रकारे $x = 14$ ही समीकरण $x - 3 = 11$ ची उकल आहे. परंतु $x = 16$ ही उकल नाही. तसेच, $x = 12$ ही पण उकल नाही.

का नाही ते स्पष्ट करा. आता खालील तक्ता पाहा. तक्त्यातील रिकाम्या जागा पूर्ण करा आणि तुमचे उत्तर हो/नाही हे लिहा.

समीकरण	चलाचे नाव	उकल (हो/नाही)
1. $x + 10 = 30$	$x = 10$	नाही
2. $x + 10 = 30$	$x = 30$	नाही
3. $x + 10 = 30$	$x = 20$	आहे
4. $p - 3 = 7$	$p = 5$	नाही
5. $p - 3 = 7$	$p = 15$	–
6. $p - 3 = 7$	$p = 10$	–
7. $3n = 21$	$n = 9$	–
8. $3n = 21$	$n = 7$	–
9. $\frac{t}{5} = 4$	$t = 25$	–
10. $\frac{t}{5} = 4$	$t = 20$	–
11. $2l + 3 = 7$	$l = 5$	–
12. $2l + 3 = 7$	$l = 1$	–
13. $2l + 3 = 7$	$l = 2$	–

$2n = 10$ या समीकरणाची उकल करण्यासाठी आपण n आणि वेगवेगळ्या किंमतीचा तक्ता बनवला होता आणि मग या तक्त्यामधून n जी किंमत निवडली तीच उकल होती. आपण जे केले ती **प्रयत्न आणि प्रमाद पद्धत** होती. **(a trial and error method)** ही उकल शोधण्याची **सोपी किंवा व्यावहारिक पद्धत** नाही. आता आपण समीकरण सोडवण्याची एक सोपी पद्धत पाहूया. आपण केवळ पुढचे एक वर्ष (म्हणजेच पुढच्या वर्गापर्यंत) ही समीकरण सोडवण्याची पद्धत वापरणार आहोत.

बीजगणिताची सुरुवात

असे म्हटले जाते की गणिताचे एक क्षेत्र म्हणून बीजगणिताची सुरुवात जवळपास इ.स.पू. 1550 मध्ये म्हणजेच 3500 वर्षांपूर्वी झाली. जेव्हा अरब लोकांनी अज्ञात संख्या मांडण्यासाठी चिन्हांचा वापर सुरू केला.

इ.स.पू. 300 च्या जवळपास भारतात अज्ञात अक्षरांनी व्यक्त करणे आणि राशी तयार करणे ही एक सामान्य गोष्ट होती. अनेक महान भारतीय गणितज्ज्ञ जसे की, **आर्यभट्ट** (जन्म इ. स. 476), **ब्रम्हगुप्त** (जन्म इ. स. 598), **महावीर** (अंदाजे इ. स. 850), आणि **भास्कर -II** (जन्म इ. स. 1114), तसेच, इतरही अनेकांनी बीजगणितामध्ये आपले योगदान दिले आहे. त्यांनी अज्ञात राशींसाठी **बीज, वर्ण** इ. नावे दिली. त्यांना व्यक्त करण्यासाठी रंगांच्या नावांची आद्याक्षरे वापरली. (जसे काला–'का', निळा–'नि' इ.). अल्‌जिब्रा (Algebra) साठी 'बीजगणित' हे नाव या प्राचीन भारतीय गणितज्ज्ञांच्या काळातील आहे.

'अल्‌जिब्रा' हा शब्द अंदाजे इ.स. 825 मध्ये बगदादमधील एक अरब गणितज्ज्ञ मुहम्मद इबन अल खोवारिज्मी लिखित एक पुस्तक 'अल्‌जिबार वॉल अलमुगाबालाह' या नावावरून घेतला आहे.

उदाहरणसंग्रह 11.5

1. खालीलपैकी कोणती विधाने एक चल समीकरणे आहेत? (सकारण उत्तर द्या.) समीकरणामधील चल पण लिहा.

(a) $17 = x + 17$ (b) $(t - 7) > 5$ (c) $\frac{4}{2} = 2$

(d) $7 \times 3 - 13 = 8$ (e) $5 \times 4 - 8 = 2x$ (f) $x - 2 = 0$

(g) $2m < 30$ (h) $2n + 1 = 11$ (i) $7 = 11 \times 5 - 12 \times 4$

(j) $7 = 11 \times 2 + p$ (k) $20 = 5y$ (l) $\frac{3q}{2} < 5$

(m) $z + 12 > 24$ (n) $20 - (10 - 5) = 3 \times 5$ (o) $7 - x = 5$

2. तक्त्यामधील तिसरा स्तंभ पूर्ण करा.:

अ. क्र.	समीकरण	चलाची किंमत	समीकरणाचे समाधान होते/होत नाही
(a)	$10y = 80$	$y = 10$	———
(b)	$10y = 80$	$y = 8$	———
(c)	$10y = 80$	$y = 5$	———
(d)	$4l = 20$	$l = 20$	———
(e)	$4l = 20$	$l = 80$	———
(f)	$4l = 20$	$l = 5$	———
(g)	$b + 5 = 9$	$b = 5$	———
(h)	$b + 5 = 9$	$b = 9$	———
(i)	$b + 5 = 9$	$b = 4$	———
(j)	$h - 8 = 5$	$h = 8$	———
(k)	$h - 8 = 5$	$h = 0$	———
(l)	$h - 8 = 5$	$h = 3$	———
(m)	$p + 3 = 1$	$p = 3$	———
(n)	$p + 3 = 1$	$p = 1$	———
(o)	$p + 3 = 1$	$p = 0$	———
(p)	$p + 3 = 1$	$p = -1$	———
(q)	$p + 3 = 1$	$p = -2$	———

3. खाली प्रत्येक समीकरणाच्या पुढील कंसातून योग्य किंमत शोधून समीकरणाची उकल शोधा. इतर किंमती समीकरण पूर्ण करू शकत नाही. हे दाखवा.

(a) $5m = 60$ (10, 5, 12, 15)

(b) $n + 12 = 20$ (12, 8, 20, 0)

(c) $p - 5 = 5$ (0, 10, 5, – 5)

(d) $\frac{q}{2} = 7$ (7, 2, 10, 14)

(e) $r - 4 = 0$ (4, – 4, 8, 0)

(f) $x + 4 = 2$ (– 2, 0, 2, 4)

4. (a) खालील तक्ता पूर्ण करा आणि तक्ता पाहून $m + 10 = 16$ ची उकल शोधा.

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	__	__	__
$m + 10$	__	__	__	__	__	__	__	__	__	__	__	__	__

(b) खालील तक्ता पूर्ण करा आणि तक्ता पाहून $5t = 35$ ची उकल शोधा.

t	3	4	5	6	7	8	9	10	11	__	__	__	__	__
$5t$	__	__	__	__	__	__	__	__	__	__	__	__	__	__

(c) तक्ता पूर्ण करा आणि $\frac{z}{3} = 4$ ची उकल शोधा.

z	8	9	10	11	12	13	14	15	16	__	__	__
$\frac{z}{3}$	$2\frac{2}{3}$	3	$3\frac{1}{3}$	__	__	__	__	__	__	__	__	__

(d) तक्ता पूर्ण करा आणि $m - 7 = 3$ ची उकल शोधा.

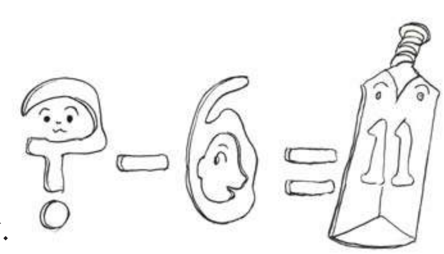
m	5	6	7	8	9	10	11	12	13	__	__
$m - 7$	__	__	__	__	__	__	__	__	__	__	__

5. खालील कोडी सोडवा. अशी कोडी तुम्ही स्वत: देखील बनवू शकता.

मी कोण ?

(i) एका चौरसाच्या कडेने जा.
प्रत्येक कोपरा तीन
वेळा मोजा. त्यापेक्षा जास्तवेळा,
नाही. माझ्यात मिळवा आणि
बरोबर चौतीस उत्तर मिळेल.

(iii) आठवड्यात प्रत्येक
दिवसास माझ्यापुढे मोजा.
जर तुम्ही काही चूक केली
नाही तर तुम्हांला तेवीस मिळतील



(ii) मी एक विशिष्ट संख्या
आहे. माझ्यातून सहा
कमी करा आणि क्रिकेटची एक टीम बनवा.

(iv) सांगा पाहू मी कोण ?
मी एक छान संकेत देते,
तुम्ही मला पुन्हा मिळवाल,
जर माझ्यातून बावीस घालवाल.

आपण कोणती चर्चा केली ?

1. आपण काड्यांचा वापर करून अक्षरे आणि इतर आकारांचे आकृतिबंध पाहिले. आपण एखादा आकार अनेक वेळा बनवण्यासाठी आवश्यक काड्यांची संख्या प्राप्त करण्यासाठी व्यापक नियम लिहिणे शिकलो. जो आकार बनवला जातो. जितक्या वेळा बनवला जातो. ती संख्या बदलत राहते. त्या किंमती 1,2,3,...असू शकतात. हे एक चल आहे. त्याला कोणत्याही अक्षराने (जसे की, n) दाखवता येते.

2. चलाच्या विविध किंमती असू शकतात. याची किंमत (निश्चित) स्थिर नसते. एका चौरसाची लांबी कितीही असू शकते. ती एक चल आहे. पण त्रिकोणाच्या कोनांची संख्या तीन निश्चित आहे. ही चल नाही.

3. चल दाखवण्यासाठी आपण n, l, m, p, x, y, z अशी कोणतीही अक्षरे वापरू शकतो.
4. प्रत्यक्ष व्यवहारात आपण चलांच्या मदतीने विविध संबंध स्पष्ट करू शकतो.
5. चल म्हणजे संख्याच आहेत. परंतु, ज्यांच्या किंमती स्थिर किंवा निश्चित नाहीत. आपण संख्यांप्रमाणेच त्यांच्यावर बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार इ. क्रिया करू शकतो. विविध क्रियांचा वापर करून आपण चलयुक्त राशी बनवू शकतो. उदा. $x - 3$, $x + 3$, $2n$, $5m$, $\frac{p}{3}$, $2y + 3$, $3l - 5$ इत्यादी.
6. चलामुळे भूमिती आणि अंकगणित या दोन्हींचे मूलभूत नियम व्यापक रूपात मांडण्यास मदत मिळते. उदाहरणार्थ हा नियम की, कोणत्याही दोन संख्या कोणत्याही क्रमाने मिळवल्या तरी बेरीज तीच राहते. आपण $a + b = b + a$ असे लिहू शकतो. येथे a आणि b ही चले 1, 32, 1000, – 7, – 20 अशा कोणत्याही किंमती धारण करू शकतात.
7. समीकरण हे चलाला घातलेली एक अट आहे. एक चलयुक्त राशी बरोबर एक स्थिर संख्या या रूपात आपण समीकरण मांडू शकतो. उदा. $x - 3 = 10$
8. समीकरणाला दोन बाजू असतात. डावी बाजू (LHS) आणि उजवी बाजू (RHS) या दोघांमध्ये समानता (=) चिन्ह असते.
9. समीकरणाची डावी बाजू त्याच्या उजव्या बाजूबरोबर चलाच्या एका निश्चित किंमतीसाठीच असते. आपण असे म्हणतो की, चलाची ती निश्चित किंमत समीकरणाचे समाधान करते. ही किंमत म्हणजे समीकरणाची उकल असते.
10. उकल शोधण्यासाठी एक पद्धत 'प्रयत्न आणि प्रमाद पद्धत' आहे. या पद्धतीमध्ये आपण चलाला एखादी किंमत देऊन ती किंमत समीकरणाचे समाधान करते की नाही, हे पाहतो. आपण चलासाठी तोपर्यंत किंमती देतो. जोपर्यंत योग्य किंमत मिळत नाही, म्हणजे समीकरणाची उकल मिळत नाही.

गुणोत्तर आणि प्रमाण

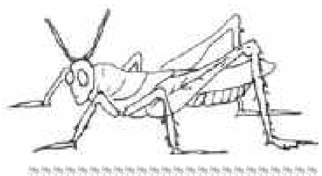
प्रकरण 12

12.1 प्रस्तावना

आपल्या दैनंदिन जीवनात अनेक वेळा दोन राशींची तुलना करावी लागते. उदाहरणार्थ : अवनीने आणि शैरीने आपल्या चिकटवहीसाठी फुले गोळा केली. अवनीने 30 आणि शैरीने 45 फुले गोळा केली.

आपण असे म्हणू शकतो की, शैरीने 45–30=15 फुले जादा गोळा केली.

वजाबाकीने तुलना करण्याची एक पद्धत आहे. रहीमची उंची 150 सेमी आणि अवनीची 140 सेमी आहे. येथे रहीमची उंची अवनीच्या उंचीपेक्षा 150 –140 = 10 सेमी अधिक आहे.



जर आपण एका मुंगीची लांबी आणि नाकतोड्याची लांबी यांची तुलना करायची ठरविली तर वजाबाकीने तुलना करणे योग्य होणार नाही. नाकतोड्याची लांबी 4 ते 5 सेमी असते की जी मुंगीच्या लांबीपेक्षा खूप लांब आहे. कारण मुंगीची लांबी काही मिमीच असते. जर नाकतोड्याच्या लांबीबरोबर एकामागे एक, मुंग्यांची ओळ तयार केली तर तुलना करणे योग्य ठरेल. यावरून आपल्याला असे म्हणता येईल की, 20 ते 30 मुंग्यांची एकूण लांबी एका नाकतोड्याच्या लांबीबरोबर आहे.

आणखी उदाहरणे पाहू, एका चारचाकी गाडीची किंमत ₹ 2,50,000 आहे आणि मोटारसायकलची किंमत ₹ 50,000 आहे. जर आपण त्यांच्या किमतीमधील फरक काढला तर तो होईल ₹ 2,00,000 जर ही तुलना आपण भागाकाराने केली तर ती कशी असेल :

$$\frac{2{,}50{,}000}{50{,}000} = \frac{5}{1}$$

आपण असे म्हणू शकतो की, चारचाकी गाडीची किंमत मोटारसायकलच्या किमतीच्या पाच पट आहे. अशाप्रकारे काही वेळेस पटीने केलेली तुलना, वजाबाकीने केलेल्या तुलनेपेक्षा जास्त चांगली असते. पटीने केलेल्या तुलनेस 'गुणोत्तर' असे म्हणतात. पुढील भागात गुणोत्तराविषयी आपण अधिक शिकणार आहोत.

12.2 गुणोत्तर

खालील उदाहरणे पहा.

ईशाचे वजन 25 किग्रॅ आहे आणि तिच्या वडिलांचे वजन आहे 75 किग्रॅ. वडिलांचे वजन, मुलीच्या वजनाच्या किती पट आहे? ते तीनपट आहे.

एका पेनाची किंमत ₹ 10 आहे आणि एका पेन्सिलची किंमत ₹ 2 आहे. पेनची किंमत पेन्सिलच्या किंमतीच्या किती पट आहे? सरळ आहे, पाच पट.

वरील उदाहरणांमध्ये आपण दोन राशींची तुलना 'किती पट' या स्वरूपात केली. या तुलनेस 'गुणोत्तर' असे म्हणतात. आपण गुणोत्तर ':' या चिन्हाने दर्शविणार आहोत.

मागील उदाहरणांचा पुन्हा विचार करू या. आपण असे म्हणू शकतो की,

वडिलांच्या वयाचे मुलीच्या वयाशी असलेले गुणोत्तर $= \frac{75}{25} = \frac{3}{1} = 3:1$

पेनाची किंमतीचे पेन्सिलच्या किमतीशी असलेले गुणोत्तर $= \frac{10}{2} = \frac{5}{1} = 5:1$

प्रयत्न करा

1. एका वर्गात 20 मुले आणि 40 मुली आहेत. मुलांच्या संख्येचे मुलींच्या संख्येशी असलेले गुणोत्तर काय असेल?
2. रवि एका तासात 6 किमी चालतो तर रोशन एका तासात 4 किमी चालतो. तर रविने एकूण चाललेल्या अंतराशी रोशनने एकूण चाललेल्या अंतराचे गुणोत्तर काढा.

या प्रश्नांकडे पाहू या.

एका वर्गात 20 मुले आणि 40 मुली आहेत. गुणोत्तर काढा:

(a) मुलींच्या संख्येचे एकूण विद्यार्थ्यांशी

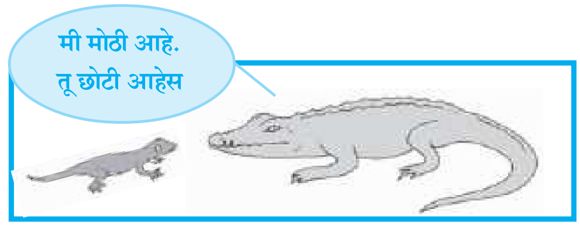
(b) मुलांच्या संख्येचे एकूण विद्यार्थ्यांशी

सर्वप्रथम आपल्याला एकूण विद्यार्थी संख्या माहीत पाहिजे. ती आहे.

मुलींची संख्या + मुलांची संख्या $= 20 + 40 = 60$

आता, मुलींच्या संख्येचे एकूण विद्यार्थी संख्येशी असलेले गुणोत्तर $\frac{40}{60} = \frac{2}{3}$

(b) ची उकल अशाप्रकारे काढा.



खालील उदाहरण पाहा.

घरात दिसणारी पाल 20 सेंमी लांबीची आहे, तर मगरीची लांबी आहे 4 मीटर.

"मी तुझ्यापेक्षा 5 पटीने लांब आहे." पाल म्हणाली. खरं तर हे पूर्णपणे चुकीचे विधान आहे. एका पालीची लांबी मगरीच्या लांबीच्या पाचपट असू शकत नाही. मग चूक कोठे आहे? नीट लक्षात घेतले तर असे लक्षात येते की, पालीची लांबी सेंमीमध्ये आहे तर मगरीची लांबी मीटरमध्ये दिलेली आहे. म्हणून यांच्या लांबी समान एककात करून घ्यायला पाहिजे.

मगरीची लांबी $= 4$ मी $= 4 \times 100 = 400$ सेंमी

म्हणून, मगरीच्या लांबीचे पालीच्या लांबीशी असलेले गुणोत्तर असे होईल–

$$= \frac{400}{20} = \frac{20}{1} = 20:1.$$

दोन राशींची तुलना तेव्हाच करता येते जेव्हा त्या दोन्ही एकाच एककात असतात.

पालीच्या लांबीचे मगरीच्या लांबीशी गुणोत्तर काय असेल?

ते आहे $\frac{20}{400} = \frac{1}{20} = 1:20$

लक्षात ठेवा, 1 : 20 आणि 20 : 1 एकमेकांपेक्षा वेगळे आहेत. 1 : 20 हे पालीच्या लांबीचे, मगरीच्या लांबीशी असलेले गुणोत्तर आहे आणि 20 : 1 हे मगरीच्या लांबीचे पालीच्या लांबीशी असलेले गुणोत्तर आहे.

आणखी एक उदाहरण पाहू.

पेन्सिलची लांबी 18 सेंमी आहे आणि तिचा व्यास 8 मिमी आहे. पेन्सिलच्या व्यासाचे तिच्या लांबीशी गुणोत्तर काय असेल?

व्यास आणि लांबी दोघांचीही एकके वेगळी दिलेली आहेत. म्हणून, त्यांना एकाच एककात बदलण्याची आवश्यकता आहे.

पेन्सिलची लांबी $= 18$ सेंमी $= 18 \times 10$ मिमी $= 180$ मिमी

पेन्सिलच्या व्यासाचे तिच्या लांबीशी असलेले गुणोत्तर

$$= \frac{8}{180} = \frac{2}{45} = 2:45$$

प्रयत्न करा

1. सौरभला घरातून शाळेत पोहचायला 15 मिनिटे लागतात आणि सचिनला एक तास लागतो. सौरभला लागलेला वेळ आणि सचिनला लागलेला वेळ यांचे गुणोत्तर शोधा.
2. एका गोळीची किंमत 50 पैसे आहे आणि एका चॉकलेटची किंमत 10 रुपये. गोळीच्या किमतीचे चॉकलेटच्या किमतीशी गुणोत्तर काढा.
3. एका शाळेत एका वर्षामध्ये 73 सुट्ट्या येतात. सुट्ट्यांचे वर्षातील एकूण दिवसांबरोबर गुणोत्तर काढा.

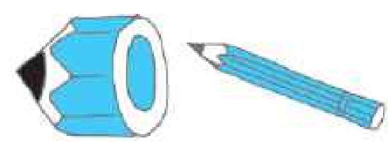
अजून कोणत्या ठिकाणी तुम्हाला दोन समान राशींची तुलना करावी लागते आणि त्या दोन राशींची एकके वेगळी असतात. जरा विचार करा.

A B

दैनंदिन व्यवहारात आपण गुणोत्तराची संकल्पना अनेक ठिकाणी न समजता वापरतो.

आकृती A तसेच B ची तुलना करा. आकृती B, आकृती A पेक्षा अधिक खरी वाटते का?

आकृती A मध्ये पाय बाकीच्या शरीराच्या तुलनेत लांब आहेत. याचे कारण असे की, आपण पायांचे शरीराच्या इतर भागांशी तुलना करताना विशिष्ट गुणोत्तर लक्षात ठेवतो.



चित्रातील दोन्ही पेन्सिलींची तुलना करा. पहिली पेन्सिल पूर्ण पेन्सिल आहे असे वाटते का? नाही. का नाही? कारण असे आहे की, पेन्सिलीची जाडी आणि लांबी यांच्यातील गुणोत्तर योग्य नाही.

आपण वेगवेगळ्या ठिकाणी एकच गुणोत्तर पाहू शकतो.

खालील उदाहरणे पहा.

- एका खोलीची लांबी 30 मी आणि तिची रुंदी 20 मी आहे. म्हणून खोलीच्या लांबीचे रुंदीशी असलेले गुणोत्तर $= \frac{30}{20} = \frac{3}{2} = 3:2$
- एका सहलीसाठी 24 मुली आणि 16 मुले जाणार आहेत. मुलींच्या संख्येचे मुलांच्या संख्येशी असलेले गुणोत्तर $= \frac{24}{16} = \frac{3}{2} = 3:2$

  दोन्ही उदाहरणात गुणोत्तर 3 : 2 आहे.
- संक्षिप्त रूपात 30 : 20 आणि 24 : 16 समान गुणोत्तर आहेत; आणि ती 3 : 2 इतकी आहेत. यांना समतुल्य गुणोत्तरे म्हणतात.

  तुम्ही अजून काही उदाहरणांविषयी विचार करू शकाल का? ज्यांचे संक्षिप्त रूप 3 : 2 इतके आहे. अशा पद्धतीची उदाहरणे लिहा. ज्यांच्यामध्ये एक खास गुणोत्तर मिळेल, मजा येईल!

  उदाहरण असे द्या की, ज्यात गुणोत्तर 2 : 3 आहे.
- टेबलाच्या रुंदीचे लांबीशी असलेले गुणोत्तर 2 : 3
- शीनाजवळ 2 गोट्या आहेत तर तिची मैत्रिण शबनमजवळ 3 गोट्या आहेत, तर शीना आणि शबनमच्या गोट्यांचे गुणोत्तर = 2 : 3 आहे.

तुम्ही काही उदाहरणे लिहू शकाल का ज्यामध्ये गुणोत्तर हेच असेल? आपल्या मित्रांना काही गुणोत्तरे देऊन त्यावर आधारित काही उदाहरणे तयार करायला सांगा.

रवि आणि राणीने एक व्यवसाय सुरू केला आणि 2 : 3 या गुणोत्तरात पैसे गुंतविले. एका वर्षानंतर एकूण ₹ 40,000 चा नफा झाला.

रवि म्हणाला की आपण हा नफा समान वाटून घेऊ या. राणीने उत्तर दिले, ‘‘मला जास्त मिळाले पाहिजेत कारण मी जास्त गुंतवणूक केली आहे.’’

तेव्हा असे ठरले की, गुंतवणुकीच्या गुणोत्तराप्रमाणेच नफा वाटून घ्यायचा.

येथे 2 : 3 गुणोत्तरात 2 आणि 3 या दोन राशी आहेत

या राशींची बेरीज = 2 + 3 = 5

याचा अर्थ काय?

याचा अर्थ असा की, जर ₹ 5 लाभ झाला तर रविला ₹ 2 आणि राणीला ₹ 3 मिळतील.

आपण हेही सांगू शकतो की, 5 भागांपैकी 2 भाग रविला आणि 3 भाग राणीला मिळतील.

म्हणजेच रविला $\frac{2}{5}$ नफा मिळेल तर राणीला $\frac{3}{5}$.

जर एकूण नफा ₹ 500 असेल

तर रविला $\frac{2}{5} \times 500 = ₹\ 200$

आणि राणीला $\frac{3}{5} \times 500 = ₹\ 300$ मिळतील.

आता, जर एकूण नफा ₹ 40,000 असेल तर प्रत्येकाला किती हिस्सा मिळेल?

रविचा हिस्सा $= \frac{2}{5} \times ₹\ 40000 = ₹\ 16{,}000$

आणि राणीचा हिस्सा $= \frac{3}{5} \times ₹\ 40000 = ₹\ 24{,}000$

तुम्ही याप्रकारच्या आणखी उदाहरणांचा विचार करू शकाल का? जेथे तुम्हाला काही वस्तू एकाच गुणोत्तरामध्ये वाटायच्या आहेत. आणखी तीन उदाहरणे तयार करा आणि मित्रांना उकल काढण्यास सांगा.

प्रयत्न करा

1. तुमच्या दप्तरामधील वह्यांच्या संख्येशी पुस्तकांच्या संख्येचे गुणोत्तर शोधा.
2. तुमच्या वर्गातील एकूण डेस्कच्या संख्येने खुर्च्यांच्या एकूण संख्येशी गुणोत्तर शोधा

3. तुमच्या वर्गातील 12 वर्षांवरील मुलांची संख्या शोधा. आता 12 वर्षांवरील मुलांच्या एकूण संख्येचे वर्गातील इतर विद्यार्थ्यांच्या संख्येशी गुणोत्तर काढा.
4. तुमच्या वर्गाच्या दरवाज्यांच्या संख्येचे खिडक्यांच्या संख्येशी गुणोत्तर काढा.
5. कोणताही एक आयत काढा. त्याच्या लांबीचे रुंदीशी गुणोत्तर काढा.

आतापर्यंत ज्या प्रकारची उदाहरणे पाहिली तशीच आणखी काही पाहू–

उदाहरण 1 : एका आयताकृती मैदानाची लांबी आणि रुंदी अनुक्रमे 50 मी आणि 15 मी आहे. मैदानाच्या लांबीचे रुंदीशी असलेले गुणोत्तर शोधा.

उकल : आयताकृती मैदानाची लांबी = 50 मी

आयताकृती मैदानाची रुंदी = 15 मी

लांबीचे रुंदीशी असलेले गुणोत्तर = 50 : 15

गुणोत्तर असे लिहिता येते $\frac{50}{15} = \frac{50 \div 5}{15 \div 5} = \frac{10}{3} = 10 : 3$

म्हणून गुणोत्तर आहे 10 : 3

उदाहरण 2 : 90 सेंमी आणि 1.5 मी यांचे गुणोत्तर शोधा.

उकल : दोन्ही राशी एकाच एककात नाहीत. म्हणून समान एककात आणल्यावर

1.5 मी = 1.5 × 100 सेंमी = 150 सेंमी

म्हणून हवे असलेले गुणोत्तर आहे,

$$90 : 150 = \frac{90}{150} = \frac{90 \div 30}{150 \div 30} = \frac{3}{5}$$

म्हणून हवे असलेले गुणोत्तर 3 : 5

उदाहरण 3 : एका कार्यालयामध्ये 45 लोक काम करतात, तेथे महिलांची संख्या 25 असून उरलेले पुरुष आहेत, तर खालील गुणोत्तर शोधा.

(a) महिलांच्या संख्येचे पुरुषांच्या संख्येशी

(b) पुरुषांच्या संख्येचे महिलांच्या संख्येशी

उकल : महिलांची संख्या = 25

कर्मचाऱ्यांची संख्या = 45

पुरुषांची संख्या = 45 – 25 = 20

म्हणून महिलांच्या संख्येचे पुरुषांच्या संख्येशी असलेले गुणोत्तर

= 25 : 20 = 5 : 4

आणि पुरुषांच्या संख्येचे महिलांच्या संख्येशी असलेले गुणोत्तर

= 20 : 25 = 4 : 5

(लक्षात ठेवा की 5 : 4 आणि 4 : 5 यात फरक आहे.)

उदाहरण 4 : 6 : 4 ची दोन समतुल्य गुणोत्तरे लिहा.

उकल : गुणोत्तर $6 : 4 = \frac{6}{4} = \frac{6 \times 2}{4 \times 2} = \frac{12}{8}$

म्हणून 12 : 8 आणि 6 : 4 समतुल्य गुणोत्तरे आहेत.

याचप्रमाणे $6 : 4 = \frac{6}{4} = \frac{6 \square 2}{4 \square 2} = \frac{3}{2}$

3:2 हे आणखी एक समतुल्य गुणोत्तर होय.

अशाप्रकारे, आपण कोणत्याही गुणोत्तराचे समतुल्य गुणोत्तर अंशाला आणि छेदाला एका समान संख्येने गुणून किंवा भागून मिळवू शकतो.

6 : 4 ची आणखी दोन समतुल्य गुणोत्तरे मिळवा.

उदाहरण 5 : रिकाम्या जागा भरा.

$$\frac{14}{21} = \frac{\square}{3} = \frac{6}{\square}$$

उकल : पहिल्या रिकाम्या जागेसाठी आपण $21 = 3 \times 7$ असे करू शकतो. 21 ला 7 भाग दिला असता 3 ही संख्या मिळते. यावरून दुसऱ्या गुणोत्तरातील रिकामी जागा शोधण्यासाठी 14 ला 7 ने भागू. भाग दिल्यानंतर $14 \div 7 = 2$

म्हणून दुसरे गुणोत्तर $\frac{2}{3}$ आहे.

अशाचप्रकारे, तिसऱ्या गुणोत्तरासाठी, दुसऱ्या गुणोत्तरामधील दोन्ही राशींना 3 ने गुणावे लागेल. (का?)

म्हणून तिसरे गुणोत्तर $\frac{6}{9}$ आहे.

अशाप्रकारे, $\frac{14}{21} = \frac{\boxed{2}}{3} = \frac{6}{\boxed{9}}$ [सर्व समतुल्य गुणोत्तर आहेत.]

उदाहरण 6 : मेरीच्या घरापासून शाळेपर्यंतच्या अंतराचे जॉनच्या घरापासून शाळेपर्यंतच्या अंतराशी गुणोत्तर 2 : 1 आहे.

(a) शाळेच्या सर्वात जवळ कोण राहतो?

(b) खालील सारणी पूर्ण करा. त्यातील काही अंतरांवर मेरी आणि जॉन राहात असू शकतील.

मेरीच्या घरापासून शाळेचे अंतर (किमी)	10	$\square$	4	$\square$	$\square$
जॉनच्या घरापासून शाळेचे अंतर (किमी)	5	4	$\boxed{2}$	3	1

(c) जर मेरीच्या घरापासून शाळेपर्यंतच्या अंतराचे कलामच्या घरापासून शाळेपर्यंतच्या अंतराशी असलेले गुणोत्तर 1 : 2 असेल तर कोण शाळेच्या सर्वात जवळ राहतो?

उकल : (a) जॉन शाळेच्या सर्वात जवळ राहतो. (कारण गुणोत्तर 2 : 1 आहे)

(b)

मेरीच्या घरापासून शाळेचे अंतर (किमी)	10	$\boxed{8}$	4	$\boxed{6}$	$\boxed{2}$
जॉनच्या घरापासून शाळेचे अंतर (किमी)	5	4	$\boxed{2}$	3	1

(c) गुणोत्तर 1 : 2 आहे म्हणून मेरी शाळेच्या जास्त जवळ राहते.

उदाहरण 7 : कृति आणि किरण यांच्यात ₹ 60 1 : 2 गुणोत्तरात वाटा.

उकल : गुणोत्तराचे 2 भाग आहेत 1 आणि 2.

म्हणून दोन भागांची बेरीज $= 1 + 2 = 3$

याचा अर्थ असा आहे की, जर ₹ 3 असतील तर कृतिला ₹ 1 आणि किरणला ₹ 2 मिळतील.

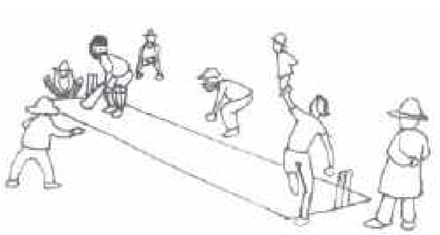
म्हणजेच 3 मधील कृतिला एक भाग आणि किरणला 2 भाग मिळतील.

म्हणून कृतिचा वाटा $= \frac{1}{3} \times$ ₹ 60 = ₹ 20

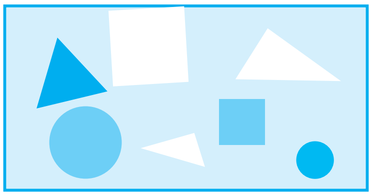
आणि किरणचा वाटा $= \frac{2}{3} \times$ ₹ 60 रु = ₹ 40

उदाहरणसंग्रह 12.1

1. एका वर्गात 20 मुली आणि 15 मुले आहेत. गुणोत्तरे शोधा.
   (a) मुलींच्या संख्येचे मुलांच्या संख्येशी
   (b) मुलींच्या संख्येचे एकूण विद्यार्थी संख्येशी
2. 30 विद्यार्थ्यांच्या एका वर्गात, 6 जणांना फुटबॉल, 12 जणांना क्रिकेट आणि इतरांना टेनिस आवडते. गुणोत्तरे शोधा:–
   (a) फुटबॉल आवडणाऱ्यांच्या संख्येचे टेनिस आवडणाऱ्यांच्या संख्येशी
   (b) क्रिकेटप्रेमींचे एकूण विद्यार्थी संख्येशी



3. आकृती पाहून गुणोत्तरे काढा.
   (a) आयतामधील त्रिकोणाच्या संख्येचे वर्तुळाच्या संख्येशी
   (b) आयतामधील सर्व चौरसांच्या संख्येचे सर्व आकृतींशी
   (c) आयतामधील सर्व वर्तुळांचे सर्व आकृतींबरोबर



4. हामिद आणि अख्तरने एका तासात अनुक्रमे 9 किमी आणि 12 किमी अंतर पार केले, तर हामिद आणि अख्तरच्या अंतराचे गुणोत्तर शोधा.
5. रिकाम्या जागा भरा.
   $\frac{15}{18} = \frac{\square}{6} = \frac{10}{\square} = \frac{\square}{30}$ [ही समतुल्य गुणोत्तरे आहेत का?]
6. खालील प्रत्येकाचे गुणोत्तर शोधा.
   (a) 81 चे 108 शी (b) 98 चे 63 शी
   (c) 33 किमीचे 121 किमीशी (d) 30 मिनिटाचे 45 मिनिटांशी

7. खालील प्रत्येकाचे गुणोत्तर शोधा.
   (a) 30 मिनिटांचे 1.5 तासाशी (b) 40 सेंमीचे 1.5 मीटरशी
   (c) 55 पैशांचे 1 रुपयाशी (d) 500 मिलीचे 2 लीटरशी
8. एका वर्षात सीमा ₹ 1,50,000 मिळविते आणि ₹ 50,000 ची बचत करते. प्रत्येक गुणोत्तराची किंमत काढा:–
   (a) सीमाने केलेला खर्च आणि तिची बचत
   (b) सीमाने केलेली बचत आणि तिने केलेला खर्च
9. एका शाळेत 3300 विद्यार्थी आणि 102 शिक्षक आहेत. शिक्षकांच्या संख्येचे विद्यार्थ्यांच्या संख्येशी गुणोत्तर काढा.
10. एका महाविद्यालयामध्ये 4320 विद्यार्थ्यांपैकी 2300 मुली आहेत, तर गुणोत्तर काढा.
    (a) मुलींची संख्या आणि एकूण विद्यार्थी संख्येचे
    (b) मुलांची संख्या आणि मुलींची संख्येचे
    (c) मुलांची संख्या आणि एकूण विद्यार्थी संख्येचे
11. एका शाळेतील 1800 विद्यार्थ्यांपैकी 750 जणांना बास्केटबॉल, 800 जणांना क्रिकेट आणि उरलेल्यांना टेबल टेनिस खेळायला आवडते. जर एका विद्यार्थ्याने केवळ एका खेळाची निवड केली तर गुणोत्तर काढा:–
    (a) बास्केट बॉल खेळणाऱ्यांचे आणि टेबल टेनिस खेळणाऱ्यांचे
    (b) क्रिकेट खेळणाऱ्यांचे आणि बास्केटबॉल खेळणाऱ्यांचे
    (c) बास्केटबॉल खेळणाऱ्यांचे आणि एकूण विद्यार्थ्यांचे

12. एक डझन पेनांची किंमत ₹ 180 आहे आणि 8 बॉलपेनची किंमत ₹ 56 आहे. पेनच्या किमतीचे बॉलपेनच्या किमतीशी गुणोत्तर काढा.
13. विधान पाहा – एका सभागृहाच्या रुंदीचे आणि लांबीचे गुणोत्तर 2 : 5 आहे. खालील सारणी पूर्ण करा. ज्यामध्ये सभागृहाच्या काही रुंदी व लांबीच्या शक्य असलेल्या किमती दिल्या आहेत.

सभागृहाची रुंदी (मी मध्ये)	10		40
सभागृहाची लांबी (मी मध्ये)	25	50	

14. शीला आणि संगीतामध्ये 20 पेन 3 : 2 या गुणोत्तरात वाटा.
15. एका आईला तिच्या मुली श्रेया आणि भूमिका यांना ₹ 36 त्यांच्या वयांच्या गुणोत्तराएवढे वाटायचे आहेत. जर श्रेयाचे वय 15 वर्षे आणि भूमिकाचे वय 12 वर्षे असेल तर श्रेया आणि भूमिकाला किती किती रुपये मिळतील?

16. वडिलांचे आजचे वय 42 वर्षे आणि त्यांच्या मुलाचे 14 वर्षे आहे. गुणोत्तर काढा.
    (a) वडिलांच्या आजच्या वयाशी मुलाच्या आजच्या वयाचे
    (b) जेव्हा मुलगा 12 वर्षांचा होतो, तेव्हा वडिलांच्या वयाचे मुलाच्या वयाशी
    (c) 10 वर्षानंतर, वडिलांच्या वयाचे मुलाच्या वयाशी
    (d) वडिलांचे वय 30 वर्षे असताना वडिलांच्या वयाशी मुलाच्या वयाशी

12.3 प्रमाण

हा प्रसंग पाहा :

राजू बाजारात टोमॅटो खरेदी करण्यासाठी जातो. एक दुकानदार सांगतो की, 5 किग्रॅ टोमॅटो ₹ 40 ला आहेत. दुसरा दुकानदार 6 किग्रॅ टोमॅटोची किंमत ₹ 42 सांगतो. आता राजूने काय केले पाहिजे? त्याने टोमॅटो पहिल्या दुकानदाराकडून घ्यावे की दुसऱ्या दुकानदाराकडून? निर्णय घेण्यासाठी, वजाबाकी करून तो तुलना करू शकेल का? नाही? का नाही?

त्याला मदत करण्यासाठी कोणता उपाय सुचवाल? आपल्या मित्रांशी चर्चा करा.

आणखी एक उदाहरण पाहू.

भाविकाजवळ 28 गोट्या आणि विनीजवळ 180 फुले आहेत. दोघींना ते एकमेकींमध्ये वाटायचे आहेत. भाविकाने 14 गोट्या विनीला दिल्या आणि विनीने 90 फुले भाविकाला दिली. परंतु विनी खूष नाही. तिला असे वाटते आहे की, तिने भाविकाला जास्त फुले दिली. मात्र भाविकाने मात्र तिला कमी गोट्या दिल्या आहेत.

तुम्हाला काय वाटते? विनीचे म्हणणे बरोबर आहे? दोघीजणी प्रश्नाच्या उत्तराचे समाधान करण्यासाठी विनीच्या आईकडे म्हणजे पूजाकडे गेल्या.

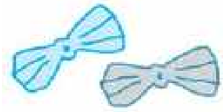
पूजाने त्यांना समजावले. 28 गोट्यांपैकी भाविकाने विनीला 14 गोट्या दिल्या म्हणून गुणोत्तर होईल $14 : 28 = 1 : 2$

आणि 180 फुलांपैकी विनीने 90 फुले भाविकाला दिली म्हणजे गुणोत्तर

$90 : 180 = 1 : 2$

येथे गुणोत्तर समान आहेत म्हणजेच वितरण बरोबर आहे.

दोन मैत्रिणी आशमा आणि पंखुरी बाजारात हेअर क्लिपा खरेदी करायला गेल्या. त्यांनी ₹ 30 ला



20 हेअर क्लिपा घेतल्या. आशमाने ₹ 12 दिले तर पंखुरीने ₹ 18 दिले. घरी आल्यावर आशमाने पंखुरीला 10 हेअर क्लिपा देण्यास सांगितले. परंतु पंखुरीचे म्हणणे असे होते की जर मी जास्त रुपये दिले तर मला जास्त हेअर क्लिपा मिळाल्या पाहिजे. याप्रमाणे आशमाला 8 आणि तिला 12 हेअर क्लिपा मिळाल्या पाहिजेत.

तुम्ही सांगू शकाल का? आशमा आणि पंखुरीमध्ये कोणाचे म्हणणे बरोबर आहे? का?

आशमाने दिलेले पैसे आणि पंखुरीने दिलेले पैसे यांचे गुणोत्तर $= 12 : 18 = 2 : 3$ आहे. आशमाच्या म्हणण्याप्रमाणे, आशमाकडील हेअर क्लिपांची संख्या आणि पंखुरीकडील हेअर क्लिपांची संख्या यांचे गुणोत्तर $= 10 : 10 = 1 : 1$

पंखुरीच्या म्हणण्यानुसार,

आगमाकडील हेअर क्लिपांची संख्या आणि पंखुरीकडील हेअर क्लिपांची संख्या यांचे गुणोत्तर = 8 : 12 = 2 : 3 आहे.

आशमाच्या म्हणण्याप्रमाणे केलेले हेअर क्लिपांचे वितरणाचे गुणोत्तर, दिलेल्या पैशांच्या गुणोत्तराबरोबर नाही, की जे पाहिजे. तर पंखुरीने सांगितल्याप्रमाणे केलेल्या वितरणात दोन्ही गुणोत्तरे समान आहेत.

म्हणून, पंखुरीने केलेले वितरण बरोबर आहे.

गुणोत्तरे

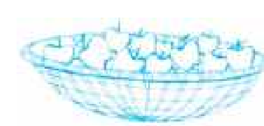
खालील काही उदाहरणे पाहूया

- राजने ₹ 15 मध्ये 3 पेन खरेदी केले तर अनुने ₹ 50 मध्ये 10 पेन खरेदी केले. कोणाचे पेन महाग आहे? राजने खरेदी केलेली पेनांची संख्या आणि अनूने खरेदी केलेल्या पेनांची संख्या यांचे गुणोत्तर = 3 : 10.

  किमतीचे गुणोत्तर = 15 : 50 = 3 : 10

  3 : 10 आणि 15 : 50 समान आहेत. म्हणजे, दोघांनी सारख्याच किमतीला पेनाची खरेदी केली.

- रहिमने ₹ 60 ला 2 किग्रॅ सफरचंद विकले, तर रोशनने ₹ 120 ला 4 किग्रॅ. कोणी महाग विकले?

  सफरचंदाचे वजनी गुणोत्तर = 2 किग्रॅ : 4 किग्रॅ = 1 : 2

  किमतीचे गुणोत्तर = 60 : 120 = 6 : 12 = 1 : 2

  म्हणजे सफरचंदांचे वजनी गुणोत्तर = किमतीचे गुणोत्तर

  दोन्ही गुणोत्तरे समान आहेत. म्हणून आपण असे म्हणू शकतो की, ही समान गुणोत्तरे आहेत. ते दोघे एकाच किमतीत सफरचंद विकत आहेत.

जर दोन गुणोत्तरे समान असतील तर ती प्रमाणात आहेत हे दाखविण्यासाठी '::' किंवा '=' चिन्हाचा उपयोग करतात.

पहिल्या उदाहरणामध्ये, आपण सांगू शकतो की, 3, 10, 15 आणि 50 प्रमाणात आहेत. आपण व त्यांना 3 : 10 :: 15 : 50 असे लिहू शकतो आणि तीनास दहा बरोबर पंधरास पन्नास असे वाचू शकतो.

दुसऱ्या उदाहरणामध्ये, 2, 4, 60 आणि 120 प्रमाणात आहेत. आपण 2 : 4 :: 60 : 120 असे लिहू आणि 2 स 4 बरोबर 60 स 120 असे वाचू शकतो.

इतर काही उदाहरणे पाहू

एक व्यक्ती 2 तासात 35 किमी चालते. याच गतीने 4 तासात 70 किमी चालू शकेल?

दोन्ही वेळेस चाललेल्या अंतराचे गुणोत्तर = 35 : 70 = 1 : 2

लागलेल्या वेळेचे गुणोत्तर 2 : 4 = 1 : 2 .

अशाप्रकारे दोन्ही गुणोत्तरे समान आहेत. म्हणजेच 35 : 70 = 2 : 4

म्हणून आपण असे म्हणू शकतो की, 35, 70, 2 आणि 4 या चार संख्या प्रमाणात आहेत.

हे आपण 35 : 70 :: 2 : 4 असे लिहू शकतो आणिं 35 स 70 बरोबर 2 स 4 असे वाचू शकतो. म्हणजेच व्यक्ती 4 तासात 70 किमी त्याच गतीने चालू शकते.

आता आपण पुढील उदाहरण पाहूया.

2 किग्रॅ सफरचंदांची किंमत ₹ 60 आहे आणि ₹ 5 किग्रॅ टरबुजांची किंमत ₹ 15 आहे.

दोघांचे वजनाचे गुणोत्तर = 2 : 5 आहे.

दोघांच्या किमतीचे गुणोत्तर = 60 : 15 आहे.

येथे 2 : 5 आणि 60 : 15 समान नाहीत.

म्हणजेच $2 : 5 \neq 60 : 15$

अशाप्रकारे 2, 5, 60 आणि 15 या चार राशी प्रमाणात नाहीत.

जर दोन गुणोत्तरे समान नसतील तर त्या राशी प्रमाणात नसतात.

प्रयत्न करा

खाली दिलेली गुणोत्तरे समान आहेत का? याचा पडताळा घ्या. म्हणजेच ती प्रमाणात आहेत का? जर असतील तर ती योग्य प्रकारे लिहा.

1. 1 : 5 आणि 3 : 15
2. 2 : 9 आणि 18 : 81
3. 15 : 45 आणि 5 : 25
4. 4 : 12 आणि 9 : 27
5. ₹ 10 चे ₹ 15 बरोबर आणि 4 चे 6 बरोबर

प्रमाणात असलेल्या, क्रमाने घेतलेल्या चारही राशींना पद असे म्हणतात. पहिल्या आणि चौथ्या पदास अंत्य पदे म्हणतात. दुसऱ्या आणि तिसऱ्या पदास मध्य पदे म्हणतात.

उदाहरणार्थ 35 : 70 : : 2 : 4

यामध्ये 35, 70, 2 आणि 4 ही चार पदे आहेत. ज्यापैकी 35 आणि 4 अंत्यपदे आणि 70 तसेच 2 ही मध्य पदे आहेत.

उदाहरण 8 : 25 ग्रॅम : 30 ग्रॅम आणि 40 किग्रॅ : 48 किग्रॅ ही गुणोत्तरे प्रमाणात आहेत का?

उकल : 25 ग्रॅम : 30 ग्रॅम $= \frac{25}{30} = 5 : 6$

40 ग्रॅम : 48 ग्रॅम $= \frac{40}{48} = 5 : 6$

म्हणजेच 25 : 30 = 40 : 48

म्हणून 25 ग्रॅम : 30 ग्रॅम आणि 40 किग्रॅ : 48 किग्रॅ ही गुणोत्तरे प्रमाणात आहे, अर्थात 25 : 30 :: 40 : 48

येथें 25, 48 अंत्य पदे तर 30, 40 मध्य पदे आहेत.

उदाहरण 9 : 30, 40, 45 आणि 60 प्रमाणात आहेत का?

उकल : 30 आणि 40 चे गुणोत्तर $= \frac{30}{40} = 3 : 4$

45 आणि 60 चे गुणोत्तर $= \frac{45}{60} = 3 : 4$

$30 : 40 = 45 : 60$

म्हणून 30, 40, 45, 60 प्रमाणात आहेत.

उदाहरण 10 : 15 सेमीचे 2 मीमी शी आणि 10 सेकंदांचे 3 मिनिटांशी असणारे गुणोत्तर प्रमाणात असेल का?

उकल : 15 सेमीचे 2 मीमी शी गुणोत्तर

$= 15 : 2 \times 100$ (1 मी = 100 सेमी)

$= 3 : 40$

10 सेकंदाचे 3 मिनिटांशी गुणोत्तर

$= 10 : 3 \times 60$ (1 मिनिट = 60 सेकंद)

$= 1 : 18$

यावरून $3 : 40 \neq 1 : 18$, म्हणून दिलेली गुणोत्तरे प्रमाणात नाहीत.

उदाहरणसंग्रह 12.2

1. खालील राशी प्रमाणात आहेत का?
   (a) 15, 45, 40, 120 (b) 33, 121, 9,96 (c) 24, 28, 36, 48
   (d) 32, 48, 70, 210 (e) 4, 6, 8, 12 (f) 33, 44, 75, 100
2. पुढील प्रत्येक विधान सत्य की असत्य ते सांगा.
   (a) 16 : 24 :: 20 : 30 (b) 21: 6 :: 35 : 10 (c) 12 : 18 :: 28 : 12
   (d) 8 : 9 :: 24 : 27 (e) 5.2 : 3.9 :: 3 : 4 (f) 0.9 : 0.36 :: 10 : 4
3. खालील विधाने बरोबर आहेत का?
   (a) 40 व्यक्ती : 200 व्यक्ती = 15 रु. : 75 रु.
   (b) 7.5 ली. : 15 ली. = 5 किग्रॅ : 10 किग्रॅ
   (c) 99 किग्रॅ : 45 किग्रॅ= 44 रु. : 20 रु.
   (d) 32 मी : 64 मी = 6 सेकंद : 12 सेकंद
   (e) 45 किमी : 60 किमी = 12 तास : 15 तास
4. खालील गुणोत्तरे प्रमाणात आहेत का? जर असतील तर, मध्य पदे व अंत्य पदे लिहा.
   (a) 25 सेंमी : 1 मी आणि ₹ 40 : ₹ 160
   (b) 39 ली : 65 ली आणि 6 बाटल्या : 10 बाटल्या
   (c) 2 किग्रॅ : 80 किग्रॅ आणि 25 ग्रॅ : 625 ग्रॅ
   (d) 200 मिली : 2.5 ली आणि 4 रु. : 50 रु.

12.4 एकमान पद्धत

खालील उदाहरणे पहा

- दोन मैत्रिणी रेश्मा आणि सीमा अभ्यासाची पुस्तके खरेदी करण्यासाठी बाजारात जातात. रेश्माने ₹ 24 ना 2 पुस्तके खरेदी केली, तर एका पुस्तकाची किंमत काढा.
- 80 किमी अंतर पार करण्यासाठी एका स्कूटरला 2 लीटर पेट्रोल लागते, तर 1 किमी अंतर जाण्यासाठी किती पेट्रोल लागेल?

वरील उदाहरणे आपल्या दैनंदिन जीवनाशी निगडीत आहेत. ही आपण कशी सोडवूया?

पहिले उदाहरण पुन्हा पाहू.

2 अभ्यास पुस्तकांची किंमत = ₹ 24

म्हणून 1 अभ्यास पुस्तकाची किंमत = ₹ 24 ÷ 2 = ₹ 12

जर 5 अभ्यास पुस्तकांची किंमत काढावयाची असेल तर ती ₹ 12 × 5 = ₹ 60 होईल.

दुसरे उदाहरण पुन्हा पाहू.

एक किमी जाण्यासाठी किती पेट्रोल लागेल हे आपल्याला माहीत करून घ्यायचे आहे.

80 किमी जाण्यासाठी लागणारे पेट्रोल = 2 लीटर

1 किमी जाण्यासाठी लागणारे पेट्रोल = $\frac{2}{80} = \frac{1}{40}$ लीटर

जर 120 किमी जाण्यासाठी किती पेट्रोल लागेल? असे विचारले असता, आवश्यक असलेले पेट्रोल = $\frac{1}{40} \times 120$ किमी = 3 लीटर

ज्या पद्धतीमध्ये आपण प्रथम एक एककाची किंमत काढतो आणि नंतर जितक्या एककांची किंमत काढायची असेल, ती काढतो. अशा पद्धतीस एकमान पद्धत म्हणतात.

प्रयत्न करा

1. पाच उदाहरणे अशाच प्रकारची तयार करा आणि मित्रांबरोबर सोडवा.
2. खालील सारणी अभ्यासा आणि पूर्ण करा.

वेळ	करणने पार केलेले अंतर	कृतिने पार केलेले अंतर
2 तास	8 किमी	6 किमी
1 तास	4 किमी	
4 तास		

करणने 1 तासात पार केलेले अंतर $= \frac{8}{2}$ किमी $= 4$ किमी

म्हणून करणने 4 तासांत पार केलेले अंतर $= 4 \times 4 = 16$ किमी

अशाचप्रकारे कृतिने 4 तासांत किती अंतर पार केले हे काढण्यासाठी तिने एका तासात किती अंतर पार केले ते काढावे लागेल.

उदाहरण 11 : जर 6 ज्यूसच्या कॅनची किंमत ₹ 210 असेल तर 4 कॅनची किंमत काढा.

उकल : 6 ज्यूसच्या कॅनची किंमत = ₹ 210

म्हणून 1 ज्यूस कॅनची किंमत $= \frac{210}{6} =$ ₹ 35

म्हणून 4 ज्यूस कॅनची किंमत = ₹ 35×4 = ₹ 140

अशाप्रकारे 4 ज्यूस कॅनची किंमत ₹ 140 होईल.

उदाहरण 12 : एका मोटरसायकलने 220 किमी अंतर जाण्यासाठी 5 लीटर पेट्रोल लागते, तर 1.5 लीटर पेट्रोलमध्ये किती अंतर जाऊ शकेल?

उकल : 5 लीटरमध्ये मोटरसायकलने कापलेले अंतर = 220 किमी

1 लीटरमध्ये मोटरसायकलने कापलेले अंतर $= \frac{220}{5}$ किमी

1.5 लीटरमध्ये मोटरसायकलने कापलेले अंतर $\frac{220}{5} \times 1.5$

किमी $= \frac{220}{5} \times \frac{15}{10}$ किमी = 66 किमी

म्हणून 1.5 लीटर पेट्रोलमध्ये 66 किमी अंतर जाता जाईल.

उदाहरण 13 : एक डझन साबणाच्या वड्यांची किंमत ₹ 153.60 आहे. अशा साबणाच्या 15 वड्यांची किंमत काढा.

उकल : 1 डझन = 12

जर 12 साबणाच्या वड्यांची किंमत = ₹ 153.60

तर 1 साबणाच्या वड्यांची किंमत $= \frac{153.60}{12} =$ ₹ 12.80

म्हणून 15 साबणाच्या वड्यांची किंमत = ₹ 12.80×15 = ₹ 192

अशाप्रकारे, 15 साबणाच्या वड्यांची किंमत ₹ 192

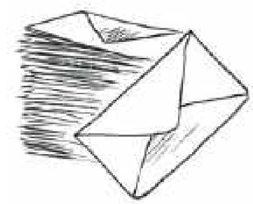
उदाहरण 14 : 105 पाकिटांची किंमत ₹ 35 आहे. ₹ 15 मध्ये किती पाकिटे खरेदी करता येतील?

उकल : ₹ 35 मध्ये खरेदी करता येणारी पाकिटांची संख्या = 105

म्हणून ₹ 1 मध्ये खरेदी करता येणारी पाकिटांची संख्या $= \frac{105}{35}$

म्हणून ₹ 10 मध्ये खरेदी करता येणारी पाकिटांची संख्या

$= \frac{105}{35} \times 10 = 30$



अशाप्रकारे ₹ 10 मध्ये 30 पाकिटे खरेदी करता येतील.

उदाहरण 15 : एक मोटार $2\frac{1}{2}$ तासांत 90 किमी जाते.

(a) याच गतीने 30 किमी अंतर जाण्यासाठी किती वेळ लागेल?

(b) याच गतीने 2 तासांत किती अंतर जाता येईल?

उकल : (a) पहिल्या स्थितीत अंतर माहीत आहे, वेळ माहीत नाही. म्हणून, आपण असे सोडवू या.

$2\frac{1}{2}$ तास $= \frac{5}{2}$ तास $= \frac{5}{2} \times 60$ मिनिटे $= 150$ मिनिटे

90 किमी अंतर जाण्यासाठी लागणारा वेळ = 150 मिनिटे

म्हणून 1 किमी अंतर जाण्यासाठी लागणारा वेळ $\frac{150}{90}$ मिनिटे

म्हणून, 30 किमी अंतर जाण्यासाठी लागणारा वेळ $\frac{150}{90} \times 30$ मिनिटे

$= 50$ मिनिटे

अशाप्रकारे 30 किमी अंतर जाण्यासाठी 50 मिनिटे लागतील.

(b) दुसऱ्या स्थितीत अंतर माहीत नाही, वेळ माहीत आहे. म्हणून असे सोडवू शकतो.

$2\frac{1}{2}$ तास $= \frac{5}{2}$ तास

$\frac{5}{2}$ तासांत कापलेले अंतर $= 90$ किमी

म्हणून 1 तासात कापलेले अंतर $= 90 \div \frac{5}{2}$ किमी

$= 90 \times \frac{2}{5} = 36$ किमी

म्हणून 2 तासांत कापलेले अंतर $= 36 \times 2 = 72$ किमी

अशाप्रकारे 2 तासांत 72 किमी अंतर पार करता येईल.

उदाहरणसंग्रह 12.3

1. जर 7 मी कापडाची किंमत ₹ 294 असेल तर 5 मी कापडाची किंमत काढा.
2. एकता 10 दिवसांत ₹ 1500 मिळविते, तर 30 दिवसांत ती किती ₹ मिळवेल?

3. जर मागील 3 दिवसांत 276 मिमी पाऊस पडला असेल, तर एका आठवड्यात (7 दिवस) किती सेमी पाऊस पडेल? समजा, त्याच समान गतीने पाऊस पडत आहे.
4. 5 किग्रॅ गव्हाची किंमत ₹ 30.50 आहे.
   (a) 8 किग्रॅ गव्हाची किंमत काय होईल.
   (b) ₹ 61 मध्ये किती गहू खरेदी करता येईल?
5. मागील 30 दिवसांत तापमान 15° सेल्सियसने कमी होत आहे. जर तापमानातील घट याच वेगाने चालू राहिली तर, पुढील 10 दिवसांत तापमान किती अंशाने कमी होईल?
6. शायना 3 महिन्यांचे भाडे ₹ 7500 देते. जर वर्षभर भाडे समान समान असेल, तर पूर्ण वर्षासाठी किती भाडे द्यावे लागेल?
7. 4 डझन केळ्यांची किंमत ₹ 60 आहे. ₹ 12.50 त किती केळी खरेदी करता येतील?
8. 72 पुस्तकांचे वजन 9 किग्रॅ आहे. अशा 40 पुस्तकांचे वजन किती होईल?
9. एका ट्रकला 594 किमी अंतर जाण्यासाठी 108 लीटर डिझेल लागते, तर 1650 किमी अंतर जाण्यासाठी किती लीटर डिझेल लागेल?
10. राजूने ₹ 150 मध्ये 10 पेन आणि मनीषने ₹ 84 मध्ये 7 पेन खरेदी केले, तर कोणी स्वस्तात खरेदी केली?
11. अनीशने 6 षटकांत 42 धावा केल्या आणि अनूपने 7 षटकांत 63 धावा केल्या, तर एका षटकात कोणी जास्त धावा केल्या?

आपण काय चर्चा केली?

1. एकसारख्या राशींची तुलना आपण साधारणपणे वजाबाकी करून करतो.
2. बहुतेक वेळा पटीने तुलना करणे चांगले असते. म्हणजेच एक राशी दुसऱ्या राशीच्या किती पट आहे? याला पटीने तुलना करणे असे म्हणतात.
3. गुणोत्तराच्या मदतीने तुलना करताना दोन्ही राशींची एकके समान असावीत. जर समान नसतील तर गुणोत्तरे घेण्यापूर्वी ती समान करून घ्यावीत.
4. वेगवेगळ्या उदाहरणात गुणोत्तर समान असू शकते.
5. 3 : 2 आणि 2 : 3 ही गुणोत्तरे एकमेकांपासून वेगळी/भिन्न आहेत. म्हणजेच ज्या क्रमाने राशी घेतल्या जातात तो महत्त्वाचा आहे.
6. गुणोत्तरास अपूर्णांकदेखील म्हणता येईल. जसे $10 : 3 = \frac{10}{3}$.
7. दोन गुणोत्तरे समान असतील तर त्यांचे अपूर्णांकदेखील समान असतील. जसे 3 : 2 हे 6 : 4 आणि 12 : 8 शी समान आहे.

8. एखाद्या गुणोत्तरास संक्षिप्त रूप देता येते. उदाहरणार्थ 50 : 15 हे $\frac{50}{15}$ असे लिहू शकतो आणि संक्षिप्त रूपात $\frac{50}{15} = \frac{10}{3}$ होय. अशाप्रकारे संक्षिप्त रूपातं 50 : 15 = 10 : 3.

9. चार राशी प्रमाणात आहे असे म्हणणे, पहिल्या आणि दुसऱ्या राशींचे गुणोत्तर, तिसऱ्या आणि चौथ्या राशींच्या गुणोत्तराबरोबर आहे. अशाप्रकारे 3, 10, 15, 50 प्रमाणात आहे. कारण $\frac{3}{10} = \frac{15}{50}$ आपण प्रमाणात 3 : 10 :: 15 : 50 असे दर्शवितो तर 3 स10 बरोबर 15 स 50 असे वाचतो. वर लिहिलेल्या प्रमाणात, 3 आणि 50 अंत्य पदे असून 10 आणि 15 मध्य पदे आहेत.

10. प्रमाणात क्रम महत्त्वाचा आहे. 3, 10, 15 आणि 50 प्रमाणात आहेत. परंतु 3, 10, 50 आणि 15 नाहीत. कारण $\frac{3}{10} \neq \frac{50}{15}$.

11. ज्या क्रियेत आपण एका एककाची किंमत काढतो आणि नंतर हव्या असलेल्या एककांच्या किमती काढतो. त्यास एकमान पद्धत म्हणतात. जर 6 कॅनची किंमत 210 रु. आहे. 4 कॅनची किंमत काढण्यासाठी, प्रथम एका कॅनची किंमत काढू की जी ₹ $\frac{210}{6}$ किंवा 35 रु. असेल. यावरून 4 कॅनची किंमत ₹ 35 × 4 म्हणजेच ₹ 140 येईल.

सममिती

प्रकरण 13

13.1 प्रस्तावना

सममिती हा दैनंदिन जीवनात वापरला जाणारा एक साधा शब्द आहे. जेव्हा एखादी आकृती किंवा आकृत्या बरोबर समान प्रमाणात असतात, तेव्हा त्या आकृत्या **"सममित आकृत्या"** आहेत असे आपण म्हणतो.

ताजमहल (उ.प्र.)

तिरुवन्नामलाई (तमिलनाडु)

आपल्या सममित रचनेमुळे या ऐतिहासिक वास्तू स्थापत्य कलेचा उत्तम नमुना आहेत.

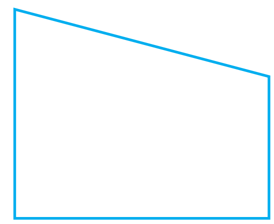
समजा, आपण एका आकृतीचा (अर्धा) भाग असा दुमडला की, तिचा अर्धा डावा भाग आणि अर्धा उजवा भाग एकमेकांशी तंतोतंत जुळतात. तर आपण म्हणू शकतो, की आकृतीमध्ये सममिती अक्ष आहे. आपण पाहू शकतो की, दोन्ही अर्धे भाग एकमेकांचे (आरशातील) प्रतिबिंब आहे. जर आपण आकृती जेथे दुमडली त्या जागी एक आरसा ठेवला तर, आकृतीच्या एका भागाचे प्रतिबिंब दुसऱ्या भागाला पूर्णपणे झाकून टाकते.

आकृति 13.1

असे जेव्हा घडते, तेव्हा अशा घडीस (वास्तविक किंवा काल्पनिक) जी आरशाची कड आहे. तिला सममिती अक्ष म्हणतात.

येथे आपण ज्या आकृत्यांचे आकार पाहतो आहोत त्या सर्व आकृत्या सममित आकृत्या आहेत. का बरं?

जेव्हा आपण त्यांना ठिपक्यांच्या रेषेवरून दुमडता. तेव्हा आकृतीचा एक भाग दुसऱ्या अर्ध्या भागास पूर्णपणे झाकून टाकतो. या आकृतीमधील ठिपक्यांच्या रेषेस तुम्ही काय संबोधाल? तुम्ही आकृतीवर आरसा कोठे ठेवाल? जेणेकरून प्रतिबिंब आकृतीला दुसऱ्या भागाने पूर्णपणे झाकलेले असेल?



आकृती 13.2

आकृती 13.2 ही सममित आकृती नाही. याचे कारण तुम्ही सांगू शकाल का?

13.2 सममित आकृत्या काढणे : इंक– ब्लॉट डेविल्स

हे करा

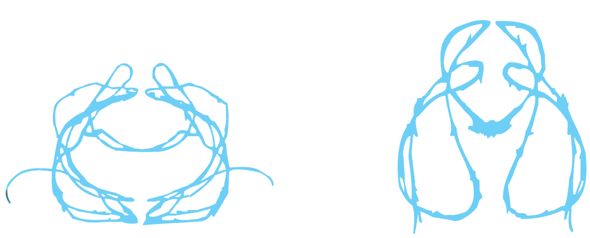
एक कागद घ्या. तो मधोमध दुमडा. शाईचे काही थेंब अर्ध्या भागावर टाका.

आता दोन्ही अर्धे भाग दाबा.

आता काय दिसले?

तयार झालेली आकृती सममित आकृती आहे का? जर असेल तर, सममित अक्ष कोठे आहे? अजून एखादा सममित अक्ष असेल का की ज्याच्यामुळे आकृतीचे दोन समान भाग मिळतील. असे आणखी काही नमुने करा.

शाई–दोरा नमुना



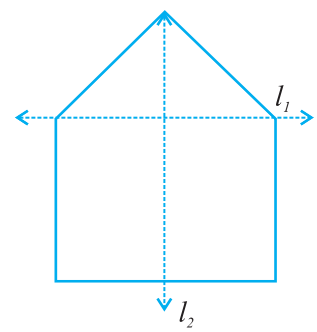
एक कागद अर्ध्यावर दुमडा. त्यातील एका अर्ध्या भागावर कमी लांबीचा दोरा वेगवेगळ्या रंगाच्या शाईत किंवा रंगात बुडवून त्यावर व्यवस्थित ठेवा. आता दोन्ही अर्धे भाग एकत्र दाबा. तयार झालेली आकृती पहा. ही आकृती सममित आकृती आहे का? या आकृतीला आणखी कोणकोणत्या प्रकाराने दुमडू शकतो? ज्यामुळे दोन समान भाग मिळतील.

प्रयत्न करा

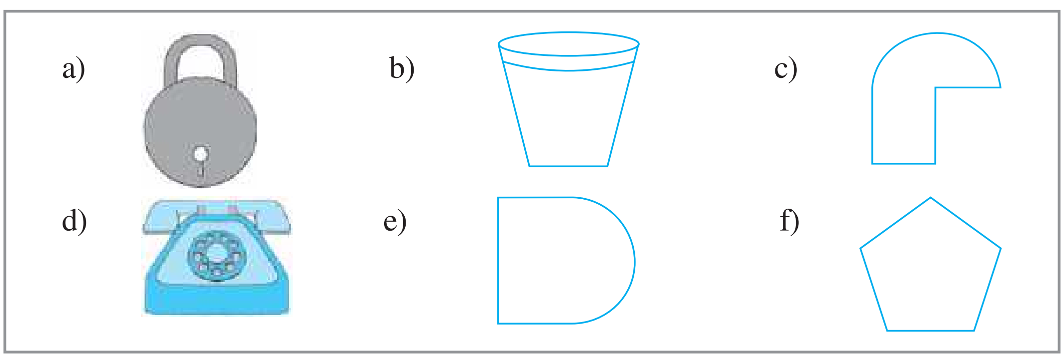
तुमच्या भूमिती पेटीमध्ये दोन गुण्या आहेत, हे सममित आहेत का?

आपल्या वर्गातील काही वस्तूंची यादी तयार करा जसे, फळा (black board), टेबल, दरवाजा, पुस्तक इत्यादी. यांपैकी कोणत्या वस्तू सममित आहेत आणि कोणत्या सममित नाहीत. त्यातील सममित आकृत्यांचे सममित अक्ष तुम्ही ओळखू शकाल का?

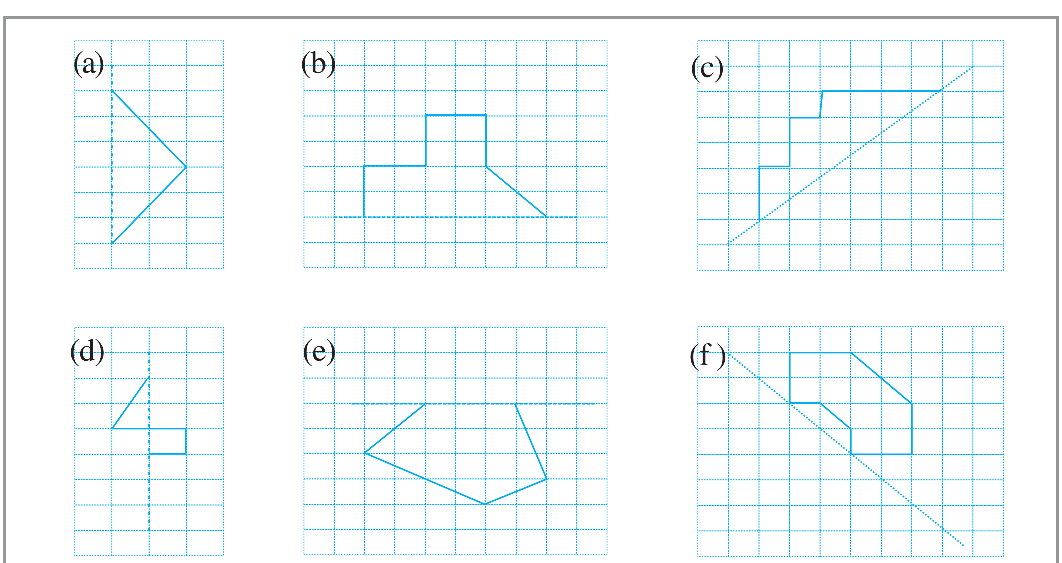
प्रश्नसंग्रह 13.1



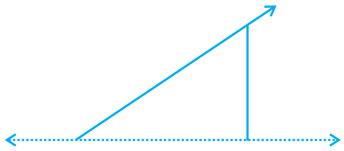
1. आपल्या घरातील किंवा शाळेतील चार सममित आकृत्यांची यादी करा.
2. आकृतीमध्ये, l_1 किंवा l_2 यापैकी कोणती रेषा आरशाची कड म्हणजेच सममिती अक्ष आहे?
3. खाली दिलेल्या आकृत्या ओळखा. या आकृत्या सममित आहेत. का नाहीत ते पडताळून पहा.



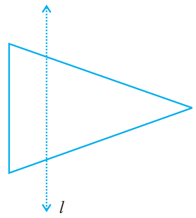
4. खाली दिलेल्या आकृत्या आलेख कागदावर काढा. तुम्ही आलेख कागदाचा उपयोग मागील इयत्तेत अंकगणिताच्या पुस्तकात केला असेल. या आकृत्या अशा रीतीने पूर्ण करा की, ठिपक्यांची रेषाच सममित अक्ष असेल.



5. शेजारील आकृतीमध्ये, l सममिती अक्ष आहे. सममित आकृती तयार करण्यासाठी ती पूर्ण करा.



6. आकृतीमध्ये, l सममिती अक्ष आहे. त्रिकोणाचे प्रतिबिंब काढा आणि आकृती अशा रीतीने पूर्ण करा की ती सममित होईल.



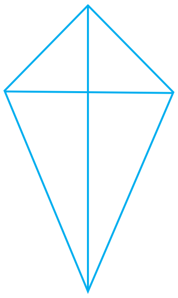
13.3 दोन सममिती अक्ष असणाऱ्या आकृत्या

हे करा

एक पतंग

तुमच्या भूमितीच्या पेटीमधील 2 गुण्यांपैकी एका गुण्याच्या कोनांची मापे $30°$, $60°$ आणि $90°$ आहेत.

असेच 2 गुण्या घ्या. त्यांना एकमेकांशी जुळवून आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे एक पतंग तयार करा.

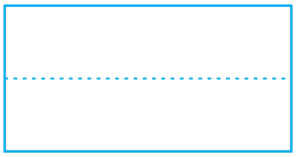


या आकृतीस किती सममिती अक्ष आहेत?

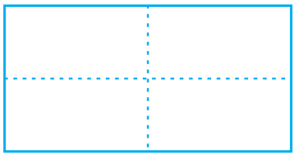
एक आयत

एक आयताकृती कागद घ्या. जसे (पोस्टकार्ड) त्याला अशाप्रकारे आडवे दुमडा की, दुमडलेले अर्धे भाग तंतोतंत जुळतील. दुमडलेली रेषा सममिती अक्ष आहे का?

कागद उलगडा आणि पुन्हा तो उभा मागीलप्रमाणे दुमडा. दुसऱ्या वेळेस दुमडलेली रेषा सुद्धा सममिती अक्ष आहे का?



पहिली घडी



दुसरी घडी

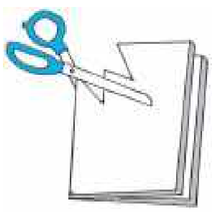
तुम्हाला काय वाटते की, या दोन्ही रेषा सममिती अक्ष आहेत?

प्रयत्न करा

दोन किंवा अधिक गुण्या एकत्र जुळवून तुम्ही जितक्या आकृत्या तयार करू शकाल. तेवढ्या तयार करा. या आकृत्या आलेख कागदावर काढा आणि त्यांचे सममिती अक्ष शोधा.

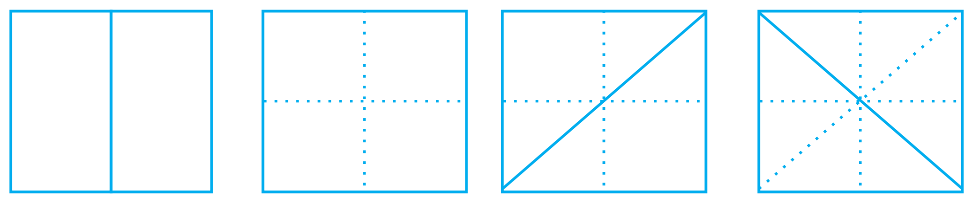
दोन दुमड घातलेल्या कागदापासून कापून केलेली आकृती

एक आयताकृती कागद घ्या. त्याला एकदा दुमडा. परत दुसऱ्यांदा दुमडा. चित्रात दाखवल्याप्रमाणे काहीतरी नक्षी काढा. जी नक्षी काढली आहे. ती त्या आकारात कापा आणि कागद उलगडा. (कागद उलगडण्याअगोदर जी आकृती तयार होणार आहे. त्याचा विचार करा.)

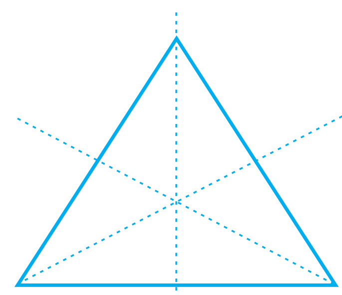


जी आकृती कापून झाली आहे. त्यामध्ये किती सममिती अक्ष आहेत? आणखी काही नक्षी तयार करा.

13.4 अनेक सममिती अक्ष (दोनापेक्षा जास्त) असलेल्या आकृत्या



एक चौरसाकृती कागद घ्या. त्याची उभी अर्धी बाजू (vertically) आणि आडवी बाजू (horizontally) अर्धी दुमडा. (अर्थात 2 वेळा दुमडले.) कागद उलगडा आणि आता पुन्हा अर्ध्या भागावर दुमडा (तिसऱ्यांदा), परंतु, आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे, यावेळी कर्णावर दुमडले आहे. कागद पुन्हा उलगडा आणि अर्ध्या भागावर दुमडा. (चौथ्यांदा) परंतु, यावेळी दुसऱ्या कर्णावर आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे दुमडले आहे. कागद उलगडा.

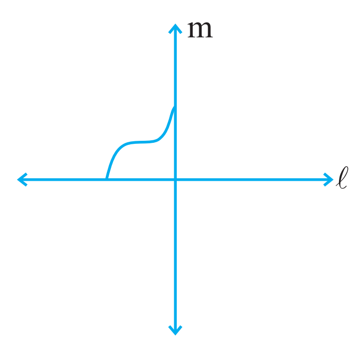


समबाहु त्रिभुज की 3 सममित रेखाएँ

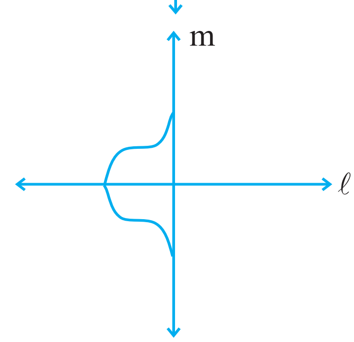
या आकृतीमध्ये किती सममिती अक्ष आहेत? आपण 2 सममिती अक्ष असलेल्या आकृत्यांची रचना प्रश्नसंग्रह 13.1 च्या प्रश्न क्र. 4 मध्ये एक सममिती अक्ष असलेल्या आकृत्यांसाठी जसे छोट्या भागापासून केली, तशी करू शकतो.

1. समजा, शेजारी एक आकृती दिली आहे.

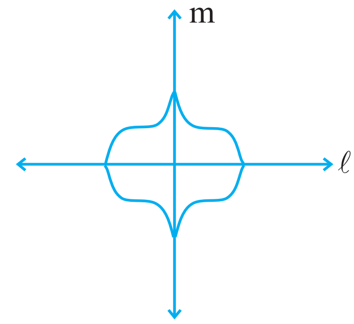
2. 2 सममिती अक्ष असताना ही आकृती आपण पूर्ण करणार आहोत. l आणि m दोन सममिती अक्ष आहेत.



3. आकृतीमध्ये दाखविल्याप्रमाणे आपण एक भाग सममिती अक्ष रेषा l भोवती काढू.

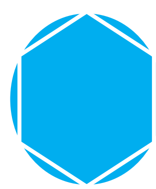
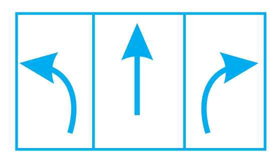


4. आकृती पूर्ण करण्यासाठी ती रेषा M भोवतीही सममित असणे आवश्यक आहे. आकृतीचा उरलेला भाग दाखविल्याप्रमाणे पूर्ण करा.
या आकृतीचे दोन सममिती अक्ष आहेत l आणि m . काही आकृत्यांमध्ये केवळ एकच सममिती अक्ष असतो, काहीत दोन, तर काहीत तीन किंवा अधिक सममित अक्ष असतात. तुम्ही सहा सममिती अक्ष असलेल्या आकृतीचा विचार करु शकता का?



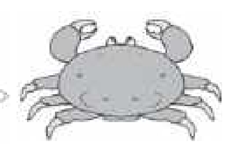
सममिती सर्वत्र

- आपण रोज अनेक मार्गसूचक चिन्ह पहातो ज्यांच्यात सममित रेषा असतात. इथे अशी काही चिन्हे दिली आहेत. अशीच काही मार्गसूचक चिन्हे ओळखा आणि ती काढा. सममित रेषा ठळक करायला विसरू नका.

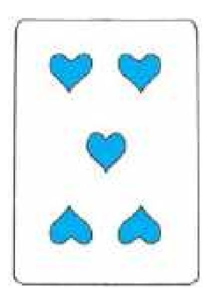
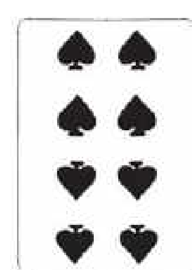



- निसर्गात अशा अनेक आकृत्या आहेत. की ज्या सममित आहेत.



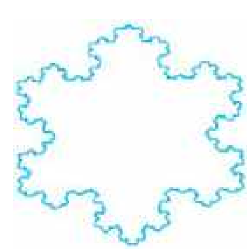


- पत्त्यांमधील काही पत्त्यांवरील नक्षीमध्ये सममिती अक्ष असतो. दिलेल्या पत्त्यांमध्ये तो शोधा.

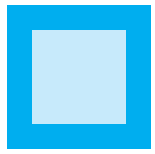
- शेजारी एका कात्रीची जोडी आहे. यातील सममिती अक्ष किती?

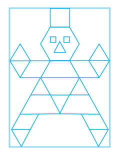
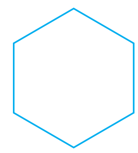
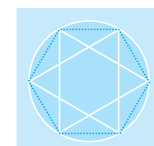
- शेजारील सुंदर आकृतीचे निरीक्षण करा.
हा सममितीचा नमुना असून कोच स्नोफ्लेक (koch's Snowflake) यांच्या नावाने ओळखला जातो. (जर तुमच्याकडे संगणक असेल, तर तुम्ही फ्रेक्टल (Fractals) विषयी ब्राऊझ करा. तुम्हाला खूप सुंदर आकृत्या बघायला मिळतील या आकृत्यांमधील सममिती अक्ष काढा.

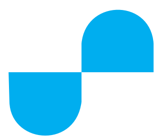
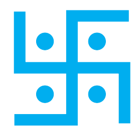
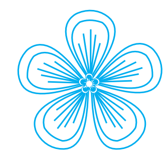


प्रश्नसंग्रह 13.2

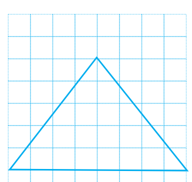
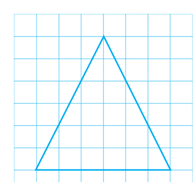
1. खाली दिलेल्या या आकृत्यांमध्ये सममिती अक्षांची संख्या शोधा.

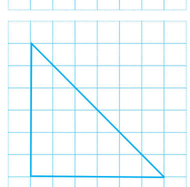
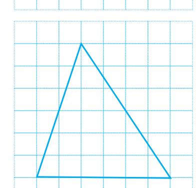
(a)  (b) (c)

(d)  (e)  (f) 

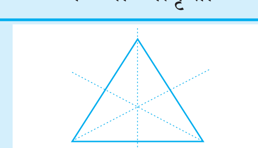
(g)  (h)  (i) 

2. खाली दिलेल्या आकृतीमधील त्रिकोण एका आलेख कागदावर काढा. प्रत्येकामध्ये जर सममिती अक्ष असतील तर काढा आणि त्यावरून त्रिकोणाचा प्रकार ओळखा. (तुम्ही त्यातील काही आकृत्या ट्रेस (trace) करू शकाल. कागदाला दुमडून सुद्धा प्रयत्न करा.)

(a)  (b) 

(c)  (d) 

3. खालील तक्ता पूर्ण करा.

आकार	कच्ची आकृती	सममिती अक्षांची संख्या
समभुज त्रिकोण		3
चौरस		
आयत		
समद्विभुज त्रिकोण		
समभुज चौकोन		
वर्तुळ		

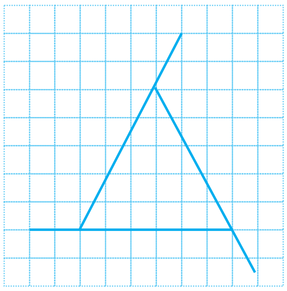
4. तुम्ही असा त्रिकोण काढू शकाल का. ज्यामध्ये,
   (a) फक्त एकच सममिती अक्ष आहे.
   (b) फक्त दोन सममिती अक्ष आहेत.
   (c) फक्त तीन सममिती अक्ष आहेत.
   (d) कोणताच सममिती अक्ष नाही

   प्रत्येकाची कच्ची आकृती काढा.

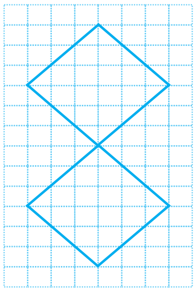
5. एका आलेख कागदावर खालील कच्च्या आकृत्या काढा.
   (**सूचना:** तुम्ही प्रथम सममिती अक्ष काढून नंतर आकृती पूर्ण केली तर तुम्हाला सोपे जाईल.)
   (a) एका त्रिकोणात आडवा सममिती अक्ष आहे. परंतु उभा सममिती अक्ष नाही.
   (b) एका चौकोनात आडवा आणि उभा असे दोन्ही सममिती अक्ष आहेत.
   (c) एका चौकोनात आडवा सममिती अक्ष असून उभा सममिती अक्ष नाही.
   (d) एक षटकोन असा आहे की ज्यामध्ये फक्त दोनच सममिती अक्ष आहेत.
   (e) एक षटकोन असा आहे की ज्यामध्ये सहा सममिती अक्ष आहेत.

6. प्रत्येक आकृती ट्रेस करा आणि त्यांचे सममिती अक्ष काढा.

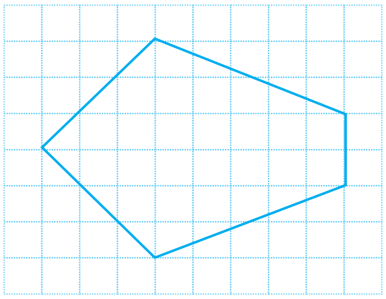
(a)



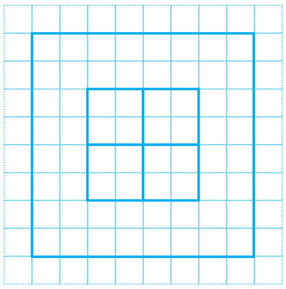
(b)



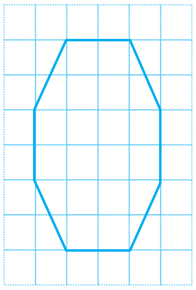
(c)



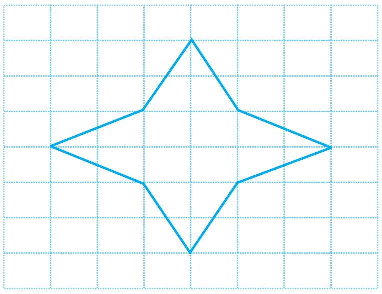
(d)



(e)

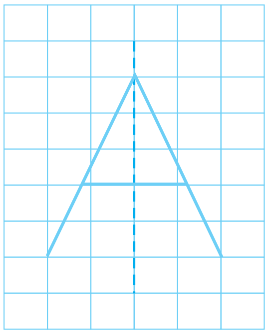


(f)

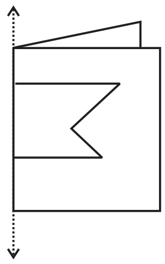


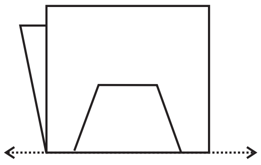
7. इंग्रजी वर्णमालेतील A पासून Z पर्यंतच्या सर्व अक्षरांबद्दल विचार करा. यातील काही अक्षरांची यादी करा. ज्यांच्यामध्ये,

(a) उभा सममिती अक्ष आहे. (जसे A)
(b) आडवा सममिती अक्ष आहे. (जसे B)
(c) सममिती अक्ष नाही. (जसे Q)



8. येथे काही आकृत्या दुमडलेल्या कागदावर असून त्यावर नक्षी काढलेली आहे. प्रत्येक नक्षीची आकृती काढा. जी कापल्यावर दिसेल?

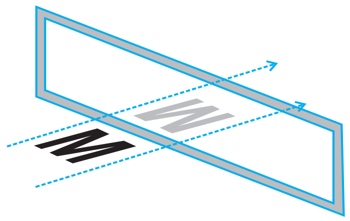


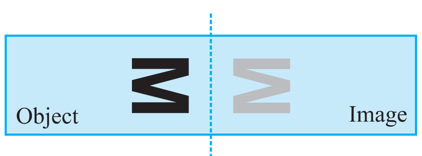


13.5 प्रतिबिंब आणि सममिती

सममिती अक्ष आणि आरशातील प्रतिमा निसर्गत: वास्तवात एकमेकांशी निगडीत आहेत.

खाली एक आकृती दिलेली आहे. ज्यामध्ये इंग्रजी अक्षर M चे प्रतिबिंब दाखविले आहे. तुम्ही अशी कल्पना करा की, आरसा अदृश्य आहे आणि तुम्ही फक्त अक्षर M आणि त्याचे प्रतिबिंब पहात आहात.

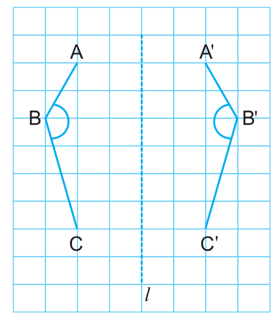




वस्तू आणि तिचे प्रतिबिंब आरशाच्या रेषेच्या संदर्भात सममित आहे. जेव्हा आपण एक कागद दुमडतो तेव्हा ही आरशाची रेषा, सममिती अक्ष बनते आणि प्रतिमेस आरशाच्या रेषेमधील वस्तूचे प्रतिबिंब आहे असे म्हणतो. तुमच्या हे देखील लक्षात येईल की, जेव्हा वस्तूचे परावर्तन होते, तेव्हा त्याच्या लांबीत, कोनात कोणतेही परिवर्तन होत नाही. खरंतरं वस्तूंची लांबी आणि कोन तिच्या प्रतिमेच्या लांबी आणि कोनाएवढेच असतात. वास्तविक, एकप्रकारे हा बदल असतो. खरचं वस्तू आणि तिचे प्रतिबिंब यामध्ये फरक असतो. कोणता बरं फरक असतो? जरा विचार करा.

(**सूचना:** स्वत:ला आरशामध्ये पहा.)

हे करा



एका आलेख कागदावर ABC अशी एक आकृती काढा आणि त्याचे आरशाची रेषा l मध्ये A'B'C' प्रतिबिंब शोधा.

AB आणि A'B'; BC आणि B'C'; AC आणि A'C' यांच्या लांबींची तुलना करा.

या वेगवेगळ्या आहेत का?

प्रतिबिंबामध्ये रेषाखंडाच्या लांबीत फरक पडतो का? ABC आणि A'B'C' कोनांच्या मापांची तुलना करा. (कोनमापकाच्या मदतीने) प्रतिबिंबामध्ये कोनांच्या आकारात बदल झाला का?

AA', BB' आणि CC' जोडा. कोनमापकाच्या मदतीने l आणि AA', l आणि BB', l आणि CC' यांमधील कोन मोजा.

आरशाची रेषा l आणि कोणताही एक बिंदु आणि त्याचे प्रतिबिंब यांना जोडणाऱ्या रेषाखंडाच्यामध्ये तयार होणाऱ्या कोनांबद्दल तुम्ही कोणता निष्कर्ष काढू शकाल?

प्रयत्न करा

जर आरशापासून तुम्ही 100 सेमी अंतरावर आहात. तुमचे प्रतिबिंब कोठे असेल? जर तुम्ही आरशाकडे चालत गेलात तर तुमचे प्रतिबिंब कसे हालेल?

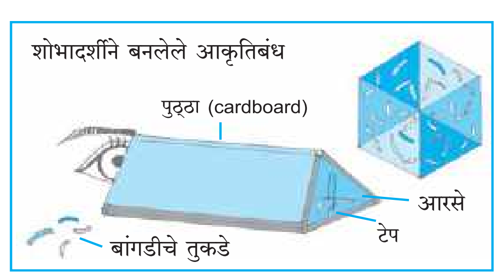
हे करा

कागदांची सजावट

एक पातळ आयताकृती कागद घ्या. त्याला अनेक घड्या घाला त्याप्रमाणे कागदावर क्लिष्ट नमुना काढा. (ज्याप्रमाणे आकृतीत दाखविले आहे.) पुन्हा पुन्हा आलेल्या नक्षीमधील सममिती अक्ष ओळखा. अशा सजावटींचे कागद सण समारंभाच्या वेळी उपयोगात आणा.

शोभादर्शी

अनेक आरसे असलेल्या एका शोभादर्शीमध्ये कितीतरी प्रतिबिंब तयार होतात. ज्यामध्ये अनेक सममिती अक्ष असतात. (जसे उदाहरणात दाखविले आहे.) दोन आरसे नेहमी V आकारांत बसवून हा प्रयोग करता येतो. आरशांमध्ये तयार झालेल्या कोनांवरून सममित अक्ष किंवा सममित अक्षांची संख्या किती असेल ते सांगता येते.



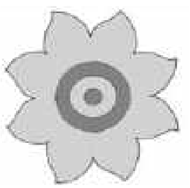
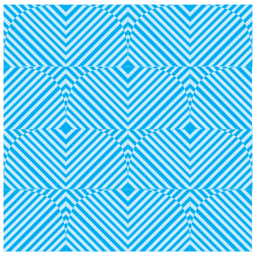
आकृती 13.1

एक शोभादर्शी बनवा आणि त्यात तयार झालेल्या सममित आकृत्यांविषयी अधिक माहिती मिळविण्याचा प्रयत्न करा.

अल्बम

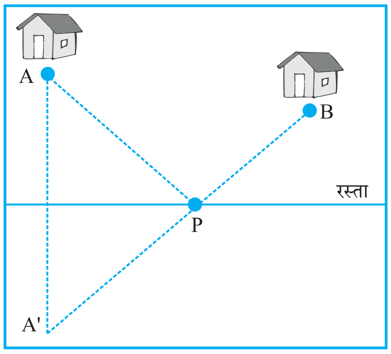
सममित (आकृत्या) नक्षी एकत्र करून एक अल्बम तयार करा. येथे काही नमुने दिले आहेत.



परावर्तन सममितीचे उपयोग

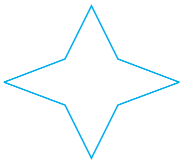
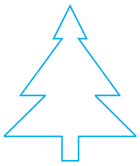
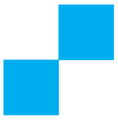
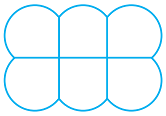
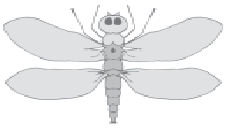
एक वर्तमानपत्र टाकणारा मुलगा आपली सायकल बिंदू 'P' वर उभी करतो आणि वर्तमानपत्र A आणि B या ठिकाणच्या घरी टाकतो. त्याने सायकल कोठे उभी केली पाहिजे. म्हणजे AP + BP हे अंतर सर्वांत कमी असेल.



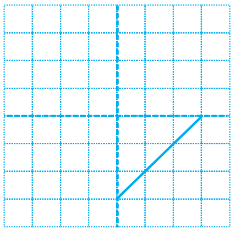
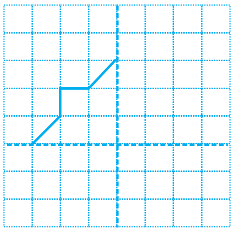
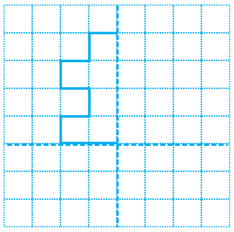
तुम्ही येथे परावर्तित सममितीचा उपयोग करू शकाल. जर रस्ता आरशाची रेषा मानली तर, A चे प्रतिबिंब A' मिळेल. तेव्हा आपण असे म्हणू शकतो की, बिंदू P सायकल उभी करण्यासाठी योग्य ठिकाण आहे. (येथे आरशाची रेषा A'B ला छेदते) तुम्ही याचे कारण सांगू शकाल का?

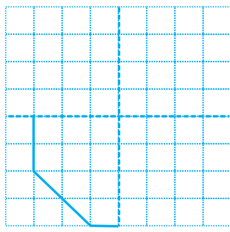
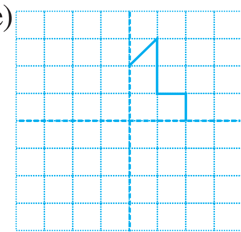
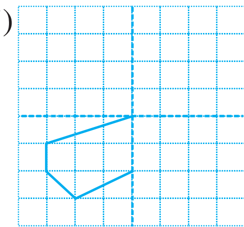
उदाहरणसंग्रह 13.3

1. खाली दिलेल्या आकृत्यांमधील सममिती अक्षांची संख्या शोधा. उत्तराची पडताळणी कशी कराल?

(a) 
(b) 
(c) 
(d) 
(e) 
(f) 

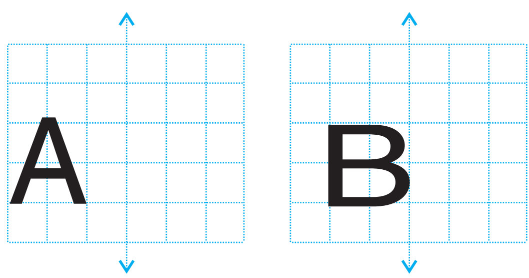
2. खाली दिलेली चित्रे आलेख कागदावर काढा. प्रत्येक चित्र पूर्ण करण्यासाठी दोन बिंदू रेषा आणि दोन सममिती अक्षांचा उपयोग करा.

(a) 
(b) 
(c) 

(d)  (e)  (f) 

तुम्ही या आकृत्या पूर्ण करण्यासाठी काय केले?

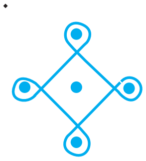
3. खाली दिलेल्या प्रत्येक आकृतीमध्ये, इंग्रजी वर्णमालेतील एक अक्षर एका उभ्या रेषेबरोबर दाखविले आहे. या अक्षराचे आरशातील रेषेमध्ये प्रतिबिंब घ्या. परावर्तनानंतर कोणते अक्षर तसेच राहते आणि कोणते नाही हे सांगा. असे का घडते? याबद्दल तुम्ही सांगू शकाल?

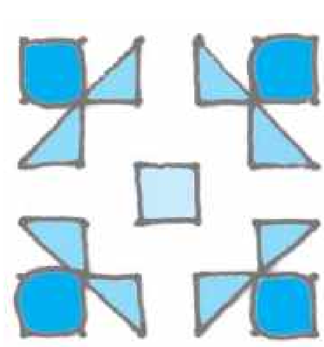


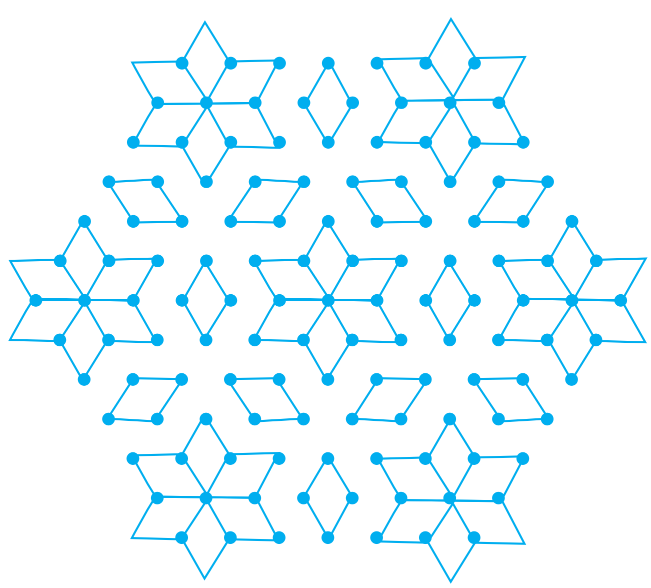
O E M N P H L T S V X साठी प्रयत्न करा.

रांगोळीचा नमुना

कोळम आणि रांगोळी आपल्या देशात खूप प्रसिद्ध आहे. काही नमुने येथे दिले आहेत. त्यातील सममितीकडे लक्ष द्या. रांगोळीचे नमुने जितके जमविता येतील तेवढे मिळवा आणि त्याचा एक अल्बम तयार करा.







या नमुन्यांमध्ये सममिती अक्षांबरोबर कोणते सममित भाग आहेत ते शोधण्याचा प्रयत्न करा.

आपण काय चर्चा केली ?

1. एखाद्या आकृतीचा सममिती अक्ष म्हणजे अशी रेषा जी त्या आकृतीचे दोन समान भाग करते किंवा समान भागात विभाजन करते. या रेषेला सममिती अक्ष म्हणतात.

2. आकृतीमध्ये कोणताही सममिती अक्ष नसू शकतो, फक्त एकच सममिती अक्ष, दोन सममिती अक्ष किंवा अनेक सममिती अक्ष असू शकतात. काही उदाहरणे नमुन्यादाखल दिली आहेत.

सममिती अक्षांची संख्या	*उदाहरण*
एकही सममिती अक्ष नाही	विषमभुज त्रिकोण
फक्त एक सममिती अक्ष	समद्विभुज त्रिकोण
दोन सममिती अक्ष	आयत
तीन सममिती अक्ष	समभुज त्रिकोण
अनेक सममिती अक्ष	वर्तुळ

3. रेषीय सममिती परावर्तनाशी संबंधित आहे. जेव्हा आपण परावर्तनाविषयी बोलतो तेव्हा डाव्या↔उजव्या बाजूंच्या आदलाबदलाविषयी लक्ष द्यायला हवे.

   सममितीचा दैनंदिन जीवनात पुष्कळ उपयोग आहे. जसे की, चित्रकलेमध्ये, शिल्पविद्यामध्ये, वस्त्रोद्योगात नक्षी नमुना बनविण्यासाठी, भूमितीय कारणे सांगतात, कोलम, रांगोळी इत्यादी.

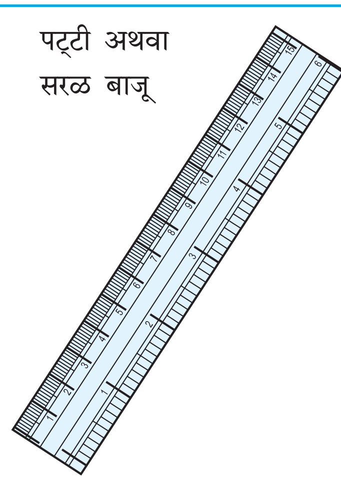
प्रकरण 14

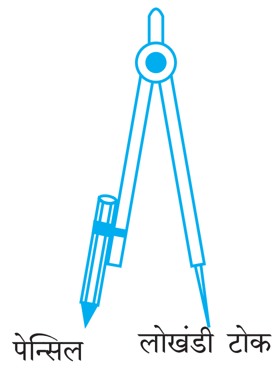
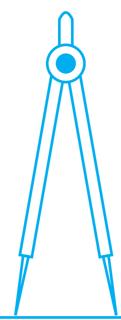
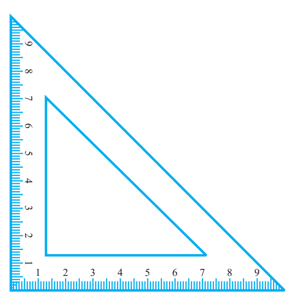
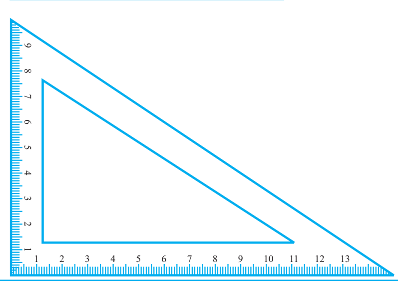
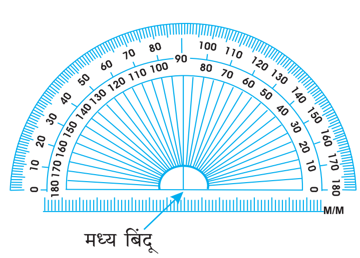
प्रायोगिक भूमिती

14.1 भूमिका

आपण अनेक प्रकारचे आकार पाहतो, त्यापैकी काहींचा आपल्याला परिचय आहे. आपण बरीच चित्रे काढतो. या चित्रात वेगवेगळे आकार असतात. त्यापैकी काही आकारांविषयी आपण मागील प्रकरणात अभ्यास केला आहे. तुम्ही या आकारांची एक यादी बनवा आणि ते कसे दिसतात हे त्याबरोबर दाखवा.

या प्रकरणात, आपण या आकारांच्या आकृत्या काढायला शिकणार आहोत. त्या काढण्यासाठी, आपल्याला साधनां विषयी माहिती जाणून घेणे आवश्यक आहे. चला तर ते पाहूया तसेच त्यांचे नाव आणि उपयोग याची माहिती घेऊया.

अनु.क्र	नाव	आकृती	माहिती	उपयोग
1.	पट्टी अथवा सरळ बाजू		पट्टीवर खरंतर कोणत्याही खुणा नसतात. परंतु तुमच्या भूमिती पेटीतील पट्टीवर कडेला सेंटिमीटरच्या खुणा असतात. (कधी कधी दुसऱ्या कडेला इंचाच्या खुणा असतात.)	रेषाखंड काढणे आणि त्यांची लांबी मोजणे

2.	कंपास		याला दोन टोके असतात. एक लोखंडी टोक असते आणि दुसऱ्या टोकावर पेन्सिल लावायला जागा असते.	समान लांबी काढण्यासाठी परंतु ते मोजण्या साठी नाही. कंस आणि वर्तुळ काढण्यासाठी
3.	कर्कटक		याला दोन लोखंडी टोके असतात.	लांबीची तुलना करण्यासाठी
4.	गुण्या	 	दोन त्रिकोणाकृती गुण्ये आहेत. एकात 45°, 45°, 90° चे कोन तर दुसऱ्यात 30°, 60°, 90° चे कोन असतात.	लंब रेषा आणि समांतर रेषा काढण्यासाठी
5.	कोनमापक		हे एक अर्धवर्तुळाकार साधन आहे. यावर 180° भाग केलेले असतात. याचे मापन उजवीकडून 0° पासून सुरूवात करून डाव्याबाजूस 180° संपते. याप्रमाणेच डाव्याबाजूस 0° ने सुरुवात होऊन उजवीकडे 180° ला संपते.	कोन काढणे आणि मोजणे.

आपण पट्टी आणि कंपासच्या रचनांचा विचार करणार आहोत. यामध्ये पट्टीचा (ruler) केवळ रेषा काढणे आणि कंपासचा केवळ कंस काढण्यासाठी उपयोग केला जातो. रचना करताना काळजी घ्या. येथे तुमच्या मदतीसाठी काही उपाय देत आहे.

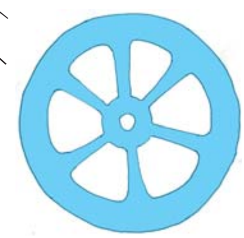
(a) रेषा बारीक काढा आणि बिंदू हलक्या हाताने दाखवा.

(b) तुमच्या साधनांची टोके तीक्ष्ण व कडा पातळ असाव्यात.

(c) तुमच्या भूमिती पेटीत दोन पेन्सिली ठेवा. एक कंपासला लावण्यासाठी आणि दुसरी रेषा किंवा वक्र आणि बिंदू काढण्यासाठी असावी.

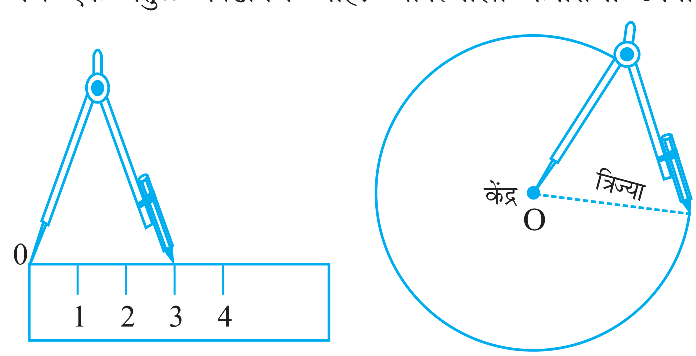
14.2 वर्तुळ

शेजारी दाखविलेले चक्र पहा. त्याच्या परिसीमेवरील (Boundary) प्रत्येक बिंदू त्याच्या केंद्रापासून समान अंतरावर आहे. तुम्ही अजून अशा काही वस्तू सांगू शकाल का? आणि त्यांना काढू शकाल का? अशा पाच वस्तूंचा विचार करा की ज्यांचा आकार असा आहे.



14.2.1 त्रिज्या दिली असता वर्तुळ काढणे

समजा आपल्याला 3 सेमी त्रिज्येचे एक वर्तुळ काढायचे आहे. आपल्याला कंपासचा उपयोग करण्याची आवश्यकता आहे. हे पुढील पायऱ्यांमध्ये दिले आहे.



पायरी 1 कंपासमध्ये 3 सेमी त्रिज्या घेण्यासाठी अंतर घ्या.

पायरी 2 जेथे वर्तुळाचे केंद्र घ्यायचे आहे. तेथे टोकदार पेन्सिलने खूण करा. (बिंदू घ्या.) त्याला 0 नाव द्या.

पायरी 3 कंपासचे लोखंडी टोक O वर ठेवा.

पायरी 4 वर्तुळ काढण्यासाठी हळूहळू कंपास फिरवा. लक्षात ठेवा की कंपास एकदाच फिरला पाहिजे.

विचार करा, चर्चा करा आणि लिहा.

केंद्र O आणि एक बिंदू समजा P असेल तर P मधून वर्तुळ काढता येईल का ?

उदाहरणसंग्रह 14.1

1. 3.2 सेमी त्रिज्येचे एक वर्तुळ काढा.
2. एकच केंद्र O घेऊन 4 सेमी आणि 2.5 सेमी त्रिज्या असलेली दोन वर्तुळे काढा.

3. एक वर्तुळ आणि त्याचे दोन व्यास काढा. जर तुम्ही या व्यासांची टोके जोडली, तर कोणती आकृती तयार होईल? जर व्यास परस्परांना लंब असतील, तर कोणती आकृती मिळेल? तुम्ही तुमचे उत्तर कसे पडताळून पहाल?
4. एक वर्तुळ काढा आणि त्यावर बिंदू A, B आणि C असे घ्या की,
   (a) A वर्तुळावर आहे.
   (b) B वर्तुळाच्या आंतरभागात आहे.
   (c) C वर्तुळाच्या बाह्यभागात आहे.
5. समजा A आणि B ही समान त्रिज्या असलेल्या वर्तुळांची केंद्रे आहेत. वर्तुळे अशी काढा की, एक वर्तुळ दुसऱ्या वर्तुळाच्या केंद्रातून जाईल. ती एकमेकांना C आणि D मध्ये छेदतील. $\overline{AB}$ आणि $\overline{CD}$ एकमेकांशी काटकोनात आहे का ? पडताळा घ्या.

14.3 रेषाखंड

तुम्हाला आठवत असेल की रेषाखंड हा दोन अंत्य बिंदूंनी बध्द असतो. म्हणूनच आपण त्याची लांबी पट्टीने मोजू शकतो. जर आपल्याला एखाद्या रेषाखंडाची लांबी माहीत असेल तर, तो आकृतीच्या मदतीने काढून दाखविणे शक्य असते. चला तर कसे दाखवायचे ते पाहू.

14.3.1 दिलेल्या लांबीच्या रेषाखंडाची रचना करणे.

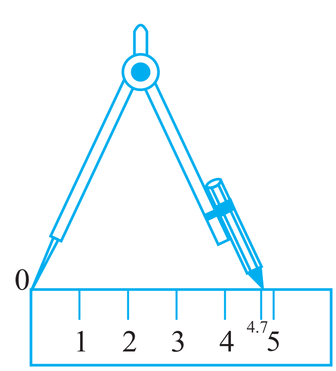
समजा, आपल्याला 4.7 सेमी लांबीचा रेषाखंड काढण्याची रचना करायची आहे. पट्टीच्या मदतीने 4.7 सेमी अंतरावर बिंदू A आणि B असे दोन बिंदू काढले. A आणि B जोडले असता आपल्याला रेषाखंड $\overline{AB}$ मिळतो. बिंदू A आणि B काढताना, आपण खाली सरळ पट्टीकडे बघायला पाहिजे. नाहीतर आपल्याला रेषाखंड अचूकपणे काढता येणार नाही.

पट्टी आणि कंपासचा उपयोग

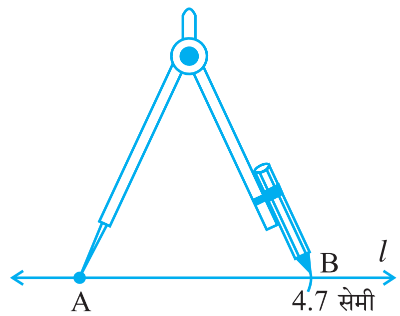
दिलेल्या लांबीवर रेषाखंड काढण्यासाठी कंपासचा उपयोग करणे, ही सर्वांत चांगली पध्दत आहे.

पायरी 1 रेषा l काढा आणि त्यावर एक बिंदू A घ्या.

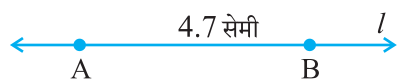
पायरी 2 कंपासचे लोखंडी टोक पट्टीच्या शून्यावर ठेवा. कंपासचे पेन्सिल लावलेले टोक **4.7** सेमी खुणेवर येईल अशारीतीने कंपास उघडा.



पायरी 3 कंपासमधील अंतर बदलणार नाही याची दक्षता घेऊन, कंपासचे लोखंडी टोक बिंदू A वर ठेवा आणि रेषा l ला B पाशी छेदणारा एक कंस काढा.

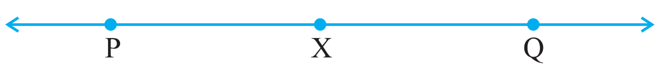


पायरी 4 $\overline{AB}$ हा रेषाखंड 4.7 सेमी लांबीचा इष्ट रेषाखंड आहे.



उदाहरणसंग्रह 14.2

1. पट्टीचा उपयोग करून 7.3 सेमी लांबीचा एक रेषाखंड काढा.
2. पट्टी आणि कंपासचा उपयोग करून 5.6 सेमी लांबीचा एक रेषाखंड काढा.
3. 7.8 सेमी लांबीचा रेषाखंड $\overline{AB}$ काढा. त्यातून $\overline{AC}$ असा बाजूला काढा, की ज्याची लांबी 4.7 सेमी असेल $\overline{BC}$ मोजा.
4. 3.9 सेमी लांबीचा एक रेषाखंड $\overline{AB}$ दिला आहे. रेषाखंड $\overline{PQ}$ असा काढा की, जो रेषाखंड $\overline{AB}$ च्या दुप्पट आहे. प्रत्यक्ष मोजून रचनेची खात्री करा.



(**संकेत** $\overline{PX}$ असा काढा की, $\overline{PX}$ लांबी = $\overline{AB}$ ची लांबी; आता $\overline{XQ}$ असा बाजूला काढा की $\overline{XQ}$ ची लांबी $\overline{AB}$ च्या लांबी बरोबर आहे.)

5. 7.3 सेमी लांबीचा रेषाखंड $\overline{AB}$ आणि 3.4 सेमी लांबीचा रेषाखंड $\overline{CD}$ दिलेला आहे. एक रेषाखंड $\overline{XY}$ असा काढा की ज्याची लांबी $\overline{AB}$ आणि $\overline{CD}$ च्या लांबीच्या वजाबाकी इतकी असेल.

14.3.2 दिलेल्या रेषाखंडाएवढा रेषाखंड काढणे.

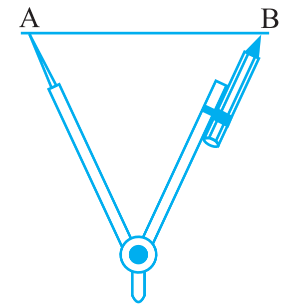
समजा, तुम्हाला असा रेषाखंड काढायचा आहे की ज्याची लांबी दिलेल्या रेषाखंड $\overline{AB}$ एवढी असेल.

पटकन सोपा आणि सरळ मार्ग म्हणजे तुम्ही पट्टी घ्याल, (जिच्यावर सेंटिमीटर आणि मिलिमीटरच्या खुणा असतील) पट्टीने $\overline{AB}$ मोजता येईल आणि ती लांबी घेऊन रेषाखंड $\overline{CD}$ काढाल. दुसरी पद्धत अशी असेल की, पारदर्शक कागदाचा उपयोग करून $\overline{AB}$ ला कागदाच्या दुसऱ्या कोणत्याही भागात आखून घेता येईल. परंतु या पद्धती नेहमी परिणामकारक ठरू शकत नाहीत.

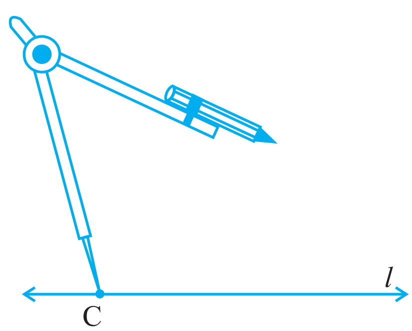
एक आणखी चांगली पद्धती म्हणजे, पट्टी आणि कंपासचा उपयोग रचना करण्यासाठी करणे. ही रचना $\overline{AB}$ साठी पुढीलप्रमाणे करता येते.

पायरी 1 रेषाखंड $\overline{AB}$ दिला आहे, ज्याची लांबी माहीत नाही.

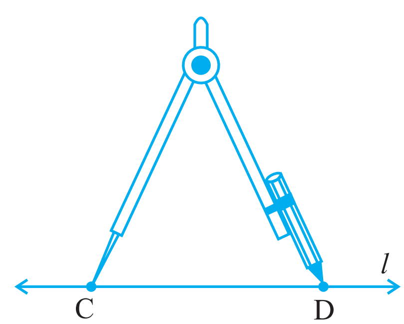
पायरी 2 कंपासचे लोखंडी टोक A वर ठेवा आणि पेन्सिलचे टोक B वर ठेवा कंपासच्या टोकांमधील अंतर $\overline{AB}$ ची लांबी दर्शविते.



पायरी 3 कोणतीही रेषा *l* काढा. वर कोणताही C बिंदू घ्या. कंपासमधील अंतर न बदलता, त्याचे लोखंडी टोक C वर ठेवा.



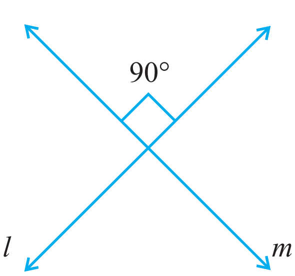
पायरी 4 एक कंस काढा, की जो रेषा *l* ला D मध्ये छेदतो. आता $\overline{CD}$ हा $\overline{AB}$ च्या लांबीएवढा असलेला रेषाखंड आहे.



उदाहरणसंग्रह 14.3

1. कोणताही रेषाखंड $\overline{PQ}$ न मोजता काढा, $\overline{PQ}$ एवढा रेषाखंड काढण्याची रचना करा.
2. रेषाखंड $\overline{AB}$ दिलेला आहे, ज्याची लांबी माहीत नाही. रेषाखंड $\overline{PQ}$ असा काढा की, ज्याची लांबी $\overline{AB}$ च्या लांबीच्या दुप्पट आहे.

14.4 लंबरेषा



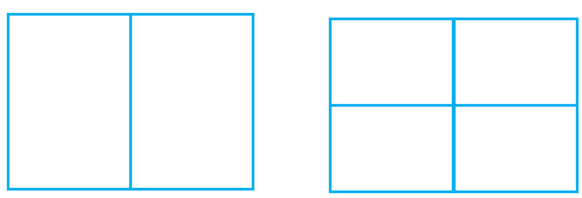
तुम्हाला हे माहीत आहे की, दोन रेषा (किरण किंवा रेषाखंड) परस्परांना लंब आहेत असे म्हणतात, जेव्हा त्या एकमेकांना अशा छेदतात की, त्यांच्यामधील कोन हा काटकोन असतो. शेजारील आकृतीमध्ये, *l* आणि *m* परस्परांना लंब आहेत. एका फुलस्केप (foolscap) कागदावरील *l*

किंवा तुमच्या वहीचे कोपरे दोन रेषा परस्परांशी काटकोन करतात हे दर्शवितात.

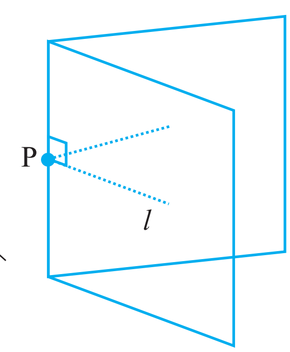
हे करा

तुम्ही तुमच्या आजूबाजूला आणखी कोठे लंब रेषा पाहता ?

एक आयताकृती कागद घ्या आणि तो मध्यभागी दुमडा त्यामुळे कागदावर घडी (crease) पडेल. हाच कागद दुसऱ्या बाजूवर मध्यभागी दुमडा. घडी पडेल. कागद उघडा दोन्ही दुमडलेल्या घड्या एकमेकांना लंब आहेत.



14.4.1 दिलेल्या रेषेवरील बिंदूतून लंब काढणे.



कागदावर रेषा *l* काढलेली आहे. त्यावर P बिंदू आहे. रेषा *l* वर P मधून जाणारा लंब काढणे सोपे आहे.

आपण कागदाला अशी दुमड घालू की, घडीच्या दोन्ही बाजूस असलेल्या रेषा एकमेकींवर येतील.

हे करण्यासाठी ट्रेसिंग कागद किंवा कोणताही पारदर्शक कागद चालू शकेल. असा कागद घेऊन त्यावर कोणतीही रेषा *l* काढा. आता *l* वर P बिंदू घ्या.

आता कागद असे दुमडा की, *l* स्वत:वरच परावर्तित होईल. अर्थातच *l* वर घडी पडेल. घडी अशी जुळवा की, ती P मधून जाईल. कागद उघडा. घडीची खूण P मधून जाऊन रेषा *l* ला लंब आहे.

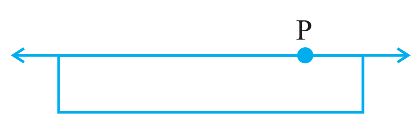
विचार करा, चर्चा करा आणि लिहा.

तुम्ही याची खात्री कशी कराल की ही रेषा *l* ला लंब आहे? लक्षात ठेवा की, तो P मधून जातो.

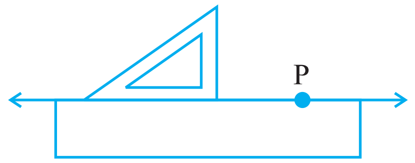
एक कसोटी : पट्टी आणि गुण्याच्या मदतीने लंब काढणे. (एक ऐच्छिक क्रिया) :

पायरी 1 एक रेषा *l* आणि एक बिंदू P दिलेला आहे. लक्षात ठेवा, P रेषा *l* वर आहे.

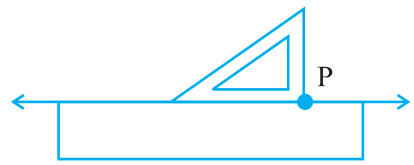
पायरी 2 पट्टीची एक कड रेषा *l* शी जुळवा आणि पट्टी घट्ट पकडा.



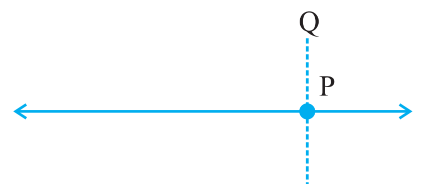
पायरी 3 एक गुण्या रेषा l पाशी असा धरा की, काटकोन करणारी त्याची बाजू रेषा l जवळ जेथे पट्टी धरली आहे तेथे जुळेल. तसेच गुण्याचा काटकोन करणारा कोन देखील पट्टीशी जुळेल.



पायरी 4 गुण्या पट्टीबरोबर असा सरकवा की जोपर्यंत त्याचा काटकोन करणारा कोन बिंदू P वर येत येईल.



पायरी 5 याच स्थितीत, गुण्या घट्ट पकडून ठेवा. गुण्याच्या काटकोन करणाऱ्या दुसऱ्या बाजूने $\overline{PQ}$ काढा. $\overline{PQ}$ रेषा l ला लंब आहे. (हे दर्शविण्यासाठी तुम्ही या चिन्हाचा उपयोग कसा कराल?)

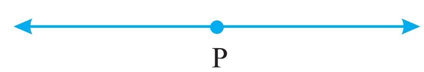


बिंदू P पाशी झालेल्या कोनाचे मापन करून, या रचनेची खात्री करा. ही रचना करण्यासाठी पट्टीच्या जागी दुसऱ्या गुण्याचा उपयोग करता येईल का? (याविषयी विचार करा.)

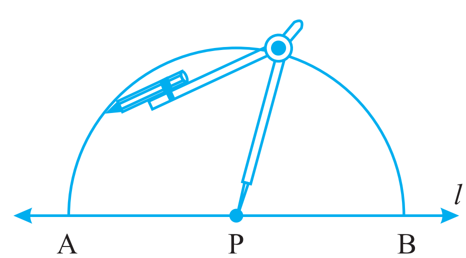
पट्टी आणि कंपास पद्धत

भूमितीमध्ये लंब काढण्यासाठी जी पद्धत योग्य मानली जाते ती म्हणजे पट्टी आणि कंपास पध्दत याची रचना खाली दिली आहे.

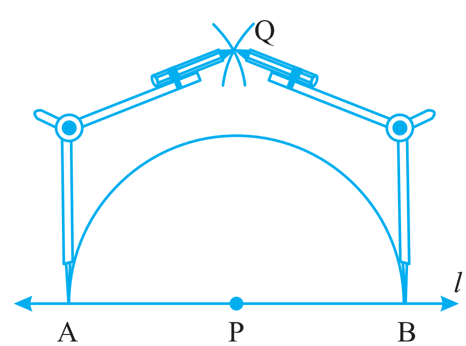
पायरी 1 रेषा l वर बिंदू P दिलेला आहे.



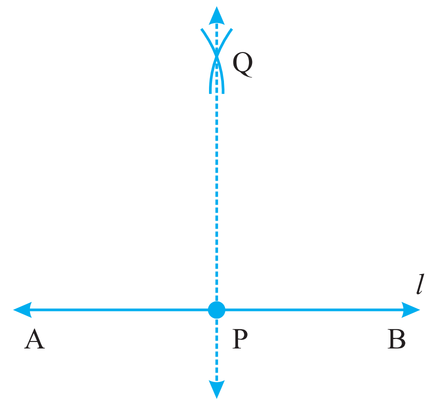
पायरी 2 P केंद्र मानून आणि योग्य त्रिज्या घेऊन असा कंस काढा की जो रेषा l ला बिंदू A आणि B मध्ये छेदतो.



पायरी 3 A आणि B ला केंद्र मानून आणि AP पेक्षा जास्त त्रिज्या घेऊन दोन कंस असे काढा की, जे परस्परांना Q मध्ये छेदतील.



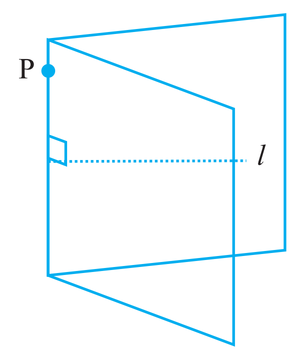
पायरी 4 PQ जोडा $\overleftrightarrow{PQ}$ हा l वर लंब आहे. आपण हे $\overleftrightarrow{PQ} \perp l$ असे लिहितो.



14.4.2 रेषेबाहेरील बिंदूतून रेषेवर लंब काढणे.

हे करा

(कागद दुमडणे)

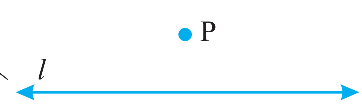


जर आपल्याला एक रेषा l दिलेली आहे आणि P हा असा एकबिंदू दिला आहे की, जो रेषा l वर नाही. P मधून रेषा l वर लंब काढण्यासाठी आपण कागद दुमडण्याची जी साधी कृती केली ती पुन्हा करू शकतो.

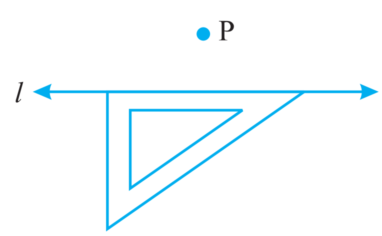
एक कागद घ्या. (पारदर्शक असेल तर चांगले) त्यावर रेषा l काढा. आणि बिंदू P असा घ्या की जो रेषा l वर नाही. कागद असा दुमडा की, घडीची खूण P मधून जाईल तसेच रेषा l चा एक भाग तिच्या दुसऱ्या भागावर पडेल. कागद उघडा घडीची खूण l वर लंब आहे आणि तो P मधून जातो.

पट्टी आणि गुण्या पद्धत (एक ऐच्छिक कृती)

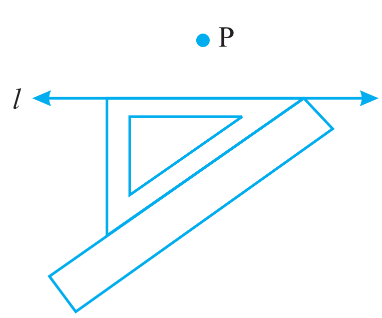
पायरी 1 समजा l ही एक रेषा आहे आणि P तिच्या बाहेरील बिंदू आहे.



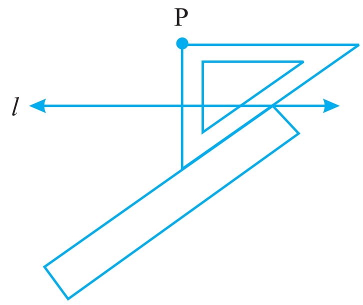
पायरी 2 एक गुण्या l वर असा धरा की, त्याची काटकोन करणारी बाजू l शी जुळेल.



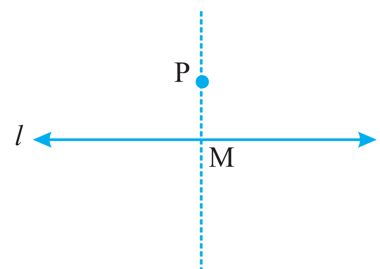
पायरी 3 गुण्याच्या काटकोनासमोरील बाजूवर एक पट्टी धरा.



पायरी 4 पट्टी घट्ट धरा आणि गुण्या पट्टीला लागून असा सरकवा की बिंदू P गुणाच्या काटकोन करणाऱ्या दुसऱ्या बाजूला स्पर्श करेल.

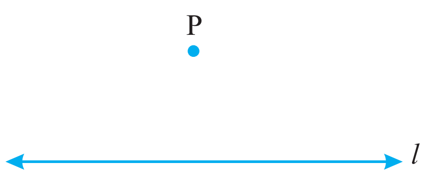


पायरी 5 गुण्याच्या या बाजूला P तून जाणारी रेषा काढा, जी रेषा *l* ला M बिंदूत छेदते.
आता रेख $\overleftrightarrow{PM} \perp l$.



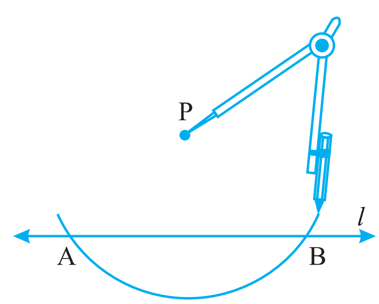
पट्टी आणि कंपासचा उपयोग करून

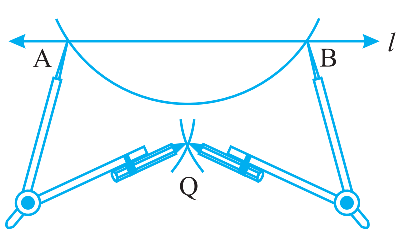
निश्चितच पट्टी आणि कंपासचा उपयोग करण्याची पद्धत सोपी व अचूक आहे.



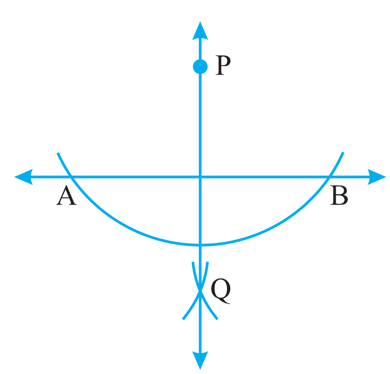
पायरी 1 रेषा *l* आणि बिंदू P दिला आहे. परंतू बिंदू P रेषा *l* वर नाही.

पायरी 2 P ला केंद्र मानून आणि योग्य ती त्रिज्या घेऊन एक चाप असा काढा की जो रेषा *l* ला A आणि B या दोन बिंदूत छेदेल.





पायरी 3 समान त्रिज्या घेऊन A आणि B ला केंद्र मानून दोन चाप काढा जे एकमेकांना बिंदू P च्या दुसऱ्या बाजूस Q मध्ये छेदतील.



पायरी 4 PQ जोडा हाच $\overleftrightarrow{PQ}$ हा रेषा *l* चा लंब आहे.

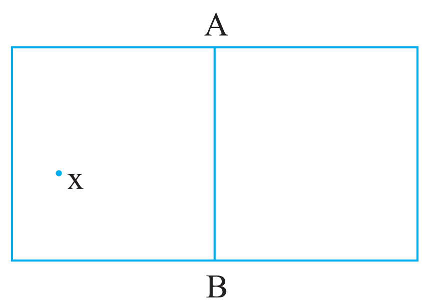
उदाहरणसंग्रह 14.4

1. रेषाखंड $\overline{AB}$ काढा. त्यावर कोणताही बिंदू M घ्या. M मधून $\overline{AB}$ वर पट्टी आणि कंपासच्या मदतीने एक लंब काढा.
2. रेषाखंड $\overline{PQ}$ काढा. R हा असा बिंदू घ्या की जो $\overline{PQ}$ वर नाही. R पासून $\overline{PQ}$ वर एक लंब काढा. (पट्टी आणि गुण्याचा उपयोग करा.)
3. एक रेषा l काढा आणि त्यावरील एका बिंदू X मधून, रेषा l ला $\overline{XY}$ हा लंब रेषाखंड काढा. आता Y मधून $\overline{XY}$ वर एक लंब पट्टी आणि कंपासच्या मदतीने काढा.

14.4.3 रेषाखंडाचा लंबदुभाजक

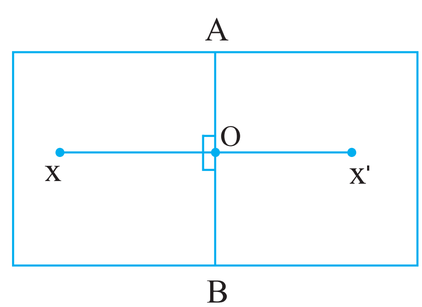
हे करा

एका कागदाला घडी घाला. समजा घडी म्हणजे $\overline{AB}$ आहे. कोठेही शाईचा एक ठिपका X द्या. $\overline{AB}$ ही आरशाची कडा मानली तर X ची X' ही प्रतिमा शोधा.



समजा $\overline{AB}$ आणि $\overline{XX'}$ परस्परांना O मध्ये छेदतात तर OX = OX' आहे का? असल्यास का ?

याचा अर्थ असा आहे की, $\overline{AB}$ रेषाखंड $\overline{XX'}$ चे दोन समान लांबीत विभाजन करतो. अर्थात $\overline{AB}$ रेषाखंड $\overline{XX'}$ चा लंबदुभाजक आहे. हे पण लक्षात घ्या की, $\angle AOX$ आणि $\angle BOX$ काटकोन आहेत. (का बरं?) म्हणून रेख $\overline{AB}$ रेषाखंड $\overline{XX'}$ चा लंबदुभाजक आहे. आकृतीत आपण $\overline{AB}$ चा केवळ एक भाग पाहू शकतो. दोन बिंदूंना जोडणाऱ्या रेषाखंडाचा लंबदुभाजक हा त्याचा सममिती अक्ष सुद्धा आहे का? (line of symmetry)

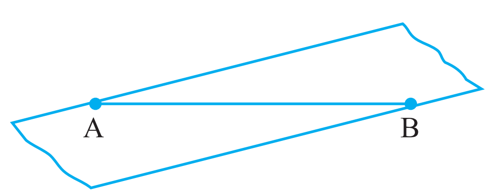


हे करा

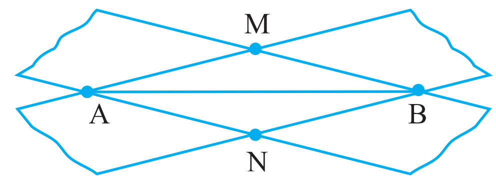
(पारदर्शक पट्टी)

पायरी 1 एक रेषाखंड $\overline{AB}$ काढा.

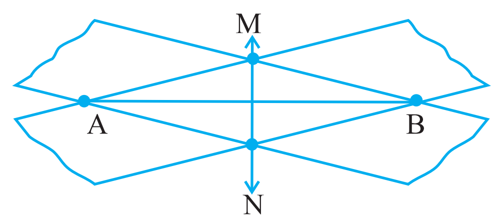
पायरी 2 शेजारील आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे आयताकार पारदर्शक पट्टी $\overline{AB}$ वर कर्ण रेषेच्या दिशेने अशी ठेवा की त्याच्या कडा बिंदू A आणि B वर राहतील.



पायरी 3 हीच क्रिया दुसरी पट्टी घेऊन अशी करा की, आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे दुसरी पट्टी पहिल्या पट्टीला कर्णरेषेच्या दिशेने A आणि B बिंदूत छेदेल. दोन्ही पट्ट्या M आणि N बिंदूत छेदतात असे मानू.



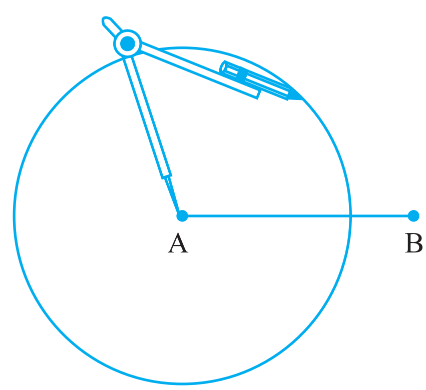
पायरी 4 M आणि N जोडा $\overline{MN}$ हा रेषाखंड $\overline{AB}$ चा दुभाजक आहे का? मोजून तपासा. हा $\overline{AB}$ चा लंबदुभाजक सुध्दा आहे का? $\overline{AB}$ चा मध्यबिंदू कोठे आहे?



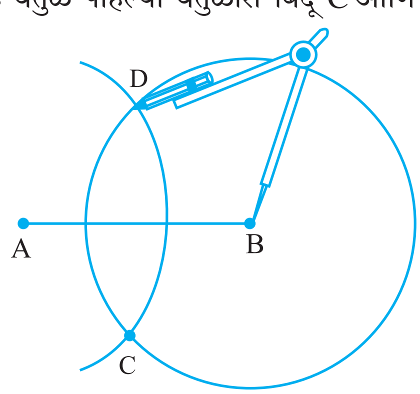
पट्टी व कंपासच्या मदतीने रचना करणे.

पायरी 1 कोणत्याही लांबीचा एक रेषाखंड $\overline{AB}$ काढा.

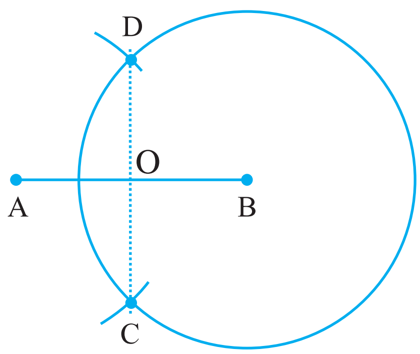
पायरी 2 A ला केंद्र मानून, कंपासच्या मदतीने एक वर्तुळ काढा. वर्तुळाची त्रिज्या $\overline{AB}$ च्या अर्ध्यापेक्षा जास्त पाहिजे.



पायरी 3 B ला केंद्र मानून आणि पायरी 2 मधील त्रिज्या घेऊन कंपासच्या मदतीने एक दुसरे वर्तुळ काढा. समजा हे वर्तुळ पहिल्या वर्तुळास बिंदू C आणि D मध्ये छेदते.



पायरी 4 $\overline{CD}$ काढा. हा $\overline{AB}$ ला O मध्ये छेदतो. O बिंदू हा रेषाखंड $\overline{AB}$ चा मध्यबिंदू आहे का? हे कर्कटकच्या मदतीने तपासून पहा. तसेच $\angle COA$ आणि $\angle COB$ हे काटकोन आहेत का ते पहा. तपासा रेषाखंड $\overline{CD}$, रेषाखंड $\overline{AB}$ चा लंबदुभाजक आहे.



वरील रचनेमध्ये $\overline{CD}$ निश्चित करण्यासाठी आपल्याला बिंदू C व बिंदू D ची आवश्यकता होती. बिंदू C व D मिळवण्यासाठी पूर्ण वर्तुळ काढण्याची आवश्यकता आहे का? हे दोन बिंदू मिळवण्यासाठी वर्तुळाचे दोन छोटे कंस काढल्यास पुरेसे होईल का? खरतरं, व्यवहारात आपण हेच करतो.

प्रयत्न करा

पट्टी आणि कंपासच्या मदतीने रचना करण्याच्या पायरी 2 मध्ये, जर त्रिज्या निम्म्यापेक्षा कमी घेतली तर काय होईल.

उदाहरणसंग्रह 14.5

1. 7.3 सेमी लांबीचा रेषाखंड $\overline{AB}$ काढा आणि त्याचा सममिती अक्ष शोधा.
2. 9.5 सेमी लांबीचा रेषाखंड काढा आणि त्याचा लंबदुभाजक काढा.
3. रेषाखंड $\overline{XY}$ चा लंबदुभाजक काढा ज्याची लांबी 10.3 सेमी आहे.
   (a) या लंबदुभाजकावर कोणताही एक बिंदू P घ्या. PX = PY आहे का ते तपासा.
   (b) जर बिंदू M हा रेषाखंड $\overline{XY}$ चा मध्यबिंदू असेल तर MX आणि XY यांच्याविषयी तुम्ही काय सांगाल?
4. 12.8 सेमी लांबीचा एक रेषाखंड काढा. पट्टी आणि कंपासच्या मदतीने त्याचे चार समान भाग करा. प्रत्यक्ष मोजून तपासा.
5. 6.1 सेमी लांबीचा रेषाखंड $\overline{PQ}$ काढा आणि नंतर $\overline{PQ}$ व्यास मानून एक वर्तुळ काढा.
6. केंद्र C आणि त्रिज्या 3.4 सेमी घेऊन एक वर्तुळ काढा. कोणतीही जीवा $\overline{AB}$ काढा. या जीवा $\overline{AB}$

चा लंब दुभाजक काढा. जीवा $\overline{AB}$ चा लंबदुभाजक वर्तुळकेंद्र C मधून जातो का ते पहा.

7. जेव्हा $\overline{AB}$ व्यास घेऊन प्रश्न क्र. 6 पुन्हा करा.

8. 4 सेमी त्रिज्येचे एक वर्तुळ काढा. वर्तुळाच्या कोणत्याही दोन जीवा काढा. दोन्ही जीवांचे लंबदुभाजक काढा. ते कोठे मिळतात ?

9. शिरोबिंदू O असलेला कोन काढा. त्याच्या एका भुजेवर बिंदू A आणि दुसऱ्या भुजेवर बिंदू B असा घ्या की, OA = OB. $\overline{OA}$ आणि $\overline{OB}$ चे लंबदुभाजक काढा. समजा बिंदू P मध्ये ते एकमेकांना छेदतात. तर PA = PB आहे का?

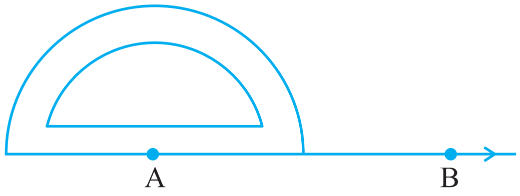
14.5 कोन

14.5.1 दिलेल्या मापाचा कोन काढणे.

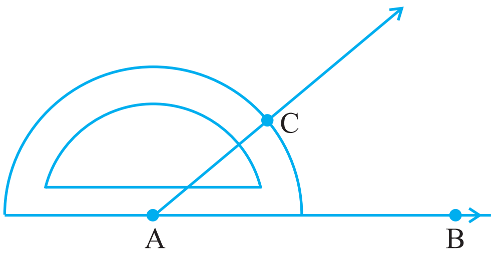
समजा, आपल्याला 40° चा कोन काढायचा आहे. त्यासाठी पुढील पायऱ्या आहेत.

पायरी 1 किरण $\overrightarrow{AB}$ काढा.

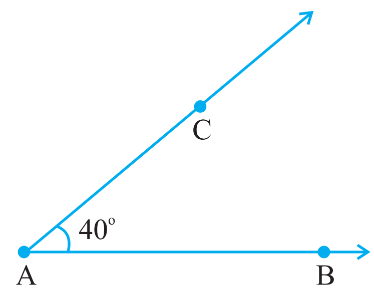
पायरी 2 कोन मापकाचे केंद्र A या बिंदूवर अशाप्रकारे ठेवा की, कोनमापकावरील शून्याची बाजू (0°–0°) किरण $\overrightarrow{AB}$ शी जुळेल.



पायरी 3 B बिंदूच्या बाजूकडील शून्यापासून सुरूवात करून 40° समोर बिंदू C लिहून खूण करा.



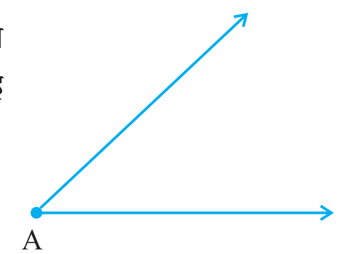
पायरी 4 AC जोडून किरण AC काढा. $\angle BAC$ हा इच्छित कोन आहे.



14.5.2 दिलेल्या कोनाएवढा कोन काढणे.

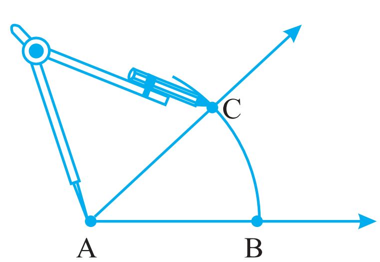
असे समजा की, तुम्हाला एक कोन दिला आहे. ज्याचे माप तुम्हाला माहीत नाही. आपल्याला या कोनाएवढा एक कोन काढायचा आहे. हे कसे करतात ते पाहू.

$\angle A$ दिला असून त्याचे माप माहीत नाही.

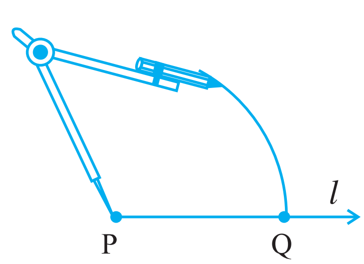


पायरी 1 रेषा l काढा त्यावर एक बिंदू P स्थापा.

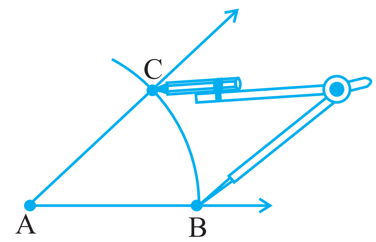
पायरी 2 कंपासचे लोखंडी टोक A वर ठेवून, एक कंस काढा तो $\angle A$ च्या भुजांना B आणि C मध्ये छेदतो.



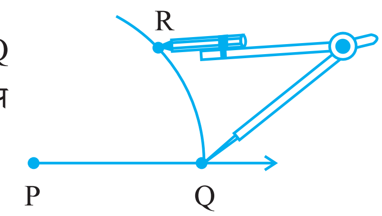
पायरी 3 कंपासच्या टोकांमधील अंतर न बदलता, लोखंडी टोक P वर ठेवून असा कंस काढा की, जो रेषा l ला Q मध्ये छेदेल.



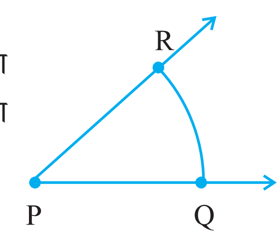
पायरी 4 कंपासमध्ये BC इतके अंतर घ्या.



पायरी 5 कंपासमधील अंतर न बदलता त्याचे लोखंडी टोक Q वर ठेवा आणि असा कंस काढा की जो पहिल्या चापास R मध्ये छेदेल.

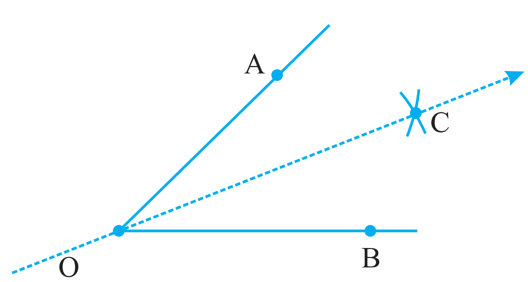


पायरी 6 PR जोडून किरण PR काढा. यामुळे $\angle P$ मिळतो. $\angle P$ हा इष्ट कोन आहे ज्याचे माप $\angle A$ बरोबर आहे. याचा अर्थ असा आहे की, $\angle QPR$ आणि $\angle BAC$ चे माप सारखे आहे.



14.5.3 कोनाचा दुभाजक

कागदावर एक बिंदू स्थापित करा. O आरंभबिंदू घेऊन $\overrightarrow{OA}$ आणि $\overrightarrow{OB}$ असे दोन किरण काढा. $\angle AOB$ तयार होतो या कागदाला असा दुमडा की, दुमडलेली खूण O मधून जाईल. तसेच किरण $\overrightarrow{OA}$ आणि $\overrightarrow{OB}$ परस्पर संपाती होतील. लक्षात ठेवा की OC पाशी दुमडलेली खूण कागद उघडल्यावर मिळेल.

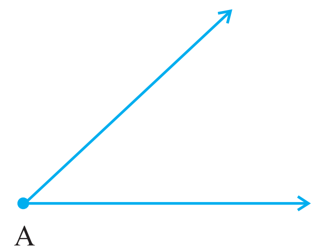


खरोखरच किरण OC हा $\angle AOB$ चा सममिती अक्ष आहे.

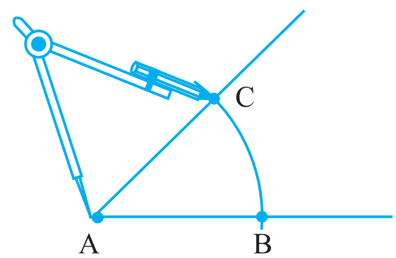
$\angle AOC$ आणि $\angle COB$ मोजा ते समान आहेत? म्हणूनच OC कोन $\angle AOB$ चा सममिती अक्ष आहे आणि $\angle AOB$ दुभाजक आहे.

पट्टी आणि कंपासच्या सहाय्याने रचना करणे.

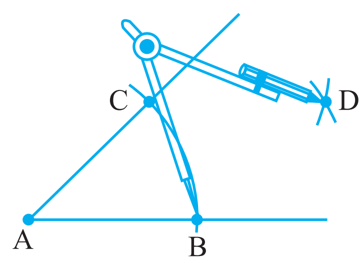
असे समजा की $\angle A$ दिला आहे.



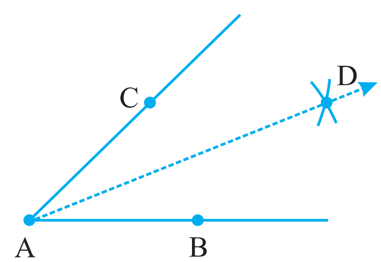
पायरी 1 A ला केंद्र मानून कंपासच्या मदतीने एक कंस काढा की, जो $\angle A$ च्या भुजांना B आणि C मध्ये छेदतो.



पायरी 2 B ला केंद्र माना आणि BC च्या अर्ध्यापेक्षा जास्त त्रिज्या घेऊन एक कंस $\angle A$ च्या अंतर्भागात काढा.



पायरी 3 C ला केंद्र मानून आणि पायरी 2 मध्ये घेतलेली त्रिज्या घेऊन, $\angle A$ च्या अंतर्भागात आणखी एक कंस काढा. समजा, हे दोन्ही चाप D मध्ये एकमेकांना छेदतात. $\overline{AD}$ हा $\angle A$ चा इष्ट दुभाजक आहे.



पायरी 2 मध्ये, जर आपण त्रिज्या BC च्या अर्ध्यापेक्षा कमी त्रिज्या घेतली, कोन तयार होईल का?

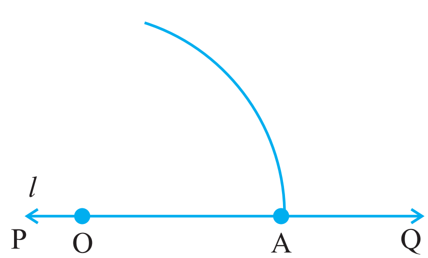
14.5.4 विशिष्ट मापांचे कोन

काही विशिष्ट मापांचे कोन काढण्याच्या काही सुंदर आणि अचूक पद्धती आहेत. ज्यामध्ये कोनमापकाचा उपयोग केला जात नाही. त्यापैकी काहींची चर्चा आपण येथे करूया.

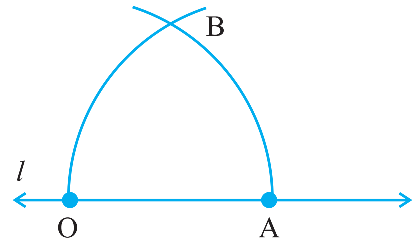
60° कोनाची रचना

पायरी 1 रेषा l काढा त्यावर बिंदू O स्थापा.

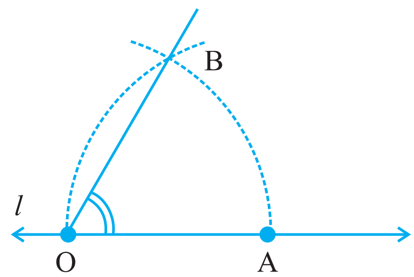
पायरी 2 कंपासचे लोखंडी टोक O वर ठेवा आणि योग्य त्रिज्या घेऊन कंस काढा. जो रेषा l ला समजा बिंदू A मध्ये छेदतो.



पायरी 3 आता कंसामध्ये तेज अंतर ठेवून, A केंद्र मानून, O बिंदूतून जाणारा कंस काढा.



पायरी 4 समजा हे दोन्ही कंस परस्परांना B बिंदूत छेदतात. OB जोडून किरण OB काढा. ∠BOA हा 60° माप असलेला इष्ट कोन आहे.



30° मापाच्या कोनाची रचना

वर दर्शविल्यानुसार 60° कोनाची रचना करा. आता या कोनाचा दुभाजक काढा. प्रत्येक कोन 30° चा आहे. कोनमापकाच्या मदतीने रचना पडताळून पहा.

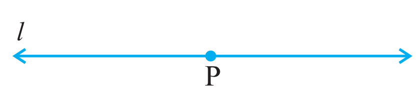
प्रयत्न करा

15° च्या कोनाची रचना तुम्ही कशी कराल?

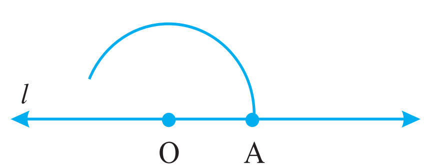
120° कोनाची रचना

120° चा कोन 60° कोनाच्या दुप्पट आहे यापेक्षा वेगळे काहीही नाही. म्हणून त्याची रचना पुढील प्रमाणे करता येईल.

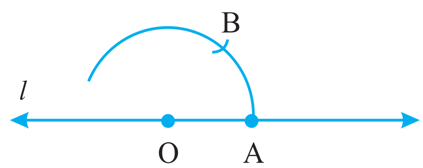
पायरी 1 रेषा *l* काढून त्यावर एक बिंदू O घ्या.



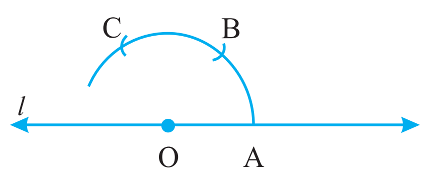
पायरी 2 कंपासचे लोखंडी टोक O वर ठेऊन योग्य त्रिज्या घेऊन एक कंस असा काढा की जो रेषा *l* ला A मध्ये छेदेल.



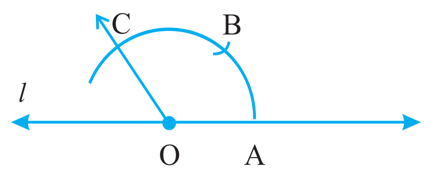
पायरी 3 कंपासमध्ये घेतलेले अंतर न बदलता आणि A ला केंद्र मानून एक कंस काढा. पहिल्या चापाला तो B मध्ये ठेवतो.



पायरी 4 पुन्हा कंपासमध्ये घेतलेले अंतर न बदलता आणि B ला केंद्र मानून एक कंस काढा. जो चाप पहिल्या कंसास C मध्ये छेदतो.



पायरी 5 OC जोडून किरण OC काढा. आता $\angle COA$ हा 120° मापाचा कोन तयार झाला.



प्रयत्न करा

150° कोनाची रचना तुम्ही कशाप्रकारे कराल ?

90° कोनाची रचना

आधी चर्चा केल्याप्रमाणे, एका रेषेवर तिच्यावरील बिंदूतून एक लंब काढा. हा हवा असलेला 90° चा कोन आहे.

प्रयत्न करा

45° कोनाची रचना तुम्ही कशाप्रकारे कराल?

उदाहरणसंग्रह 14.6

1. 75° मापाचा $\angle POQ$ काढा आणि त्याचा सममिती अक्ष दाखखा.
2. 147° मापाचा एक कोन काढून त्याचा कोनदुभाजक दाखवा.
3. काटकोन त्रिकोण काढा आणि त्याच्या दुभाजकाची रचना करा.
4. 153° चा कोन काढून त्याचे समान चार भाग करा.
5. पट्टी आणि कंपासच्या मदतीने पुढील मापाचे कोन काढा.
   (a) 60° (b) 30° (c) 90° (d) 120° (e) 45° (f) 135°
6. 45° चा एक कोन काढून त्याचे दोन समान भाग करा.
7. 135° चा एक कोन काढून तो दुभागा.
8. 70° चा एक कोन काढा. पट्टी आणि कंपासच्या मदतीने त्याच्या एवढाच कोन काढा.
9. 40° चा एक कोन काढा. त्याच्या पूरक कोनाएवढा कोन काढा.

आपण काय चर्चा केली ?

या प्रकरणात, भूमितीय आकृत्या काढण्याच्या विविध पद्धती सांगितल्या आहेत.

1. आकृत्या काढण्यासाठी, आपण भूमिती पेटी मधील पुढील साधनांचा उपयोग करतो.
   (i) पट्टी (ii) कंपास
   (iii) कर्कटक (iv) गुण्या
   (v) कोनमापक

2. पट्‌टी आणि कंपासच्या मदतीने पुढील रचना करता येतात.

   (i) त्रिज्येची लांबी दिली असताना वर्तुळ काढणे.

   (ii) दिलेल्या लांबीचा रेषाखंड काढणे.

   (iii) रेषाखंडाची प्रतिकृती तयार करणे.

   (iv) रेषेवर बिंदूतून लंब काढणे, जेव्हा बिंदू :

   (a) रेषेवर आहे. (b) रेषेवर नाही.

   (v) दिलेल्या लांबीच्या रेषाखंडाचा लंबदुभाजक काढणे

   (vi) दिलेल्या मापाचा कोन काढणे

   (vii) दिलेल्या कोनाएवढा कोन काढणे.

   (viii) दिलेल्या कोनाचा दुभाजक काढणे

   (ix) काही विशिष्ट मापाचे कोन काढणे. जसे :

   (a) 90° (b) 45° (c) 60° (d) 30° (e) 120° (f) 135°