अपनी संख्याओं की जानकारी

0651CH01

अध्याय 1

1.1 भूमिका

वस्तुओं को गिनना अब हमारे लिए सरल है। अब हम वस्तुओं को बड़ी संख्याओं में गिन सकते हैं, जैसे कि एक स्कूल के विद्यार्थियों की संख्या, और इन संख्याओं को संख्यांकों (numerals) द्वारा निरूपित कर सकते हैं। हम उपयुक्त संख्या नामों (number names) का प्रयोग करके बड़ी संख्याओं से संबंधित सूचनाएँ भी दे सकते हैं।

ऐसा नहीं है कि हम हमेशा से ही बड़ी राशियों के बारे में वार्तालाप या संकेतों द्वारा सूचना देना जानते थे। कई हज़ार वर्ष पहले, लोग केवल छोटी संख्याओं के बारे में ही जानते थे। धीरे-धीरे उन्होंने बड़ी संख्याओं के साथ कार्य करना सीखा। उन्होंने बड़ी संख्याओं को संकेतों से व्यक्त करना भी सीखा। यह सब मानव प्राणियों के सामूहिक प्रयासों के कारण संभव हो सका। उनका रास्ता सरल नहीं था और उन्हें इस पूरे रास्ते में संघर्ष करना पड़ा। वास्तव में, संपूर्ण गणित के विकास को इसी रूप में समझा जा सकता है। जैसे-जैसे मानव ने उन्नति की, वैसे-वैसे गणित के विकास की आवश्यकता बढ़ती गई और इसके परिणामस्वरूप गणित में विकास और तेज़ी से हुआ।

हम संख्याओं का प्रयोग करते हैं और उनके बारे में अनेक बातें जानते हैं। संख्याएँ प्रत्यक्ष वस्तुओं को गिनने में हमारी सहायता करती हैं। संख्याएँ हमारी सहायता यह बताने में करती हैं कि वस्तुओं का कौन-सा संग्रह (collection) बड़ा है और वस्तुओं को पहले, दूसरे इत्यादि क्रम में व्यवस्थित करने में भी सहायता करती हैं। संख्याओं का विभिन्न संदर्भों में और अनेक प्रकार से प्रयोग किया जाता है। विभिन्न स्थितियों के बारे में सोचिए जहाँ हम संख्याओं का प्रयोग करते हैं। भिन्न पाँच स्थितियों को लिखिए जिनमें हम संख्याओं का प्रयोग करते हैं।

हम संख्याओं के साथ कार्य करने का आनंद प्राप्त कर चुके हैं। हम इनके साथ योग, व्यवकलन (घटाने), गुणा और भाग की संक्रियाएँ भी कर चुके हैं। हम संख्या अनुक्रमों (sequences) में प्रतिरूपों (patterns) को देख चुके हैं और संख्याओं के साथ अनेक

रुचिपूर्ण बातें कर चुके हैं। इस अध्याय में, हम कुछ समीक्षा और पुनरावलोकन के साथ इन रुचिपूर्ण बातों पर और आगे कदम बढ़ाएँगे।

1.2 संख्याओं की तुलना

चूँकि हम संख्याओं की तुलना पहले भी बहुत कर चुके हैं, आइए देखें कि क्या हमें याद है कि दी गई संख्याओं में कौन सी संख्या सबसे बड़ी है?

(i) 92, 392, 4456, 89742 — मैं सबसे बड़ी हूँ

(ii) 1902, 1920, 9201, 9021, 9210 — मैं सबसे बड़ी हूँ

तो, हम यहाँ उत्तर जानते हैं।

अपने मित्रों में चर्चा कीजिए और पता कीजिए कि किसी संख्या समूह में वे सबसे बड़ी संख्या किस प्रकार ज्ञात करते हैं।

प्रयास कीजिए

क्या आप तुरंत ज्ञात कर सकते हैं कि प्रत्येक पंक्ति में कौन सी संख्या सबसे बड़ी है और कौन सी संख्या सबसे छोटी है?

1. 382, 4972, 18, 59785, 750 उत्तर : 59785 सबसे बड़ी है और 18 सबसे छोटी है।
2. 1473, 89423, 100, 5000, 310 उत्तर : ____________
3. 1834, 75284, 111, 2333, 450 उत्तर : ____________
4. 2853, 7691, 9999, 12002, 124 उत्तर : ____________

क्या यह सरल था? यह सरल क्यों था?

यहाँ हमने केवल अंकों की संख्या को देखकर ही उत्तर ज्ञात कर लिया। सबसे बड़ी संख्या में अधिकतम हज़ार थे और सबसे छोटी संख्या सैकड़ों (सौ) अथवा दहाइयों (दस) में थी।

इसी प्रकार के पाँच और प्रश्न बनाइए और उन्हें हल करने के लिए अपने मित्रों को दीजिए।

हम 4875 और 3542 की तुलना किस प्रकार करते हैं? यहाँ यह अधिक कठिन नहीं है। इन दोनों संख्याओं में अंकों की संख्या समान है। ये दोनों हज़ारों में हैं। परंतु 4875 में हज़ार के स्थान पर अंक, 3542 के हज़ार के स्थान के अंक से बड़ा है। अत: 3542 से 4875 बड़ी है।

अब बताइए कि कौन सी संख्या बड़ी है; 4875 या 4542? यहाँ भी दोनों संख्याओं में अंकों की संख्या समान (बराबर) है। साथ ही, दोनों में हज़ार के स्थान पर समान अंक हैं। अब हम क्या करते हैं? हम अगले अंक की ओर बढ़ते हैं, अर्थात् सौ के स्थान पर आने वाले अंकों को देखते हैं। 4875 में सौवें स्थान वाला अंक 4542 के सौवें स्थान वाले अंक से बड़ा है। अत: संख्या 4542 से संख्या 4875 बड़ी है।

यदि दोनों संख्याओं में सौ के स्थान वाले अंक भी समान होते, तो हम क्या करते?

4875 और 4889 की तुलना कीजिए।

4875 और 4879 की तुलना कीजिए।

प्रयास कीजिए

प्रत्येक समूह में सबसे बड़ी और सबसे छोटी संख्याएँ ज्ञात कीजिए:

(a) 4536, 4892, 4370, 4452 (b) 15623, 15073, 15189, 15800

(c) 25286, 25245, 25270, 25210 (d) 6895, 23787, 24569, 24659

इसी प्रकार के पाँच प्रश्न और बनाइए और हल करने के लिए अपने मित्रों को दीजिए।

1.2.1 आप कितनी संख्याएँ बना सकते हैं?

मान लीजिए हमारे पास अंक 7, 8, 3 और 5 हैं। हमें इन अंकों से चार अंकों वाली भिन्न-भिन्न ऐसी संख्याएँ बनाने को कहा जाता है कि एक संख्या में कोई भी अंक दोबारा न आए (अर्थात् किसी भी अंक की पुनरावृत्ति न हो)। इस प्रकार, संख्या 7835 तो बनाई जा सकती है, परंतु 7735 नहीं। इन 4 अंकों से जितनी संख्याएँ बना सकते हैं, बनाइए।

आपको सबसे बड़ी और सबसे छोटी संख्या कौन सी प्राप्त होती है? यहाँ सबसे बड़ी संख्या 8753 है और सबसे छोटी संख्या 3578 है। दोनों में अंकों के क्रम के बारे में सोचिए। क्या आप बता सकते हैं कि दिए गए अंकों से सबसे बड़ी संख्या किस प्रकार ज्ञात की जा सकती है? अपनी प्रक्रिया को लिखिए।

प्रयास कीजिए

1. बिना पुनरावृत्ति किए, दिए हुए अंकों का प्रयोग करके चार अंकों की सबसे बड़ी और सबसे छोटी संख्याएँ बनाइए :

   (a) 2, 8, 7, 4 (b) 9, 7, 4, 1 (c) 4, 7, 5, 0

   (d) 1, 7, 6, 2 (e) 5, 4, 0, 3

   (**संकेत** : 0754 तीन अंकों की संख्या है।)

2. किसी एक अंक का दो बार प्रयोग करके चार अंकों की सबसे बड़ी और सबसे छोटी संख्याएँ बनाइए :

   (a) 3, 8, 7 (b) 9, 0, 5 (c) 0, 4, 9 (d) 8, 5, 1

   (**संकेत** : प्रत्येक स्थिति में सोचिए कि आप किस अंक का दो बार प्रयोग करेंगे।)

3. दिए हुए प्रतिबंधों के साथ, किन्हीं चार अंकों का प्रयोग करके, 4 अंकों की सबसे बड़ी और सबसे छोटी संख्याएँ बनाइए :

   (a) अंक 7 सदैव इकाई के स्थान पर रहे।

सबसे बड़ी	9	8	6	7
सबसे छोटी	1	0	2	7

   (ध्यान दीजिए, अंक 0 से संख्या प्रारंभ नहीं हो सकती। क्यों?)

   (b) अंक 4 सदैव दहाई के स्थान पर रहे।

सबसे बड़ी			4	
सबसे छोटी			4	

(c) अंक 9 सदैव सौ के स्थान पर रहे।

सबसे बड़ी

		9	

सबसे छोटी

		9	

(d) अंक 1 सदैव हज़ार के स्थान पर रहे।

सबसे बड़ी

		1	

सबसे छोटी

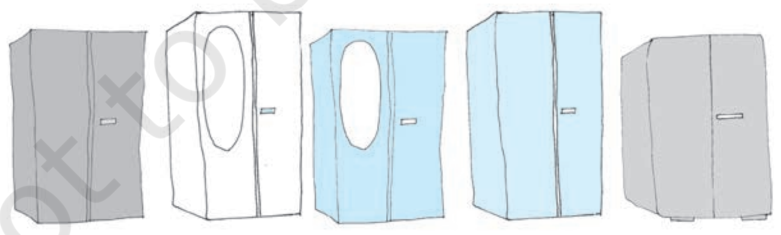
		1	

4. मान लीजिए, आप दो अंक 2 और 3 लेते हैं। इन अंकों को समान बार दोहराते हुए, चार अंकों की संख्याएँ बनाइए। कौन सी संख्या सबसे बड़ी है? कौन सी संख्या सबसे छोटी है? आप ऐसी कुल कितनी संख्याएँ बना सकते हैं?

उचित क्रम में खड़े होना :

1. इनमें कौन सबसे लंबा है?
2. इनमें कौन सबसे छोटा है?
   (a) क्या आप इन्हें इनकी लंबाइयों के बढ़ते हुए क्रम में खड़ा कर सकते हैं?
   (b) क्या आप इन्हें इनकी लंबाइयों के घटते हुए क्रम में खड़ा कर सकते हैं?

रामहरि (160 सेमी) डोली (154 सेमी) मोहन (158 सेमी) शशि (159 सेमी)



₹ 2635 ₹ 1897 ₹ 2854 ₹ 1788 ₹ 3975

क्या खरीदें?

सोहन और रीता एक अलमारी खरीदने गए। वहाँ कई अलमारियाँ उपलब्ध थीं जिन पर उनके मूल्यों की पर्चियाँ लगी हुई थीं।

(a) क्या आप इनके मूल्यों को बढ़ते हुए क्रम में व्यवस्थित कर सकते हैं?
(b) क्या आप इनके मूल्यों को घटते हुए क्रम में व्यवस्थित कर सकते हैं?

प्रयास कीजिए

इसी प्रकार की पाँच और स्थितियों को सोचिए जहाँ आप तीन या अधिक राशियों की तुलना करते हैं।

आरोही क्रम (Ascending order) : आरोही या बढ़ते हुए क्रम का अर्थ है सबसे छोटे से प्रारंभ कर सबसे बड़े तक व्यवस्थित करना।

अवरोही क्रम (Descending order) : अवरोही क्रम या घटते हुए क्रम का अर्थ है सबसे बड़े से प्रारंभ कर सबसे छोटे तक व्यवस्थित करना।

प्रयास कीजिए

1. निम्नलिखित संख्याओं को आरोही क्रम में व्यवस्थित कीजिए :
   (a) 847, 9754, 8320, 571
   (b) 9801, 25751, 36501, 38802
2. निम्नलिखित संख्याओं को अवरोही क्रम में व्यवस्थित कीजिए :
   (a) 5000, 7500, 85400, 7861
   (b) 1971, 45321, 88715, 92547

आरोही/अवरोही क्रमों के ऐसे ही दस उदाहरण और बनाइए और उन्हें आरोही/अवरोही क्रम में व्यवस्थित कीजिए।

1.2.2 अंकों का स्थानांतरण

क्या आपने सोचा है कि यदि किसी संख्या के अंकों के स्थान परस्पर बदल दिए जाएँ तो क्या होगा?

सोचिए कि 182 क्या बन जाएगा। यह 821 जैसी बड़ी हो सकती है अथवा 128 जैसी छोटी। यही प्रक्रिया 391 के साथ करके देखिए।

अब आगे दिए हुए प्रश्नों पर ध्यान दीजिए। तीन भिन्न-भिन्न अंकों की कोई संख्या लीजिए और सौ के स्थान के अंक को इकाई के स्थान के अंक से बदलिए।

(a) क्या नयी संख्या पहली संख्या से बड़ी है?

(b) क्या नयी संख्या पहली संख्या से छोटी है?

इस प्रकार बनने वाली संख्याओं को आरोही और अवरोही दोनों क्रमों में लिखिए।

पहले 7 9 5

पहली और तीसरी टाइलों को परस्पर बदलने पर

बाद में 5 9 7

विभिन्न अंक लेकर यदि आप पहली और तीसरी टाइलों (अंकों) को परस्पर बदलते हैं, तो किस स्थिति में संख्या बड़ी हो जाती है?

किस स्थिति में संख्या छोटी हो जाती है?

यह प्रक्रिया चार अंकों की कोई संख्या लेकर दोहराइए।

1.2.3 संख्या 10000 का प्रवेश

हम जानते हैं कि 99 से आगे दो अंकों वाली कोई संख्या नहीं है। 99 दो अंकों की सबसे बड़ी संख्या है। इसी प्रकार 999 तीन अंकों की सबसे बड़ी संख्या है और चार अंकों की सबसे बड़ी संख्या 9999 है। यदि हम 9999 में 1 जोड़ें, तो हमें क्या प्राप्त होगा?

इस प्रतिरूप को देखिए $9 + 1 = 10 = 10 \times 1$

$99 + 1 = 100 = 10 \times 10$

$999 + 1 = 1000 = 10 \times 100$

हम देखते हैं कि

एक अंक की सबसे बड़ी संख्या + 1 = दो अंकों की सबसे छोटी संख्या,

दो अंकों की सबसे बड़ी संख्या + 1 = तीन अंकों की सबसे छोटी संख्या,

तीन अंकों की सबसे बड़ी संख्या + 1 = चार अंकों की सबसे छोटी संख्या।

तब हम क्या यह नहीं सोच सकते कि चार अंकों की सबसे बड़ी संख्या में 1 जोड़ने पर, हमें पाँच अंकों की सबसे छोटी संख्या प्राप्त होगी, अर्थात् 9999 +1 = 10000 होगा। इस प्रकार, 9999 से ठीक आगे आने वाली संख्या 10000 है। इसे दस हज़ार कहते हैं। साथ ही, हम सोच सकते हैं कि $10000 = 10 \times 1000$ होगा।

1.2.4 स्थानीय मान पर पुनर्दृष्टि

आप स्थानीय मान के बारे में बहुत पहले पढ़ चुके हैं तथा 78 जैसी दो अंकों की संख्या का प्रसारित रूप आपको अवश्य याद होगा। यह इस प्रकार है :

$$78 = 70 + 8$$
$$= 7 \times 10 + 8$$

इसी प्रकार, आपको तीन अंकों की संख्या जैसे 278 का प्रसारित रूप भी याद होगा। यह इस प्रकार है :

$$278 = 200 + 70 + 8$$
$$= 2 \times 100 + 7 \times 10 + 8$$

हम कहते हैं कि 8 इकाई के स्थान पर है, 7 दहाई के स्थान पर है और 2 सौ के स्थान पर है।

बाद में, हमने इसी अवधारणा को चार अंकों की संख्या के लिए भी लागू कर लिया था।

उदाहरणार्थ, 5278 का प्रसारित रूप है :

$$5278 = 5000 + 200 + 70 + 8$$
$$= 5 \times 1000 + 2 \times 100 + 7 \times 10 + 8$$

यहाँ, इकाई के स्थान पर 8, दहाई के स्थान पर 7, सौ के स्थान पर 2 और हज़ार के स्थान पर 5 है।

संख्या 10000 ज्ञात हो जाने पर, हम इस अवधारणा को और आगे लागू कर सकते हैं। हम पाँच अंकों की संख्या जैसे 45278 को इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$45278 = 4 \times 10000 + 5 \times 1000 + 2 \times 100 + 7 \times 10 + 8$$

यहाँ हम कहते हैं कि इकाई के स्थान पर 8, दहाई के स्थान पर 7, सौ के स्थान पर 2, हज़ार के स्थान पर 5 और दस हज़ार के स्थान पर 4 है। इस संख्या को पैंतालीस हज़ार दो सौ अठहत्तर पढ़ा जाता है। क्या अब आप 5 अंकों की सबसे छोटी और सबसे बड़ी संख्याएँ लिख सकते हैं?

प्रयास कीजिए

संख्याओं को पढ़िए और जहाँ-जहाँ रिक्त स्थान हैं उनके नाम लिखिए और प्रसारित रूप में लिखिए :

संख्या	संख्या का नाम	प्रसारित रूप
20000	बीस हज़ार	2×10000
26000	छब्बीस हज़ार	$2 \times 10000 + 6 \times 1000$
38400	अड़तीस हज़ार चार सौ	$3 \times 10000 + 8 \times 1000 + 4 \times 100$
65740	पैंसठ हज़ार सात सौ चालीस	$6 \times 10000 + 5 \times 1000 + 7 \times 100 + 4 \times 10$
89324	नवासी हज़ार तीन सौ चौबीस	$8 \times 10000 + 9 \times 1000 + 3 \times 100 + 2 \times 10 + 4$
50000	________________	________________
41000	________________	________________
47300	________________	________________
57630	________________	________________
29485	________________	________________
29085	________________	________________
20085	________________	________________
20005	________________	________________

पाँच अंकों वाली पाँच और संख्याएँ लिखिए, उन्हें पढ़िए और उनको प्रसारित रूप में लिखिए।

1.2.5 संख्या 100000 का प्रवेश

पाँच अंकों की सबसे बड़ी संख्या कौन सी है? पाँच अंकों की सबसे बड़ी संख्या में 1 जोड़ने पर छः अंकों की सबसे छोटी संख्या प्राप्त होनी चाहिए। अर्थात्

$$99,999 + 1 \quad = 1,00,000$$

इस संख्या को **एक लाख** नाम दिया जाता है। एक लाख 99999 के ठीक आगे आने वाली संख्या है।

साथ ही, $10,000 \times 10 = 1,00,000$

अब हम 6 अंकों की संख्याएँ और उनके प्रसारित रूप लिख सकते हैं। जैसे :

$$2,46,853 = 2 \times 1,00,000 + 4 \times 10,000 + 6 \times 1,000 + 8 \times 100 + 5 \times 10 + 3 \times 1$$

इस संख्या में, इकाई के स्थान पर 3, दहाई के स्थान पर 5, सौ के स्थान पर 8, हज़ार के स्थान पर 6, दस हज़ार के स्थान पर 4 और लाख के स्थान पर 2 है। इस संख्या का नाम दो लाख छियालीस हज़ार आठ सौ तिरपन है।

प्रयास कीजिए

संख्याओं को पढ़कर उन्हें रिक्त स्थानों में प्रसारित रूप में और उनके नाम लिखिए :

संख्या	संख्या का नाम	प्रसारित रूप
3,00,000	तीन लाख	$3 \times 1,00,000$
3,50,000	तीन लाख पचास हज़ार	$3 \times 1,00,000 + 5 \times 10,000$
3,53,500	तीन लाख तिरपन हज़ार पाँच सौ	$3 \times 1,00,000 + 5 \times 10,000 + 3 \times 1000 + 5 \times 100$
4,57,928	_______________	_______________
4,07,928	_______________	_______________
4,00,829	_______________	_______________
4,00,029	_______________	_______________

1.2.6 बड़ी संख्याएँ

यदि हम 6 अंकों की सबसे बड़ी संख्या में 1 जोड़ें, तो हमें 7 अंकों की सबसे छोटी संख्या प्राप्त होती है, जिसे **दस लाख** कहते हैं।

6 अंकों की सबसे बड़ी संख्या और 7 अंकों की सबसे छोटी संख्या लिखिए।

7 अंकों की सबसे बड़ी संख्या और 8 अंकों की सबसे छोटी संख्या लिखिए। 8 अंकों की सबसे छोटी संख्या **एक करोड़** है।

प्रतिरूप को पूरा कीजिए :

9 + 1 = 10
99 + 1 = 100
999 + 1 = _______
9,999 + 1 = _______
99,999 + 1 = _______
9,99,999 + 1 = _______
99,99,999 + 1 = 1,00,00,000

याद रखिए :

1 सौ = 10 दहाइयाँ
1 हज़ार = 10 सौ
= 100 दहाइयाँ
1 लाख = 100 हज़ार
= 1000 सौ
1 करोड़ = 100 लाख
= 10,000 हज़ार

प्रयास कीजिए

1. 10 – 1 क्या है?
2. 100 – 1 क्या है?
3. 10,000 – 1 क्या है?
4. 1,00,000 – 1 क्या है?
5. 1,00,00,000 – 1 क्या है?

(**संकेत :** प्रतिरूप को पहचानिए)

अनेक विभिन्न स्थितियों में हमारे सम्मुख बड़ी संख्याएँ आती हैं। उदाहरणार्थ, आपकी कक्षा के बच्चों की संख्या दो अंकों की होगी, जबकि आपके स्कूल के कुल बच्चों की संख्या 3 या 4 अंकों की होगी। पास के शहर में रहने वाले लोगों की संख्या और अधिक बड़ी होगी।

क्या यह 5 या 6 या 7 अंकों की संख्या है? क्या आप अपने राज्य में रहने वाले लोगों की संख्या के बारे में जानते हैं?

इस संख्या में कितने अंक होंगे?

गेहूँ से भरी एक बोरी में दानों (grains) की संख्या क्या होगी? यह एक 5 अंकों की संख्या या 6 अंकों की संख्या या और बड़ी संख्या होगी?

प्रयास कीजिए

1. ऐसे पाँच उदाहरण दीजिए जहाँ गिनी जाने वाली वस्तुओं की संख्या 6 अंकों की संख्या से अधिक होगी।
2. 6 अंकों की सबसे बड़ी संख्या से प्रारंभ करते हुए, अवरोही क्रम में पिछली पाँच संख्याएँ लिखिए।
3. 8 अंकों की सबसे छोटी संख्या से प्रारंभ करते हुए, आरोही क्रम में अगली पाँच संख्याएँ लिखिए और उन्हें पढ़िए।

1.2.7 बड़ी संख्याएँ पढ़ने और लिखने में एक सहायता

निम्नलिखित संख्याओं को पढ़ने का प्रयत्न कीजिए :

(a) 279453 (b) 5035472

(c) 152700375 (d) 40350894

क्या आपको कुछ कठिनाई हुई?

आपको ऐसा करने में क्या कठिनाई हुई?

कभी-कभी बड़ी संख्याओं के पढ़ने और लिखने में कुछ सूचक (indicators) लगे होते हैं। शगुफ्ता भी सूचकों का प्रयोग करती है जो उसे बड़ी संख्याओं को पढ़ने और लिखने में सहायता करते हैं। उसके ये सूचक, संख्याओं को प्रसारित रूप में लिखने में भी सहायक होते हैं। उदाहरणार्थ, वह 257 में इकाई के स्थान, दहाई के स्थान और सौ के स्थान पर अंकों को ज्ञात करके उन्हें सारणी में O, T और H के नीचे निम्न प्रकार से लिखती है:

H	T	O	प्रसारित रूप
2	5	7	$2 \times 100 + 5 \times 10 + 7 \times 1$

इसी प्रकार, 2902 के लिए वह प्राप्त करती है :

Th	H	T	O	प्रसारित रूप
2	9	0	2	$2 \times 1000 + 9 \times 100 + 0 \times 10 + 2 \times 1$

वह इस अवधारणा को लाखों तक की संख्याओं के लिए लागू करती है, जैसा कि नीचे दी हुई सारणी में देखा जा सकता है। (हम इन्हें शगुफ्ता के खाने या बॉक्स (Boxes) कहेंगे)। ध्यान से देखिए और रिक्त स्थानों पर छूटी हुई प्रविष्टियों को भरिए :

संख्या	TLa	La	TTh	Th	H	T	O	संख्या नाम	प्रसारित रूप
7,34,543		7	3	4	5	4	3	सात लाख चौंतीस हज़ार पाँच सौ तैंतालीस	----------------
32,75,829	3	2	7	5	8	2	9	--------------------	$3\times 10,00,000$ $+2\times 1,00,000$ $+7\times 10,000$ $+5\times 1000$ $+8\times 100$ $+2\times 10+9\times 1$

इसी प्रकार, हम करोड़ों तक की संख्याओं को सम्मिलित कर सकते हैं, जैसा कि नीचे दिखाया गया है :

संख्या	TCr	Cr	TLa	La	TTh	Th	H	T	O	संख्या नाम
2,57,34,543	-	2	5	7	3	4	5	4	3	___________
65,32,75,829	6	5	3	2	7	5	8	2	9	पैंसठ करोड़ बत्तीस लाख पचहत्तर हज़ार आठ सौ उनतीस

आप संख्याओं को प्रसारित रूप में लिखने के लिए अन्य तालिकाओं का प्रारूप भी बना सकते हैं।

अल्प विरामों (commas) का प्रयोग

आपने ध्यान दिया होगा कि उपरोक्त तालिकाओं में बड़ी संख्याओं के लिखने में हमने अल्प विरामों का प्रयोग किया है। बड़ी संख्याओं को पढ़ने और लिखने में अल्प विराम हमारी बड़ी सहायता करते हैं। **संख्यांकन की भारतीय पद्धति (Indian system of numeration)** में हम इकाई, दहाई, सौ (सैकड़ा), हज़ारों का प्रयोग करते हैं तथा आगे लाखों और करोड़ों का प्रयोग करते हैं। हज़ारों, लाखों और करोड़ों को प्रदर्शित करने के लिए अल्प विरामों का प्रयोग किया जाता है। पहला अल्प विराम सौ के स्थान (दाएँ से चलते हुए तीसरे अंक) के बाद आता है और हज़ारों को प्रदर्शित करता है। दूसरा अल्प विराम अगले दो अंकों (दाएँ से पाँचवें अंक) के बाद आता है। यह दस हज़ार के स्थान के बाद आता है और लाखों को प्रदर्शित करता है। तीसरा अल्प विराम अन्य दो अंकों (दाएँ से सातवें अंक) के बाद आता है। यह दस लाख के स्थान के बाद आता है और करोड़ों को प्रदर्शित करता है।

उदाहरणार्थ, 5, 08, 01, 592
3, 32, 40, 781
7, 27, 05, 062

संख्याओं के नाम लिखते समय, हम अल्प विरामों का प्रयोग नहीं करते हैं।

ऊपर दी हुई संख्याओं को पढ़ने का प्रयत्न कीजिए। इसी रूप में पाँच और संख्याओं को लिखिए और फिर उन्हें पढ़िए।

अंतर्राष्ट्रीय संख्यांकन पद्धति

संख्यांकन की अंतर्राष्ट्रीय (International) पद्धति में, इकाई, दहाई, सौ, हज़ारों और आगे मिलियनों (millions) का प्रयोग किया जाता है। हज़ारों और मिलियनों को प्रदर्शित करने के लिए अल्प विरामों का प्रयोग किया जाता है। अल्प विराम दाएँ से प्रत्येक तीसरे अंक के बाद आता है। पहला अल्प विराम हज़ारों को प्रदर्शित करता है और दूसरा अल्प विराम मिलियनों को प्रदर्शित करता है। उदाहरणार्थ, संख्या 50, 801, 592 को अंतर्राष्ट्रीय पद्धति में पचास मिलियन आठ सौ एक हज़ार पाँच सौ बानवे पढ़ा जाता है। भारतीय पद्धति में, यह पाँच करोड़ आठ लाख एक हज़ार पाँच सौ बानवे है।

कितने लाख से एक मिलियन बनता है?

कितने मिलियन से एक करोड़ बनता है?

तीन बड़ी संख्याओं को लीजिए। इन्हें भारतीय और अंतर्राष्ट्रीय दोनों संख्यांकन पद्धतियों में व्यक्त कीजिए।

इसमें आपकी रुचि हो सकती है:

सौ मिलियनों से बड़ी संख्याओं को व्यक्त करने के लिए, अंतर्राष्ट्रीय पद्धति में बिलियनों (Billions) का प्रयोग किया जाता है।

1 बिलियन = 1000 मिलियन

क्या आप जानते हैं?

भारत की जनसंख्या में इस प्रकार वृद्धि हुई है :

1921-1931 के अंतराल में करीब 27 मिलियन;
1931-1941 के अंतराल में करीब 37 मिलियन;
1941-1951 के अंतराल में करीब 44 मिलियन;
1951-1961 के अंतराल में करीब 78 मिलियन;

1991–2001 के अंतराल में कितनी वृद्धि हुई। इस जानकारी को प्राप्त करने का प्रयत्न कीजिए। क्या आप जानते हैं कि इस समय भारत की जनसंख्या कितनी है? पता करने का प्रयत्न कीजिए।

प्रयास कीजिए

1. इन संख्याओं को बक्सों का प्रयोग करते हुए लिखिए और फिर प्रसारित रूप में लिखिए :
   (i) 475320 (ii) 9847215
   (iii) 97645310 (iv) 30458094
   (a) इनमें कौन-सी संख्या सबसे छोटी है?
   (b) इनमें कौन-सी संख्या सबसे बड़ी है?
   (c) इन संख्याओं को आरोही और अवरोही क्रमों में व्यवस्थित कीजिए।
2. निम्नलिखित संख्याओं को देखिए :
   (i) 527864 (ii) 95432
   (iii) 18950049 (iv) 70002509
   (a) इन संख्याओं को बक्सों का प्रयोग करते हुए लिखिए और फिर अल्प विरामों का प्रयोग करते हुए लिखिए।
   (b) इन संख्याओं को आरोही और अवरोही क्रमों में व्यवस्थित कीजिए।
3. ऐसी ही तीन और बड़ी संख्याएँ लेकर इस प्रक्रिया को दोहराइए।

क्या आप संख्यांक लिखने में मेरी सहायता कर सकते हैं?

एक संख्या के संख्यांक लिखने के लिए आप पुन: बक्सों का प्रयोग कर सकते हैं:

(a) बयालीस लाख सत्तर हज़ार आठ।

(b) दो करोड़ नब्बे लाख पचपन हज़ार आठ सौ।

(c) सात करोड़ साठ हज़ार पचपन।

प्रयास कीजिए

1. आपके पास 4, 5, 6, 0, 7 और 8 के अंक हैं। इनका प्रयोग करते हुए 6 अंकों की पाँच संख्याएँ बनाइए।
   (a) पढ़ने में सरलता के लिए अल्प विराम लगाइए।
   (b) इन्हें आरोही और अवरोही क्रमों में व्यवस्थित कीजिए।
2. अंकों 4, 5, 6, 7, 8 और 9 का प्रयोग कर 8 अंकों की कोई तीन संख्याएँ बनाइए। पढ़ने में सरलता के लिए, अल्प विरामों का प्रयोग कीजिए।
3. अंकों 3, 0 और 4 का प्रयोग कर 6 अंकों की पाँच संख्याएँ बनाइए। अल्प विरामों का भी प्रयोग कीजिए।

प्रश्नावली 1.1

1. रिक्त स्थानों को भरिए :

   (a) 1 लाख = ________ दस हज़ार

   (b) 1 मिलियन = ________ सौ हज़ार

   (c) 1 करोड़ = ________ दस लाख

   (d) 1 करोड़ = ________ मिलियन

   (e) 1 मिलियन = ________ लाख

2. सही स्थानों पर अल्प विराम लगाते हुए, संख्यांकों को लिखिए :

   (a) तिहत्तर लाख पचहत्तर हज़ार तीन सौ सात

   (b) नौ करोड़ पाँच लाख इकतालीस

   (c) सात करोड़ बावन लाख इक्कीस हज़ार तीन सौ दो

   (d) अट्ठावन मिलियन चार सौ तेईस हज़ार दो सौ दो

   (e) तेईस लाख तीस हज़ार दस

3. उपयुक्त स्थानों पर अल्प विराम लगाइए और संख्या नामों को भारतीय संख्यांकन पद्धति में लिखिए :

   (a) 87595762 (b) 8546283 (c) 99900046 (d) 98432701

4. उपयुक्त स्थानों पर अल्प विराम लगाइए और संख्या नामों को अंतर्राष्ट्रीय संख्यांकन पद्धति में लिखिए :

   (a) 78921092 (b) 7452283 (c) 99985102 (d) 48049831

1.3 व्यावहारिक प्रयोग में बड़ी संख्याएँ

पिछली कक्षाओं में, हम पढ़ चुके हैं कि लंबाई के एक मात्रक (या इकाई) (unit) के लिए सेंटीमीटर (सेमी) का प्रयोग किया जाता है। पेंसिल की लंबाई, अपनी पुस्तक या अभ्यास-पुस्तिका की चौड़ाई इत्यादि मापने के लिए हम सेंटीमीटर का प्रयोग करते हैं। हमारे रूलर पर सेंटीमीटर के चिह्न अंकित होते हैं। परंतु, एक पेंसिल की मोटाई मापने के लिए हम पाते हैं कि सेंटीमीटर एक बड़ा मात्रक है। अतः पेंसिल की मोटाई दर्शाने के लिए, हम एक छोटे मात्रक मिलीमीटर (मिमी) का प्रयोग करते हैं।

(a) 10 मिलीमीटर = 1 सेंटीमीटर

अपनी कक्षा के कमरे की लंबाई या स्कूल के भवन की लंबाई मापने के लिए, हम पाते हैं कि सेंटीमीटर एक बहुत छोटा मात्रक है। अतः इस कार्य के लिए हम मीटर का प्रयोग करते हैं।

(b) 1 मीटर = 100 सेंटीमीटर = 1000 मिलीमीटर

यदि हमें दो शहरों, जैसे – दिल्ली-मुंबई या दिल्ली-कोलकाता के बीच की दूरियाँ बतानी हों, तो मीटर भी एक बहुत छोटा मात्रक होता है। इसके लिए हम एक बड़े मात्रक किलोमीटर (किमी) का प्रयोग करते हैं।

(c) 1 किलोमीटर = 1000 मीटर

कितने मिलीमीटरों से 1 किलोमीटर बनता है?

चूँकि 1 मीटर = 1000 मिमी, इसलिए

1 किमी = 1000 मी = 1000 × 1000 मिमी = 10,00,000 मिमी

प्रयास कीजिए

1. कितने सेंटीमीटरों से एक किलोमीटर बनता है?
2. भारत के पाँच बड़े शहरों के नाम लिखिए। उनकी जनसंख्या पता कीजिए। इन शहरों में से प्रत्येक युग्म शहरों के बीच की दूरी भी किलोमीटरों में पता कीजिए।

हम बाज़ार में गेहूँ या चावल खरीदने जाते हैं। हम इन्हें किलोग्राम (किग्रा) में खरीदते हैं। परंतु अदरक या मिर्च जैसी वस्तुओं की हमें अधिक मात्रा में आवश्यकता नहीं होती है। हम इन्हें ग्राम (ग्रा) में खरीदते हैं। हम जानते हैं कि

1 किलोग्राम = 1000 ग्राम

बीमार पड़ने पर जो दवाई की गोली ली जाती है, क्या उसके भार पर कभी आपने ध्यान दिया है? यह बहुत कम होता है। यह भार मिलीग्राम (मिग्रा) में होता है।

1 ग्राम = 1000 मिलीग्राम

प्रयास कीजिए

1. कितने मिलीग्राम से एक किलोग्राम बनता है?
2. दवाई की गोलियों के एक बक्से में 2,00,000 गोलियाँ हैं, जिनमें प्रत्येक का भार 20 मिग्रा है। इस बक्से में रखी सभी गोलियों का कुल भार ग्रामों में कितना है और किलोग्रामों में कितना है?

पानी वाली एक साधारण बाल्टी की धारिता (capacity) प्राय: कितनी होती है? यह प्राय: 20 लीटर होती है। धारिता को लीटर में दर्शाया जाता है, परंतु कभी-कभी हमें एक छोटे मात्रक की भी आवश्यकता पड़ती है। यह मात्रक मिलीलीटर है। बालों के तेल, सफ़ाई करने वाले द्रव या एक सॉफ्ट ड्रिंक (पेय) की बोतलों पर जो मात्रा लिखी होती है वह उनके अंदर भरे द्रव की मात्रा को मिलीलीटर में दर्शाती है।

1 लीटर = 1000 मिलीलीटर

ध्यान दीजिए कि इन सभी मात्रकों में, हम कुछ सर्वनिष्ठ शब्दों जैसे किलो, मिली और सेंटी को पाते हैं। आपको याद रखना चाहिए कि किलो का अर्थ है हज़ार और यह इनमें सबसे बड़ा है और मिली का अर्थ है हज़ारवाँ भाग और यह सबसे छोटा है। किलो 1000 गुना दर्शाता है, जबकि मिली हज़ारवाँ भाग दर्शाता है। अर्थात् 1 किलोग्राम = 1000 ग्राम और 1 ग्राम = 1000 मिलीग्राम है।

इसी प्रकार, सेंटी सौवाँ भाग दर्शाता है। अर्थात् 1 मीटर = 100 सेंटीमीटर है।

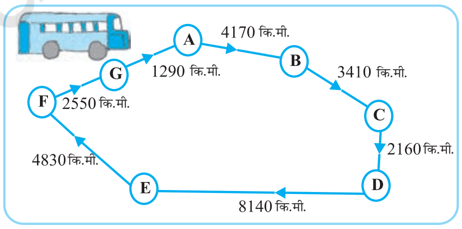
प्रयास कीजिए

एक बस ने अपनी यात्रा प्रारंभ की और 60 किमी/घंटा की चाल से विभिन्न स्थानों पर पहुँची। इस यात्रा को नीचे दर्शाया गया है।

(i) A से D तक जाने में बस द्वारा तय की गई कुल दूरी ज्ञात कीजिए।

(ii) D से G तक जाने में बस द्वारा तय की गई कुल दूरी ज्ञात कीजिए।

(iii) बस द्वारा तय की गई कुल दूरी ज्ञात कीजिए।



(iv) क्या आप C से D तक और D से E तक की दूरियों का अंतर ज्ञात कर सकते हैं?

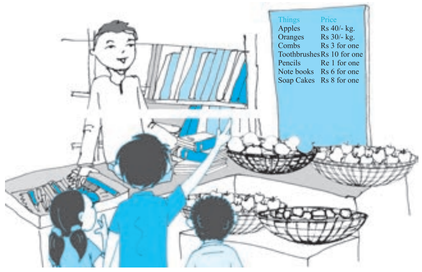
(v) बस द्वारा निम्नलिखित यात्रा में लिया समय ज्ञात कीजिए :

(a) A से B तक (b) C से D तक (c) E से G तक

(d) कुल यात्रा

रमन की दुकान

वस्तुएँ	दर
सेब	₹ 40 प्रति किग्रा
संतरा	₹ 30 प्रति किग्रा
कंघा	₹ 3 प्रति नग
दाँतों का ब्रुश	₹ 10 प्रति नग
पेंसिल	₹ 1 प्रति नग
अभ्यास-पुस्तिका	₹ 6 प्रति नग
साबुन की टिकिया	₹ 8 प्रति नग



पिछले वर्ष की बिक्री

सेब	2457 किग्रा
संतरा	3004 किग्रा
कंघा	22760
दाँतों का ब्रुश	25367
पेंसिल	38530
अभ्यास-पुस्तिका	40002
साबुन की टिकिया	20005

(a) क्या आप रमन द्वारा पिछले वर्ष बेचे गए सेब और संतरों का कुल भार ज्ञात कर सकते हैं?

सेबों का भार = ____________ किग्रा

संतरों का भार = ____________ किग्रा

अत:, कुल भार = ____________ किग्रा + ______ किग्रा = ______किग्रा

उत्तर : संतरों और सेबों का कुल भार = ___________

(b) क्या आप रमन द्वारा सेबों को बेचने से प्राप्त कुल धनराशि ज्ञात कर सकते हैं?

(c) क्या आप रमन द्वारा सेबों और संतरों को बेचने से प्राप्त कुल धनराशि ज्ञात कर सकते हैं?

(d) रमन द्वारा प्रत्येक वस्तु के बेचने से प्राप्त धनराशियों को दर्शाने वाली एक सारणी बनाइए। धनराशियों की इन प्रविष्टियों को अवरोही क्रम में व्यवस्थित कीजिए। वह कौन-सी वस्तु है जिससे रमन को सबसे अधिक धनराशि प्राप्त हुई? यह धनराशि क्या है?

जोड़, घटा, गुणा और भाग पर हम अनेक प्रश्न कर चुके हैं। यहाँ हम ऐसे कुछ और प्रश्न करेंगे। प्रारंभ करने से पहले निम्नलिखित उदाहरणों को देखिए तथा प्रश्नों के विश्लेषण का अनुसरण कीजिए और देखिए कि इन्हें किस प्रकार हल किया गया है।

उदाहरण 1 : वर्ष 1991 में सुंदरनगर की जनसंख्या 2,35,471 थी। वर्ष 2001 में पता चला कि जनसंख्या में 72,958 की वृद्धि हो गई। वर्ष 2001 में इस शहर की जनसंख्या क्या थी?

हल : 2001 में इस शहर की जनसंख्या

= 1991 में जनसंख्या + जनसंख्या में वृद्धि

= 2,35,471 + 72,958

अब,
$$\begin{array}{r} 235471 \\ +\ \ 72958 \\ \hline 308429 \\ \hline \end{array}$$

सलमा ने इन संख्याओं को इस प्रकार जोड़ा : 235471 = 200000 + 35000 + 471, 72958 = 72000 + 958 और फिर 200000 + 107000

+ 1429 = 308429 तथा मेरी ने इस जोड़ को इस प्रकार किया : 200000 + 35000 + 400 + 71 + 72000 + 900 + 58 = 308429

उत्तर : 2001 में शहर की जनसंख्या 3,08,429 थी।

तीनों विधियाँ सही हैं।

उदाहरण 2 : किसी राज्य में, वर्ष 2002–2003 में 7,43,000 साइकिलें बेची गईं। वर्ष 2003–04 में बेची गई साइकिलों की संख्या 8,00,100 थी। किस वर्ष में अधिक साइकिलें बेची गईं और कितनी अधिक बेची गईं?

हल : स्पष्ट है कि संख्या 8,00,100 संख्या 7,43,000 से अधिक है। अत:, उस राज्य में वर्ष 2003–04 में वर्ष 2002–03 से अधिक साइकिलें बेची गईं। अब,

$$\begin{array}{r} 800100 \\ -\ 743000 \\ \hline 057100 \\ \hline \end{array}$$

जोड़ कर उत्तर की जाँच कीजिए :

$$\begin{array}{r} 743000 \\ +\ \ 57100 \\ \hline 800100 \\ \hline \end{array}$$

(उत्तर सही है)

क्या आप इसे करने के और भी तरीके सोच सकते हैं?

उत्तर : वर्ष 2003–04 में 57,100 साइकिलें अधिक बेची गईं।

उदाहरण 3 : एक शहर में समाचार पत्र प्रतिदिन छपता है। एक प्रति में 12 पृष्ठ होते हैं। प्रतिदिन इस समाचार पत्र की 11,980 प्रतियाँ छपती हैं। प्रतिदिन सभी प्रतियों के लिए कितने पृष्ठ छपते हैं?

हल : प्रत्येक प्रति में 12 पृष्ठ हैं।

अत:, 11,980 प्रतियों में $12 \times 11,980$ पृष्ठ होंगे।

यह संख्या क्या होगी? 1,00,000 से अधिक या कम।

अब,

$$\begin{array}{r} 11980 \\ \times\ \ 12 \\ \hline 23960 \\ +\ 119800 \\ \hline 143760 \\ \hline \end{array}$$

उत्तर : प्रतिदिन सभी प्रतियों के लिए 1,43,760 पृष्ठ छपते हैं।

उदाहरण 4 : अभ्यास-पुस्तिकाएँ बनाने के लिए कागज़ की 75,000 शीट (sheet) उपलब्ध हैं। प्रत्येक शीट से अभ्यास-पुस्तिका के 8 पृष्ठ बनते हैं। प्रत्येक अभ्यास-पुस्तिका में 200 पृष्ठ हैं। उपलब्ध कागज़ से कितनी अभ्यास-पुस्तिकाएँ बनाई जा सकती हैं?

हल : प्रत्येक शीट से 8 पृष्ठ बनते हैं।

अतः, 75,000 शीटों से $8 \times 75,000$ पृष्ठ बनेंगे।

$$\begin{array}{r} 75000 \\ \times \quad\quad 8 \\ \hline 600000 \\ \hline \end{array}$$

इस प्रकार, अभ्यास-पुस्तिका बनाने के लिए 6,00,000 पृष्ठ उपलब्ध हैं।

अब, 200 पृष्ठों से एक अभ्यास-पुस्तिका बनती है।

अतः, 6,00,000 पृष्ठों से $6,00,000 \div 200$ अभ्यास-पुस्तिकाएँ बनेंगी।

अब,
$$\begin{array}{r|l} & 3000 \\ \cline{2-2} 200 & 600000 \\ & 600 \\ \cline{2-2} & 0000 \end{array}$$

उत्तर : 3,000 अभ्यास-पुस्तिकाएँ।

प्रश्नावली 1.2

1. किसी स्कूल में चार दिन के लिए एक पुस्तक प्रदर्शनी आयोजित की गई। पहले, दूसरे, तीसरे और अंतिम दिन खिड़की पर क्रमशः 1094, 1812, 2050 और 2751 टिकट बेचे गए। इन चार दिनों में बेचे गए टिकटों की कुल संख्या ज्ञात कीजिए।
2. शेखर एक प्रसिद्ध क्रिकेट खिलाड़ी है। वह टैस्ट मैचों में अब तक 6980 रन बना चुका है। वह 10,000 रन पूरे करना चाहता है। उसे कितने और रनों की आवश्यकता है?
3. एक चुनाव में, सफल प्रत्याशी ने 5,77,500 मत प्राप्त किए, जबकि उसके निकटतम प्रतिद्वंद्वी ने 3,48,700 मत प्राप्त किए। सफल प्रत्याशी ने चुनाव कितने मतों से जीता?
4. कीर्ति बुक-स्टोर ने जून के प्रथम सप्ताह में ₹ 2,85,891 मूल्य की पुस्तकें बेचीं। इसी माह के दूसरे सप्ताह में ₹ 4,00,768 मूल्य की पुस्तकें बेची गईं। दोनों सप्ताहों में कुल मिलाकर कितनी बिक्री हुई? किस सप्ताह में बिक्री अधिक हुई और कितनी अधिक?
5. अंकों 6, 2, 7, 4 और 3 में से प्रत्येक का केवल एक बार प्रयोग करते हुए, पाँच अंकों की बनाई जा सकने वाली सबसे बड़ी और सबसे छोटी संख्याओं का अंतर ज्ञात कीजिए।
6. एक मशीन औसतन एक दिन में 2,825 पेंच बनाती है। जनवरी 2006 में उस मशीन ने कितने पेंच बनाए?

7. एक व्यापारी के पास ₹78,592 थे। उसने 40 रेडियो खरीदने का ऑर्डर दिया तथा प्रत्येक रेडियो का मूल्य ₹1200 था। इस खरीदारी के बाद उसके पास कितनी धनराशि शेष रह जाएगी?
8. एक विद्यार्थी ने 7236 को 56 के स्थान पर 65 से गुणा कर दिया। उसका उत्तर सही उत्तर से कितना अधिक था? (**संकेत :** दोनों गुणा करना आवश्यक नहीं)।
9. एक कमीज़ सीने के लिए 2 मी 15 सेमी कपड़े की आवश्यकता है। 40 मी कपड़े में से कितनी कमीज़ें सी जा सकती हैं और कितना कपड़ा शेष बच जाएगा?

10. दवाइयों को बक्सों में भरा गया है और ऐसे प्रत्येक बक्स का भार 4 किग्रा 500 ग्रा है। एक वैन (Van) में जो 800 किग्रा से अधिक का भार नहीं ले जा सकती, ऐसे कितने बक्से लादे जा सकते हैं?
11. एक स्कूल और किसी विद्यार्थी के घर के बीच की दूरी 1 किमी 875 मी है। प्रत्येक दिन यह दूरी दो बार तय की जाती है। 6 दिन में उस विद्यार्थी द्वारा तय की गई कुल दूरी ज्ञात कीजिए।
12. एक बर्तन में 4 ली 500 मिली दही है। 25 मिली धारिता वाले कितने गिलासों में इसे भरा जा सकता है?

1.3.1 आकलन

समाचार

1. भारत और पाकिस्तान के बीच हुए एक हॉकी मैच को जिसे स्टेडियम में लगभग 51,000 दर्शकों ने देखा और विश्व-भर में 40 मिलियन लोगों ने टेलीविज़न पर देखा, हार-जीत का फ़ैसला न हो सका।
2. भारत और बंगलादेश के तटवर्तीय क्षेत्रों में आए एक चक्रवाती तूफ़ान में लगभग 2000 व्यक्तियों की मृत्यु हो गई और 50000 से अधिक घायल हुए।
3. रेलवे द्वारा प्रतिदिन 63,000 किलोमीटर से अधिक रेलपथ पर 13 मिलियन से अधिक यात्री यात्रा करते हैं।

क्या हम विश्वास के साथ कह सकते हैं कि इन समाचारों में जितने व्यक्ति कहे गए हैं वहाँ ठीक उतने ही व्यक्ति थे? उदाहरणार्थ,

(1) में, क्या स्टेडियम में ठीक 51,000 दर्शक थे? अथवा

क्या टेलीविज़न पर ठीक 40 मिलियन लोगों ने मैच देखा?

स्पष्टत:, नहीं। शब्द **लगभग** स्वयं यह दर्शाता है कि व्यक्तियों की संख्याएँ इन संख्याओं के निकटतम थीं। स्पष्ट रूप से, 51000 संख्याओं 50800 या 51300 में से कोई भी संख्या हो सकती है, परंतु 70000 नहीं होगी। इसी प्रकार, 40 मिलियन का अर्थ 39 मिलियन से बहुत अधिक और 41 मिलियन से कुछ कम हो सकता है। परंतु निश्चय ही इसका अर्थ 50 मिलियन नहीं है।

इसी प्रकार, भारतीय रेलवे द्वारा यात्रा करने वाले यात्रियों की वास्तविक संख्या दी हुई संख्या के बराबर नहीं हो सकती है, परंतु इससे कुछ अधिक या कम हो सकती है।

इन उदाहरणों में दी गई संख्याओं को ठीक-ठीक गिनकर (या यथार्थ रूप से) नहीं लिखा गया है, बल्कि ये उस संख्या के बारे में अनुमान देने वाले आकलन (estimate) हैं।

चर्चा कीजिए कि इनसे क्या सुझाव मिलते हैं।

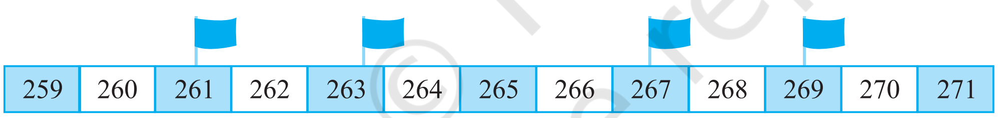
हम सन्निकट (approximate) मान कहाँ निकालते हैं? अपने घर पर होने वाले एक बड़े उत्सव की कल्पना कीजिए। पहला काम जो आप करेंगे वह यह होगा कि आप यह पता करेंगे कि आपके घर पर लगभग कितने मेहमान आ सकते हैं। क्या आप मेहमानों की ठीक (exact) संख्या का विचार लेकर प्रारंभ कर सकते हैं? व्यावहारिक रूप से यह असंभव है।

हमारे देश के वित्त मंत्री प्रति वर्ष बजट पेश करते हैं। मंत्री महोदय 'शिक्षा' मद के अंतर्गत कुछ राशि का प्रावधान रखते हैं। क्या यह राशि यथार्थ रूप से सही होगी? यह उस वर्ष देश में शिक्षा पर व्यय होने वाली आवश्यक धनराशि का केवल एक विवेकसंगत अच्छा अनुमान या आकलन (estimate) हो सकता है।

उन स्थितियों के बारे में सोचिए जहाँ आपको ठीक-ठीक संख्याओं की आवश्यकता पड़ती है तथा इनकी उन स्थितियों से तुलना कीजिए जहाँ आप केवल एक सन्निकट आकलित (estimated) संख्या से ही काम चला लेते हैं। ऐसी स्थितियों के तीन उदाहरण दीजिए।

1.3.2 सन्निकटन द्वारा निकटतम दहाई तक आकलन

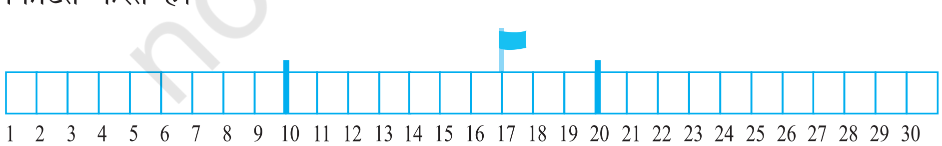
निम्नलिखित चित्र को देखिए :



(a) ज्ञात कीजिए कि कौन-से झंडे 270 की तुलना में 260 के अधिक समीप हैं।

(b) ज्ञात कीजिए कि कौन-से झंडे 260 की तुलना में 270 के अधिक समीप हैं।

पटरी की संख्याओं 10, 17 और 20 के स्थानों को देखिए। क्या संख्या 17 संख्या 10 के अधिक निकट है या 20 के? 17 और 20 के बीच का रिक्त स्थान 17 और 10 के बीच के रिक्त स्थान की तुलना में कम है। इसलिए, हम 17 को निकटतम दहाई तक 20 के रूप में सन्निकटित करते हैं।



अब 12 को लीजिए। यह भी 10 और 20 के बीच स्थित है। परंतु 12 संख्या 20 की तुलना में 10 से अधिक निकट है। इसलिए हम 12 को निकटतम दहाई तक 10 के रूप में सन्निकटित करते हैं।

आप 76 को निकटतम दहाई तक किस प्रकार सन्निकटित करेंगे? क्या यह 80 नहीं है?

हम देखते हैं कि संख्याएँ 1,2,3 और 4 संख्या 10 की तुलना में संख्या 0 के अधिक निकट हैं। इसलिए हम इन्हें 0 के रूप में सन्निकटित करते हैं। संख्याएँ 6, 7, 8 और 9 संख्या 10 के अधिक निकट हैं। इसलिए हम इन्हें 10 के रूप में सन्निकटित करते हैं। संख्या 5, संख्याओं 0 और 10 से बराबर की दूरी पर है। यह सामान्य परिपाटी है कि इसे 10 के रूप में सन्निकटित किया जाता है।

प्रयास कीजिए

इन संख्याओं को निकटतम दहाई तक सन्निकटित कीजिए :

28	32	52	41	39	48
64	59	99	215	1453	2936

1.3.3 सन्निकटन द्वारा निकटतम सैकड़े तक आकलन

संख्या 410 संख्या 400 के अधिक निकट है या 500 के अधिक निकट है?

410, संख्या 400 के अधिक निकट (समीप) है, इसलिए इसे निकटतम सौ तक 400 के रूप में सन्निकटित किया जाता है।

संख्या 889, संख्याओं 800 और 900 के बीच में है।

यह 900 के अधिक निकट है। इसलिए, इसे निकटतम सौ तक 900 के रूप में सन्निकटित किया जाता है।

संख्याएँ 1 से 49, संख्या 100 की तुलना में, संख्या 0 के अधिक निकट हैं। इसलिए, इन्हें 0 के रूप में सन्निकटित किया जाता है। 51 से 99 तक की संख्याएँ 0 की तुलना में 100 से अधिक निकट हैं। इसलिए, इन्हें 100 के रूप में सन्निकटित किया जाता है। संख्या 50 संख्याओं 0 और 100 से बराबर दूरी पर है। सामान्य परिपाटी के अनुसार, इसे 100 के रूप में सन्निकटित किया जाता है।

जाँच कीजिए कि निम्नलिखित सन्निकटन (सैकड़े तक) सही हैं या नहीं :

841 ⟶ 800; 9537 ⟶ 9500; 49730 ⟶ 49700;
2546 ⟶ 2500; 286 ⟶ 300; 5750 ⟶ 5800;
168 ⟶ 200; 149 ⟶ 100; 9870 ⟶ 9800.

उन्हें सही कीजिए जो गलत हैं।

1.3.4 सन्निकटन द्वारा निकटतम हज़ार तक आकलन

हम जानते हैं कि 1 से 499 तक की संख्याएँ 1000 की तुलना में 0 के अधिक निकट हैं। इसलिए, इन्हें 0 के रूप में सन्निकटित करते हैं। 501 से 999 तक की संख्याएँ 0 की तुलना में 1000 के अधिक निकट हैं। इसलिए, इन्हें 1000 के रूप में सन्निकटित किया जाता है।

संख्या 500 को भी 1000 के रूप में सन्निकटित किया जाता है।

निम्नलिखित सन्निकटनों की जाँच कीजिए और उन्हें सही कीजिए जो गलत हैं।

2573 ⟶ 3000; 53552 ⟶ 53000;
6404 ⟶ 6000; 65437 ⟶ 65000;
7805 ⟶ 7000; 3499 ⟶ 4000

प्रयास कीजिए

दी हुई संख्या को निकटतम दहाई, सौ, हज़ार और दस हज़ार तक सन्निकटित कीजिए :

दी हुई संख्या	निम्न के निकटतम	सन्निकटित रूप
75847	दहाई	________________
75847	सौ	________________
75847	हज़ार	________________
75847	दस हज़ार	________________

1.3.5 संख्या संक्रियाओं के परिणामों का आकलन

हम संख्याओं को किस प्रकार जोड़ते हैं? हम संख्याओं को एक एल्गोरिथ्म (algorithm) (दी हुई विधि) का चरणबद्ध रूप से प्रयोग करते हुए जोड़ते हैं। हम संख्याओं को यह ध्यान रखते हुए लिखते हैं कि एक ही स्थान (इकाई, दहाई, सौ इत्यादि) के अंक एक ही स्तंभ (Column) में रहें। उदाहरणार्थ, 3946 + 6579 + 2050 को निम्न रूप में लिखते हैं :

	TTh	Th	H	T	O
		3	9	4	6
		6	5	7	9
+		2	0	5	0

फिर हम इकाई वाले स्तंभ की संख्याओं को जोड़ते हैं। यदि आवश्यक हो, तो हम एक उचित संख्या को हासिल के रूप में दहाई के स्थान पर ले जाते हैं, जैसे कि इस स्थिति में है। फिर हम इसी प्रकार दहाई के स्तंभ की संख्याओं को जोड़ते हैं और ऐसा आगे चलता रहता है। आप शेष प्रश्न को स्वयं पूर्ण कर सकते हैं। इस प्रक्रिया में स्पष्टत: समय लगता है।

अनेक स्थितियों में, हमें उत्तरों को अधिक तीव्रता से ज्ञात करने की आवश्यकता होती है। उदाहरणार्थ, जब आप किसी मेले या बाज़ार में कुछ धनराशि लेकर जाते हैं, तो आकर्षक वस्तुओं की किस्मों और मात्राओं को देखकर वहाँ आप सोचते हैं कि सभी को खरीद लिया जाए। आपको तुरंत यह निर्णय लेने की आवश्यकता होती है कि आप किन-किन वस्तुओं को खरीद सकते हैं। इसके लिए आपको आवश्यक धनराशि का आकलन करने की आवश्यकता पड़ती है, जो उन वस्तुओं के मूल्यों का योग होती है जिन्हें आप खरीदना चाहते हैं।

किसी विशेष दिन, एक व्यापारी को दो स्थानों से धनराशि प्राप्त होनी है। एक स्थान से प्राप्त होने वाली धनराशि ₹ 13,569 है और अन्य स्थान से प्राप्त होने वाली धनराशि ₹ 26,785 है। उसे शाम तक किसी अन्य व्यक्ति को ₹ 37,000 देने हैं। वह संख्याओं को उनके निकटतम हज़ारों तक सन्निकटित करता है और तुरंत कच्चा या रफ (rough) उत्तर निकाल लेता है। वह खुश हो जाता है कि उसके पास पर्याप्त धनराशि है।

क्या आप सोचते हैं कि उसके पास पर्याप्त धनराशि होगी? क्या आप बिना यथार्थ योग किए यह बता सकते हैं?

शीला और मोहन को अपना मासिक बजट बनाना है उन्हें परिवहन, स्कूल की आवश्यकताओं, किराने का सामान, दूध और कपड़ों पर होने वाले अपने मासिक व्यय के बारे में भी जानकारी है तथा अन्य नियमित व्ययों की भी जानकारी है। इस महीने में उन्हें घूमने भी जाना है और उपहार भी खरीदने हैं। वे इन सभी पर होने वाले व्ययों का आकलन करते हैं और उन्हें जोड़कर देखते हैं कि जो राशि उनके पास है वह पर्याप्त है या नहीं।

क्या वे हज़ारों तक सन्निकटित करेंगे, जैसा कि व्यापारी ने किया था?

ऐसी पाँच और स्थितियों के बारे में सोचिए और चर्चा कीजिए, जहाँ हमें योग या अंतरों का आकलन करना पड़ता है।

क्या हम इन सभी में एक ही स्थान तक सन्निकट मान ज्ञात करते हैं?

जब आप संख्याओं के परिणामों का आकलन करते हैं, तो उसके लिए कोई निश्चित नियम नहीं है। यह विधि इस पर निर्भर करती है कि परिशुद्धता की वांछित मात्रा कितनी है, आकलन कितनी जल्दी चाहिए तथा सबसे महत्त्वपूर्ण बात है कि अनुमानित उत्तर कितना अर्थपूर्ण होगा।

1.3.6 योग अथवा अंतर का आकलन

जैसा कि हमने ऊपर देखा, हम एक संख्या को किसी भी स्थान तक सन्निकटित कर सकते हैं। व्यापारी ने धनराशि को निकटतम हज़ारों तक सन्निकटित किया और संतुष्ट हो गया कि उसके पास पर्याप्त धनराशि है। इसलिए जब आपको किसी योग अथवा अंतर का आकलन करना है, तो आपको यह पता होना चाहिए कि आप क्यों सन्निकटित कर रहे हैं और इसलिए किस स्थान तक आपको सन्निकटित करना है। निम्नलिखित उदाहरणों को देखिए :

उदाहरण 5 : 5,290 + 17,986 का आकलन कीजिए।

हल : हम देखते हैं कि 17,986 > 5,290 है।

हम निकटतम हज़ारों तक सन्निकटित करते हैं।

17,986 सन्निकटित होता है	18,000
+5,290 सन्निकटित होता है	+ 5,000
आकलित योग =	23,000

क्या यह विधि काम करती है? आप यथार्थ उत्तर ज्ञात करके जाँच कर सकते हैं कि यह आकलन विवेकपूर्ण है या नहीं।

उदाहरण 6 : 5,673 – 436 का आकलन कीजिए।

हल : प्रारंभ में, हम हज़ारों तक सन्निकटित करते हैं। (क्यों?)

5,673 सन्निकटित होता है	6,000
– 436 सन्निकटित होता है	– 0
आकलित अंतर =	6,000

यह विवेकपूर्ण आकलन नहीं है। यह विवेकपूर्ण क्यों नहीं है? निकटतम आकलन प्राप्त करने के लिए, आइए प्रत्येक संख्या को निकटतम सौ तक सन्निकटित करने का प्रयत्न करें।

5,673 सन्निकटित होता है		5,700
– 436 सन्निकटित होता है	–	400
आकलित अंतर =		5,300

यह एक अच्छा और अधिक अर्थपूर्ण आकलन है।

1.3.7 आकलन करना : गुणनफल

हम गुणनफल का किस प्रकार आकलन करते हैं?

19×78 के लिए आकलन क्या है?

स्पष्ट है कि यह गुणनफल 2000 से कम है। क्यों? यदि हम 19 का निकटतम दहाई तक मान निकालें, तो हमें 20 प्राप्त होता है और फिर 78 का निकटतम दहाई तक मान निकालें, तो 80 प्राप्त होता है। अब $20 \times 80 = 1600$ है।

63×182 को देखिए।

यदि हम दोनों संख्याओं का निकटतम सौ तक का मान निकालें, तो हमें $100 \times 200 = 20{,}000$ प्राप्त होता है। यह वास्तविक गुणनफल से बहुत अधिक है। इसलिए अब हम क्या करें? एक अधिक विवेकपूर्ण आकलन ज्ञात करने के लिए हम 63 और 182 दोनों को निकटतम दहाई तक सन्निकटित करते हैं। ये क्रमशः 60 और 180 हैं। इसे हम 60×180 अर्थात् 10,800 प्राप्त करते हैं। यह एक अच्छा आकलन है, परंतु यह इतनी जल्दी प्राप्त नहीं होता है। यदि हम 63 को निकटतम दहाई तक 60 लें और 182 को निकटतम सौ तक 200 लें, तो हमें $60 \times 200 = 12{,}000$ प्राप्त होता है, यह गुणनफल का एक अच्छा आकलन है और जल्दी भी प्राप्त हो जाता है।

सन्निकटन का व्यापक नियम यह है कि प्रत्येक गुणा की जाने वाली संख्या को उसके सबसे बड़े स्थान तक सन्निकटित कीजिए और सन्निकटित संख्याओं को गुणा कर दीजिए। इस प्रकार, उपरोक्त उदाहरण में हमने 63 को दहाई तक और 182 को सौ तक सन्निकटित किया है।

अब उपरोक्त नियम का प्रयोग करके, 81×479 का आकलन कीजिए।

479 सन्निकटित होता है 500 के (सौ तक सन्निकटित)

81 सन्निकटित होता है 80 के (दहाई तक सन्निकटित)

अतः, आकलित गुणनफल $= 500 \times 80 = 40{,}000$ है।

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित गुणनफलों का आकलन कीजिए :

(a) 87×313 (b) 9×795

(c) 898×785 (d) 958×387

ऐसे ही पाँच और प्रश्न बनाइए और उन्हें हल कीजिए।

आपके लिए आकलनों का एक महत्त्वपूर्ण उपयोग यह है कि आप अपने उत्तरों की जाँच कर सकते हैं। मान लीजिए आपने 37×1889 ज्ञात किया है, परंतु आप निश्चित नहीं हैं कि

उत्तर सही है या नहीं। इस गुणनफल का एक तुरंत (जल्दी) प्राप्त होने वाला और विवेकपूर्ण आकलन $40 \times 2000 = 80000$ है। यदि आपका उत्तर 80,000 के निकट है, तो संभवतः आपका उत्तर सही है। दूसरी ओर, यदि यह 8000 या 8,00,000 के निकट है, तो आपके गुणा करने में अवश्य ही कुछ गलती हुई है।

प्रश्नावली 1.3

1. व्यापक नियम का प्रयोग करते हुए, निम्नलिखित में से प्रत्येक का आकलन कीजिए :
   (a) $730 + 998$ (b) $796 - 314$
   (c) $12,904 + 2,888$ (d) $28,292 - 21,496$
   जोड़ने, घटाने और उनके परिणामों के आकलन के दस और उदाहरण बनाइए।
2. एक मोटेतौर पर (Rough) आकलन (सौ तक सन्निकटन) और एक निकटतम आकलन (दस तक सन्निकटन) दीजिए :
   (a) $439 + 334 + 4,317$ (b) $1,08,734 - 47,599$
   (c) $8325 - 491$ (d) $4,89,348 - 48,365$
   ऐसे चार और उदाहरण बनाइए।
3. व्यापक नियम का प्रयोग करते हुए, निम्नलिखित गुणनफलों का आकलन कीजिए :
   (a) 578×161 (b) 5281×3491
   (c) 1291×592 (d) 9250×29
   ऐसे चार और उदाहरण बनाइए।

1.4 कोष्ठकों का प्रयोग

मीरा ने बाज़ार से 6 अभ्यास-पुस्तिकाएँ खरीदीं जिनका मूल्य ₹10 प्रति पुस्तिका था। उसकी बहन सीमा ने इसी प्रकार की 7 अभ्यास-पुस्तिकाएँ खरीदीं। उनके द्वारा दी गई कुल धनराशि ज्ञात कीजिए।

सीमा ने धनराशि इस प्रकार परिकलित की	**मीरा ने धनराशि इस प्रकार परिकलित की**
$6 \times 10 + 7 \times 10$	$6 + 7 = 13$
$= 60 + 70$	और 13×10
उत्तर = ₹130	उत्तर = ₹130

आप देख सकते हैं कि सीमा और मीरा के उत्तर प्राप्त करने की विधियों में कुछ अंतर है, परंतु दोनों के उत्तर समान हैं और प्राप्त परिणाम सही है। क्यों?

सीमा ने कहा कि मीरा ने $7 + 6 \times 10$ करके उत्तर प्राप्त किया है।

अप्पू बताता है कि $7 + 6 \times 10 = 7 + 60 = 67$ है। लेकिन मीरा ने जो उत्तर प्राप्त किया है वह यह नहीं है। बस तीनों विद्यार्थी उलझन में पड़ जाते हैं।

ऐसी स्थितियों में उलझन दूर करने के लिए हम कोष्ठकों (brackets) का प्रयोग कर सकते हैं। हम कोष्ठकों का प्रयोग करके 6 और 7 को मिलाकर एक समूह बना सकते हैं,

जो दर्शाएगा कि इस समूह को एक अकेली संख्या समझा जाए। जिससे उत्तर इस प्रकार प्राप्त होता है :

$(6 + 7) \times 10 = 13 \times 10$

यह वही है जो मीरा ने किया है। उसने पहले 6 और 7 को जोड़ा और फिर प्राप्त योग को 10 से गुणा कर दिया।

कोष्ठकों का प्रयोग यह स्पष्ट रूप में हमें बताता है कि *पहले कोष्ठकों ( ) के अंदर दी हुई संख्याओं को एक अकेली संख्या के रूप में बदलिए और फिर बाहर दी हुई संक्रिया कीजिए जो यहाँ 10 से गुणा करना है।*

प्रयास कीजिए

1. कोष्ठकों का प्रयोग करते हुए, निम्नलिखित में से प्रत्येक के लिए व्यंजक लिखिए :
   (a) नौ और दो के योग की चार से गुणा।
   (b) अठारह और छः के अंतर को चार से भाग।
   (c) पैंतालीस को तीन और दो के योग के तिगुने से भाग देना।
2. $(5 + 8) \times 6$ के लिए तीन विभिन्न स्थितियाँ लिखिए।
   (ऐसी एक स्थिति है : सोहनी और रीता ने 6 दिन कार्य किया। सोहनी 5 घंटे प्रतिदिन कार्य करती है और रीता 6 घंटे प्रतिदिन कार्य करती है। दोनों ने एक सप्ताह में कुल कितने घंटे कार्य किया?)
3. निम्नलिखित के लिए पाँच स्थितियाँ लिखिए, जहाँ कोष्ठकों का प्रयोग आवश्यक हो :
   (a) $7(8 – 3)$ (b) $(7 + 2)(10 – 3)$

1.4.1 कोष्ठकों का प्रसार (खोलना) (हटाना)

अब देखिए कि किस प्रकार कोष्ठकों के प्रयोग और उनके प्रसार (खोलने या हटाने) से, हमें अपने कार्य को क्रमबद्ध रूप से करने में सहायता मिलती है। क्या आप सोचते हैं कि कोष्ठकों का बिना प्रयोग किए जिन चरणों का हम पालन कर रहे हैं उन्हें समझ पाएँगे?

(i) $7 \times 109 = 7 \times (100 + 9) = 7 \times 100 + 7 \times 9 = 700 + 63 = 763$

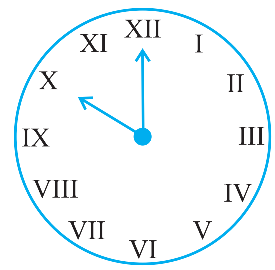
(ii) $102 \times 103 = (100 + 2) \times (100 + 3)$
$= 100 \times 100 + 2 \times 100 + 100 \times 3 + 2 \times 3$
$= 10,000 + 200 + 300 + 6 = 10,000 + 500 + 6$
$= 10,506$

(iii) $17 \times 109 = (10 + 7) \times 109 = 10 \times 109 + 7 \times 109$
$= 10 \times (100 + 9) + 7 \times (100 + 9)$
$= 10 \times 100 + 10 \times 9 + 7 \times 100 + 7 \times 9$
$= 1000 + 90 + 700 + 63 = 1,790 + 63 = 1,853$

1.5 रोमन संख्यांक

अभी तक हम हिंदू-अरेबिक संख्यांकों (Hindu Arabic Numerals) की पद्धति का ही प्रयोग करते रहे हैं। यह एकमात्र संख्यांक पद्धति नहीं है। संख्यांक लिखने की पुरानी पद्धतियों

में से एक पद्धति रोमन संख्यांकों (Roman Numerals) की पद्धति है। यह पद्धति अभी भी अनेक स्थानों पर प्रयोग की जाती है। उदाहरणार्थ, हम घड़ियों में रोमन संख्यांकों का प्रयोग देख सकते हैं। इनका प्रयोग स्कूल की समय-सारणी में कक्षाओं के लिए भी किया जाता है, इत्यादि।



ऐसे तीन और उदाहरण ज्ञात कीजिए जहाँ रोमन संख्यांकों का प्रयोग होता है।

रोमन संख्यांक

I,	II,	III,	IV,	V,	VI,	VII,	VIII,	IX,	X

क्रमशः संख्याएँ 1,2,3,4,5,6,7,8,9 और 10 व्यक्त करते हैं। इसके बाद 11 के लिए XI और 12 के लिए XII,... 20 के लिए XX का प्रयोग होता है।

इस पद्धति के कुछ और संख्यांक संगत हिंदू-अरेबिक संख्यांकों के साथ इस प्रकार हैं:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

इस पद्धति के नियम इस प्रकार हैं :

(a) यदि किसी संकेत की पुनरावृत्ति होती है, तो जितनी बार वह आता है उसका मान उतनी ही बार जोड़ दिया जाता है। अर्थात् II बराबर 2 है, XX बराबर 20 है और XXX बराबर 30 है।

(b) कोई संकेत तीन से अधिक बार नहीं आता है। परंतु संकेतों V, L और D की कभी पुनरावृत्ति नहीं होती है।

(c) यदि छोटे मान वाला कोई संकेत एक बड़े मान वाले संकेत के दाईं ओर जाता है, तो बड़े मान में छोटे मान को जोड़ दिया जाता है। जैसे :

VI = 5 + 1 = 6   XII = 10 + 2 = 12

LXV = 50 + 10 + 5 = 65

(d) यदि छोटे मान वाला कोई संकेत बड़े मान वाले किसी संकेत के बाईं ओर आता है, तो बड़े मान में से छोटे मान को घटा दिया जाता है। जैसे :

IV = 5 – 1 = 4   IX = 10 – 1 = 9

XL = 50 – 10 = 40   XC = 100 – 10 = 90

(e) संकेतों V, L और D को कभी भी बड़े मान वाले संकेत के बाईं ओर नहीं लिखा जाता है। अर्थात् V, L और D के मानों को कभी भी घटाया नहीं जाता है।

संकेत I को केवल V और X में से घटाया जा सकता है। संकेत X को केवल L, M और C में से ही घटाया जा सकता है।

इन नियमों का पालन करने से, हमें प्राप्त होता है :

1	=	I	20	=	XX
2	=	II	30	=	XXX
3	=	III	40	=	XL
4	=	IV	50	=	L
5	=	V	60	=	LX
6	=	VI	70	=	LXX
7	=	VII	80	=	LXXX
8	=	VIII	90	=	XC
9	=	IX	100	=	C
10	=	X			

(a) उपरोक्त सारणी में छूटी हुई संख्याओं को रोमन पद्धति में लिखिए।

(b) XXXX, VX, IC, XVV ... इत्यादि, नहीं लिखे जाते हैं। क्या आप बता सकते हैं क्यों?

उदाहरण 7 : निम्नलिखित को रोमन संख्यांकों में लिखिए :

(a) 69 (b) 98

हल : (a) 69 = 60 + 9
= (50 + 10) + 9
= LX + IX

इसलिए 69 = LX IX

(b) 98 = 90 + 8
= (100 – 10) + 8
= XC + VIII

इसलिए 98 = XCVIII

प्रयास कीजिए

रोमन पद्धति में लिखिए

1. 73
2. 92

हमने क्या चर्चा की?

1. दो संख्याओं में वही संख्या बड़ी होती है, जिसमें अंकों की संख्या अधिक होती है। यदि दोनों में अंकों की संख्या समान है, तब हम उनके सबसे बाएँ स्थित अंकों की तुलना करते हैं और जिस संख्या में यह अंक बड़ा होगा वही बड़ी भी होगी। अगर ये अंक भी समान हैं, तब हम इसी प्रकार अंकों की तुलना करते जाते हैं।
2. दिए गए अंकों से संख्या बनाते समय, ध्यान रखना चाहिए कि संख्या को किन प्रतिबंधों के साथ बनाना है। जैसे अंकों 7, 8, 3 व 5 से, किसी भी अंक को बिना दोहराए, चार अंकों की बड़ी से बड़ी संख्या बनाने के लिए सबसे बड़े अंक 8 को सबसे बाईं ओर रखना होगा और फिर उससे छोटे अंक रखते जाएँगे।
3. चार अंकों की सबसे छोटी संख्या 1000 है। जिसका अर्थ है कि तीन अंकों की सबसे बड़ी संख्या 999 होगी। पाँच अंकों की सबसे बड़ी संख्या 10,000 (दस हज़ार) है, जिसका अर्थ है कि चार अंकों की बड़ी से बड़ी संख्या 9999 है।

इसी प्रकार आगे, छः अंकों की छोटी से छोटी संख्या 1,00,000 (एक लाख) है जिसका अर्थ है कि पाँच अंकों की बड़ी से बड़ी संख्या 99999 है। यही क्रम और बड़ी संख्याओं के लिए भी लागू होता है।

4. अल्पविरामों का प्रयोग, संख्याओं के लिखने तथा पढ़ने में सहायता करता है। भारतीय संख्यांकन पद्धति में पहला अल्पविराम दाईं ओर से प्रारंभ कर तीन अंकों बाद और बाकी दो-दो अंकों बाद लगाए जाते हैं और ये अल्पविराम क्रमशः हज़ार, लाख व करोड़ को अलग-अलग करते हैं। अंतर्राष्ट्रीय संख्यांकन पद्धति में अल्पविराम दाईं ओर से प्रारंभ कर तीन-तीन अंकों के बाद लगाए जाते हैं। तीन और छः अंकों के बाद अल्पविराम क्रमशः हज़ार व मिलियन को अलग-अलग करते हैं।
5. दैनिक जीवन में अनेक स्थानों पर हमें बड़ी-बड़ी संख्याओं की भी आवश्यकता होती है। जैसे किसी विद्यालय में विद्यार्थियों की संख्या, गाँव या शहर की जनसंख्या बड़े-बड़े लेन-देन में धन तथा दो बड़े शहरों के बीच की दूरी।
6. याद रखिए किलो का अर्थ है—हज़ार, सेंटी का अर्थ है—सौवाँ भाग तथा मिली का अर्थ है—हज़ारवाँ भाग, इस प्रकार 1 किलोमीटर = 1000 मीटर, 1 मीटर = 100 सेंटीमीटर = 1000 मिलीमीटर
7. अनेक स्थितियों में हमें पूर्णतया सही-सही संख्याओं की आवश्यकता नहीं होती बल्कि एक उपयुक्त आकलन से ही काम चल सकता है। जैसे एक अंतर्राष्ट्रीय हॉकी मैच के दर्शकों की संख्या बताने के लिए कह देते हैं कि लगभग 51,000 दर्शकों ने मैच देखा। यहाँ हमें दर्शकों की सही संख्या की आवश्यकता नहीं है।
8. आकलन में किसी संख्या को एक वांछित मात्रा तक परिशुद्ध करना होता है। जैसे 4117 का सन्निकटन, हज़ारों में 4000 तथा सैकड़ों में 4100 किया जा सकता है, जो आवश्यकता पर निर्भर करता है।
9. अनेक स्थितियों में हमें संख्याओं पर संक्रियाओं के फलस्वरूप प्राप्त परिणामों का भी आकलन उपयोगी सिद्ध होता है। ऐसे आकलनों में हम पहले प्रयोग होने वाली संख्याओं को सन्निकटित कर शीघ्रता से परिणाम प्राप्त कर लेते हैं।

पूर्ण संख्याएँ

अध्याय 2

0651CH02

2.1 भूमिका

जैसा कि हम जानते हैं, जब हम गिनना प्रारंभ करते हैं तब हम 1, 2, 3, 4,... का प्रयोग करते हैं। जब हम गिनती प्रारंभ करते हैं, ये हमारे सम्मुख प्राकृतिक रूप से आती हैं। इसीलिए, गणितज्ञ इन गणन (गिनती गिनने वाली) संख्याओं (Counting Numbers) को प्राकृत संख्याएँ (Natural Numbers) कहते हैं।

पूर्ववर्ती और परवर्ती

दी हुई एक प्राकृत संख्या में अगर 1 जोड़ दें, तो आप अगली प्राकृत संख्या प्राप्त कर सकते हैं। अर्थात् आप उसका परवर्ती (successor) प्राप्त कर लेते हैं।

16 का परवर्ती 16 + 1 = 17, 19 का परवर्ती 19 +1 = 20 है और इस प्रकार आगे भी चलता रहेगा।

संख्या 16 संख्या 17 से ठीक पहले आती है। हम कहते हैं कि 17 का पूर्ववर्ती (predecessor) 17–1=16 है, 20 का पूर्ववर्ती 20 – 1 = 19 है, इत्यादि।

प्रयास कीजिए

1. 19; 1997; 12000; 49; 100000; 2440701; 100199 और 208090 के पूर्ववर्ती और परवर्ती लिखिए।
2. क्या कोई ऐसी प्राकृत संख्या है जिसका कोई पूर्ववर्ती नहीं है?
3. क्या कोई ऐसी प्राकृत संख्या है जिसका कोई परवर्ती नहीं है? क्या कोई अंतिम प्राकृत संख्या है?

संख्या 3 का एक पूर्ववर्ती है और एक परवर्ती है। 2 के बारे में आप क्या सोचते हैं? इसका परवर्ती 3 है और पूर्ववर्ती 1 है। क्या 1 के परवर्ती और पूर्ववर्ती दोनों हैं?

हम अपने स्कूल के बच्चों की संख्या को गिन सकते हैं, हम किसी शहर में रहने वाले व्यक्तियों की संख्या को भी गिन सकते हैं; हम भारत में रहने वाले व्यक्तियों की संख्या को गिन सकते हैं। संपूर्ण विश्व के व्यक्तियों की संख्या को भी गिना जा सकता है। हो सकता है कि हम आकाश (आसमान) में स्थित तारों या अपने सिर के बालों की संख्या को गिन न पाएँ, परंतु यदि हम इन्हें गिन पाएँ, तो इनके लिए भी कोई संख्या अवश्य होगी। फिर हम ऐसी संख्या में 1 जोड़ कर उससे बड़ी संख्या प्राप्त कर लेते हैं। ऐसी स्थिति में हम दो व्यक्तियों के सिरों के कुल बालों की संख्या तक को लिख सकते हैं।

अब यह शायद स्पष्ट है कि सबसे बड़ी कोई प्राकृत संख्या नहीं है। उपरोक्त प्रश्नों के अतिरिक्त, हमारे सम्मुख अनेक अन्य प्रश्न आते हैं जब हम प्राकृत संख्याओं के साथ कार्य करते हैं। आप ऐसे कुछ प्रश्नों के बारे में सोच सकते हैं और अपने मित्रों के साथ उनकी चर्चा कर सकते हैं। आप इन प्रश्नों में से अनेक के उत्तरों को संभवतः ज्ञात नहीं कर पाएँगे!

2.2 पूर्ण संख्याएँ

हम देख चुके हैं कि प्राकृत संख्या 1 का कोई पूर्ववर्ती नहीं होता है। प्राकृत संख्याओं के संग्रह (Collection) में हम 0 (शून्य) को 1 के पूर्ववर्ती के रूप में सम्मिलित करते हैं।

प्राकृत संख्याएँ शून्य के साथ मिलकर पूर्ण संख्याओं (Whole numbers) का संग्रह बनाती हैं।

प्रयास कीजिए

1. क्या सभी प्राकृत संख्याएँ पूर्ण संख्याएँ भी हैं?
2. क्या सभी पूर्ण संख्याएँ प्राकृत संख्याएँ भी हैं?
3. सबसे छोटी पूर्ण संख्या कौन-सी है?
4. सबसे बड़ी पूर्ण संख्या कौन-सी है?

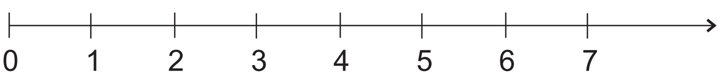
अपनी पिछली कक्षाओं में, आप पूर्ण संख्याओं पर सभी मूलभूत संक्रियाएँ, जैसे–जोड़, व्यवकलन, गुणा और भाग (विभाजन) करना सीख चुके हैं। आप यह भी जानते हैं कि इनका प्रश्नों को हल करने में किस प्रकार अनुप्रयोग किया जाता है। आइए, इन संक्रियाओं को एक संख्या रेखा पर करें। परंतु ऐसा करने से पहले, आइए ज्ञात करें कि संख्या रेखा क्या होती है।

2.3 संख्या रेखा

एक रेखा खींचिए। इस पर एक बिंदु अंकित कीजिए। इस बिंदु को 0 नाम दीजिए। 0 के दाईं ओर एक अन्य बिंदु अंकित कीजिए। इसे 1 नाम दीजिए।

0 और 1 से नामांकित इन बिंदुओं के बीच की दूरी एक मात्रक दूरी (unit distance) कहलाती है। इसी रेखा पर 1 के दाईं ओर 1 मात्रक दूरी पर एक बिंदु अंकित कीजिए और 2 से नामांकित कीजिए। इसी विधि का प्रयोग करते हुए, संख्या रेखा पर एक-एक मात्रक दूरी पर बिंदुओं को 3, 4, 5, ... से नामांकित करते रहिए। आप दाईं ओर किसी भी पूर्ण संख्या तक जा सकते हैं।

नीचे दी हुई रेखा पूर्ण संख्याओं के लिए संख्या रेखा है :



बिंदु 2 और 4 के बीच की दूरी क्या है? निश्चित रूप से यह दूरी 2 मात्रक है। क्या आप बिंदु 2 और 6 तथा 2 और 7 के बीच की दूरियों को बता सकते हैं?

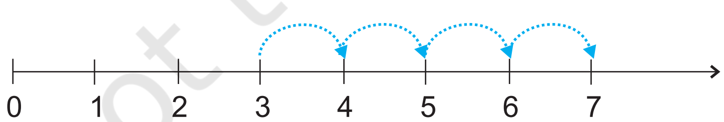
संख्या रेखा पर आप देखेंगे कि संख्या 7 संख्या 4 के दाईं ओर स्थित है और संख्या 7 संख्या 4 से बड़ी है, अर्थात् $7 > 4$ है। संख्या 8 संख्या 6 के दाईं ओर स्थित है और $8 > 6$ है। इन प्रेक्षणों के आधार पर, हम कह सकते हैं कि दो पूर्ण संख्याओं में से वह संख्या बड़ी होती है, जो संख्या रेखा पर अन्य संख्या के दाईं ओर स्थित होती है। हम यह भी कह सकते हैं कि बाईं ओर की पूर्ण संख्या छोटी होती है। उदाहरणार्थ, $4 < 9$ है; 4, 9 के बाईं ओर स्थित है। इसी प्रकार, $12 > 5$; 12, 5 के दाईं ओर स्थित है।

आप 10 और 20 के बारे में क्या कह सकते हैं?

30, 12 और 18 की संख्या रेखा पर स्थितियाँ देखिए। कौन-सी संख्या सबसे बाईं ओर स्थित है? क्या आप 1005 और 9756 में से बता सकते हैं कि कौन-सी संख्या दूसरी संख्या के दाईं ओर स्थित है? संख्या रेखा पर 12 के परवर्ती और 7 के पूर्ववर्ती को दर्शाइए।

संख्या रेखा पर योग

पूर्ण संख्याओं के योग को संख्या रेखा पर दर्शाया जा सकता है। आइए 3 और 4 के योग को देखें।

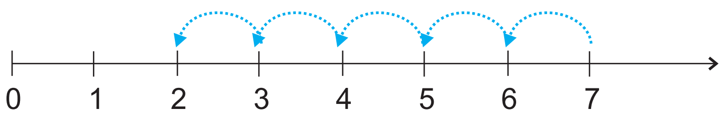


तीर के सिरे पर बिंदु 3 है। 3 से प्रारंभ कीजिए। चूँकि हमें इस संख्या में 4 जोड़ना है, इसलिए हम दाईं ओर चार कदम 3 से 4, 4 से 5, 5 से 6 और 6 से 7 चलते हैं, जैसा कि ऊपर दिखाया गया है। चौथे कदम के अंतिम तीर के सिरे पर बिंदु 7 है। इस प्रकार, 3 और 4 का योग 7 है। अर्थात् $3 + 4 = 7$ है।

प्रयास कीजिए

संख्या रेखा का प्रयोग करके, $4 + 5$; $2 + 6$; $3 + 5$ और $1 + 6$ को ज्ञात कीजिए।

व्यवकलन (घटाना) : दो पूर्ण संख्याओं के व्यवकलन को भी संख्या रेखा पर दर्शाया जा सकता है। आइए $7 - 5$ ज्ञात करें।

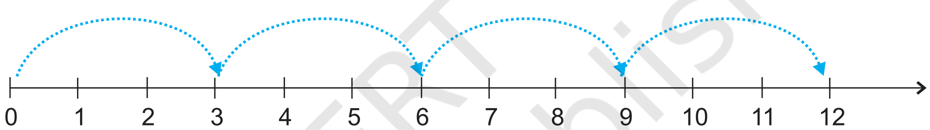


तीर के सिरे पर बिंदु 7 है। 7 से प्रारंभ कीजिए। चूँकि 5 को घटाया जाना है, इसलिए हम बाईं ओर 1 मात्रक वाले पाँच कदम चलते हैं। हम बिंदु 2 पर पहुँचते हैं। हमें $7 - 5 = 2$ प्राप्त होता है।

प्रयास कीजिए

संख्या रेखा का प्रयोग करके $8 - 3$; $6 - 2$ और $9 - 6$ ज्ञात कीजिए।

गुणन (गुणा) : अब हम संख्या रेखा पर पूर्ण संख्याओं के गुणन को देखते हैं।



आइए 4×3 ज्ञात करें

0 से प्रारंभ कीजिए और दाईं ओर एक बार में 3 मात्रकों के बराबर के कदम चलिए। ऐसे चार कदम चलिए। आप कहाँ पहुँचते हैं? आप 12 पर पहुँच जाएँगे। इसलिए हम कहते हैं कि $4 \times 3 = 12$ है।

प्रयास कीजिए

संख्या रेखा का प्रयोग करके, 2×6; 3×3 और 4×2 को ज्ञात कीजिए।

प्रश्नावली 2.1

1. 10999 के बाद अगली तीन प्राकृत संख्याएँ लिखिए।
2. 10001 से ठीक पहले आने वाली तीन पूर्ण संख्याएँ लिखिए।
3. सबसे छोटी पूर्ण संख्या कौन सी है?
4. 32 और 53 के बीच में कितनी पूर्ण संख्याएँ हैं?
5. निम्न के परवर्ती लिखिए :

   (a) 2440701 (b) 100199 (c) 1099999 (d) 2345670
6. निम्न के पूर्ववर्ती लिखिए :

   (a) 94 (b) 10000 (c) 208090 (d) 7654321
7. संख्याओं के निम्नलिखित युग्मों में से प्रत्येक के लिए, संख्या रेखा पर कौन सी पूर्ण संख्या अन्य संख्या के बाईं ओर स्थित है। इनके बीच में उपयुक्त चिह्न (>, <) का प्रयोग करते हुए इन्हें लिखिए :

(a) 530, 503 (b) 370, 307
(c) 98765, 56789 (d) 9830415, 10023001

8. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य हैं और कौन-से कथन असत्य हैं :
   (a) शून्य सबसे छोटी प्राकृत संख्या है।
   (b) 400, संख्या 399 का पूर्ववर्ती है।
   (c) शून्य सबसे छोटी पूर्ण संख्या है।
   (d) 600, संख्या 599 का परवर्ती है।
   (e) सभी प्राकृत संख्याएँ पूर्ण संख्याएँ हैं।
   (f) सभी पूर्ण संख्याएँ प्राकृत संख्याएँ हैं।
   (g) दो अंकों की पूर्ण संख्या का पूर्ववर्ती एक अंक की संख्या कभी नहीं हो सकती है।
   (h) 1 सबसे छोटी पूर्ण संख्या है।
   (i) प्राकृत संख्या 1 का कोई पूर्ववर्ती नहीं होता।
   (j) पूर्ण संख्या 1 का कोई पूर्ववर्ती नहीं होता।
   (k) पूर्ण संख्या 13, संख्याओं 11 और 12 के बीच में स्थित है।
   (l) पूर्ण संख्या 0 का कोई पूर्ववर्ती नहीं होता।
   (m) दो अंकों की संख्या का परवर्ती सदैव दो अंकों की एक संख्या होती है।

2.4 पूर्ण संख्याओं के गुण

जब हम पूर्ण संख्याओं पर होने वाली विभिन्न संक्रियाओं को निकटता से देखते हैं, तो उनमें अनेक गुण देखने को मिलते हैं। इन गुणों से हमें इन संख्याओं को अच्छी प्रकार से समझने में सहायता मिलती है। साथ ही, ये गुण कई संक्रियाओं को बहुत सरल भी बना देते हैं।

इन्हें कीजिए

आपकी कक्षा के प्रत्येक विद्यार्थी को कोई भी दो पूर्ण संख्याएँ लेकर उन्हें जोड़ने को कहा जाए। क्या परिणाम सदैव एक पूर्ण संख्या आता है? आपके योग इस प्रकार के हो सकते हैं :

7	+	8	=	15, एक पूर्ण संख्या
5	+	5	=	10, एक पूर्ण संख्या
0	+	15	=	15, एक पूर्ण संख्या
.	+	.	=	…
.	+	.	=	…

पूर्ण संख्याओं के ऐसे ही 5 और युग्म लेकर योग ज्ञात कीजिए। क्या योग सदैव एक पूर्ण संख्या है?

क्या आपको पूर्ण संख्याओं का कोई ऐसा युग्म प्राप्त हुआ जिनका योग एक पूर्ण संख्या नहीं है? ऐसी कोई दो पूर्ण संख्याएँ प्राप्त करना संभव नहीं है, जिनका योग एक पूर्ण संख्या न हो। हम कहते हैं कि दो पूर्ण संख्याओं का योग एक पूर्ण संख्या होती है। चूँकि पूर्ण संख्याओं को जोड़ने से पूर्ण संख्या ही प्राप्त होती है, इसलिए पूर्ण संख्याओं का संग्रह योग

के अंतर्गत **संवृत (Closed)** है। यह पूर्ण संख्याओं के योग का संवृत गुण (Closure property) कहलाता है।

क्या पूर्ण संख्याएँ गुणन (गुणा) के अंतर्गत भी संवृत हैं? आप इसकी जाँच किस प्रकार करेंगे?

आपके गुणन इस प्रकार हो सकते हैं :

7	×	8	=	56, एक पूर्ण संख्या
5	×	5	=	25, एक पूर्ण संख्या
0	×	15	=	0, एक पूर्ण संख्या
.	×	.	=	...
.	×	.	=	...

दो पूर्ण संख्याओं का गुणनफल भी एक पूर्ण संख्या ही होती है। अत: हम कह सकते हैं कि पूर्ण संख्याओं का संग्रह (निकाय) गुणन के अंतर्गत संवृत है।

संवृत गुण : पूर्ण संख्याएँ योग के अंतर्गत तथा गुणन के अंतर्गत संवृत होती हैं।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए :

1. पूर्ण संख्याएँ व्यवकलन (घटाने) के अंतर्गत संवृत नहीं होती हैं। क्यों?

   आपके व्यवकलन इस प्रकार के हो सकते हैं :

6	–	2	=	4, एक पूर्ण संख्या
7	–	8	=	?, एक पूर्ण संख्या नहीं
5	–	4	=	1, एक पूर्ण संख्या
3	–	9	=	?, एक पूर्ण संख्या नहीं

   अपनी ओर से कुछ और उदाहरण लीजिए और उपरोक्त कथन की पुष्टि कीजिए।

2. क्या पूर्ण संख्याएँ विभाजन (भाग) के अंतर्गत संवृत हैं? नहीं।

   निम्न सारणी को देखिए :

8	÷	4	=	2, एक पूर्ण संख्या
5	÷	7	=	$\frac{5}{7}$, एक पूर्ण संख्या नहीं
12	÷	3	=	4, एक पूर्ण संख्या
6	÷	5	=	$\frac{6}{5}$, एक पूर्ण संख्या नहीं

   अपनी ओर से कुछ और उदाहरण लेकर, उपरोक्त कथन की पुष्टि कीजिए।

शून्य द्वारा विभाजन

एक संख्या से विभाजन (भाग देने) का अर्थ है कि उस संख्या को बार-बार घटाना।

आइए $8 \div 2$ ज्ञात करें।

8 में से 2 को बार-बार घटाइए।

$$\begin{array}{rrl} & 8 & \\ - & \underline{2} & \text{........ 1} \\ & 6 & \\ - & \underline{2} & \text{........ 2} \\ & 4 & \\ - & \underline{2} & \text{........ 3} \\ & 2 & \\ - & \underline{2} & \text{........ 4} \\ & 0 & \end{array}$$

कितनी बार घटाने पर हम 0 तक पहुँचे हैं? चार-बार।

इसलिए, हम $8 \div 2 = 4$ लिखते हैं।

इस विधि से $24 \div 8$ और $16 \div 4$ ज्ञात कीजिए।

आइए अब $2 \div 0$ को ज्ञात करने का प्रयत्न करें।

$$\begin{array}{rrl} & 2 & \\ - & \underline{0} & \text{........ 1} \\ & 2 & \\ - & \underline{0} & \text{........ 2} \\ & 2 & \\ - & \underline{0} & \text{........ 3} \\ & 2 & \\ - & \underline{0} & \text{........ 4} \\ & 2 & \\ & \vdots & \quad\vdots \end{array}$$

प्रत्येक बार घटाने पर हमें 2 पुनः प्राप्त होता है। क्या यह प्रक्रिया कभी समाप्त होगी? नहीं।

हम कहते हैं कि $2 \div 0$ परिभाषित नहीं है।

आइए $7 \div 0$ ज्ञात करने का प्रयत्न करें।

$$\begin{array}{rrl} & 7 & \\ - & \underline{0} & \text{........ 1} \\ & 7 & \\ - & \underline{0} & \text{........ 2} \\ & 7 & \\ - & \underline{0} & \text{........ 3} \\ & 7 & \\ & \vdots & \quad\vdots \end{array}$$

पुनः हमें घटाने के किसी भी स्तर पर 0 नहीं प्राप्त होता है।

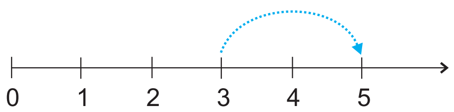
हम कहते हैं कि $7 \div 0$ परिभाषित नहीं है।

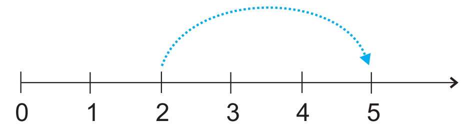
$5 \div 0$ और $16 \div 0$ के लिए भी इसकी जाँच कीजिए।

पूर्ण संख्याओं का शून्य से विभाजन परिभाषित नहीं है।

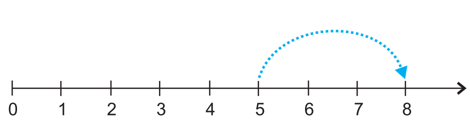
योग और गुणन की क्रमविनिमेयता

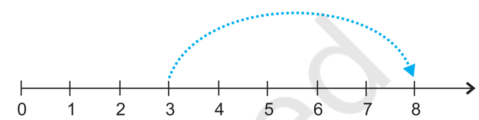
संख्या रेखा के निम्नलिखित चित्र क्या दर्शाते हैं? दोनों स्थितियों में, हम 5 पर पहुँचते हैं।





अत: $3 + 2$ और $2 + 3$ बराबर हैं। दोनों से एक ही उत्तर 5 प्राप्त होता है।
इसी प्रकार, $5 + 3$ और $3 + 5$ भी बराबर हैं।



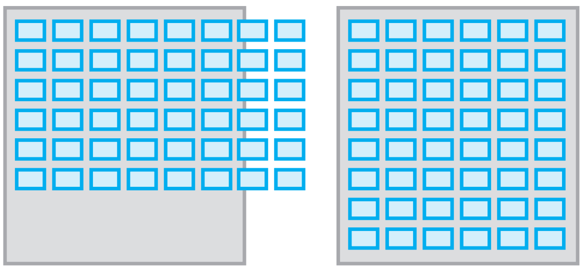


इसी प्रकार, $4 + 6$ और $6 + 4$ के लिए भी यही करने का प्रयत्न कीजिए। क्या यह तब भी सत्य है। जब हम किन्हीं दो पूर्ण संख्याओं को जोड़ते हैं, आपको पूर्ण संख्याओं का कोई भी ऐसा युग्म नहीं मिलेगा जिसमें संख्याओं के जोड़ने का क्रम बदलने पर योग भिन्न-भिन्न प्राप्त हों।

आप दो पूर्ण संख्याओं को किसी भी क्रम में जोड़ सकते हैं।

हम कहते हैं कि पूर्ण संख्याओं के लिए योग क्रमविनिमेय (commutative) है। यह गुण योग की क्रमविनिमेयता कहलाता है।

अपने मित्रों के साथ चर्चा कीजिए :



आपके घर पर एक छोटा उत्सव है। आप मेहमानों के लिए, कुर्सियों की 6 पंक्तियाँ बनाते हैं, जिनमें से प्रत्येक पंक्ति में 8 कुर्सियाँ हैं। कमरा इतना चौड़ा नहीं है कि उसमें 8 कुर्सियों वाली पंक्तियाँ समा सकें। आप यह निर्णय लेते हैं कि कुर्सियों की 8 पंक्तियाँ बनाएँ, जिनमें से प्रत्येक पंक्ति में 6 कुर्सियाँ हों। क्या आपको और अधिक कुर्सियों की आवश्यकता पड़ेगी?

क्या गुणन का भी क्रमविनिमेयता गुण होता है? संख्याओं 4 और 5 को अलग-अलग क्रमों में गुणा कीजिए। आप देखेंगे कि $4 \times 5 = 5 \times 4$ है।

क्या यह संख्याओं 3 और 6 तथा 5 और 7 के लिए भी सत्य हैं?

आप दो पूर्ण संख्याओं को किसी भी क्रम में गुणा कर सकते हैं।

हम कहते हैं कि पूर्ण संख्याओं के लिए गुणन क्रमविनिमेय है।

इस प्रकार, ***पूर्ण संख्याओं के लिए, योग और गुणन दोनों ही क्रमविनिमेय हैं।***

जाँच कीजिए :

(i) पूर्ण संख्याओं के लिए, व्यवकलन (घटाना) क्रमविनिमेय नहीं है। इसकी जाँच संख्याओं के तीन विभिन्न युग्म लेकर कीजिए।

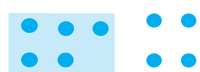
(ii) क्या $(6 \div 3)$ वही है जो $(3 \div 6)$ है?

पूर्ण संख्याओं के कुछ और युग्म लेकर अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

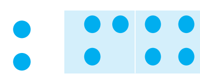
योग और गुणन की सहचारिता

निम्नलिखित चित्रों को देखिए :

(a) $(2 + 3) + 4 = 5 + 4 = 9$



(b) $2 + (3 + 4) = 2 + 7 = 9$



उपरोक्त में, (a) के अनुसार आप पहले 2 और 3 को जोड़कर प्राप्त योग में 4 जोड़ सकते हैं।

साथ ही, (b) के अनुसार आप पहले 3 और 4 को जोड़कर प्राप्त योग में 2 जोड़ सकते हैं।

क्या दोनों परिणाम समान नहीं हैं?

हम यह भी प्राप्त करते हैं कि

$(5 + 7) + 3 = 12 + 3 = 15$ तथा $5 + (7 + 3) = 5 + 10 = 15$ है।

इसलिए, $(5 + 7) + 3 = 5 + (7 + 3)$ हुआ।

यह पूर्ण संख्याओं के योग का साहचर्य गुण (associative property) कहलाता है।

संख्या 2, 8 और 6 के लिए इस गुण की जाँच कीजिए।

उदाहरण 1 : संख्या 234, 197 और 103 को जोड़िए।

हल : $234 + 197 + 103 = 234 + (197 + 103)$
$= 234 + 300$
$= 534$

ध्यान दीजिए कि जोड़ने की सुविधा के लिए, हम किस प्रकार संख्याओं के समूह बनाते हैं।

इस खेल को खेलिए :

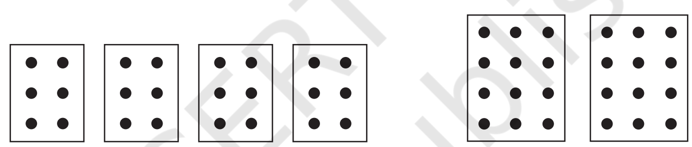
आप और आपका मित्र इस खेल को खेल सकते हैं।

आप 1 से 10 तक में से कोई संख्या बोलिए। अब आपका मित्र इस संख्या में 1 से 10 तक की कोई भी संख्या जोड़ता है। इसके बाद आपकी बारी है। आप बारी–बारी से दोनों खेलिए। जो पहले 100 तक पहुँचता है वही जीतेगा। यदि आप सदैव जीतना चाहते हैं, तो आपकी युक्ति या योजना क्या होगी?

(a) (b)

निम्नलिखित आकृतियों द्वारा प्रदर्शित गुणन तथ्यों को देखिए (आकृति 2.1):

(a) और (b) में, बिंदुओं की संख्याओं को गिनिए। आपको क्या प्राप्त होता है? दोनों में बिंदुओं की संख्याएँ बराबर हैं। (a) में, हमारे पास प्रत्येक खाने (box) में 2×3 बिंदु हैं। इसलिए, बिंदुओं की कुल संख्या $(2 \times 3) \times 4 = 24$ है।



(a) (b)

आकृति 2.1

(b) में, प्रत्येक खाने में 3×4 बिंदु हैं। इसलिए बिंदुओं की कुल संख्या $2 \times (3 \times 4) = 24$ है। इस प्रकार, $(2\times3)\times4=2\times(3\times4)$ है। इसी प्रकार, आप देख सकते हैं कि $(3 \times 5) \times 4 = 3 \times (5 \times 4)$ है।

इसी को $(5 \times 6) \times 2$ और $5 \times (6 \times 2)$ तथा $(3 \times 6) \times 4$ और $3 \times (6 \times 4)$ के लिए प्रयास कीजिए।

यह पूर्ण संख्याओं के गुणन का सहचारी या साहचर्य गुण कहलाता है।

सोचिए और ज्ञात कीजिए :

कौन-सा गुणन सरल है और क्यों?

(a) $(6 \times 5) \times 3$ या $6 \times (5 \times 3)$

(b) $(9 \times 4) \times 25$ या $9 \times (4 \times 25)$

उदाहरण 2 : $14 + 17 + 6$ को दो विधियों से ज्ञात कीजिए।

हल : $14 + 17 + 6 = (14 + 17) + 6 = 31 + 6 = 37$,

$14 + 17 + 6 = (14 + 6) + 17 = 20 + 17 = 37$

यहाँ आपने योग के साहचर्य और क्रमविनिमेय गुणों के संयोजन (combination) को प्रयोग किया है। क्या आप सोचते हैं कि क्रमविनिमेय और साहचर्य गुण के प्रयोग से परिकलन कुछ सरल हो जाते हैं?

प्रयास कीजिए

$7 + 18 + 13$ और $16 + 12 + 4$ को ज्ञात कीजिए।

गुणन का साहचर्य गुण निम्नलिखित प्रकार के प्रश्नों को हल करने में उपयोगी होता है :

उदाहरण 3 : 12×35 को ज्ञात कीजिए।

हल $12 \times 35 = (6 \times 2) \times 35 = 6 \times (2 \times 35) = 6 \times 70 = 420$

इस उदाहरण में, हमने साहचर्य गुण का उपयोग, सबसे छोटी सम संख्या को 5 के गुणज (multiple) से गुणा कर, सरलता से उत्तर प्राप्त करने के लिए किया है।

उदाहरण 4 : $8 \times 1769 \times 125$ को ज्ञात कीजिए।

$8 \times 1769 \times 125 = 8 \times 125 \times 1769$ (आप यहाँ किस गुण का प्रयोग कर रहे हैं?)

$= (8 \times 125) \times 1769 = 1000 \times 1769 = 1769000$

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए :

$25 \times 8358 \times 4$; $625 \times 3759 \times 8$

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए :

क्या $(16 \div 4) \div 2 = 16 \div (4 \div 2)$ है?

क्या विभाजन के लिए साहचर्य गुण लागू होता है? नहीं।

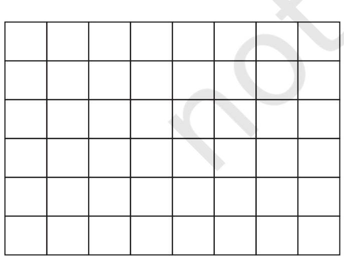
अपने मित्रों के साथ चर्चा कीजिए। क्या $(28 \div 14) \div 2$ और $28 \div (14 \div 2)$ बराबर हैं?

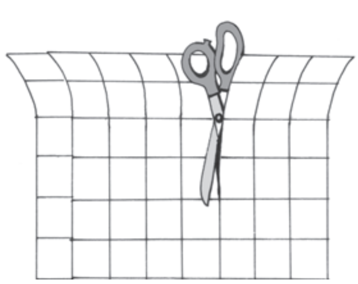
इन्हें कीजिए

योग पर गुणन का वितरण

6 सेमी $\times$ 8 सेमी मापों का एक आलेख (graph) कागज़ लीजिए जिसमें 1 सेमी $\times$ 1 सेमी मापों वाले वर्ग बने हों।

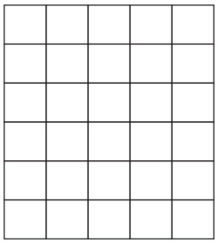
आपके पास कुल कितने वर्ग हैं?



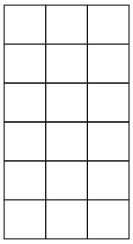


क्या यह संख्या 6×8 है?

अब इस कागज़ को 6 सेमी $\times$ 5 सेमी और 6 सेमी $\times$ 3 सेमी मापों वाले दो भागों में काट लीजिए, जैसा कि आकृति में दिखाया गया है :



वर्गों की संख्या : क्या यह 6 × 5 है?



वर्गों की संख्या : क्या यह 6 × 3 है?

दोनों भागों में कुल मिलाकर कितने वर्ग हैं?

क्या यह $(6 \times 5) + (6 \times 3)$ है? क्या इसका अर्थ है कि $6 \times 8 = (6 \times 5) + (6 \times 3)$ है? लेकिन, $6 \times 8 = 6 \times (5 + 3)$ है। क्या यह दर्शाता है कि $6 \times (5 + 3) = (6 \times 5) + (6 \times 3)$

इसी प्रकार, आप पाएँगे कि $2 \times (3 + 5) = (2 \times 3) + (2 \times 5)$ है।

इसे योग पर गुणन का वितरण (या बंटन) गुण (distributive property of multiplication over addition) कहते हैं।

वितरण (या बंटन) गुण का प्रयोग करके $4 \times (5 + 8)$; $6 \times (7 + 9)$ और $7 \times (11 + 9)$ को ज्ञात कीजिए।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए :

अब निम्नलिखित गुणन प्रक्रिया को देखिए और चर्चा कीजिए कि क्या हम संख्याओं का गुणन करते समय योग पर गुणन के वितरण गुण की अवधारणा का प्रयोग करते हैं?

425			
×136			
2550	←	425 × 6	(6 इकाइयों से गुणा)
12750	←	425 × 30	(3 दहाइयों से गुणा)
42500	←	425 × 100	(1 सौ से गुणा)
57800	←	425 × (6 + 30 100)	

उदाहरण 5 : एक स्कूल की कैंटीन (Canteen) प्रतिदिन लंच (lunch) के लिए 20 रु और दूध के लिए ₹ 4 लेती है। इन मदों में आप 5 दिनों में कुल कितना व्यय करते हैं?

हल : इसे दो विधियों से ज्ञात किया जा सकता है।

विधि 1 : लंच के लिए 5 दिन की राशि ज्ञात कीजिए।
दूध के लिए 5 दिन की राशि ज्ञात कीजिए।
फिर इन्हें जोड़िए।
लंच की लागत = ₹ 5 × 20
दूध की लागत = ₹ 5 × 4

कुल लागत $= ₹ (5 \times 20) + ₹ (5 \times 4) = ₹ (100 + 20)$
$= ₹ 120$

विधि 2 : एक दिन की कुल राशि ज्ञात कीजिए।
फिर इसे 5 से गुणा कीजिए।
एक दिन के (लंच + दूध) की लागत $= ₹ (20 + 4)$
5 दिन की कुल लागत $= 5 \times ₹ (20 + 4) = ₹ (5 \times 24)$
$= ₹ 120$
यह उदाहरण दर्शाता है कि
$5 \times (20 + 4) = (5 \times 20) + (5 \times 4)$ है।
यह योग पर गुणन के वितरण का सिद्धांत है।

उदाहरण 6 : वितरण गुण का प्रयोग करते हुए, 12×35 ज्ञात कीजिए।

हल : $12 \times 35 = 12 \times (30 + 5) = 12 \times 30 + 12 \times 5$
$= 360 + 60 = 420$

उदाहरण 7 : सरल कीजिए : $126 \times 55 + 126 \times 45$

हल : $126 \times 55 + 126 \times 45 = 126 \times (55 + 45) = 126 \times 100$
$= 12600$

प्रयास कीजिए

वितरण गुण का प्रयोग करते हुए, 15×68, 17×23 और $69 \times 78 + 22 \times 69$ के मान ज्ञात कीजिए।

तत्समक अवयव (योग और गुणन के लिए)

पूर्ण संख्याओं का संग्रह प्राकृत संख्याओं के संग्रह से किस रूप में भिन्न है? यह केवल पूर्ण संख्याओं के संग्रह में 'शून्य' की उपस्थिति के कारण है। इस संख्या 'शून्य' की योग में विशेष भूमिका है। इसका अनुमान लगाने का प्रयत्न कीजिए।

निम्नलिखित सारणी आपकी सहायता करेगी :

7	+	0	=	7
5	+	0	=	5
0	+	15	=	15
0	+	26	=	26
0	+	.....	=	.....

जब आप शून्य को किसी पूर्ण संख्या में जोड़ते हैं, तो क्या परिणाम प्राप्त होता है?

परिणाम स्वयं वही पूर्ण संख्या होती है। इसी कारण, शून्य को पूर्ण संख्याओं के योग के लिए तत्समक अवयव (identity element) (या तत्समक) कहते हैं। शून्य को पूर्ण संख्याओं के लिए योज्य तत्समक (additive identity) भी कहते हैं।

गुणन की संक्रिया में भी शून्य की एक विशेष भूमिका है। किसी भी पूर्ण संख्या को शून्य से गुणा करने पर शून्य ही प्राप्त होता है।

उदाहरणार्थ, निम्नलिखित प्रतिरूप को देखिए :

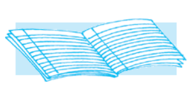
$$\left.\begin{array}{l} 5 \times 6 = 30 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 5 \times 4 = 20 \\ 5 \times 3 = 15 \\ 5 \times 2 = \ldots \\ 5 \times 1 = \ldots \\ 5 \times 0 = ? \end{array}\right\}$$

देखिए कि किस प्रकार गुणनफल में कमी हो रही है? क्या आप कोई प्रतिरूप देख रहे हैं? क्या आप अंतिम चरण का अनुमान लगा सकते हैं? क्या यही प्रतिरूप अन्य पूर्ण संख्याओं के लिए भी सत्य है? इसको दो अलग-अलग पूर्ण संख्याओं को लेकर ज्ञात करने का प्रयत्न कीजिए।

आपको पूर्ण संख्याओं के लिए एक योज्य तत्समक प्राप्त हुआ। किसी पूर्ण संख्या में शून्य जोड़ने पर या शून्य में पूर्ण संख्या जोड़ने पर वही पूर्ण संख्या प्राप्त होती है। ऐसी ही स्थिति पूर्ण संख्याओं के लिए गुणनात्मक तत्समक (multiplicative identity) की है। निम्नलिखित सारणी को देखिए :

7	×	1	=	7
5	×	1	=	5
1	×	12	=	12
1	×	100	=	100
1	×	......	=	......

आप सही सोच रहे हैं। पूर्ण संख्याओं के गुणन के लिए, 1 तत्समक अवयव या तत्समक है। दूसरे शब्दों में, पूर्ण संख्याओं के लिए, 1 गुणनात्मक तत्समक है।



प्रश्नावली 2.2

1. उपयुक्त क्रम में लगाकर योग ज्ञात कीजिए :
   (a) $837 + 208 + 363$ (b) $1962 + 453 + 1538 + 647$
2. उपयुक्त क्रम में लगाकर गुणनफल ज्ञात कीजिए :
   (a) $2 \times 1768 \times 50$ (b) $4 \times 166 \times 25$
   (c) $8 \times 291 \times 125$ (d) $625 \times 279 \times 16$
   (e) $285 \times 5 \times 60$ (f) $125 \times 40 \times 8 \times 25$
3. निम्नलिखित में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए :
   (a) $297 \times 17 + 297 \times 3$ (b) $54279 \times 92 + 8 \times 54279$
   (c) $81265 \times 169 - 81265 \times 69$ (d) $3845 \times 5 \times 782 + 769 \times 25 \times 218$
4. उपयुक्त गुणों का प्रयोग करके गुणनफल ज्ञात कीजिए :
   (a) 738×103 (b) 854×102 (c) 258×1008 (d) 1005×168

5. किसी टैक्सी–ड्राइवर ने अपनी गाड़ी की पेट्रोल टंकी में सोमवार को 40 लीटर पेट्रोल भरवाया। अगले दिन, उसने टंकी में 50 लीटर पेट्रोल भरवाया। यदि पेट्रोल का मूल्य ₹ 44 प्रति लीटर था, तो उसने पेट्रोल पर कुल कितना व्यय किया?

6. कोई दूधवाला एक होटल को सुबह 32 लीटर दूध देता है और शाम को 68 लीटर दूध देता है। यदि दूध का मूल्य ₹ 45 प्रति लीटर है, तो दूधवाले को प्रतिदिन कितनी धनराशि प्राप्त होगी?

7. निम्न को सुमेलित (match) कीजिए :

(i) $425 \times 136 = 425 \times (6 + 30 + 100)$	(a) गुणन की क्रमविनिमेयता
(ii) $2 \times 49 \times 50 = 2 \times 50 \times 49$	(b) योग की क्रमविनिमेयता
(iii) $80 + 2005 + 20 = 80 + 20 + 2005$	(c) योग पर गुणन का वितरण

2.5 पूर्ण संख्याओं में प्रतिरूप

हम संख्याओं को बिंदुओं द्वारा प्रारंभिक आकारों के रूप में व्यवस्थित करेंगे। जो आकार हम लेंगे वे हैं (1) एक रेखा, (2) एक आयत, (3) एक वर्ग और (4) एक त्रिभुज। प्रत्येक संख्या को इन आकारों में से एक आकार में व्यवस्थित करना चाहिए। कोई अन्य आकार नहीं होना चाहिए।

- प्रत्येक संख्या को एक रेखा के रूप में व्यवस्थित किया जा सकता है;

  संख्या 2 को इस प्रकार दिखाया जा सकता है • •

  संख्या 3 को इस प्रकार दिखाया जा सकता है • • •

  इत्यादि

- कुछ संख्याओं को आयतों के रूप में दर्शाया जा सकता है। उदाहरणार्थ,

  संख्या 6 को आयत के रूप में दर्शाया जा सकता है।

  ध्यान दीजिए कि यहाँ 2 पंक्तियाँ और 3 स्तंभ हैं।

- कुछ संख्याओं जैसे 4 और 9 को वर्गों के रूप में भी दर्शाया जा सकता है;

- कुछ संख्याओं को त्रिभुजों के रूप में भी दर्शाया जा सकता है। उदाहरणार्थ,

ध्यान दीजिए कि त्रिभुज की दो भुजाएँ अवश्य बराबर होनी चाहिए। नीचे से प्रारंभ करते हुए पंक्तियों में बिंदुओं की संख्या 4, 3, 2, 1 जैसी होनी चाहिए। सबसे ऊपर की पंक्ति में केवल एक बिंदु होना चाहिए।

अब सारणी को पूरा कीजिए :

1, एक विशेष संख्या है।

संख्या	रेखा	आयत	वर्ग	त्रिभुज
2	हाँ	नहीं	नहीं	नहीं
3	हाँ	नहीं	नहीं	हाँ
4	हाँ	हाँ	हाँ	नहीं
5	हाँ	नहीं	नहीं	नहीं
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				

प्रयास कीजिए

1. कौन सी संख्याएँ केवल रेखा के रूप में दर्शाई जा सकती हैं?
2. कौन सी संख्याएँ वर्गों के रूप में दर्शाई जा सकती हैं?
3. कौन सी संख्याएँ आयतों के रूप में दर्शाई जा सकती हैं?
4. प्रथम सात त्रिभुजाकार संख्याओं को लिखिए (अर्थात् वे संख्याएँ जिन्हें त्रिभुजों के रूप में व्यवस्थित किया जा सकता है) 3, 6, ...
5. कुछ संख्याओं को दो आयतों के रूप में दर्शाया जा सकता है। उदाहरणार्थ,

12 $\longrightarrow$ 

3×4 $\qquad$ 2×6

इसी प्रकार के कम से कम पाँच उदाहरण दीजिए।

प्रतिरूपों को देखना

प्रतिरूपों को देखने से आपको सरलीकरण की प्रक्रियाओं के लिए कुछ मार्गदर्शन मिल सकता है।

निम्नलिखित का अध्ययन कीजिए :

(a) $117 + 9 \;= 117 + 10 - 1 \;= 127 - 1 \;= 126$

(b) $117 - 9 \;= 117 - 10 + 1 \;= 107 + 1 \;= 108$

(c) $117 + 99 = 117 + 100 - 1 = 217 - 1 = 216$

(d) $117 - 99 = 117 - 100 + 1 = 17 + 1 = 18$

क्या यह प्रतिरूप 9, 99, 999, ... प्रकार की संख्याओं के जोड़ने या घटाने में आपकी सहायता करता है?

यहाँ एक और प्रतिरूप दिया जा रहा है :

(a) $84 \times 9 = 84 \times (10 - 1)$

(b) $84 \times 99 = 84 \times (100 - 1)$

(c) $84 \times 999 = 84 \times (1000 - 1)$

क्या आपको किसी संख्या को 9, 99, 999, ...के प्रकार की संख्याओं से गुणा करने की एक संक्षिप्त विधि प्राप्त होती है?

ऐसी संक्षिप्त विधियाँ आपको अनेक प्रश्न मस्तिष्क में ही (मौखिक रूप से) हल करने में सहायता करती हैं।

निम्नलिखित प्रतिरूप आपको किसी संख्या को 5 या 25 या 125 से गुणा करने की एक आकर्षक विधि बताता है।

(आप इन संख्याओं को आगे भी बढ़ाने के बारे में सोच सकते हैं।)

(i) $96 \times 5 = 96 \times \frac{10}{2} = \frac{960}{2} = 480$

(ii) $96 \times 25 = 96 \times \frac{100}{4} = \frac{9600}{4} = 2400$

(iii) $96 \times 125 = 96 \times \frac{1000}{8} = \frac{96000}{8} = 12000$ ....

आगे आने वाला प्रतिरूप क्या सुझाव दे रहा है?

(i) $64 \times 5 = 64 \times \frac{10}{2} = 32 \times 10 = 320 \times 1$

(ii) $64 \times 15 = 64 \times \frac{30}{2} = 32 \times 30 = 320 \times 3$

(iii) $64 \times 25 = 64 \times \frac{50}{2} = 32 \times 50 = 320 \times 5$

(iv) $64 \times 35 = 64 \times \frac{70}{2} = 32 \times 70 = 320 \times 7$ ....

प्रश्नावली 2.3

1. निम्नलिखित में से किससे शून्य निरूपित नहीं होगा?

   (a) $1 + 0$ (b) 0×0 (c) $\frac{0}{2}$ (d) $\frac{10-10}{2}$

2. यदि दो पूर्ण संख्याओं का गुणनफल शून्य है, तो क्या हम कह सकते हैं कि इनमें से एक या दोनों ही शून्य होने चाहिए? उदाहरण देकर अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

3. यदि दो पूर्ण संख्याओं का गुणनफल 1 है, तो क्या हम कह सकते हैं कि इनमें से एक या दोनों ही 1 के बराबर होनी चाहिए? उदाहरण देकर अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।
4. वितरण विधि से ज्ञात कीजिए :
   (a) 728×101 (b) 5437×1001 (c) 824×25
   (d) 4275×125 (e) 504×35
5. निम्नलिखित प्रतिरूप का अध्ययन कीजिए :
   $1 \times 8 + 1 \quad = 9$
   $12 \times 8 + 2 \quad = 98$
   $123 \times 8 + 3 \quad = 987$
   $1234 \times 8 + 4 \quad = 9876$
   $12345 \times 8 + 5 = 98765$
   अगले दो चरण लिखिए। क्या आप कह सकते हैं कि प्रतिरूप किस प्रकार कार्य करता है?
   (संकेत : $12345 = 11111 + 1111 + 111 + 11 + 1$)

हमने क्या चर्चा की?

1. संख्याएँ 1, 2, 3,... जिनका प्रयोग हम गिनने के लिए करते हैं, प्राकृत संख्याएँ कहलाती हैं।
2. यदि आप किसी प्राकृत संख्या में 1 जोड़ते हैं तो आपको इसका परवर्ती मिलता है। यदि किसी प्राकृत संख्या में से 1 घटाते हैं, तो आपको इसका पूर्ववर्ती प्राप्त होता है।
3. प्रत्येक प्राकृत संख्या का एक परवर्ती होता है। 1 को छोड़कर प्रत्येक प्राकृत संख्या का एक पूर्ववर्ती होता है।
4. यदि प्राकृत संख्याओं के संग्रह में हम संख्या 0 जोड़ते हैं, तो हमें पूर्ण संख्याओं का संग्रह प्राप्त होता है। इस प्रकार संख्याएँ 0, 1, 2, 3,... पूर्ण संख्याओं का संग्रह बनाती हैं।
5. प्रत्येक पूर्ण संख्या का एक परवर्ती होता है। 0 को छोड़कर प्रत्येक पूर्ण संख्या का एक पूर्ववर्ती होता है।
6. सभी प्राकृत संख्याएँ, पूर्ण संख्याएँ भी हैं। लेकिन सभी पूर्ण संख्याएँ प्राकृत संख्याएँ नहीं हैं।
7. हम एक रेखा लेते हैं। इस पर एक बिंदु अंकित करते हैं जिसे 0 से नामांकित करते हैं। फिर हम 0 के दाईं ओर समान अंतराल (दूरी) पर बिंदु अंकित करते जाते हैं। इन्हें क्रमशः 1, 2, 3,... से नामांकित करते हैं। इस प्रकार हमें एक संख्या रेखा प्राप्त होती है जिस पर पूर्ण संख्याओं को दर्शाया जाता है। हम इस संख्या रेखा पर आसानी से संख्याओं का जोड़, व्यवकलन, गुणा और भाग जैसी संक्रियाएँ कर सकते हैं।
8. संख्या रेखा पर दाईं ओर चलने पर संगत योग प्राप्त होता है जबकि बाईं ओर चलने पर संगत व्यवकलन प्राप्त होता है। शून्य (0) से प्रारंभ करके समान दूरी के कदम से गुणा प्राप्त होता है।
9. दो पूर्ण संख्याओं का योग हमेशा एक पूर्ण संख्या ही होता है। इसी प्रकार, दो पूर्ण संख्याओं का गुणनफल हमेशा एक पूर्ण संख्या होता है। हम कहते हैं कि पूर्ण संख्याएँ योग और

गुणनफल के अंतर्गत संवृत (Closed) हैं। जबकि, पूर्ण संख्याएँ व्यवकलन (घटाना) और भाग (विभाजन) के अंतर्गत संवृत नहीं हैं।

10. शून्य से भाग (विभाजन) परिभाषित नहीं है।
11. शून्य को पूर्ण संख्याओं के योग के लिए तत्समक अवयव (identity element) या (तत्समक) कहते हैं। पूर्ण संख्या 1 को पूर्ण संख्याओं के गुणन के लिए तत्समक कहते हैं।
12. आप दो पूर्ण संख्याओं को किसी भी क्रम में जोड़ सकते हैं। आप दो पूर्ण संख्याओं को किसी भी क्रम में गुणा (गुणन) कर सकते हैं। हम कहते हैं कि पूर्ण संख्याओं के लिए योग और गुणन क्रमविनिमेय (commutative) हैं।
13. पूर्ण संख्याओं के लिए योग और गुणन साहचर्य (Associative) हैं।
14. पूर्ण संख्याओं के लिए योग पर गुणन का वितरण (या बंटन) होता है।
15. पूर्ण संख्याओं के क्रमविनिमेय, साहचर्य और वितरण गुण परिकलन को आसान बनाने में उपयोगी हैं और हम अनजाने में इनका प्रयोग करते हैं।
16. संख्याओं के प्रतिरूप न केवल रोचक होते हैं, बल्कि मौखिक कलन में मुख्यत: उपयोगी होते हैं और संख्याओं के गुणों को भली भाँति समझने में सहायता देते हैं।

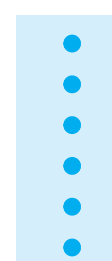
संख्याओं के साथ खेलना

अध्याय 3

3.1 भूमिका

रमेश के पास 6 कंचे (काँच की गोलियाँ) हैं। वह इन्हें पंक्तियों में इस प्रकार व्यवस्थित करना चाहता है कि प्रत्येक पंक्ति में कंचों की संख्या समान हो। वह उन्हें निम्न विधियों से व्यवस्थित करता है और कंचों की कुल संख्या परिकलित करता है :

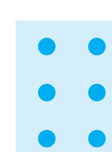
(i) प्रत्येक पंक्ति में 1 कंचा।



पंक्तियों की संख्या = 6

कंचों की कुल संख्या = 1 × 6 = 6

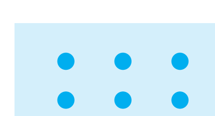
(ii) प्रत्येक पंक्ति में 2 कंचे।



पंक्तियों की संख्या = 3

कंचों की कुल संख्या = 2 × 3 = 6

(iii) प्रत्येक पंक्ति में 3 कंचे।



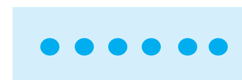
पंक्तियों की संख्या = 2

कंचों की कुल संख्या = 3 × 2 = 6

(iv) वह कोई ऐसी व्यवस्था नहीं सोच सका जिसमें प्रत्येक पंक्ति में 4 कंचे अथवा 5 कंचे हों। इसलिए अब केवल एक व्यवस्था बची, जिसमें एक पंक्ति में सभी 6 कंचों को रख दिया जाए।

पंक्तियों की संख्या = 1

कंचों की कुल संख्या = $6 \times 1 = 6$



इन परिकलनों में रमेश यह देखता है कि 6 को विभिन्न प्रकार (विधियों) से दो संख्याओं के गुणनफलों के रूप में लिखा जा सकता है, जैसा कि नीचे दिखाया गया है :

$6 = 1 \times 6$; $6 = 2 \times 3$; $6 = 3 \times 2$; $6 = 6 \times 1$

$6 = 2 \times 3$ से यह कहा जा सकता है कि 2 और 3, संख्या 6 को पूरी-पूरी (exactly) विभाजित करती हैं। अर्थात् 2 और 3, संख्या 6 के पूरे-पूरे विभाजक (या भाजक) (divisors) हैं। अन्य गुणनफल $6 = 1 \times 6$ से 6 के अन्य विभाजक 1 और 6 प्राप्त होते हैं।

इस प्रकार, 1, 2, 3 और 6 संख्या 6 के विभाजक हैं। ये 6 के *गुणनखंड* (factors) कहलाते हैं।

18 कंचों को पंक्तियों में व्यवस्थित करने का प्रयत्न कीजिए और 18 के गुणनखंड ज्ञात कीजिए।

3.2 गुणनखंड और गुणज

मैरी वे संख्याएँ ज्ञात करना चाहती है जो 4 को पूरी-पूरी विभाजित करती हैं। वह 4 को 4 से कम या उसके बराबर की संख्याओं से इस प्रकार विभाजित करती (भाग देती) है;

1) 4 (4
 – 4
 0

भागफल 4 है
शेषफल या शेष 0 है
$4 = 1 \times 4$

2) 4 (2
 – 4
 0

भागफल 2 है
शेष 0 है
$4 = 2 \times 2$

3) 4 (1
 – 3
 1

भागफल 1 है
शेष 1 है

4) 4 (1
 – 4
 0

$4 = 4 \times 1$
भागफल 1 है
शेष 0 है

वह पाती है कि संख्या 4 को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$4 = 1 \times 4$; $4 = 2 \times 2$; $4 = 4 \times 1$

वह ज्ञात करती है कि 1, 2 और 4 संख्या 4 के पूरे-पूरे विभाजक हैं।

ये संख्याएँ 4 के गुणनखंड कहलाती हैं।

किसी संख्या का गुणनखंड उसका एक पूरा-पूरा (exact) विभाजक (divisor) होता है।
ध्यान दीजिए कि 4 का प्रत्येक गुणनखंड 4 से कम या उसके बराबर है।

खेल 1 : यह खेल दो व्यक्तियों, मान लीजिए A और B द्वारा खेला जा सकता है। यह खेल गुणनखंड ज्ञात करने के बारे में है।

इसके लिए 50 कार्डों की आवश्यकता है, जिन पर 1 से 50 तक की संख्याएँ अंकित हैं। एक मेज़ पर इन कार्डों को नीचे दर्शाए अनुसार व्यवस्थित कीजिए :

1	2	3	4	5	6	7	
8	9	10	11	12	13	14	
15	16	17	18	19	20	21	
22	23	24	25	26	27	28	
29	30	31	32	33	34	35	
36	37	38	39	40	41	42	
43	44	45	46	47	48	49	50

चरण :

(a) निर्णय लीजिए कि पहले कौन खेलेगा : A या B।

(b) मान लीजिए A पहले खेलता है। वह मेज़ से एक कार्ड उठाता है और अपने निकट रख लेता है। मान लीजिए इस कार्ड पर 28 लिखा है।

(c) खिलाड़ी B अब वे सभी कार्ड उठाता है जिन पर A के कार्ड पर लिखी संख्या (अर्थात् 28) के गुणनखंड लिखे हैं और उन्हें अपने निकट एक ढेर में रख देता है।

(d) फिर खिलाड़ी B मेज़ पर रखे कार्डों में से एक कार्ड उठाता है। अब मेज़ पर बचे कार्डों से A वे सभी कार्ड उठाता है जिन पर B के कार्ड की संख्या के गुणनखंड लिखे हैं।

(e) यह खेल तब तक जारी रहता है, जब तक कि सभी कार्ड न उठा लिए जाएँ।

(f) A अपने पास रखे कार्डों पर लिखी संख्याओं को जोड़ता है और B भी अपने पास रखे कार्डों पर लिखी संख्याओं को जोड़ता है। जिस खिलाड़ी का योग अधिक होगा उसे ही जीता हुआ माना जाएगा।

कार्डों की संख्या को बढ़ाकर इस खेल को और अधिक रोचक बनाया जा सकता है।

इस खेल को अपने मित्र के साथ खेलिए। क्या आप इस खेल को जीतने की कोई विधि ज्ञात कर सकते हैं?

जब हम $20 = 4 \times 5$ लिखते हैं, तो हम कहते हैं कि 4 और 5, संख्या 20 के गुणनखंड (factor) हैं। हम यह भी कहते हैं कि 20, संख्या 4 और 5 का गुणज (multiple) है।

$$\begin{array}{ccc} & & \text{गुणज} \\ & & \uparrow \\ 4 \times & 5 = & 20 \\ \downarrow & \downarrow & \\ \text{गुणनखंड} & \text{गुणनखंड} & \end{array}$$

निरूपण $24 = 2 \times 12$ यह दर्शाता है कि 2 और 12, संख्या 24 के गुणनखंड हैं तथा 24 संख्या 2 और 12 का एक गुणज है।

हम कह सकते हैं कि **एक संख्या अपने प्रत्येक गुणनखंड का एक गुणज होती है।**

प्रयास कीजिए

45, 30 और 36 के संभावित गुणनखंड ज्ञात कीजिए।

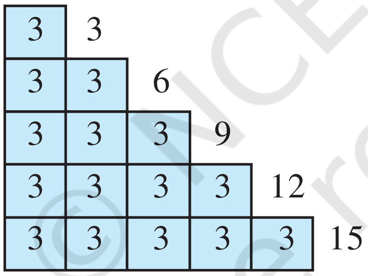
आइए, अब गुणनखंडों और गुणजों के बारे में कुछ रोचक तथ्यों को देखें :

(a) लकड़ी या कागज़ की कुछ पट्टियाँ एकत्रित कीजिए, जिनमें से प्रत्येक की लंबाई 3 मात्रक हो।

(b) सिरे से सिरा मिला कर इन्हें नीचे दी आकृति के अनुसार जोड़िए :

ऊपरी पट्टी की लंबाई $3 = 1 \times 3$ मात्रक है।

इसके नीचे वाली पट्टी की लंबाई $3 + 3 = 6$ मात्रक (units) है। साथ ही, $6 = 2 \times 3$ है।



अगली पट्टी की लंबाई $3 + 3 + 3 = 9$ मात्रक है। साथ ही, $9 = 3 \times 3$ है। इस प्रक्रिया को जारी रखते हुए, हम अन्य लंबाइयों को निम्न प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं :

$12 = 4 \times 3$; $15 = 5 \times 3$

हम कहते हैं कि संख्याएँ 3, 6, 9, 12, 15 संख्या 3 के गुणज हैं।

3 के गुणजों की सूची को 18, 21, 24, ... के रूप में आगे बढ़ाया जा सकता है। इनमें से प्रत्येक गुणज 3 से बड़ा या उसके बराबर है।

संख्या 4 के गुणज 4, 8, 12, 16, 20, 24, ...हैं। यह सूची समाप्त नहीं होती है। इनमें से प्रत्येक गुणज 4 से बड़ा या उसके बराबर है।

आइए देखें कि गुणनखंडों और गुणजों के बारे में हम क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं :

1. क्या कोई ऐसी संख्या है, जो प्रत्येक संख्या के गुणनखंड के रूप में आती है? हाँ, यह संख्या 1 है। उदाहरणार्थ, $6 = 1 \times 6$, $18 = 1 \times 18$ इत्यादि। इसकी जाँच कुछ और संख्याएँ लेकर कीजिए।

   अत: हम कहते हैं कि **1 प्रत्येक संख्या का एक गुणनखंड होता है।**

2. क्या 7 स्वयं का एक गुणनखंड हो सकता है? हाँ। आप 7 को 7×1 के रूप में लिख सकते हैं। 10 के बारे में आप क्या कह सकते हैं? 15 के बारे में आप क्या सोचते हैं? आप देख सकते हैं कि प्रत्येक संख्या को आप इस रूप में लिख सकते हैं।

   हम कहते हैं कि **प्रत्येक संख्या स्वयं अपना एक गुणनखंड होती है।**

3. 16 के गुणनखंड क्या हैं? ये 1, 2, 4, 8 और 16 हैं। इन गुणनखंडों में क्या आप कोई ऐसा गुणनखंड ज्ञात कर सकते हैं, जो 16 को विभाजित न करता हो? 20 और 36 के लिए भी उपरोक्त कथन की जाँच करिए।

   आप पाएँगे कि **एक संख्या का प्रत्येक गुणनखंड उस संख्या का एक पूर्ण विभाजक होता है।**

4. 34 के गुणनखंड क्या हैं? ये 1, 2, 17 और स्वयं 34 हैं। इनमें सबसे बड़ा गुणनखंड कौन सा है? यह 34 है। अन्य गुणनखंड 1, 2 और 17 संख्या 34 से छोटे हैं। 64, 81 और 56 के लिए भी इस कथन की जाँच कीजिए। हम कहते हैं कि **एक दी हुई संख्या का प्रत्येक गुणनखंड उस संख्या से छोटा या उसके बराबर होता है।**

5. 76 के गुणनखंडों की संख्या 5 है। 136 के कितने गुणनखंड हैं? 96 के कितने गुणनखंड हैं? आप पाएँगे कि आप इनमें से प्रत्येक संख्या के गुणनखंडों की संख्याओं को गिन सकते हैं। संख्याएँ 10576, 25642 इत्यादि जैसी बड़ी होने पर भी आप इन संख्याओं के गुणनखंडों को गिन सकते हैं, यद्यपि आपको इन संख्याओं को गुणनखंडित करने में कुछ कठिनाई अवश्य होगी।

   हम कह सकते हैं कि **एक दी हुई संख्या के गुणनखंडों की संख्या परिमित (finite) होती है।**

6. 7 के गुणज क्या हैं? स्पष्टत: ये 7, 14, 21, 28,... हैं। आप पाएँगे कि इनमें से प्रत्येक 7 से बड़ा या उसके बराबर है। क्या यह प्रत्येक संख्या के गुणजों के लिए सत्य होगा? इसकी जाँच 6, 9 और 10 के गुणजों को लेकर कीजिए।

   हम पाते हैं कि **एक संख्या का प्रत्येक गुणज उस संख्या से बड़ा या उसके बराबर होता है।**

7. 5 के गुणज लिखिए। ये 5, 10, 15, 20, ... हैं। क्या आप सोचते हैं कि यह सूची कहीं समाप्त होगी? नहीं, यह सूची समाप्त न होने वाली है। इसकी जाँच 6, 7 इत्यादि के गुणजों को लेकर भी कीजिए।

   हम प्राप्त करते हैं कि **एक दी हुई संख्या के गुणजों की संख्या अपरिमित (infinite) है।**

8. क्या 7 स्वयं का एक गुणज है। हाँ, क्योंकि $7 = 7 \times 1$ है। क्या यह अन्य संख्याओं के लिए भी सत्य है? 3, 12 और 16 के लिए इसकी जाँच कीजिए।

   आप पाएँगे कि **प्रत्येक संख्या स्वयं का एक गुणज है।**

6 के सभी गुणनखंड 1, 2, 3 और 6 हैं। साथ ही, $1 + 2 + 3 + 6 = 12 = 2 \times 6$ है। हम प्राप्त करते हैं कि 6 के सभी गुणनखंडों का योग 6 का दोगुना है। 28 के सभी गुणनखंड 1, 2, 4, 7, 14 और 28 हैं। इन्हें जोड़ने पर हम प्राप्त करते हैं कि

$1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56 = 2 \times 28$ है।

अर्थात् 28 के सभी गुणनखंडों का योग संख्या 28 का दोगुना है।

वह संख्या जिसके सभी गुणनखंडों का योग उस संख्या का दोगुना हो, एक संपूर्ण संख्या (perfect number) कहलाती है। 6 और 28 संपूर्ण संख्याएँ हैं।

क्या 10 एक संपूर्ण संख्या है?

उदाहरण 1 : 68 के सभी गुणनखंडों को लिखिए।

हल : हम देखते हैं कि

$68 = 1 \times 68$ $\quad$ $68 = 2 \times 34$ $\quad$ $68 = 4 \times 17$

$68 = 17 \times 4$

यहाँ रुक जाइए, क्योंकि 4 और 17 पहले आ चुके हैं।

इस प्रकार, 68 के सभी गुणनखंड 1, 2, 4, 17, 34 और 68 हैं।

उदाहरण 2 : 36 के गुणनखंड ज्ञात कीजिए।

हल : $36 = 1 \times 36$ $\quad$ $36 = 2 \times 18$

$36 = 3 \times 12$ $\quad$ $36 = 4 \times 9$

$36 = 6 \times 6$

यहाँ रुक जाइए, क्योंकि दोनों गुणनखंड (6) समान हैं।

इस प्रकार, वांछित गुणनखंड 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 और 36 हैं।

उदाहरण 3 : 6 के सभी प्रथम पाँच गुणज लिखिए।

हल : वांछित गुणज :

$6\times1 = 6$, $6\times2 = 12$, $6\times3 = 18$, $6\times4 = 24$ और $6\times5 = 30$

अर्थात् 6, 12, 18, 24 और 30 हैं।

प्रश्नावली 3.1

1. निम्नलिखित संख्याओं के सभी गुणनखंड लिखिए :

(a) 24	(b) 15	(c) 21
(d) 27	(e) 12	(f) 20
(g) 18	(h) 23	(i) 36

2. निम्न संख्याओं के प्रथम पाँच गुणज लिखिए :

(a) 5	(b) 8	(c) 9

3. स्तंभ 1 की संख्याओं का स्तंभ 2 के साथ मिलान कीजिए :

स्तंभ 1	**स्तंभ 2**
(i) 35	(a) 8 का गुणज
(ii) 15	(b) 7 का गुणज
(iii) 16	(c) 70 का गुणज
(iv) 20	(d) 30 का गुणनखंड
(v) 25	(e) 50 का गुणनखंड
	(f) 20 का गुणनखंड

4. 9 के सभी गुणज ज्ञात कीजिए जो 100 से कम हों।

3.3 अभाज्य और भाज्य संख्याएँ

अब हम किसी संख्या के गुणनखंड करने की विधि से परिचित हो चुके हैं। निम्न सारणी में लिखी कुछ संख्याओं के गुणनखंडों की संख्याओं पर ध्यान दीजिए :

संख्या	गुणनखंड	गुणनखंडों की संख्या
1	1	1
2	1, 2	2
3	1, 3	2
4	1, 2, 4	3
5	1, 5	2
6	1, 2, 3, 6	4
7	1, 7	2
8	1, 2, 4, 8	4
9	1, 3, 9	3
10	1, 2, 5, 10	4
11	1, 11	2
12	1, 2, 3, 4, 6, 12	6

हम देखते हैं कि (a) संख्या 1 का एक ही गुणनखंड (स्वयं वही संख्या) है।

(b) कुछ संख्याएँ जैसे 2, 3, 5, 7, 11 इत्यादि ऐसी हैं जिनके ठीक दो गुणनखंड (1 और स्वयं वह संख्या) हैं। ये संख्याएँ अभाज्य संख्याएँ (prime numbers) हैं।

वे संख्याएँ जिनके गुणनखंड 1 और स्वयं वह संख्या ही होते हैं अभाज्य संख्याएँ कहलाती हैं।

इन संख्याओं के अतिरिक्त कुछ अन्य अभाज्य संख्याएँ ज्ञात करने का प्रयत्न कीजिए।

(c) कुछ संख्याएँ जैसे 4, 6, 8, 9, 10 इत्यादि ऐसी हैं, जिनके दो से अधिक गुणनखंड हैं, ये संख्याएँ *भाज्य संख्याएँ* (composite numbers) हैं। **वे संख्याएँ जिनके दो से अधिक गुणनखंड होते हैं भाज्य संख्याएँ कहलाती हैं।**

ध्यान रखें : 1 न तो अभाज्य संख्या है और न ही भाज्य संख्या

क्या 15 एक भाज्य संख्या है? 18 और 25 के बारे में आप क्या सोचते हैं?

हम एक सरल विधि से 1 से 100 तक के बीच की अभाज्य संख्याएँ बिना उनके गुणनखंड किए ज्ञात करते हैं। यह विधि ई.पूर्व तीसरी शताब्दी में एक यूनानी गणितज्ञ इराटोसथीन्स (Eratosthenes) ने दी थी। आइए, इस विधि को देखें। 1 से 100 तक की संख्याओं को नीचे दर्शाए अनुसार लिखिए :

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

चरण-1 : 1 को काट दीजिए, क्योंकि यह एक अभाज्य संख्या नहीं है।

चरण-2 : 2 पर घेरा लगाइए और 2 के अतिरिक्त उसके सभी गुणजों, जैसे 4, 6, 8 इत्यादि को काट दीजिए।

चरण-3 : आप पाएँगे कि अगली बिना कटी संख्या 3 है। 3 पर घेरा लगाइए और 3 के अतिरिक्त उसके सभी गुणजों को काट दीजिए।

चरण-4 : अगली बिना कटी संख्या 5 है। 5 पर घेरा लगाइए और 5 के अतिरिक्त उसके सभी गुणजों को काट दीजिए।

चरण-5 : इस प्रक्रिया को तब तक जारी रखिए जब तक कि उपरोक्त सूची में दी हुई संख्याओं पर या तो घेरा न लग जाए या वे काट न दी जाएँ। घेरा लगी हुई सभी संख्याएँ अभाज्य संख्याएँ हैं। 1 के अतिरिक्त सभी काटी गई संख्याएँ भाज्य संख्याएँ हैं। यह विधि इराटोसथीन्स की छलनी (Sieve of Eratosthenes) विधि कहलाती है।

प्रयास कीजिए

ध्यान दीजिए कि $2 \times 3 + 1 = 7$ एक अभाज्य संख्या है। यहाँ 2 के एक गुणज में 1 जोड़ कर एक अभाज्य संख्या प्राप्त की गई है। क्या आप इस प्रकार से कुछ और अभाज्य संख्याएँ ज्ञात कर सकते हैं?

उदाहरण 4 : 15 से छोटी सभी अभाज्य संख्याएँ लिखिए।

हल : छलनी विधि से प्राप्त उपरोक्त सारणी को देखकर, हम सरलता से वांछित अभाज्य संख्याएँ लिख सकते हैं। ये हैं : 2, 3, 5, 7, 11 और 13

सम और विषम संख्याएँ

क्या आप संख्याओं 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ... में कोई प्रतिरूप (pattern) देखते हैं? आप पाएँगे कि इनमें से प्रत्येक 2 का एक गुणज है।

ये संख्याएँ *सम* **संख्याएँ (even numbers)** कहलाती हैं। शेष बची सभी प्राकृत संख्याएँ 1, 3, 5, 7, 9, 11,... **विषम संख्याएँ (odd numbers)** कहलाती हैं।

आप आसानी से जाँच कर सकते हैं कि एक 2 या 3 अंकों वाली संख्या सम संख्या है या नहीं। आप यह कैसे ज्ञात करेंगे कि 756482 जैसी बड़ी संख्या एक सम संख्या है या नहीं? क्या 2 से भाग देकर? क्या यह प्रक्रिया जटिल नहीं होगी?

हम कहते हैं कि वह संख्या जिसके इकाई के स्थान पर 0, 2, 4, 6 या 8 अंक हों एक *सम संख्या* होगी। इसलिए संख्याएँ 350, 4862 और 59246 सम संख्याएँ हैं। संख्याएँ 457, 2359 और 8231 विषम संख्याएँ हैं। आइए, अब कुछ रोचक तथ्यों को ज्ञात करने का प्रयत्न करें :

(a) सबसे छोटी सम संख्या कौन-सी है? यह 2 है। सबसे छोटी अभाज्य संख्या कौन-सी है? पुनः यह संख्या 2 है।

इस प्रकार, **2 सबसे छोटी अभाज्य संख्या है जो एक सम संख्या भी है।**

(b) 2 के अतिरिक्त अभाज्य संख्याएँ 3, 5, 7, 11, ... हैं। क्या आप इस सूची में कोई सम संख्या देख रहे हैं? नहीं, सभी संख्याएँ विषम हैं। कुछ और अभाज्य संख्याएँ देखने का प्रयत्न करें।

इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि **2 के अतिरिक्त सभी अभाज्य संख्याएँ विषम हैं।**

प्रश्नावली 3.2

1. बताइए कि किन्हीं दो संख्याओं का योग सम होता है या विषम होता है, यदि वे दोनों (a) विषम संख्याएँ हों (b) सम संख्याएँ हों
2. बताइए कि निम्नलिखित में कौन सा कथन सत्य है और कौन सा असत्य :
   (a) तीन विषम संख्याओं का योग सम होता है।
   (b) दो विषम संख्याओं और एक सम संख्या का योग सम होता है।
   (c) तीन विषम संख्याओं का गुणनफल विषम होता है।
   (d) यदि किसी सम संख्या को 2 से भाग दिया जाए, तो भागफल सदैव विषम होता है।
   (e) सभी अभाज्य संख्याएँ विषम हैं।
   (f) अभाज्य संख्याओं के कोई गुणनखंड नहीं होते।
   (g) दो अभाज्य संख्याओं का योग सदैव सम होता है।
   (h) केवल 2 ही एक सम अभाज्य संख्या है।
   (i) सभी सम संख्याएँ भाज्य संख्याएँ हैं।
   (j) दो सम संख्याओं का गुणनफल सदैव सम होता है।

3. संख्या 13 और 31 अभाज्य संख्याएँ हैं। इन दोनों संख्याओं में दो अंक 1 और 3 हैं। 100 तक की संख्याओं में ऐसे अन्य सभी युग्म ज्ञात कीजिए।
4. 20 से छोटी सभी अभाज्य और भाज्य संख्याएँ अलग-अलग लिखिए।
5. 1 और 10 के बीच में सबसे बड़ी अभाज्य संख्या लिखिए।
6. निम्नलिखित को दो विषम अभाज्य संख्याओं के योग के रूप में व्यक्त कीजिए :
   (a) 44 (b) 36 (c) 24 (d) 18
7. अभाज्य संख्याओं के ऐसे तीन युग्म लिखिए जिनका अंतर 2 हो।
   [टिप्पणी : दो अभाज्य संख्याएँ जिनका अंतर 2 हो **अभाज्य युग्म (twin primes)** कहलाती हैं।]
8. निम्नलिखित में से कौन-सी संख्याएँ अभाज्य संख्याएँ हैं?
   (a) 23 (b) 51 (c) 37 (d) 26
9. 100 से छोटी सात क्रमागत भाज्य संख्याएँ लिखिए जिनके बीच में कोई अभाज्य संख्या नहीं हो।
10. निम्नलिखित संख्याओं में से प्रत्येक को तीन अभाज्य संख्याओं के योग के रूप में व्यक्त कीजिए :
   (a) 21 (b) 31 (c) 53 (d) 61
11. 20 से छोटी अभाज्य संख्याओं के ऐसे पाँच युग्म लिखिए जिनका योग 5 से विभाज्य (divisible) हो। (संकेत : $3 + 7 = 10$)
12. निम्न में रिक्त स्थानों को भरिए :
   (a) वह संख्या जिसके केवल दो गुणनखंड हों एक _______ कहलाती है।
   (b) वह संख्या जिसके दो से अधिक गुणनखंड हों एक _______ कहलाती है।
   (c) 1 न तो _______ है और न ही _______ ।
   (d) सबसे छोटी अभाज्य संख्या _______ है।
   (e) सबसे छोटी भाज्य संख्या ______ है।
   (f) सबसे छोटी सम संख्या _______है।

3.4 संख्याओं की विभाज्यता की जाँच

क्या संख्या 38 संख्या 2 से विभाज्य है? क्या यह 4 से विभाज्य है? क्या यह 5 से विभाज्य है?

38 को वास्तविक रूप में इन संख्याओं से भाग देने पर हम प्राप्त करते हैं कि यह 2 से विभाज्य है, परंतु 4 और 5 से विभाज्य नहीं है।

आइए देखें कि क्या हम कोई प्रतिरूप (पैटर्न) ज्ञात कर सकते हैं जिससे हम बता सकें कि कोई संख्या 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 या 11 से विभाज्य है या नहीं। क्या आप सोचते हैं कि ऐसे प्रतिरूप हम आसानी से देख सकते हैं?

10 से विभाज्यता : चारू 10 के गुणजों 10, 20, 30, 40, 50, 60, ... को देख रही थी। उसने इन संख्याओं में एक सर्वनिष्ठ (common) गुण देखा। क्या आप बता सकते हैं कि वह गुण क्या है? इनमें प्रत्येक के इकाई के स्थान पर अंक 0 है।

उसने इकाई के स्थान 0 वाली कुछ और संख्याओं के बारे में भी सोचा, जैसे कि 100, 1000, 3200, 7010। उसने यह भी ज्ञात किया कि ये सभी संख्याएँ 10 से विभाज्य हैं।

इस प्रकार, वह ज्ञात करती है कि **यदि किसी संख्या के इकाई के स्थान पर अंक 0 हो, तो वह 10 से विभाज्य होती है।**

क्या आप 100 से विभाज्यता का कोई नियम ज्ञात कर सकते हैं?

5 से विभाज्यता : मनि ने संख्याओं 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, ... में एक रोचक प्रतिरूप प्राप्त किया। क्या आप यह प्रतिरूप बता सकते हैं? इन सभी संख्याओं में, इकाई के स्थान पर या तो अंक 0 है या अंक 5 है। उसने ज्ञात किया कि ये सभी संख्याएँ 5 से विभाज्य हैं।

उसने 5 से विभाज्य कुछ और संख्याएँ लीं, जैसे कि 105, 215, 6205, 3500 इत्यादि। इन संख्याओं में भी इकाई के स्थान पर 0 या 5 ही आते हैं।

उसने 23, 56 और 97 को 5 से भाग देने का प्रयत्न किया। क्या वह ऐसा करने में समर्थ हो जाएगा? इसकी जाँच कीजिए। वह देखता है कि **यदि किसी संख्या का इकाई का अंक 0 हो या 5 हो, तो वह संख्या 5 से विभाज्य होती है।**

क्या 1750125 संख्या 5 से विभाज्य है?

2 से विभाज्यता : चारू 2 के कुछ गुणजों 10, 12, 14, 16, ... और कुछ अन्य गुणजों जैसे 2410, 4356, 1358, 2972, 5974 को देखती है। उसे इनमें एक प्रतिरूप दिखाई देता है। क्या आप इस प्रतिरूप को बता सकते हैं? इन संख्याओं के इकाई के स्थान पर 0, 2, 4, 6 और 8 में से ही कोई अंक आता है।

वह इन संख्याओं को 2 से भाग देती है और शेष 0 प्राप्त करती है।

वह यह भी ज्ञात करती है कि संख्याएँ 2467 और 4829 संख्या 2 से विभाज्य नहीं है। इन संख्याओं के इकाई के स्थान पर 0, 2, 4, 6 या 8 में से कोई भी अंक नहीं है।

इन प्रेक्षणों से वह यह निष्कर्ष निकालती है कि **यदि किसी संख्या के इकाई के स्थान पर 0, 2, 4, 6 या 8 में से कोई अंक हो, तो वह संख्या 2 से विभाज्य होती है।**

3 से विभाज्यता : क्या संख्या 21, 27, 36, 54 और 219 संख्या 3 से विभाज्य हैं?

हाँ, ये हैं।

क्या संख्याएँ 25, 37 और 260 संख्या 3 से विभाज्य हैं? नहीं।

3 से विभाज्यता के लिए क्या आप कोई प्रतिरूप इकाई स्थान में देख सकते हैं हम नहीं देख सकते, क्योंकि इकाई के स्थान पर समान अंक होने पर वह 3 से विभाजित हो भी सकता है और नहीं भी।

जैसे संख्या 27, 3 से विभाजित है, पर संख्याएँ 17, 37, 3 से विभाजित नहीं है।

अब आप 21, 36, 54 और 219 के अंकों को जोड़िए। क्या आप इनमें कोई विशेष बात देखते हैं? $2 + 1 = 3$, $3 + 6 = 9$, $5 + 4 = 9$, $2 + 1 + 9 = 12$। ये सभी योग 3 से विभाज्य हैं।

25, 37, 260 के अंकों को जोड़िए। हमें $2 + 5 = 7$, $3 + 7 = 10$, $2 + 6 + 0 = 8$ प्राप्त होता है। इनमें से कोई भी योग 3 से विभाज्य नहीं है।

हम कहते हैं कि **यदि किसी संख्या के अंकों का योग 3 का एक गुणज हो, तो वह संख्या 3 से विभाज्य होती है।**

क्या 7221 संख्या 3 से विभाज्य है?

6 से विभाज्यता : क्या आप कोई ऐसी संख्या बता सकते हैं जो 2 और 3 दोनों से विभाज्य है? ऐसी एक संख्या 18 है। क्या संख्या 18, 2×3 के गुणनफल 6 से विभाज्य होगी? हाँ, ऐसा ही है।

18 जैसी कुछ और संख्याएँ ज्ञात कीजिए और जाँचिए कि क्या वे 6 से भी विभाज्य हैं।

क्या आप कोई ऐसी संख्या बता सकते हैं जो 2 से विभाज्य हो, परंतु 3 से विभाज्य न हो?

अब एक ऐसी संख्या लिखिए जो 3 से विभाज्य हो, परंतु 2 से विभाज्य न हो। ऐसी एक संख्या 27 है।

क्या 27 संख्या 6 से विभाज्य है? नहीं। ऐसी कुछ और संख्याएँ ज्ञात करने का प्रयत्न कीजिए।

इन प्रेक्षणों से हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि **यदि कोई संख्या 2 और 3 दोनों से विभाज्य हो, तो वह संख्या 6 से भी विभाज्य होती है।**

4 से विभाज्यता : क्या आप तीन अंकों की कोई ऐसी संख्या बता सकते हैं, जो 4 से विभाज्य है? हाँ, ऐसी एक संख्या 212 है। अब कोई चार अंकों की संख्या बताओ जो 4 से विभाज्य हो। ऐसी एक संख्या 1936 है।

212 के इकाई और दहाई के स्थानों के अंकों से बनी संख्या को देखिए। यह संख्या 12 है, जो 4 से विभाज्य है। 1936 के लिए यह संख्या 36 है। पुनः यह संख्या भी 4 से विभाज्य है। इसी प्रक्रिया को संख्या 4612; 3516; 9532 पर करने का प्रयत्न कीजिए।

क्या 286 संख्या 4 से विभाज्य है? नहीं। क्या 86 संख्या 4 से विभाज्य है? नहीं।

अत:, हम कहते हैं कि **3 या अधिक अंकों की एक संख्या 4 से विभाज्य होती है, यदि उसके अंतिम दो अंकों (इकाई और दहाई के स्थान के अंकों) से बनी संख्या 4 से विभाज्य हो। इस नियम की जाँच 10 और उदाहरण लेकर कीजिए।**

1 या 2 अंकों की संख्या की 4 से विभाज्यता की जाँच वास्तविक रूप में 4 से भाग देकर की जानी चाहिए।

8 से विभाज्यता : क्या संख्याएँ 1000, 2104 और 1416 संख्या 8 से विभाज्य हैं? हाँ, ये 8 से विभाज्य हैं।

इन संख्याओं के इकाई, दहाई और सैकड़े के अंकों से बनी संख्याएँ क्रमश: 000, 104 और 416 हैं। ये तीनों संख्याएँ भी 8 से विभाज्य हैं। ऐसी कुछ और संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनके इकाई, दहाई और सैकड़े के स्थानों के अंकों (अंतिम तीन अंक) से बनी संख्याएँ 8 से विभाज्य हों। उदाहरणार्थ 9216, 8216, 7216, 10216, 9995216 इत्यादि। इन संख्याओं में आप पाएँगे कि ये संख्याएँ स्वयं भी 8 से विभाज्य हैं।

हम ज्ञात करते हैं कि **4 या उससे अधिक अंकों की कोई संख्या 8 से विभाज्य होती है, यदि अंतिम तीन अंकों से बनी संख्या 8 से विभाज्य हो।**

क्या 73512 संख्या 8 से विभाज्य है?

1, 2 या 3 अंकों वाली संख्याओं की 8 से विभाज्यता की जाँच वास्तविक रूप से भाग देकर की जा सकती है।

9 से विभाज्यता : 9 के गुणज 9, 18, 27, 36, 45, 54,... हैं अर्थात् ये संख्याएँ 9 से विभाज्य हैं। कुछ अन्य संख्याएँ 4608 और 5283 भी हैं जो 9 से विभाज्य हैं।

क्या आप इन संख्याओं के अंकों के योग में कोई प्रतिरूप देखते हैं? हाँ।

$1 + 8 = 9, 2 + 7 = 9, 3 + 6 = 9, 4 + 5 = 9,$

$4 + 6 + 0 + 8 = 18, 5 + 2 + 8 + 3 = 18$

इनमें सभी योग 9 से विभाज्य हैं।

क्या 758 संख्या 9 से विभाज्य है? नहीं।

इस संख्या के अंकों का योग $7 + 5 + 8 = 20$ भी 9 से विभाज्य नहीं है।

इन प्रेक्षणों के आधार पर, हम कह सकते हैं कि **यदि किसी संख्या के अंकों का योग 9 से विभाज्य हो, तो वह संख्या भी 9 से विभाज्य होती है।**

11 से विभाज्यता : संख्याओं 308, 1331 और 61809 में से प्रत्येक संख्या 11 से विभाज्य है।

हम एक सारणी बनाते हैं और देखते हैं कि क्या इन संख्याओं के अंकों से हमें कोई प्रतिरूप प्राप्त होता है।

संख्या	दाएँ से विषम स्थानों के अंकों का योग	दाएँ से सम स्थानों के अंकों का योग	अंतर
308	$8 + 3 = 11$	0	$11 - 0 = 11$
1331	$1 + 3 = 4$	$3 + 1 = 4$	$4 - 4 = 0$
61809	$9 + 8 + 6 = 23$	$0 + 1 = 1$	$23 - 1 = 22$

हम देखते हैं कि प्रत्येक स्थिति में, अंतर या तो 0 है या 11 से विभाज्य है। साथ ही, ये सभी संख्याएँ 11 से विभाज्य हैं।

संख्या 5081 के लिए, ऐसे अंकों का अंतर $(8 + 5) - (1 + 0) = 12$ है, जो 11 से विभाज्य नहीं है। संख्या 5081 भी 11 से विभाज्य नहीं है। इसकी जाँच 11 से 5081 को भाग देकर की जा सकती है।

इस प्रकार, **किसी संख्या की 11 से विभाज्यता की जाँच के लिए, दाएँ से विषम स्थानों के अंकों का योग और सम स्थानों के अंकों के योग का अंतर ज्ञात किया जाए। यदि यह अंतर 0 है या 11 से विभाज्य है, तो वह संख्या 11 से विभाज्य होती है।**

प्रश्नावली 3.3

1. विभाज्यता की जाँच के नियमों का प्रयोग करते हुए, पता कीजिए कि निम्नलिखित संख्याओं में से कौन सी संख्याएँ 2 से विभाज्य हैं; 3 से विभाज्य हैं; 4 से विभाज्य हैं; 5 से विभाज्य हैं, 6 से विभाज्य हैं, 8 से विभाज्य हैं, 9 से विभाज्य हैं, 10 से विभाज्य हैं या 11 से विभाज्य हैं (हाँ या नहीं कहिए) :

संख्या	विभाज्य है								
	2 से	**3** से	**4** से	**5** से	**6** से	**8** से	**9** से	**10** से	**11** से
128	हाँ	नहीं	हाँ	नहीं	नहीं	हाँ	नहीं	नहीं	नहीं
990	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
1586	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
275	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
6686	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
639210	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
429714	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
2856	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
3060	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
406839	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....

2. विभाज्यता की जाँच के नियमों द्वारा ज्ञात कीजिए कि निम्नलिखित में से कौन सी संख्याएँ 4 से विभाज्य हैं और कौन सी 8 से विभाज्य हैं :

   (a) 572 (b) 726352 (c) 5500 (d) 6000
   (e) 12159 (f) 14560 (g) 21084 (h) 31795072
   (i) 1700 (j) 2150

3. विभाज्यता की जाँच के नियमों द्वारा ज्ञात कीजिए कि निम्नलिखित में से कौन सी संख्याएँ 6 से विभाज्य हैं :

   (a) 297144 (b) 1258 (c) 4335 (d) 61233
   (e) 901352 (f) 438750 (g) 1790184 (h) 12583
   (i) 639210 (j) 17852

4. विभाज्यता की जाँच के नियमों द्वारा ज्ञात कीजिए कि निम्नलिखित में से कौन सी संख्याएँ 11 से विभाज्य हैं :

   (a) 5445 (b) 10824 (c) 7138965
   (d) 70169308 (e) 10000001 (f) 901153

5. निम्नलिखित में रिक्त स्थानों में सबसे छोटा अंक तथा सबसे बड़ा अंक लिखिए, जिससे संख्या 3 से विभाज्य हो;

   (a) ____ 6724 (b) 4765 _____ 2

6. निम्नलिखित में रिक्त स्थानों में ऐसा अंक लिखिए ताकि संख्या 11 से विभाज्य हो :

   (a) 92 _____ 389 (b) 8 _____ 9484

3.5 सार्व गुणनखंड और सार्व गुणज

कुछ संख्याओं के युग्मों के गुणनखंडों को देखिए।

(a) 4 और 18 के गुणनखंड क्या हैं?

4 के गुणनखंड हैं : 1, 2 और 4

18 के गुणनखंड हैं : 1, 2, 3, 6, 9 और 18

दोनों संख्याओं 4 और 18 के गुणनखंड 1 और 2 हैं।

अथवा ये 4 और 18 के उभयनिष्ठ या सार्व गुणनखंड (Common factors) हैं।

प्रयास कीजिए

निम्न युग्मों के उभयनिष्ठ या सार्व गुणनखंड क्या हैं?

(a) 8, 20 (b) 9, 15

(b) 4 और 15 के सार्व गुणनखंड क्या हैं?

इन दोनों संख्याओं में केवल 1 ही सार्व गुणनखंड हैं।

7 और 16 के सार्व गुणनखंड क्या हैं?

दो संख्याएँ जिनमें केवल 1 ही सार्व गुणनखंड होता है सह-अभाज्य संख्याएँ (co-prime numbers) कहलाती हैं। 4 और 15 सह-अभाज्य संख्याएँ हैं।

क्या 7 और 15, 12 और 49, 18 और 23 सह-अभाज्य संख्याएँ हैं?

(c) क्या हम 4, 12 और 16 के सार्व गुणनखंड ज्ञात कर सकते हैं?

4 के गुणनखंड 1, 2 और 4 हैं।

12 के गुणनखंड 1, 2, 3, 4, 6 और 12 हैं।

16 के गुणनखंड 1, 2, 4, 8 और 16 हैं।

स्पष्टत: 4, 12 और 16 के सार्व गुणनखंड 1, 2 और 4 हैं।

निम्न के सार्व गुणनखंड ज्ञात कीजिए :

(a) 8, 12, 20 (b) 9, 15, 21

आइए, अब एक से अधिक संख्याओं के गुणजों को एक साथ लेकर देखें।

(a) 4 और 6 के गुणज क्या हैं?

4 के गुणज हैं : 4, 8, 12, 16, 20, 24, ... (कुछ और गुणज लिखिए)

6 के गुणज हैं : 6, 12, 18, 24, 30, 36, ... (कुछ और गुणज लिखिए)

इनमें से, क्या कुछ और ऐसी संख्याएँ हैं जो दोनों सूचियों में आ रही हैं? हम देखते हैं कि 12, 24, 36, ... 4 और 6 दोनों के गुणज हैं।

क्या आप ऐसे कुछ और गुणज लिख सकते हैं?

ये 4 और 6 के उभयनिष्ठ या सार्व गुणज (Common multiples) कहलाते हैं?

(b) 3, 5 और 6 के सार्व गुणज ज्ञात कीजिए।

3 के गुणज 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, ... हैं।

5 के गुणज 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, ... हैं।

6 के गुणज 6, 12, 18, 24, 30, ... है।

3, 5 और 6 के, सार्व गुणज 30, 60, 90, ... हैं।

3, 5 और 6 के कुछ और सार्व गुणज लिखिए।

उदाहरण 5 : 75, 60 और 210 के सार्व गुणनखंड ज्ञात कीजिए।

हल : 75 के गुणनखंड 1, 3, 5, 15, 25 और 75 हैं।

60 के गुणनखंड 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 30 और 60 हैं।

210 के गुणनखंड 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105 और 210 हैं।

इस प्रकार 75, 60 और 210 के सार्व गुणनखंड 1, 3, 5 और 15 हैं।

उदाहरण 6 : 3, 4 और 9 के सार्व गुणज ज्ञात कीजिए।

हल : 3 के गुणज 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, ... हैं।

4 के गुणज 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48,... हैं।

9 के गुणज 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, ... हैं।

स्पष्टत: 3, 4 और 9 के सार्व गुणज 36, 72, 108,... हैं।

प्रश्नावली 3.4

1. निम्न के सार्व गुणनखंड ज्ञात कीजिए :
   (a) 20 और 28 (b) 15 और 25
   (c) 35 और 50 (d) 56 और 120
2. निम्न के सार्व गुणनखंड ज्ञात कीजिए :
   (a) 4, 8 और 12 (b) 5, 15 और 25
3. निम्न के प्रथम तीन सार्व गुणज ज्ञात कीजिए :
   (a) 6 और 8 (b) 12 और 18
4. 100 से छोटी ऐसी सभी संख्याएँ लिखिए जो 3 और 4 के सार्व गुणज हैं।
5. निम्नलिखित में से कौन-सी संख्याएँ सह-अभाज्य हैं?
   (a) 18 और 35 (b) 15 और 37 (c) 30 और 415
   (d) 17 और 68 (e) 216 और 215 (f) 81 और 16
6. एक संख्या 5 और 12 दोनों से विभाज्य है। किस अन्य संख्या से यह संख्या सदैव विभाजित होगी?
7. एक संख्या 12 से विभाज्य है। और कौन सी संख्याएँ हैं जिनसे यह संख्या विभाज्य होगी?

3.6 विभाज्यता के कुछ और नियम

आइए, संख्याओं की विभाज्यता के कुछ और नियमों को देखें।

(i) क्या आप 18 का एक गुणनखंड बता सकते हैं? यह 9 है। 9 के एक गुणनखंड को लिखिए। यह 3 है। क्या संख्या 18 का एक गुणनखंड 3 है। हाँ, यह है। 18 का कोई अन्य गुणनखंड बताइए। यह 6 है। 6 का एक गुणनखंड बताइए। यह 2 है। यह 18 का भी एक गुणनखंड है, अर्थात् 18 को विभाजित करता है। इसकी जाँच 18 के अन्य गुणनखंडों के लिए भी कीजिए।

यही प्रक्रिया 24 के लिए भी कीजिए। यह 8 से विभाज्य है। साथ ही, 24 संख्या 8 के सभी गुणनखंडों 1,2,4 और 8 से भी विभाज्य है।

इसलिए, हम कह सकते हैं कि **यदि कोई संख्या एक संख्या से विभाज्य है, तो वह संख्या इस संख्या के प्रत्येक गुणनखंड से भी विभाज्य होगी।**

(ii) संख्या 80 संख्याओं 4 और 5 दोनों से विभाज्य है। यह $4 \times 5 = 20$ से भी विभाज्य है तथा 4 और 5 सह-अभाज्य संख्याएँ हैं।

इसी प्रकार, 60 सह-अभाज्य संख्याओं 3 और 5 से विभाज्य है। 60, गुणनफल $3 \times 5 = 15$ से भी विभाज्य है।

इसलिए, हम कह सकते हैं कि **यदि कोई संख्या दो सह-अभाज्य संख्याओं से विभाज्य हो, तो वह उनके गुणनफल से भी विभाज्य होती है।**

(iii) दोनों संख्याएँ 16 और 20 संख्या 4 से विभाज्य हैं। संख्या $16 + 20 = 36$ भी 4 से विभाज्य है। इसकी जाँच संख्याओं के कुछ और युग्म लेकर कीजिए।

16 और 20 के अन्य उभयनिष्ठ गुणनखंडों के लिए भी इसकी जाँच कीजिए। इस प्रकार, **यदि दी हुई दो संख्याएँ किसी संख्या से विभाज्य हों, तो इन संख्याओं का योग भी उस संख्या से विभाज्य होगा।**

(iv) दोनों संख्याएँ 35 और 20 संख्या 5 से विभाज्य हैं। क्या इनका अंतर $35 - 20 = 15$ भी 5 से विभाज्य है? इसकी जाँच संख्याओं के ऐसे कुछ अन्य युग्म लेकर भी कीजिए। इस प्रकार, **यदि दी हुई दो संख्याएँ किसी संख्या से विभाज्य हों, तो इन संख्याओं का अंतर भी उस संख्या से विभाज्य होगा।** दो संख्याओं के अन्य युग्म लेकर उपर्युक्त दिए गए चारों नियमों की जाँच कीजिए।

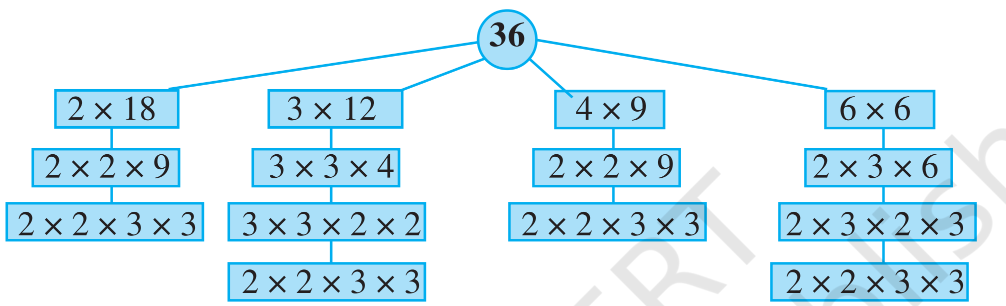
3.7 अभाज्य गुणनखंडन

यदि किसी संख्या को उसके गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जाए, तो हम कहते हैं कि हमने उस संख्या को गुणनखंडित (factorised) कर लिया है अथवा उसके गुणनखंड कर लिए हैं। इस प्रकार, जब हम $24 = 3 \times 8$ लिखते हैं, तो हम कहते हैं कि हमने 24 के गुणनखंड कर लिए हैं। यह 24 के गुणनखंडनों में से एक गुणनखंडन है। इसके अन्य गुणनखंडन निम्न हैं :

$24 = 2 \times 12$	$24 = 4 \times 6$	$24 = 3 \times 8$
$= 2 \times 2 \times 6$	$= 2 \times 2 \times 6$	$= 3 \times 2 \times 2 \times 2$
$= 2 \times 2 \times 2 \times 3$	$= 2 \times 2 \times 2 \times 3$	$= 2 \times 2 \times 2 \times 3$

24 के उपरोक्त सभी गुणनखंडनों में, अंत में हम एक ही गुणनखंडन $2 \times 2 \times 2 \times 3$ पर पहुँचते हैं। इस गुणनखंडन में केवल 2 और 3 ही गुणनखंड हैं और ये अभाज्य संख्याएँ हैं। किसी संख्या का इस प्रकार का गुणनखंडन अभाज्य गुणनखंडन (prime factorisation) कहलाता है।

आइए, इसकी जाँच संख्या 36 से करें।



36 का अभाज्य गुणनखंडन $2 \times 2 \times 3 \times 3$ है। यह 36 का केवल एक ही अभाज्य गुणनखंडन है।

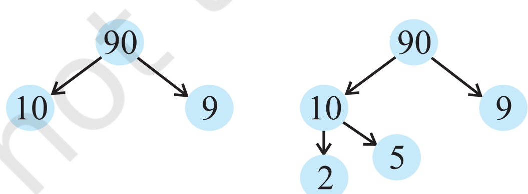
प्रयास कीजिए

16, 28 और 38 के अभाज्य गुणनखंडन लिखिए।

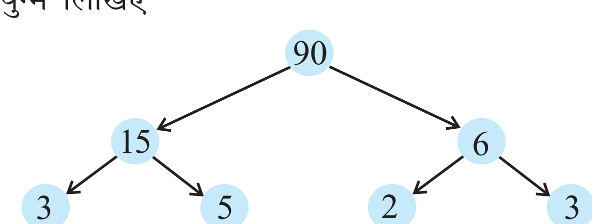
इन्हें कीजिए

गुणनखंड वृक्ष (Factor Tree)

कोई संख्या चुनिए और उसे लिखिए	इसका कोई गुणनखंड युग्म सोचिए, जैसे	अब 15 के एक गुणनखंड युग्म को सोचिए, जैसे
90	90 =15×6	15 = 3×5



6 के गुणनखंड युग्म लिखिए



ऐसा ही निम्न संख्याएँ लेकर कीजिए।

(a) 8 (b) 12

उदाहरण 7 : 980 का अभाज्य गुणनखंडन ज्ञात कीजिए।

हल : हम ऐसा निम्न प्रकार करते हैं :

हम संख्या 980 को 2, 3, 5, 7 इत्यादि से इसी क्रम में बार-बार भाग देते हैं। यह प्रक्रिया हम तब तक जारी रखते हैं, जब तक कि भागफल इनसे विभाजित होता रहे।

2	980
2	490
5	245
7	49
7	7
	1

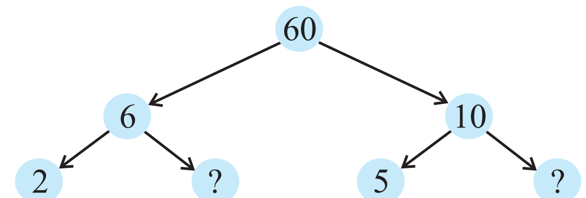
इस प्रकार 980 का अभाज्य गुणनखंडन है : $980 = 2 \times 2 \times 5 \times 7 \times 7$

प्रश्नावली 3.5

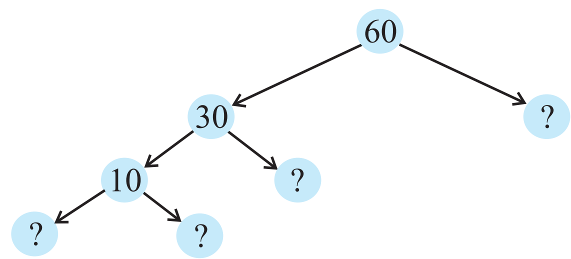
1. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं?
   (a) यदि कोई संख्या 3 से विभाज्य है, तो वह 9 से भी विभाज्य होती है।
   (b) यदि एक संख्या 9 से विभाज्य है, तो वह 3 से भी अवश्य विभाज्य होगी।
   (c) एक संख्या 18 से भी विभाज्य होती है, यदि वह 3 और 6 दोनों से विभाज्य हो।
   (d) यदि एक संख्या 9 और 10 दोनों से विभाज्य हो, तो वह 90 से भी विभाज्य होगी।
   (e) यदि दो संख्याएँ सह-अभाज्य हों, तो इनमें से कम से कम एक अवश्य ही अभाज्य संख्या होगी।
   (f) 4 से विभाज्य सभी संख्याएँ 8 से भी अवश्य विभाज्य होनी चाहिए।
   (g) 8 से विभाज्य सभी संख्याएँ 4 से विभाज्य होनी चाहिए।
   (h) यदि कोई संख्या दो संख्याओं को अलग-अलग पूरा-पूरा विभाजित करती है, तो वह उनके योग को भी पूरा-पूरा विभाजित करेगी।
   (i) यदि कोई संख्या दो संख्याओं के योग को पूरी तरह विभाजित करती है, तो वह उन दोनों संख्याओं को अलग-अलग भी विभाजित करेगी।

2. यहाँ 60 के लिए दो भिन्न-भिन्न गुणनखंड वृक्ष दिए हैं। इनमें अज्ञात संख्याएँ लिखिए।

   (a)



(b)



3. एक भाज्य संख्या के अभाज्य गुणनखंडन में किन गुणनखंडों को सम्मिलित नहीं किया जाता है?
4. चार अंकों की सबसे बड़ी संख्या लिखिए और उसे अभाज्य गुणनखंडन के रूप में व्यक्त कीजिए।
5. पाँच अंकों की सबसे छोटी संख्या लिखिए और उसे अभाज्य गुणनखंडन के रूप में व्यक्त कीजिए।
6. 1729 के सभी अभाज्य गुणनखंड ज्ञात कीजिए और उन्हें आरोही क्रम में व्यवस्थित कीजिए। अब दो क्रमागत अभाज्य गुणनखंडों में यदि कोई संबंध है तो लिखिए।
7. तीन क्रमागत संख्याओं का गुणनफल सदैव 6 से विभाज्य होता है। इस कथन को कुछ उदाहरणों की सहायता से स्पष्ट कीजिए।
8. दो क्रमागत विषय संख्याओं का योग 4 से विभाज्य होता है। कुछ उदाहरण लेकर इस कथन का सत्यापन कीजिए।
9. निम्न में से किन व्यंजकों में अभाज्य गुणनखंडन किए गए हैं :
   (a) $24 = 2 \times 3 \times 4$ (b) $56 = 1 \times 7 \times 2 \times 2 \times 2$
   (c) $70 = 2 \times 5 \times 7$ (d) $54 = 2 \times 3 \times 9$
10. बिना भाग किए ज्ञात कीजिए कि क्या 25110 संख्या 45 से विभाज्य है।
    [संकेत : 5 और 9 सह-अभाज्य संख्याएँ हैं। दी हुई संख्या की 5 और 9 से विभाज्यता की जाँच कीजिए।]
11. संख्या 18, 2 और 3 दोनों से विभाज्य है। यह $2 \times 3 = 6$ से भी विभाज्य है। इसी प्रकार, एक संख्या 4 और 6 दोनों से विभाज्य है। क्या हम कह सकते हैं कि वह संख्या $4 \times 6 = 24$ से भी विभाज्य होगी। यदि नहीं, तो अपने उत्तर की पुष्टि के लिए एक उदाहरण दीजिए।
12. मैं चार भिन्न-भिन्न अभाज्य गुणनखंडों वाली सबसे छोटी संख्या हूँ। क्या आप मुझे ज्ञात कर सकते हैं?

3.8 महत्तम समापवर्तक

हम दो संख्याओं के सार्व गुणनखंड ज्ञात करना सीख चुके हैं। अब हम इन सार्व गुणनखंडों में सबसे बड़ा गुणनखंड ज्ञात करने का प्रयत्न करेंगे।

12 और 16 के सार्व गुणनखंड क्या हैं? ये 1, 2 और 4 हैं।

इन सार्व गुणनखंडों में सबसे बड़ा कौन-सा है? यह 4 है। 20, 28 और 36 के सार्व गुणनखंड क्या हैं। ये 1, 2 और 4 हैं तथा इनमें पुनः सबसे बड़ा गुणनखंड 4 है।

दो या दो से अधिक दी हुई संख्याओं के सार्व गुणनखंडों में सबसे बड़ा सार्व गुणनखंड इन दी हुई संख्याओं का महत्तम समापवर्तक (highest common factor) कहलाता है। महत्तम समापवर्तक को संक्षेप में म.स. (या HCF) भी लिखते हैं। इसे महत्तम (सबसे बड़ा) सार्व भाजक (greatest common divisor) या (GCD) भी कहा जाता है।

प्रयास कीजिए

निम्न का म.स. ज्ञात कीजिए :

(i) 24 और 36 (ii) 15, 25 और 30

(iii) 8 और 12 (iv) 12, 16 और 28

संख्याओं 20, 28 और 36 का म.स. इन संख्याओं के अभाज्य गुणनखंडन द्वारा इस प्रकार ज्ञात किया जा सकता है :

$$\begin{array}{r|l} 2 & 20 \\ \hline 2 & 10 \\ \hline 5 & 5 \\ \hline & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 28 \\ \hline 2 & 14 \\ \hline 7 & 7 \\ \hline & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 36 \\ \hline 2 & 18 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline & 1 \end{array}$$

इस प्रकार,

$$\begin{aligned} 20 &= \boxed{2} \times \boxed{2} \times 5 \\ 28 &= \boxed{2} \times \boxed{2} \times 7 \\ 36 &= \boxed{2} \times \boxed{2} \times 3 \times 3 \end{aligned}$$

20, 28 और 36 में सार्व गुणनखंड 2 (दो बार आ रहा है) है।

अत:, 20, 28 और 36 का म.स. $2 \times 2 = 4$ है।

प्रश्नावली 3.6

1. निम्नलिखित संख्याओं के म.स. ज्ञात कीजिए :
   (a) 18, 48 (b) 30, 42 (c) 18, 60 (d) 27, 63
   (e) 36, 84 (f) 34, 102 (g) 70, 105, 175 (h) 91, 112, 49
   (i) 18,54, 81 (j) 12, 45, 75
2. निम्न का म.स. क्या है?
   (a) दो क्रमागत संख्याएँ (b) दो क्रमागत सम संख्याएँ
   (c) दो क्रमागत विषम संख्याएँ
3. अभाज्य गुणनखंडन द्वारा दो सह-अभाज्य संख्याओं 4 और 15 का म.स. इस प्रकार ज्ञात किया गया :
   $4 = 2 \times 2$ और $15 = 3 \times 5$
   चूँकि इन गुणनखंडों में कोई अभाज्य सार्व गुणनखंड नहीं है, इसलिए 4 और 15 का म.स. शून्य है। क्या यह उत्तर सही है? यदि नहीं तो सही म.स. क्या है?

3.9 लघुतम समापवर्त्य

4 और 6 के सार्व गुणज क्या हैं? ये 12, 24, 36, ... हैं। इनमें सबसे छोटा गुणज कौन-सा है? यह 12 है। हम कहते हैं कि 4 और 6 का सबसे छोटा (लघुतम) गुणज या लघुतम समापवर्त्य (lowest common multiple) 12 है। यह वह छोटी से छोटी संख्या है जो दोनों का गुणज है। **दो या दो से अधिक दी हुई संख्याओं का लघुतम समापवर्त्य इन संख्याओं के सार्व गुणजों में से सबसे छोटा (लघुतम या निम्नतम) गुणज होता है। संक्षेप में, इसे ल.स. (LCM) भी लिखा जाता है।** 8 और 12 का ल.स. क्या है? 4 और 9 का ल.स. क्या है? 6 और 9 का ल.स. क्या है?

उदाहरण 8 : 12 और 18 का ल.स. ज्ञात कीजिए।

हल हम जानते हैं कि 12 और 18 के सार्व गुणज 36, 72, 108 इत्यादि हैं। इनमें सबसे छोटा 36 है। आइए, एक और विधि से इसे निकालें:

12 और 18 के अभाज्य गुणनखंडन इस प्रकार हैं :

$$12 = 2 \times 2 \times 3 \qquad 18 = 2 \times 3 \times 3$$

इन अभाज्य गुणनखंडनों में, अभाज्य गुणनखंड 2 अधिकतम दो बार आता है (यह 12 के गुणनखंडों में है)। इसी प्रकार अभाज्य गुणनखंड 3 अधिकतम दो बार आता है (यह 18 के गुणनखंडों में है)। दो संख्याओं का ल.स. उन अभाज्य गुणनखंडों का गुणनफल है जो उन संख्याओं में अधिकतम बार आते हैं। अत: इनका ल.स. $= 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$ है।

उदाहरण 9 : 24 और 90 का ल.स. ज्ञात कीजिए।

हल : 24 और 90 के अभाज्य गुणनखंडन इस प्रकार हैं:

$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \qquad 90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$$

इन अभाज्य गुणनखंडनों में, अभाज्य गुणनखंड 2 अधिकतम तीन बार आता है (यह 24 में है); अभाज्य गुणनखंड 3 दो बार आता है (यह 90 में है) और अभाज्य गुणनखंड 5 केवल एक बार 90 में आता है।

इसलिए, वांछित ल.स. $= (2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3) \times 5 = 360$

उदाहरण 10 : 40, 48 और 45 का ल.स. ज्ञात कीजिए।

हल : 40, 48 और 45 के अभाज्य गुणनखंडन इस प्रकार हैं :

$$40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$$

$$48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

$$45 = 3 \times 3 \times 5$$

अभाज्य गुणनखंड 2 अधिकतम चार बार (यह 48 में है), अभाज्य गुणनखंड 3 अधिकतम दो बार (यह 45 में है) और अभाज्य गुणनखंड 5 केवल एक बार (यह 40 और 45 दोनों में है) आता है।

अत: वांछित ल.स. $= (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3) \times 5 = 720$

लघुतम समापवर्त्य (ल.स.) को एक अन्य विधि से भी ज्ञात किया जा सकता है, जो अगले उदाहरण में दर्शाई गई है :

उदाहरण 11 : 20, 25 और 30 का ल.स. ज्ञात कीजिए।

हल : हम संख्याओं को एक पंक्ति में नीचे दर्शाए अनुसार लिखते हैं :

2	20	25	30	**(a)**
2	10	25	15	**(b)**
3	5	25	15	**(c)**
5	5	25	5	**(d)**
5	1	5	1	**(e)**
	1	1	1	

अत:, ल.स. = $2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 = 300$

a. (सबसे छोटी अभाज्य संख्या 2 से भाग दीजिए। 25 जैसी संख्या 2 से विभाज्य नहीं है। इसलिए इन्हें अगली पंक्ति में वैसा का वैसा ही रख दिया जाता है)।

b. (पुन: 2 से भाग दीजिए। इसे तब तक जारी रखिए जब तक 2 के गुणज मिलते रहें)।

c. (अगली अभाज्य संख्या 3 से भाग दीजिए)।

d. (अगली अभाज्य संख्या 5 से भाग दीजिए)।

e. (पुन: 5 से भाग दीजिए)।

3.10 म.स. और ल.स. पर कुछ और उदाहरण

हमें अनेक स्थितियों का सामना करना पड़ता है, जहाँ हम म.स. और ल.स. की संकल्पनाओं का प्रयोग करते हैं। हम इन्हें कुछ उदाहरणों की सहायता से समझाएँगे।

उदाहरण 12 : दो टैंकरों (tankers) में क्रमश: 850 लीटर और 680 लीटर मिट्टी का तेल आता है। उस बर्तन की अधिकतम धारिता (capacity) ज्ञात कीजिए, जो इन दोनों टैंकरों के तेल को पूरा-पूरा माप देगा।

हल : वांछित बर्तन को दोनों टैंकरों के तेल को पूरा-पूरा मापना है। अत: इसकी धारिता दोनों टैंकरों की धारिताओं का एक पूरा-पूरा विभाजक होगा। साथ ही, इसकी धारिता अधिकतम भी होनी चाहिए। अत: ऐसे बर्तन की अधिकतम धारिता 850 और 680 का म.स. होगी। इसे निम्नलिखित प्रकार से ज्ञात किया जाता है :

2	850
5	425
5	85
17	17
	1

2	680
2	340
2	170
5	85
17	17
	1

अतः,

$$850 = 2 \times 5 \times 5 \times 17 \quad = \boxed{2} \times \boxed{5} \times \boxed{17} \times \quad 5$$
$$680 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 17 = \boxed{2} \times \boxed{5} \times \boxed{17} \times \quad 2 \times 2$$

850 और 680 के सार्व गुणनखंड 2, 5 और 17 है।

अतः, 850 और 680 का म.स. $2 \times 5 \times 17 = 170$ है।

अतः वांछित बर्तन की अधिकतम धारिता 170 लीटर है। यह पहले बर्तन को 5 बार में और दूसरे को 4 बार में पूरा-पूरा माप देगा।

उदाहरण 13 : प्रातःकालीन सैर में, तीन व्यक्ति एक साथ कदम उठाकर चलना प्रारंभ करते हैं। उनके कदमों की लंबाइयाँ क्रमशः 80 सेमी, 85 सेमी और 90 सेमी हैं। इनमें से प्रत्येक न्यूनतम कितनी दूरी चले कि वे उसे पूरे-पूरे कदमों में तय करें?

हल : प्रत्येक व्यक्ति द्वारा चली गई दूरी को समान और न्यूनतम रहना है। यह वांछित न्यूनतम दूरी, जो प्रत्येक व्यक्ति को चलनी है, उनके कदमों की मापों का लघुतम समापवर्त्य (ल.स.) होगी। क्या आप बता सकते हैं क्यों?

इसलिए, हम 80, 85 और 90 का ल.स. ज्ञात करते हैं। 80, 85 और 90 का ल.स. 12240 है।

अतः वांछित न्यूनतम दूरी 12240 सेमी है।

उदाहरण 14 : वह सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिसे 12, 16, 24 और 36 से भाग देने पर प्रत्येक दशा में 7 शेष रहता है।

हल : हम 12, 16, 24 और 36 का ल.स. निम्न प्रकार ज्ञात करते हैं :

2	12	16	24	36
2	6	8	12	18
2	3	4	6	9
2	3	2	3	9
3	3	1	3	9
3	1	1	1	3
	1	1	1	1

इस प्रकार, ल.स. $= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 144$

144 वह सबसे छोटी संख्या है जिसे 12, 16, 24 और 36 से भाग देने पर प्रत्येक दशा में 0 शेष रहेगा।

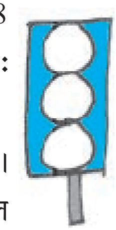
परंतु हमें ऐसी सबसे छोटी संख्या चाहिए जिसमें प्रत्येक दशा में 7 शेष रहे।

अतः वांछित संख्या 144 से 7 अधिक होगी।

इस प्रकार, वांछित सबसे छोटी संख्या $= 144 + 7 = 151$ है।

प्रश्नावली 3.7

1. रेणु 75 किग्रा और 69 किग्रा भारों वाली दो खाद की बोरियाँ खरीदती हैं। भार के उस बट्टे का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए जो दोनों बोरियों के भारों को पूरा-पूरा माप ले।
2. तीन लड़के एक ही स्थान से एक साथ कदम उठाकर चलना प्रारंभ करते हैं। उनके कदमों की माप क्रमशः 63 सेमी, 70 सेमी और 77 सेमी हैं। इनमें से प्रत्येक कितनी न्यूनतम दूरी तय करे कि वह दूरी पूरे-पूरे कदमों में तय हो जाए?
3. किसी कमरे की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 825 सेमी, 675 सेमी और 450 सेमी हैं। ऐसा सबसे लंबा फीता (tape) ज्ञात कीजिए जो कमरे की तीनों विमाओं (dimensions) को पूरा-पूरा माप ले।
4. 6,8 और 12 से विभाज्य तीन अंकों की सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए।
5. 8,10 और 12 से विभाज्य तीन अंकों की सबसे बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए।
6. तीन विभिन्न चौराहों की ट्रैफिक लाइट (traffic lights) क्रमशः प्रत्येक 48 सैकंड, 72 सैकंड और 108 सैकंड बाद बदलती हैं। यदि वे एक साथ प्रातः 7 बजे बदलें, तो वे पुनः एक साथ कब बदलेंगी?



7. तीन टैंकरों में क्रमशः 403 लीटर, 434 लीटर और 465 लीटर डीज़ल है। उस बर्तन की अधिकतम धारिता ज्ञात कीजिए जो इन तीनों टैंकरों के डीज़ल को पूरा-पूरा माप देगा।
8. वह सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिसे 6, 15 और 18 से भाग देने पर प्रत्येक दशा में 5 शेष रहे।
9. चार अंकों की वह सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जो 18, 24 और 32 से विभाज्य है।
10. निम्नलिखित संख्याओं का ल.स. ज्ञात कीजिए जिनमें एक संख्या सदैव 3 का एक गुणज है।

    (a) 9 और 4 (b) 12 और 5

    (c) 6 और 5 (d) 15 और 4

    प्राप्त ल.स. में एक सामान्य गुण का अवलोकन कीजिए। क्या ल.स. प्रत्येक स्थिति में दोनों संख्याओं का गुणनफल है? क्या हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि दो संख्याओं का ल.स. सदैव 3 का एक गुणज है?
11. निम्नलिखित संख्याओं का ल.स. ज्ञात कीजिए जिनमें एक संख्या दूसरी संख्या का एक गुणनखंड है :

    (a) 5, 20 (b) 6, 18

    (c) 12, 48 (d) 9, 45

    प्राप्त परिणामों में आप क्या देखते हैं?

हमने क्या चर्चा की?

1. गुणजों और गुणनखंडों की पहचान कैसे कर सकते हैं।
2. हमने अब तक चर्चा की और निम्न को खोजा –
   (a) एक संख्या का गुणनखंड उस संख्या का पूर्ण विभाजक होता है।
   (b) प्रत्येक संख्या स्वयं का एक गुणनखंड होती है। प्रत्येक संख्या का एक गुणनखंड होता है।
   (c) दी हुई संख्या का प्रत्येक गुणनखंड उस संख्या से छोटा या उसके बराबर होता है।
   (d) प्रत्येक संख्या अपने प्रत्येक गुणनखंडों का एक गुणज होती है।
   (e) दी हुई संख्या का प्रत्येक गुणज उस संख्या से बड़ा या उसके बराबर होता है।
   (f) प्रत्येक संख्या स्वयं का एक गुणज है।
3. हमने सीखा है –
   (a) वह संख्या जिसके दो ही गुणनखंड होते हैं, संख्या स्वयं और 1, अभाज्य संख्या कहलाती है। जिन संख्याओं के दो से अधिक गुणनखंड होते हैं वे संख्याएँ भाज्य संख्याएँ कहलाती हैं।
   (b) संख्या 2 सबसे छोटी अभाज्य संख्या है जो एक सम संख्या भी है। अन्य सभी अभाज्य संख्याएँ विषम होती हैं।
   (c) दो संख्याएँ जिनका सार्व गुणनखंड केवल 1 हो, सह-अभाज्य संख्याएँ कहलाती हैं।
   (d) यदि एक संख्या दूसरी संख्या से विभाज्य है, तो वह दूसरी संख्या के प्रत्येक गुणनखंड से भी विभाजित होगी।
   (e) वह संख्या जो दो सह-अभाज्य संख्याओं से विभाज्य होती है, उनके गुणनफल से भी विभाज्य होगी।
4. संख्याओं को बिना भाग की क्रिया किए उनकी छोटी 2, 3, 4, 5, 8, 9 और 11 से विभाज्यता की जाँच कर सकते हैं। हमने संख्या के अंकों का, विभिन्न संख्याओं से विभाज्यता के संबंधों का अन्वेषण किया है।
   (a) 2, 5 और 10 से विभाज्यता केवल इकाई अंक को देखकर बताई जा सकती है।
   (b) 3 और 9 से विभाज्यता संख्या के अंकों के योग द्वारा की जा सकती है।
   (c) 4 से विभाज्यता इकाई और दहाई तथा 8 से विभाज्यता इकाई, दहाई व सैकड़े से बनने वाली संख्या द्वारा जाँची जा सकती है।
   (d) 11 से विभाज्यता दाईं ओर से सम स्थानों के अंकों के योग और विषम स्थानों के अंकों के योग के अंतर द्वारा जाँची जा सकती है।
5. यदि दो संख्याएँ एक संख्या से विभाजित होती हैं, तो उन दोनों का योग तथा अंतर भी उस संख्या से विभाजित होता है।
6. (a) दो या अधिक संख्याओं का म.स. (HCF) उसके सार्व गुणनखंडों में से सबसे बड़ा होगा।
   (b) दो या अधिक संख्याओं का ल.स. (LCM) उसके सार्व गुणजों में से सबसे छोटा होगा।

आधारभूत ज्यामितीय अवधारणाएँ

अध्याय 4

0651CH04

4.1 भूमिका

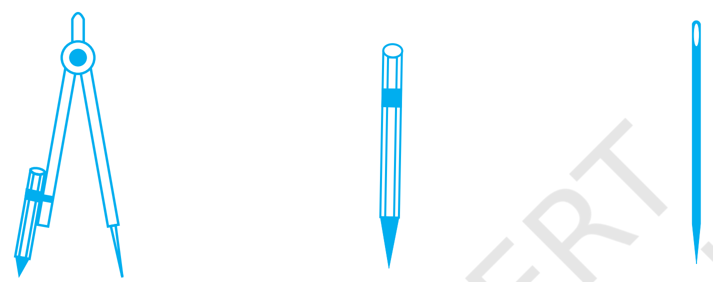
ज्यामिति का एक लंबा और शानदार (बहुमूल्य) इतिहास है। शब्द 'ज्यामिति' (Geometry) यूनानी शब्द जिओमीट्रोन (Geometron) का अंग्रेजी तुल्य है। जिया (Geo) का अर्थ है 'भूमि' और 'मीट्रोन (Metron) का अर्थ है 'मापना'। इतिहासकारों के अनुसार, प्राचीन समय में ज्यामितीय अवधारणाएँ संभवत: कला, वास्तु-कला या शिल्प-कला (Architecture) और भूमि मापन की आवश्यकताओं के कारण विकसित हुईं। इनमें वे अवसर भी सम्मिलित हैं जब खेतिहर की भूमि की परिसीमाओं (boundaries) को बिना किसी शिकायत की संभावना रखते हुए, अंकित किया जाता था। वैभवपूर्ण राजभवनों, मंदिरों, झीलों, बाँधों और नगरों के निर्माणों, कला और वास्तुकला (या शिल्प) ने इन अवधारणाओं को और उजागर किया। आजकल भी कला, मापन, वास्तुकला, इंजीनियरिंग (engineering), कपड़ों के डिज़ाइन इत्यादि के सभी रूपों में ज्यामितीय अवधारणाओं का प्रभाव देखा जा सकता है। आप विभिन्न प्रकार की वस्तुओं, जैसे–बक्स (पेटी), मेज़, पुस्तक, अपने स्कूल में लंच ले जाने के लिए खाने के डिब्बे, गेंद जिससे आप खेलते हैं, आदि को देखते हैं और उनका प्रयोग भी करते हैं। इन सभी वस्तुओं के भिन्न-भिन्न आकार (shapes) होते हैं। जो रूलर (ruler) आप प्रयोग करते हैं और पेंसिल जिससे आप लिखते हैं वे सीधी (straight) हैं। एक चूड़ी, एक रुपये का सिक्का या एक गेंद के चित्र गोल (round) प्रतीत होते हैं।

यहाँ आप कुछ रोचक तथ्यों के बारे में पढ़ेंगे, जो आपके चारों ओर उपस्थित आकारों के बारे में अधिक जानकारी प्राप्त करने में आपकी सहायता करेंगे।

4.2 बिंदु

कागज़ पर एक पेंसिल के नुकीले सिरे से एक चिह्न (dot) अंकित कीजिए। सिरा जितना नुकीला होगा, चिह्न उतना ही सूक्ष्म (छोटा) होगा। लगभग एक बिना दिखाई देने वाला सूक्ष्म चिह्न आपको एक बिंदु की अवधारणा का आभास कराएगा। बिंदु (point) एक स्थिति (या अवस्थिति) (location) निर्धारित करता है।

बिंदु के लिए कुछ उदाहरण इस प्रकार हैं :



परकार का सिरा | पेंसिल का नुकीला सिरा | एक सुई का नुकीला सिरा

यदि आप किसी कागज़ पर, मान लीजिए, तीन बिंदु अंकित करें, तो आपको इनमें भेद बताने की आवश्यकता पड़ेगी। इसके लिए, इन्हें अंग्रेज़ी के बड़े अक्षर A, B, C इत्यादि से व्यक्त किया जाता है।

• B

इन बिंदुओं को बिंदु A, बिंदु B और बिंदु C पढ़ा जाता है।

• A

• C

बिंदु नि:संदेह बहुत छोटे होने चाहिए।

प्रयास कीजिए

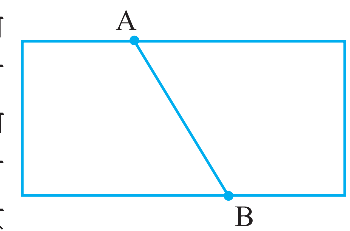
1. अपनी पेंसिल के नुकीले सिरे से, एक कागज़ पर चार बिंदु अंकित कीजिए तथा उन्हें नाम A,C,P और H दीजिए। इन बिंदुओं को विभिन्न प्रकारों से नाम दीजिए। नाम देने का एक प्रकार संलग्न आकृति के अनुसार हो सकता है।

   A•   •C

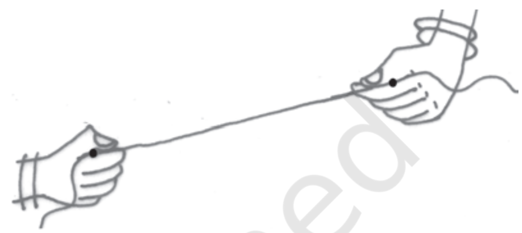
   P•   •H

2. आसमान में एक तारा हमें एक बिंदु की अवधारणा का आभास कराता है। अपने दैनिक जीवन से इसी प्रकार की पाँच स्थितियाँ चुनकर दीजिए।

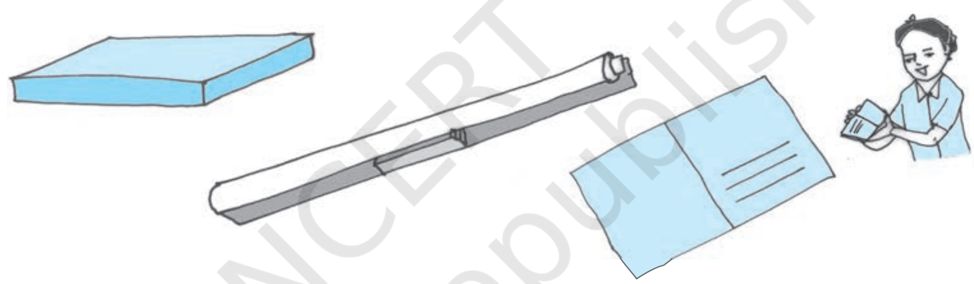
4.3 रेखाखंड



एक कागज़ को मोड़िए और फिर उसे खोल लीजिए। क्या आपको कोई मोड़ का निशान दिखाई देता है? इससे एक रेखाखंड (line segment) की अवधारणा का आभास होता है। इसके दो अंत बिंदु (end points) A और B हैं। एक पतला धागा (या डोरी) लीजिए। इसके दोनों सिरों को कसकर पकड़िए ताकि धागे में कोई ढील न रहे। यह एक रेखाखंड निरूपित करता है। हाथों से पकड़े हुए सिरे इस रेखाखंड के अंत बिंदु हैं।



रेखाखंड के कुछ उदाहरण निम्नलिखित हैं :



एक बक्स का किनारा एक ट्यूबलाइट एक पोस्टकार्ड का किनारा

अपने आस-पास से रेखाखंडों के कुछ और उदाहरण देने का प्रयत्न कीजिए।

एक कागज़ पर दो बिंदु A और B अंकित कीजिए। इन दोनों बिंदुओं को सभी संभव रास्तों से जोड़ने का प्रयत्न कीजिए (आकृति 4.1)।

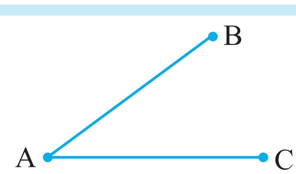
आकृति 4.1

A से B तक का सबसे छोटा रास्ता क्या है?

A और B को जोड़ने वाला यह सबसे छोटा रास्ता (इसमें बिंदु A और B भी सम्मिलित हैं), जो संलग्न आकृति 4.1 में दर्शाया गया है, एक रेखाखंड है। इसे $\overline{AB}$ या $\overline{BA}$ से व्यक्त किया जाता है। बिंदु A और B इस रेखाखंड के अंत बिंदु हैं।

प्रयास कीजिए

1. संलग्न आकृति में दिए रेखाखंडों के नाम दीजिए (आकृति 4.2)। क्या A प्रत्येक रेखाखंड का एक अंत बिंदु है?



आकृति 4.2

4.4 एक रेखा

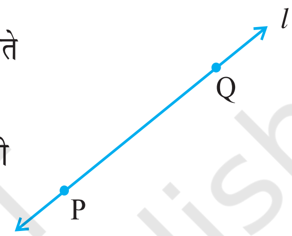
कल्पना कीजिए कि A से B तक के रेखाखंड (अर्थात् $\overline{AB}$) को A से आगे एक दिशा में और B से आगे दूसरी दिशा में बिना किसी अंत के विस्तृत किया गया है (आकृति को देखिए)। आपको रेखा (line) का एक उदाहरण प्राप्त हो जाएगा।

क्या आप सोचते हैं कि आप कागज़ पर पूरी रेखा खींच सकते हैं? नहीं। (क्यों?)

दो बिंदुओं A और B से होकर जाने वाली रेखा को $\overleftrightarrow{AB}$ से निरूपित करते हैं। यह दोनों दिशाओं में अनिश्चित रूप से विस्तृत होती है। इस पर असंख्य बिंदु स्थित होते हैं। (इनके बारे में सोचिए)

रेखा को निश्चित करने के लिए, दो बिंदु पर्याप्त हैं। हम कहते हैं कि दो बिंदु एक रेखा निर्धारित (determine) करते हैं।

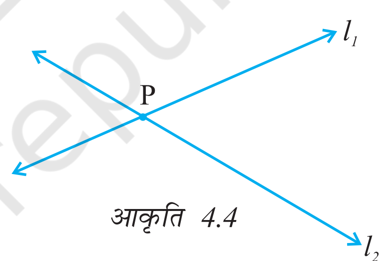
संलग्न आकृति (आकृति 4.3) रेखा $\overleftrightarrow{PQ}$ की है। कभी-कभी एक रेखा को l जैसे अक्षर से भी व्यक्त किया जाता है।



आकृति 4.3

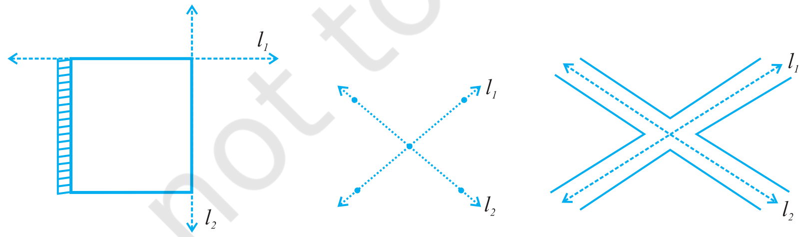
4.5 प्रतिच्छेदी रेखाएँ

संलग्न आकृति 4.4 को देखिए। इसमें दो रेखाएँ l_1 और l_2 दर्शाई गई हैं। ये दोनों रेखाएँ बिंदु P से होकर जाती हैं। हम कहते हैं कि रेखाएँ l_1 और l_2 बिंदु P पर प्रतिच्छेद (intersect) करती हैं। यदि दो रेखाओं में एक उभयनिष्ठ बिंदु हो, तो वे **प्रतिच्छेदी रेखाएँ (intersecting lines)** कहलाती हैं।



आकृति 4.4

प्रतिच्छेदी रेखाओं के कुछ उदाहरण निम्न हैं :



आपकी अभ्यास पुस्तिका के दो संलग्न किनारे

अंग्रेज़ी वर्णमाला का अक्षर X

परस्पर काटती हुई सड़कें

आकृति 4.5

प्रतिच्छेदी रेखाओं के युग्मों के कुछ और उदाहरण ज्ञात करने का प्रयत्न कीजिए।

इन्हें कीजिए

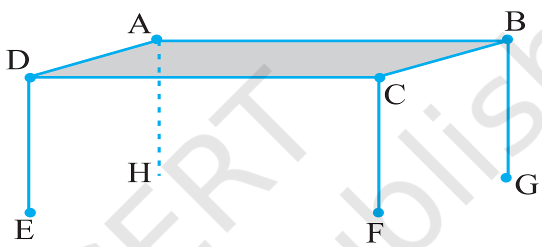
एक कागज़ लीजिए। इसे दो बार मोड़िए (और मोड़ के निशान बनाइए) ताकि दो प्रतिच्छेदी रेखाएँ प्राप्त हो जाएँ और चर्चा कीजिए :

(a) क्या दो रेखाएँ एक से अधिक बिंदुओं पर प्रतिच्छेद कर सकती हैं?

(b) क्या दो से अधिक रेखाएँ एक ही बिंदु पर प्रतिच्छेद कर सकती हैं?

4.6 समांतर रेखाएँ

आइए, आकृति 4.6 में दर्शाई गई मेज़ को देखें। इसका ऊपरी सिरा ABCD सपाट (Flat) है। क्या आप कुछ रेखाखंड और बिंदु देख पा रहे हैं? क्या यहाँ प्रतिच्छेदी रेखाएँ हैं?



आकृति 4.6

हाँ, $\overleftrightarrow{AB}$ और $\overleftrightarrow{BC}$ बिंदु B पर प्रतिच्छेद करती हैं। कौन-सी रेखाएँ A पर प्रतिच्छेद करती हैं? कौन-सी रेखाएँ C पर प्रतिच्छेद करती हैं और कौन-सी रेखाएँ D पर प्रतिच्छेद करती हैं?

क्या रेखाएँ AD और CD परस्पर प्रतिच्छेद करती हैं?

क्या रेखाएँ AD और BC परस्पर प्रतिच्छेद करती हैं?

आपने देखा कि मेज़ के ऊपरी पृष्ठ पर कुछ रेखाएँ हैं जो परस्पर प्रतिच्छेद नहीं करतीं (उन्हें कितना भी बढ़ाया जाए)। $\overleftrightarrow{AD}$ और $\overleftrightarrow{BC}$ ऐसी रेखाओं का एक युग्म बनाती हैं। मेज़ के ऊपरी सिरे पर क्या आप रेखाओं का कोई ऐसा ही अन्य युग्म (जो कहीं नहीं मिलती) बता सकते हैं?

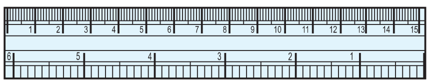
ऐसी रेखाएँ (जैसी मेज़ में ऊपरी सिरे पर हैं) जो प्रतिच्छेद नहीं करतीं **समांतर रेखाएँ (parallel lines)** कहलाती हैं।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए :

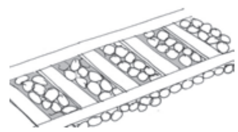
आप समांतर रेखाओं को और कहाँ देखते हैं? इनके 10 उदाहरण ज्ञात करने का प्रयत्न कीजिए।

यदि दो रेखाएँ AB और CD समांतर हों, तो हम इन्हें सांकेतिक रूप में $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ लिखते हैं।

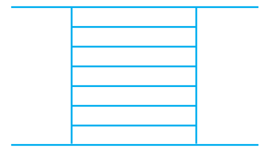
यदि दो रेखाएँ l_1 और l_2 समांतर हैं, तो हम $l_1 \parallel l_2$ लिखते हैं।
क्या आप नीचे दी आकृति में समांतर रेखाएँ बता सकते हैं?



रूलर (स्केल) के सम्मुख किनारे



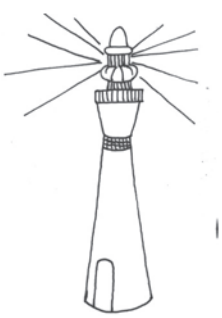
रेल की पटरी



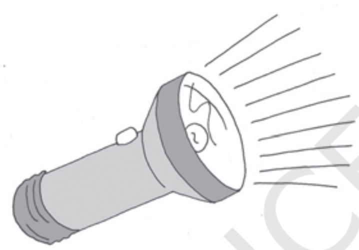
खिड़की की सलाखें

4.7 किरण

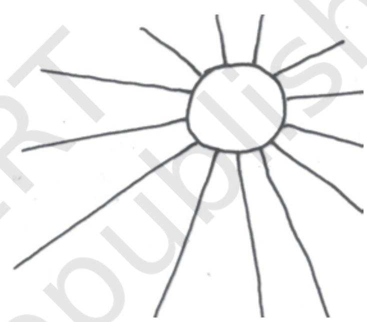
किरण (ray) के लिए कुछ निम्नलिखित मॉडल हैं :



एक लाइट हाउस से निकली हुई प्रकाश की किरणें



टॉर्च से निकली प्रकाश की किरणें



सूर्य की किरणें

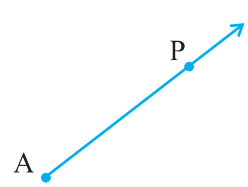
किरण रेखा का एक भाग होता है। यह एक बिंदु से प्रारंभ होती है (जिसे प्रारंभिक बिंदु (initial point) कहते हैं) और एक दिशा में बिना किसी अंत के विस्तृत होती है।

यहाँ दाईं ओर किरण की दी हुई आकृति (आकृति 4.7) को देखिए। इस किरण पर दो बिंदु दर्शाए गए हैं। ये हैं :

(a) A, जो प्रारंभिक बिंदु है।

(b) P, जो किरण पर एक अन्य बिंदु है।

हम इसे $\overrightarrow{AP}$ से व्यक्त करते हैं।



आकृति 4.7

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए :

यदि $\overrightarrow{PQ}$ एक किरण है, तो

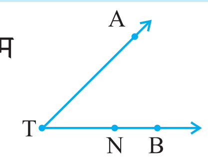
(a) इसका प्रारंभिक बिंदु क्या है?

(b) बिंदु Q किरण पर कहाँ स्थित होता है?

(c) क्या हम कह सकते हैं कि Q इस किरण का प्रारंभिक बिंदु है?

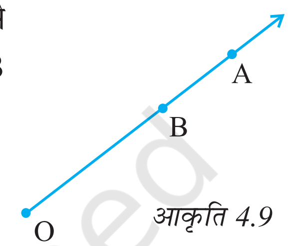
प्रयास कीजिए

1. सामने दी आकृति (आकृति 4.8) में दर्शाई गई किरणों के नाम लिखिए।
2. क्या T इन सभी किरणों का प्रारंभिक बिंदु है?



आकृति 4.8

संलग्न आकृति 4.9 में, एक किरण OA दी है। यह O से प्रारंभ होती है और A से होकर जाती है। यह किरण बिंदु B से होकर भी जाती है।



आकृति 4.9

क्या आप इसे $\overrightarrow{OB}$ भी कह सकते हैं? क्यों?

यहाँ $\overrightarrow{OA}$ और $\overrightarrow{OB}$ एक ही किरण को दर्शाते हैं।

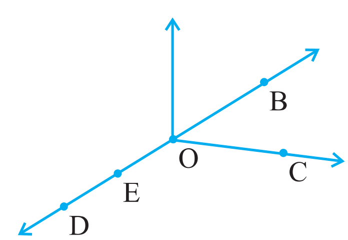
क्या हम किरण $\overrightarrow{OA}$ को किरण $\overrightarrow{AO}$ लिख सकते हैं? क्यों या क्यों नहीं?

पाँच किरणें खींचिए और उनके उचित नाम लिखिए।

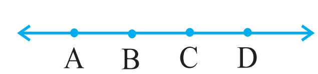
इन किरणों के सिरे पर लगे तीर क्या दर्शाते हैं?

प्रश्नावली 4.1

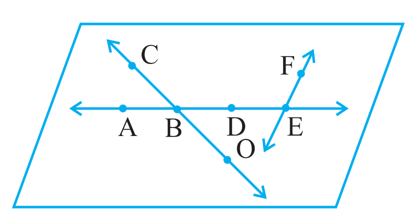
1. संलग्न आकृति का प्रयोग करके, निम्न के नाम लिखिए :
   (a) पाँच बिंदु
   (b) एक रेखा
   (c) चार किरणें
   (d) पाँच रेखाखंड



2. संलग्न आकृति में दी हुई रेखा के सभी संभव प्रकारों के नाम लिखिए। आप इन चार बिंदुओं में से किसी भी बिंदु का प्रयोग कर सकते हैं।



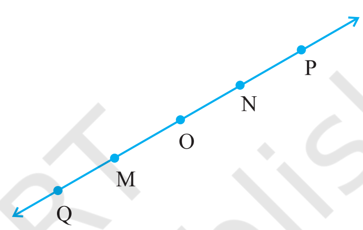
3. संलग्न आकृति को देखकर नाम लिखिए :
   (a) रेखाएँ जिसमें बिंदु E सम्मिलित हैं
   (b) A से होकर जाने वाली रेखा
   (c) वह रेखा जिस पर O स्थित है
   (d) प्रतिच्छेदी रेखाओं के दो युग्म



4. निम्नलिखित से होकर कितनी रेखाएँ खींची जा सकती हैं?
   (a) एक बिंदु (b) दो बिंदु

5. निम्नलिखित स्थितियों में से प्रत्येक के लिए एक रफ (Rough) आकृति बनाइए और उचित रूप से उसे नामांकित कीजिए :
   (a) बिंदु P रेखाखंड $\overline{AB}$ पर स्थित है।
   (b) रेखाएँ XY और PQ बिंदु M पर प्रतिच्छेद करती हैं।
   (c) रेखा l पर E और F स्थित हैं, परंतु D स्थित नहीं है।
   (d) $\overrightarrow{OP}$ और $\overrightarrow{OQ}$ बिंदु O पर मिलती हैं।

6. रेखा $\overleftrightarrow{MN}$ की संलग्न आकृति को देखिए। इस आकृति के संदर्भ में बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य :



   (a) Q, M, O, N और P रेखा $\overleftrightarrow{MN}$ पर स्थित बिंदु हैं।
   (b) M, O और N रेखाखंड $\overleftrightarrow{MN}$ पर स्थित बिंदु हैं।
   (c) M और N रेखाखंड $\overleftrightarrow{MN}$ के अंत बिंदु हैं।
   (d) O और N रेखाखंड $\overrightarrow{OP}$ के अंत बिंदु हैं।
   (e) M रेखाखंड $\overline{QO}$ के दोनों अंत बिंदुओं में से एक बिंदु है।
   (f) M किरण $\overrightarrow{OP}$ पर एक बिंदु है।
   (g) किरण $\overrightarrow{OP}$ किरण $\overrightarrow{QP}$ से भिन्न है।
   (h) किरण $\overrightarrow{OP}$ वही है जो किरण $\overrightarrow{OM}$ है।
   (i) किरण $\overrightarrow{OM}$ किरण $\overrightarrow{OP}$ के विपरीत (Opposite) नहीं है।
   (j) O किरण $\overrightarrow{OP}$ का प्रारंभिक बिंदु नहीं है।
   (k) N किरण $\overrightarrow{NP}$ और $\overrightarrow{NM}$ का प्रारंभिक बिंदु है।

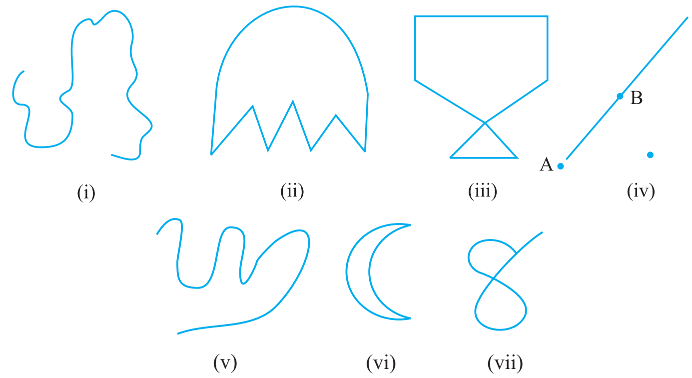
4.8 वक्र

क्या आपने कभी कागज़ पर पेंसिल से टेढ़ी-मेढ़ी रेखाएँ खींची हैं। ऐसा करने पर जो आकृतियाँ प्राप्त होती हैं वे वक्र (curves) कहलाते हैं।

इनमें से कुछ आकृतियों (drawing) को आप कागज़ पर बिना पेंसिल उठाए और रूलर का प्रयोग किए बना सकते हैं। ये सभी आकृतियाँ वक्र हैं (आकृति 4.10)।

आम भाषा में 'वक्र' का अर्थ होता है 'सीधा नहीं'। गणित में वक्र सीधी भी हो सकती है, जैसा कि ऊपर [(आकृति 4.10 (iv)] में दर्शाया गया है।

ध्यान दीजिए कि आकृति 4.10 में वक्र (iii) और (vii) स्वयं अपने को काट रही हैं, जबकि (i), (ii), (v) और (vi) में वक्र स्वयं को नहीं काटते हैं। यदि कोई वक्र स्वयं को न काटे, तो वह सरल वक्र (Simple Curves) कहलाती हैं।

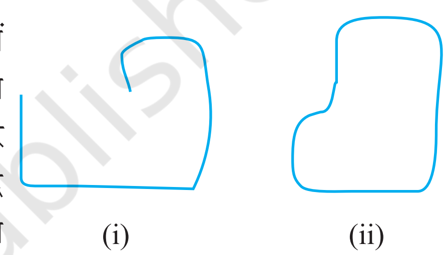


आकृति 4.10

पाँच, सरल वक्र बनाइए और पाँच वक्र बनाइए जो सरल न हों।

अब इन्हें देखें (आकृति 4.11)

संलग्न आकृति (आकृति 4.11) में दी हुई दोनों वक्रों में क्या अंतर है? पहली, अर्थात् आकृति 4.11 (i) वक्र एक खुली (Open Curve) है, और दूसरी, (अर्थात् आकृति 4.11 (ii) वक्र एक बंद वक्र (Closed Curve) है। क्या आप आकृति 4.10 (i), (ii), (v) और (vi) में, बंद वक्र और खुली वक्र बता सकते हैं?



आकृति 4.11

एक आकृति में स्थितियाँ

एक टेनिस कोर्ट (Tennis Court) में कोर्ट रेखा उसे तीन भागों में बाँटती है। ये भाग हैं : रेखा के एक ओर, रेखा पर और रेखा के दूसरी ओर। आप एक ओर से दूसरी ओर बिना रेखा को पार किए नहीं जा सकते हैं।

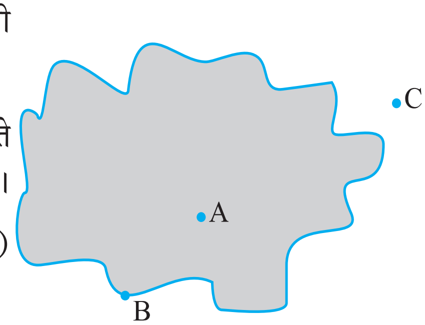
आपके घर की परिसीमा (Boundary) घर को सड़क से अलग करती है। आप परिसर के 'अंदर', बाड़े की 'परिसीमा' और परिसर के 'बाहर' की बात करते हैं।

इसी प्रकार, एक बंद वक्र से संबंधित तीन भाग होते हैं, जो एक-दूसरे से पृथक (अलग-अलग) होते हैं।

(i) वक्र का अभ्यंतर (interior) (अंदर का भाग)

(ii) वक्र की परिसीमा (boundary) (वक्र पर)

(iii) वक्र का बहिर्भाग (exterior) (बाहर का भाग)



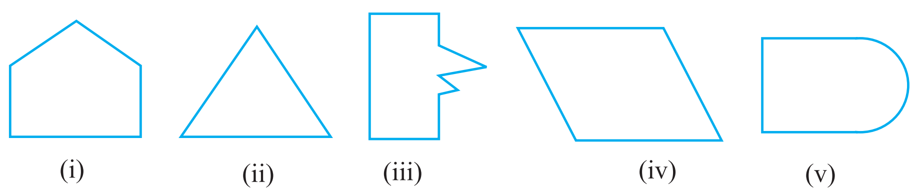
आकृति 4.12

सम्मुख आकृति 4.12 में, A वक्र के अभ्यंतर में है, C उसके बहिर्भाग में है और B स्वयं वक्र की परिसीमा पर स्थित है।

वक्र के अभ्यंतर और उसकी परिसीमा को मिलाकर उस वक्र का **क्षेत्र (region)** कहा जाता है। जो आपने बंद वक्र खींचा है, उसमें तीन क्षेत्रों को दर्शाया गया है।

4.9 बहुभुज

नीचे दी हुई आकृतियों 4.13 (i), (ii), (iii), (iv) और (v) को देखिए :



आकृति 4.13

आप इनके बारे में क्या कह सकते हैं? क्या ये बंद आकृतियाँ (वक्र) हैं? यह एक दूसरे से किस प्रकार भिन्न हैं? आकृति 4.13 (i), (ii), (iii) और (iv) में कुछ विशेषता हैं। यह केवल रेखाखंडों से ही बनी हैं। ऐसी आकृतियाँ **बहुभुज (polygons)** कहलाती हैं।

अतः, एक आकृति बहुभुज होती है, जब वह एक सरल बंद आकृति हो और केवल रेखाखंडों से ही बनी हो। दस अलग-अलग आकृतियों वाले बहुभुज बनाइए।

इन्हें कीजिए

निम्न की सहायता से एक बहुभुज बनाने का प्रयत्न कीजिए।

1. माचिस की पाँच तीलियाँ
2. माचिस की चार तीलियाँ
3. माचिस की तीन तीलियाँ
4. माचिस की दो तीलियाँ

उपरोक्त में से किस स्थिति में यह संभव नहीं हुआ? क्यों?

भुजाएँ, शीर्ष और विकर्ण

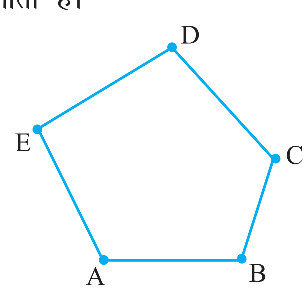
संलग्न आकृति 4.14 को देखिए। इसको बहुभुज कहने के लिए कुछ कारण दीजिए। एक बहुभुज को बनाने वाले रेखाखंड उसकी ***भुजाएँ (sides)*** कहलाती हैं।

बहुभुज ABCDE की भुजाओं के नाम क्या हैं?

(ध्यान दीजिए कि कोनों (corners) को किस क्रम में लेकर बहुभुज का नाम लिखा गया है।)

इसकी भुजाएँ $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}$ और $\overline{EA}$ हैं।

दो भुजाएँ जहाँ मिलती हैं उस बिंदु को बहुभुज का शीर्ष (*vertex*) कहते हैं।



आकृति 4.14

भुजाएँ $\overline{AE}$ और $\overline{ED}$ बिंदु E पर मिलती हैं, इसलिए E बहुभुज ABCDE का एक शीर्ष है। B और C इसके अन्य दो शीर्ष हैं। क्या आप इन बिंदुओं पर मिलने वाली भुजाओं के नाम लिख सकते हैं?

क्या आप उपरोक्त बहुभुज ABCDE के अन्य शीर्षों के नाम लिख सकते हैं?

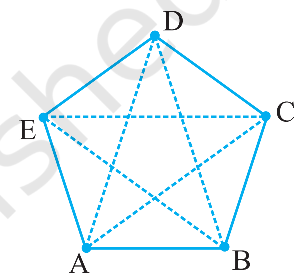
कोई भी दो भुजाएँ जिनमें एक उभयनिष्ठ अंत बिंदु (common end point) हो बहुभुज की **आसन्न भुजाएँ (adjacent sides)** कहलाती हैं।

क्या AB और BC आसन्न भुजाएँ हैं? AE और DC के बारे में आप क्या कह सकते हैं?

बहुभुज की एक ही भुजा के अंत बिंदु **आसन्न शीर्ष (adjacent vertices)** कहलाते हैं। शीर्ष E और D आसन्न शीर्ष हैं, जबकि शीर्ष A और D आसन्न शीर्ष नहीं हैं। क्या आप बता सकते हैं कि क्यों?

उन शीर्षों को लीजिए जो आसन्न नहीं हैं। ऐसे शीर्षों को मिलाने से बने रेखाखंड बहुभुज के **विकर्ण (diagonals)** कहलाते हैं।

संलग्न आकृति में, रेखाखंड $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{BE}$ और $\overline{CE}$ बहुभुज के विकर्ण हैं।



आकृति 4.15

क्या रेखाखंड $\overline{BC}$ एक विकर्ण है? क्यों या क्यों नहीं?

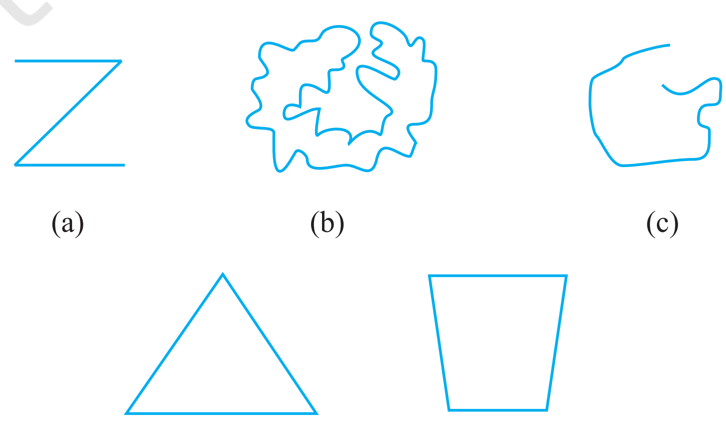
क्या आप आसन्न शीर्षों को जोड़कर विकर्ण प्राप्त कर सकते हैं।

आकृति ABCDE (आकृति 4.15) के सभी भुजाओं, आसन्न भुजाओं और आसन्न शीर्षों के नाम लिखिए।

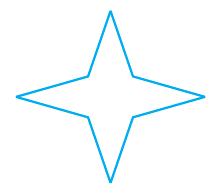
एक बहुभुज ABCDEFGH बनाइए और उसकी सभी भुजाओं, आसन्न भुजाओं तथा शीर्षों सहित विकर्णों के नाम लिखिए।

प्रश्नावली 4.2

1. नीचे दी हुई वक्रों को (i) खुली या (ii) बंद वक्रों के रूप में वर्गीकृत कीजिए :



2. निम्न को स्पष्ट करने के लिए रफ आकृतियाँ बनाइए :
   (a) खुला वक्र (b) बंद वक्र
3. कोई भी बहुभुज खींचिए और उसके अभ्यंतर को छायांकित (shade) कीजिए।
4. संलग्न आकृति को देखकर निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए :
   (a) क्या यह एक वक्र है?
   (b) क्या यह बंद है?

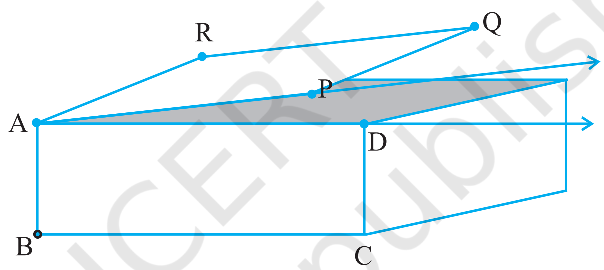


5. रफ आकृतियाँ बनाकर, यदि संभव हो तो निम्न को स्पष्ट कीजिए :
   (a) एक बंद वक्र जो बहुभुज नहीं है।
   (b) केवल रेखाखंडों से बनी हुई खुली वक्र
   (c) दो भुजाओं वाला एक बहुभुज

4.10 कोण

जब कोने (corner) बनते हैं, तो कोण (angles) भी बनते हैं।

यहाँ एक आकृति 4.16 दी है, जहाँ एक बक्स (Box) का ऊपरी सिरा कब्जा लगे एक दरवाज़े की तरह है। बक्स के किनारे (edge) AD और दरवाज़े के किनारे AP की दो किरणों



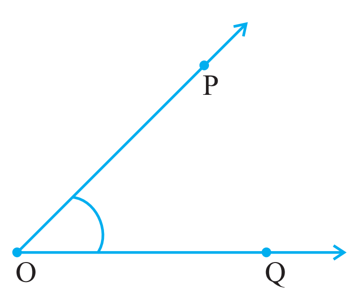
आकृति 4.16

$\overrightarrow{AD}$ और $\overrightarrow{AP}$ के रूप में कल्पना की जा सकती है। इन दोनों किरणों में एक उभयनिष्ठ अंत बिंदु (या प्रारंभिक बिंदु) A है, यह कहा जाता है कि ये दो किरणें एक कोण बना रही हैं।

उभयनिष्ठ प्रारंभिक बिंदु वाली दो किरणों से एक कोण बनता है।

कोण को बनाने वाली दोनों किरण उसकी **भुजाएँ (Arms या sides)** कहलाती हैं। उभयनिष्ठ प्रारंभिक बिंदु कोण का **शीर्ष (vertex)** कहलाता है।

संलग्न आकृति में, किरण $\overrightarrow{OP}$ और $\overrightarrow{OQ}$ से बने एक कोण को दर्शाया गया है। कोण को दर्शाने के लिए शीर्ष पर एक छोटे वक्र का प्रयोग किया गया है। O इस कोण का शीर्ष है। इस कोण की भुजाएँ क्या हैं? क्या ये किरणें $\overrightarrow{OP}$ और $\overrightarrow{OQ}$ नहीं हैं?



आकृति 4.17

इस कोण को हम किस प्रकार नामांकित कर सकते हैं? इसे हम केवल यह कह सकते हैं कि यह O पर एक कोण है और अधिक विशिष्टता के लिए, हम कोण की दोनों भुजाओं पर एक-एक बिंदु लेकर और उसके शीर्ष को लेकर कोण का नाम लिख

सकते हैं। इस प्रकार, इस कोण को कोण POQ नाम देना एक अच्छा तरीका है। हम इसे $\angle POQ$ से व्यक्त करते हैं।

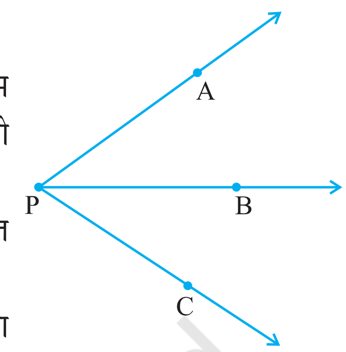
सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए :

संलग्न आकृति 4.18 को देखिए। इस कोण का क्या नाम है? क्या हम इसे $\angle P$ कह सकते हैं? परंतु किस कोण को $\angle P$ कहेंगे? $\angle P$ से हमारा क्या तात्पर्य है?

क्या एक कोण को केवल उसके शीर्ष द्वारा नामांकित करना यहाँ सहायक होगा? क्यों नहीं?

$\angle P$ का अर्थ यहाँ $\angle APB$ या $\angle CPB$ या $\angle APC$ हो सकता है। इसलिए यहाँ और अधिक सूचना की आवश्यकता है।

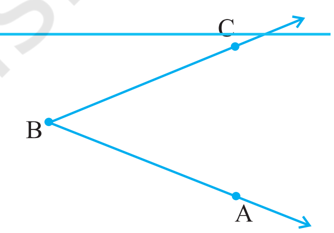
ध्यान दीजिए कि कोण को लिखते समय उसके शीर्ष के अक्षर को सदैव बीच में लिखा जाता है।



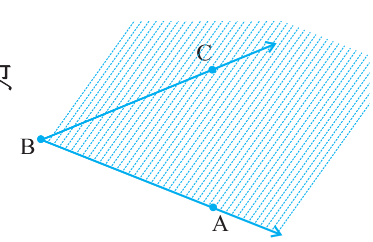
आकृति 4.18

इन्हें कीजिए

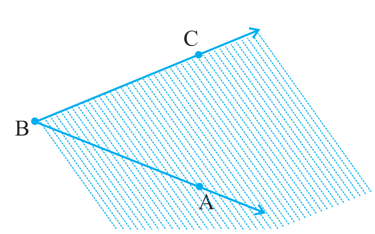
कोई कोण, मान लीजिए, $\angle ABC$ लीजिए।



$\overrightarrow{BA}$ को परिसीमा लेकर उस भाग को छायांकित कीजिए जिस ओर $\overrightarrow{BC}$ स्थित है।

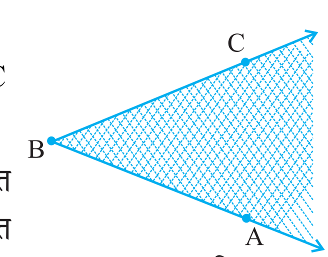


अब $\overrightarrow{BC}$ को परिसीमा लेकर उस भाग को दूसरे रंग से छायांकित कीजिए जिस ओर $\overrightarrow{BA}$ स्थित है।



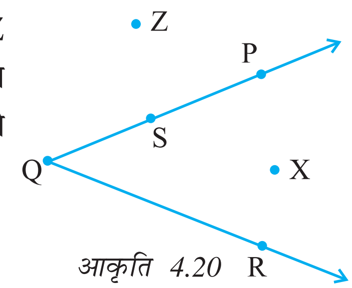
दोनों प्रकार के छायांकित भागों में उभयनिष्ठ भाग $\angle ABC$ का अभ्यंतर है (आकृति 4.19)।

(ध्यान दें कि अभ्यंतर एक सीमित क्षेत्र नहीं है। यह अनिश्चित रूप से विस्तृत है, क्योंकि कोणों की दोनों भुजाएँ अनिश्चित रूप से अपनी-अपनी एक ओर विस्तृत हैं।)



आकृति 4.19

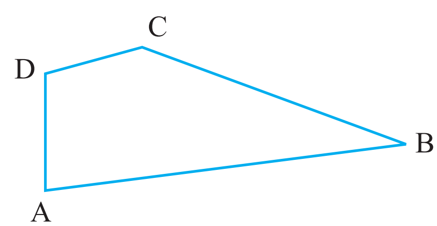
संलग्न आकृति 4.20 में, X कोण के अभ्यंतर में स्थित है। Z कोण के अभ्यंतर में स्थित नहीं है। यह कोण के बहिर्भाग में स्थित है। बिंदु S स्वयं $\angle PQR$ पर स्थित है। अत: कोण से संबंधित भी तीन क्षेत्र होते हैं।



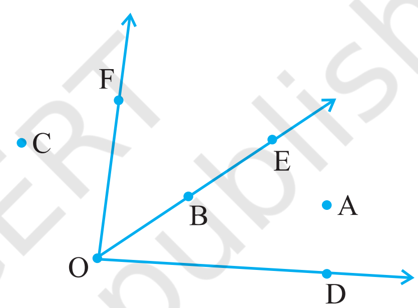
आकृति 4.20

प्रश्नावली 4.3

1. नीचे दी आकृति में, कोणों के नाम लिखिए :



2. संलग्न आकृति में, वे बिंदु लिखिए जो
   (a) $\angle DOE$ के अभ्यंतर में स्थित हैं।
   (b) $\angle EOF$ के बहिर्भाग में स्थित हैं।
   (c) $\angle EOF$ पर स्थित हैं।



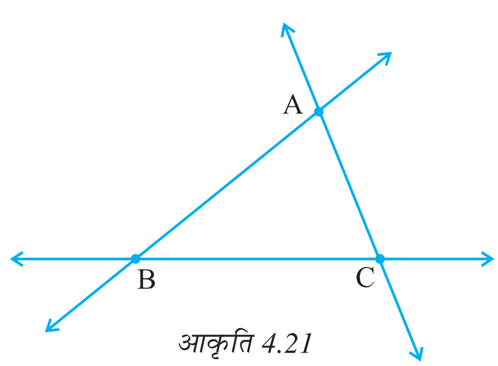
3 दो कोणों की रफ आकृतियाँ खींचिए जिससे
   (a) उनमें एक बिंदु उभयनिष्ठ हो।
   (b) उनमें दो बिंदु उभयनिष्ठ हों।
   (c) उनमें तीन बिंदु उभयनिष्ठ हों।
   (d) उनमें चार बिंदु उभयनिष्ठ हों।
   (e) उनमें एक किरण उभयनिष्ठ हो।

4.11 त्रिभुज

त्रिभुज (triangle) एक तीन भुजाओं वाला बहुभुज होता है। वास्तव में, यह सबसे कम भुजाओं वाला बहुभुज है।

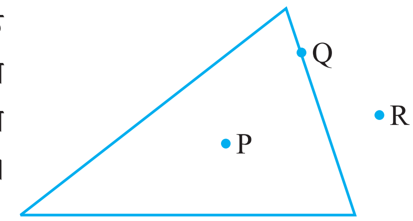
संलग्न आकृति 4.21 में दिए त्रिभुज को देखिए। हम त्रिभुज ABC के लिए सांकेतिक रूप से ΔABC लिखते हैं। ΔABC में कितनी भुजाएँ हैं? इसमें कितने कोण हैं?

इस त्रिभुज की तीन भुजाएँ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ और $\overline{CA}$ हैं। इसके तीन कोण हैं : $\angle BAC$, $\angle BCA$ और $\angle ABC$। बिंदु A,B और C इस त्रिभुज के शीर्ष कहलाते हैं।



आकृति 4.21

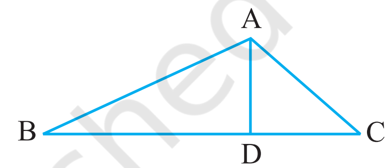
एक बहुभुज होने के कारण, एक त्रिभुज का एक बहिर्भाग और एक अभ्यंतर होता है। संलग्न आकृति 4.22 में, P त्रिभुज के अभ्यंतर में स्थित है, R त्रिभुज के बहिर्भाग में स्थित है और Q स्वयं त्रिभुज पर स्थित है।



आकृति 4.22

प्रश्नावली 4.4

1. त्रिभुज ABC का एक रफ चित्र खींचिए। इस त्रिभुज के अभ्यंतर में एक बिंदु P अंकित कीजिए और उसके बहिर्भाग में एक बिंदु Q अंकित कीजिए। बिंदु A इसके अभ्यंतर में स्थित है या बहिर्भाग में स्थित है?
2. (a) संलग्न आकृति में तीन त्रिभुजों की पहचान कीजिए। (b) सात कोणों के नाम लिखिए। (c) इसी आकृति में छः रेखाखंडों के नाम लिखिए। (d) किन दो त्रिभुजों में $\angle B$ उभयनिष्ठ है?

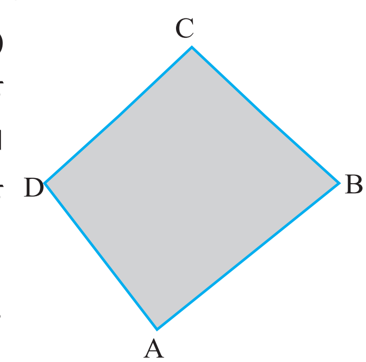


4.12 चतुर्भुज

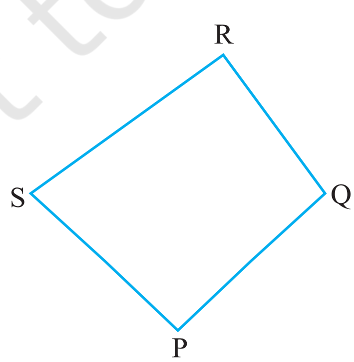
चार भुजाओं वाला बहुभुज एक **चतुर्भुज (Quadrilateral)** कहलाता है। इसकी चार भुजाएँ और चार कोण होते हैं। एक त्रिभुज की ही तरह, आप इसके अभ्यंतर को देख सकते हैं।

उस विधि को देखिए जिस क्रम में चतुर्भुज के शीर्षों के नाम लिखे जाते हैं।

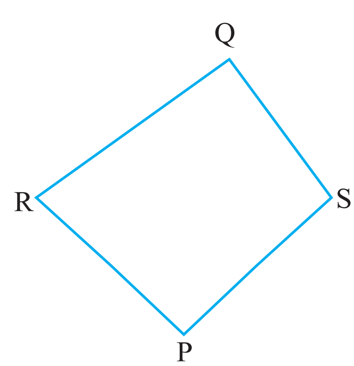
चतुर्भुज ABCD (आकृति 4.23) की चार भुजाएँ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ और $\overline{DA}$ हैं। इसके चार कोण हैं : $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ और $\angle D$ ।



आकृति 4.23



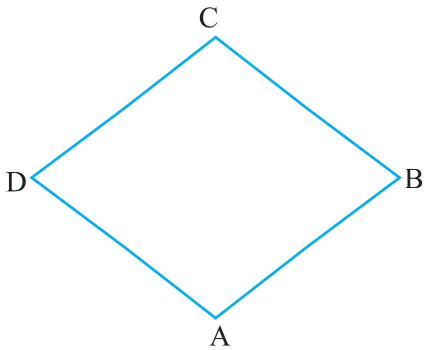
यह चतुर्भुज PQRS है।



क्या यह चतुर्भुज PQRS है?

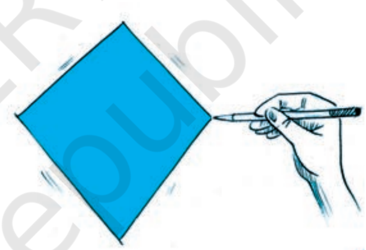
किसी चतुर्भुज ABCD में, $\overline{AB}$ और $\overline{BC}$ आसन्न भुजाएँ हैं। क्या आप **आसन्न भुजाओं** के अन्य युग्म लिख सकते हैं?

इस चतुर्भुज में, $\overline{AB}$ और $\overline{DC}$ **सम्मुख भुजाएँ (Opposite sides)** हैं। सम्मुख भुजाओं के अन्य युग्म के नाम लिखिए।



$\angle A$ और $\angle C$ चतुर्भुज ABCD के **सम्मुख कोण (Opposite angles)** कहलाते हैं। इसी प्रकार, $\angle D$ और $\angle B$ भी सम्मुख कोण हैं। स्वाभाविक है कि $\angle A$ और $\angle B$ **आसन्न कोण (adjacent angles)** हैं। अब आप आसन्न कोणों के अन्य युग्म लिख सकते हैं।

प्रश्नावली 4.5



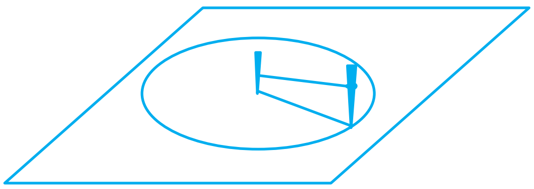
1. चतुर्भुज PQRS का एक रफ चित्र खींचिए। इसके विकर्ण खींचिए। इनके नाम लिखिए। क्या विकर्णों का प्रतिच्छेद बिंदु चतुर्भुज के अभ्यंतर में स्थित है या बहिर्भाग में स्थित है?
2. चतुर्भुज KLMN का एक रफ चित्र खींचिए। बताइए :
   (a) सम्मुख भुजाओं के दो युग्म
   (b) सम्मुख कोणों के दो युग्म
   (c) आसन्न भुजाओं के दो युग्म
   (d) आसन्न कोणों के दो युग्म
3. **खोज कीजिए :**
   पट्टियाँ और उन्हें बाँधने की वस्तुएँ लेकर एक त्रिभुज बनाइए और एक चतुर्भुज बनाइए। त्रिभुज के किसी एक शीर्ष पर पट्टियों को अंदर की ओर दबाने का प्रयत्न कीजिए। यही कार्य चतुर्भुज के लिए भी कीजिए। क्या त्रिभुज में कोई परिवर्तन आया? क्या चतुर्भुज में कोई परिवर्तन हुआ? क्या त्रिभुज एक दृढ़ (rigid) आकृति है? क्या कारण है कि विद्युत टावरों (Electric Towers) जैसी संरचनाओं में त्रिभुजीय आकारों का प्रयोग किया जाता है, चतुर्भुजीय आकारों का नहीं?

4.13 वृत्त

आप अपने पर्यावरण में अनेक वस्तुएँ पाएँगे जो गोल होती हैं, जैसे–पहिया, चूड़ी, सिक्का इत्यादि। हम गोल आकृतियों का अनेक प्रकार से प्रयोग करते हैं। एक भारी इस्पात की ट्यूब को खींचने की अपेक्षा लुढ़काना अधिक सरल होता है।

वृत्त (circle) एक सरल बंद वक्र है जो एक बहुभुज नहीं है। इसके कुछ विशिष्ट गुण हैं।

इन्हें कीजिए



- एक चूड़ी या कोई और गोल वस्तु को कागज़ पर रखिए और उसके चारों ओर पेंसिल घुमाकर एक वृत्ताकार आकृति बनाइए।
- यदि आपको एक वृत्ताकार बाग बनाना हो, तो आप कैसे करेंगे?

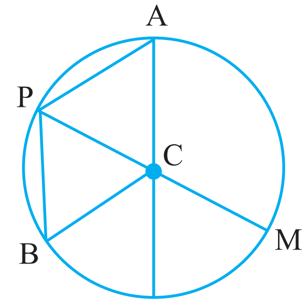
दो डंडी और एक डोरी लीजिए। भूमि पर एक डंडी को गाड़ दीजिए। यह खींचे जाने वाले वृत्त का केन्द्र (centre) है। डोरी के प्रत्येक सिरे पर एक फंदा (loop) बनाकर दो फंदे प्राप्त कीजिए। एक फंदे को केंद्र वाली पहली डंडी में डाल दीजिए और दूसरे फंदे को दूसरी डंडी में डाल दीजिए। इन डंडियों को भूमि के ऊर्ध्वाधर रखिए। डोरी को तनी हुई रखते हुए, भूमि पर दूसरी डंडी को घुमाकर एक पथ बनाइए। आप एक वृत्त (circle) प्राप्त करेंगे।

स्वाभाविक है कि वृत्त पर स्थित प्रत्येक बिंदु केंद्र से बराबर (या समान) दूरी पर है।

वृत्त के भाग

संलग्न आकृति 4.24 में केंद्र C वाला एक वृत्त है।

A, P, B, M वृत्त पर स्थित कुछ बिंदु हैं। आप देखेंगे कि CA = CB = CP = CM है।



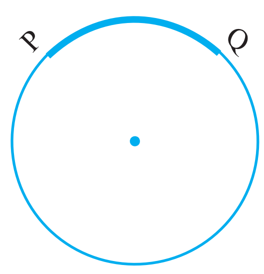
चित्र 4.24

प्रत्येक रेखाखंड $\overline{CA}$, $\overline{CB}$, $\overline{CP}$ या $\overline{CM}$ वृत्त की एक **त्रिज्या (radius)** है। त्रिज्या वह रेखाखंड होता है जो वृत्त पर स्थित बिंदु को उसके केंद्र से जोड़ता है। इसी आकृति में $\overline{CP}$ और $\overline{CM}$ ऐसी त्रिज्याएँ हैं कि बिंदु P, C, M एक ही रेखा में हैं। रेखाखंड $\overline{PM}$ वृत्त का एक **व्यास (diameter)** कहलाता है। क्या वृत्त का व्यास उसकी त्रिज्या का दोगुना है? हाँ। वृत्त पर स्थित किन्हीं दो बिंदुओं को मिलाने वाला रेखाखंड वृत्त की एक **जीवा (chord)** कहलाती है।

इस प्रकार $\overline{PB}$ वृत्त की एक जीवा है। क्या $\overline{PM}$ भी वृत्त की जीवा है?

वृत्त के एक भाग को उसका चाप (arc) कहते हैं।

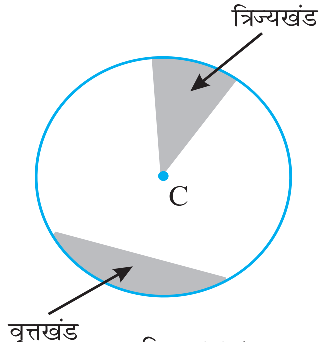
यदि P और Q वृत्त पर स्थित बिंदु है, तो आपको चाप PQ प्राप्त होगा। हम इसे $\overset{\frown}{PQ}$ से व्यक्त करते हैं (आकृति 4.25)।



चित्र 4.25

किसी सरल बंद वक्र की ही तरह, आप एक वृत्त के **अभ्यंतर** और **बहिर्भाग** के बारे में सोच सकते हैं। वृत्तीय क्षेत्र का वह भाग जो दो त्रिज्याओं और संगत चाप से घिरकर

बनता है एक **त्रिज्यखंड (sector)** कहलाता है। वृत्त की एक जीवा और संगत चाप से घिरा वृत्तीय क्षेत्र का भाग एक **वृत्तखंड (segment of a circle)** कहलाता है।



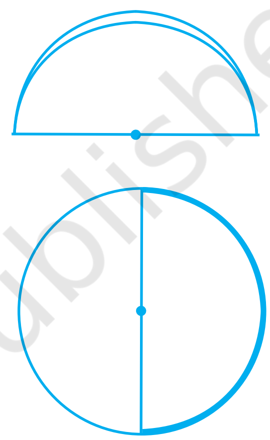
चित्र 4.26

कोई भी वृत्ताकार वस्तु लीजिए। एक धागा लीजिए और उसे उस वस्तु के अनुदिश एक बार रखकर धागे की लंबाई को मापिए। धागे की यह लंबाई उस वस्तु के चारों ओर एक चक्कर लगाने में तय की गई दूरी है। यह लंबाई क्या व्यक्त करती है?

वृत्त के अनुदिश चली गई दूरी उसकी **परिधि (circumference)** कहलाती है।

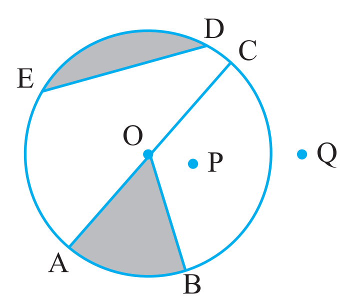
इन्हें कीजिए

- एक वृत्ताकार शीट (sheet) लीजिए। इसे मोड़कर दो आधे भाग (halves) बनाइए। दबाकर मोड़ का निशान बनाइए और शीट को खोल लीजिए। क्या आप देखते हैं कि वृत्तीय क्षेत्र उसके व्यास द्वारा दो आधे (बराबर) भागों में विभाजित हो गया है? वृत्त का एक व्यास उसे दो बराबर भागों में विभाजित करता है। प्रत्येक भाग एक **अर्धवृत्त (semicircle)** कहलाता है। एक अर्धवृत्त वृत्त का आधा भाग है। जिसमें वृत्त का व्यास (उसके अंत बिंदुओं को छोड़ कर) सम्मिलित नहीं हैं।



प्रश्नावली 4.6

1. संलग्न आकृति देखकर लिखिए :



(a) वृत्त का केंद्र
(b) तीन त्रिज्याएँ
(c) एक व्यास
(d) एक जीवा
(e) अभ्यंतर में दो बिंदु
(f) बहिर्भाग में एक बिंदु
(g) एक त्रिज्यखंड
(h) एक वृत्तखंड

2. (a) क्या वृत्त का प्रत्येक व्यास उसकी एक जीवा भी होता है?
(b) क्या वृत्त की प्रत्येक जीवा उसका एक व्यास भी होती है?

3. कोई वृत्त खींचिए और निम्न को अंकित कीजिए :
(a) उसका केंद्र (b) एक वृत्तखंड
(c) एक त्रिज्या (d) उसके अभ्यंतर में एक बिंदु

(e) एक व्यास (f) उसके बहिर्भाग में एक बिंदु

(g) एक त्रिज्यखंड (h) एक चाप

4. सत्य या असत्य बताइए :

(a) वृत्त के दो व्यास अवश्य ही प्रतिच्छेद करेंगे।

(b) वृत्त का केंद्र सदैव उसके अभ्यंतर में स्थित होता है।

हमने क्या चर्चा की?

1. बिंदु एक स्थिति निर्धारित करता है। इसे सामान्यत: अंग्रेज़ी के बड़े अक्षर से व्यक्त किया जाता है।
2. दो बिंदुओं को जोड़ने वाला सबसे छोटा रास्ता एक रेखाखंड दर्शाता है। बिंदु A और B को मिलाने वाले रेखाखंड को $\overline{AB}$ से दर्शाते हैं। $\overline{AB}$ और $\overline{BA}$ दोनों एक ही रेखाखंड को दर्शाते हैं।
3. जब एक रेखाखंड जैसे $\overline{AB}$ को दोनों तरफ़ बिना किसी अंत के विस्तृत किया जाता है तो हमें एक रेखा प्राप्त होती है। इसे $\overleftrightarrow{AB}$ से व्यक्त किया जाता है। इसे कभी-कभी l जैसे अक्षर से भी व्यक्त किया जाता है।
4. दो विभिन्न रेखाएँ जब एक दूसरे को किसी एक बिंदु पर मिलती या काटती हैं तो वे प्रतिच्छेदी रेखाएँ कहलाती हैं।
5. दो रेखाएँ जब एक दूसरे को प्रतिच्छेद नहीं करती अर्थात् नहीं काटती हैं, तो वे समांतर रेखाएँ कहलाती हैं।
6. किरण रेखा का एक भाग होता है जो एक बिंदु से प्रारंभ होकर एक दिशा में बिना किसी अंत के विस्तृत होता है।
7. कागज़ से बिना पेंसिल उठाए कोई भी आकृति (सीधी या टेढ़ी) को एक वक्र कह सकते हैं। इस संदर्भ में एक रेखा भी एक वक्र है।
8. यदि कोई वक्र स्वयं को न काटे तो वह सरल वक्र (Simple Curve) कहलाती है।
9. एक वक्र जिसके सिरे मिले हुए हों, बंद वक्र कहलाती है; अन्यथा उसे खुली वक्र कहते हैं।
10. रेखाखंडों से बनी बंद आकृति एक बहुभुज कहलाती है। यहाँ–
    (i) बहुभुज को बनाने वाले रेखाखंड उसकी भुजाएँ कहलाती हैं।
    (ii) कोई भी दो भुजाएँ जिनमें एक उभयनिष्ठ अंत बिंदु हो, बहुभुज की आसन्न भुजाएँ कहलाती हैं।
    (iii) दो भुजाएँ जहाँ मिलती हैं उस बिंदु को बहुभुज का शीर्ष (vertex) कहते हैं।
    (iv) बहुभुज की एक ही भुजा के अंत बिंदु आसन्न शीर्ष (adjacent vertice) कहलाते हैं।
    (v) ऐसे शीर्ष जो आसन्न नहीं हैं को मिलाने से बना रेखाखंड बहुभुज का विकर्ण (diagonal) कहलाता है।

11. उभयनिष्ठ प्रारंभिक बिंदु वाली दो किरणों से एक कोण बनता है।

दो किरणें $\overline{OA}$ और $\overline{OB}$ कोण $\angle AOB$ बनाती हैं (इसे $\angle BOA$ भी लिख सकते हैं)।

कोण से संबंधित तीन क्षेत्र हैं :

कोण पर, कोण के अभ्यंतर और कोण के बहिर्भाग।

12. त्रिभुज (Triangle) एक तीन भुजाओं वाला बहुभुज होता है।

13. चार भुजाओं वाला बहुभुज एक चतुर्भुज (Quadrilateral) कहलाता है। इसको शीर्षों के एक क्रम के अनुसार नामांकित करना चाहिए।

किसी चतुर्भुज ABCD में, $\overline{AB}$ और $\overline{DC}$ तथा $\overline{AD}$ और $\overline{BC}$ सम्मुख भुजाओं के युग्म हैं। $\angle A$ और $\angle C$ तथा $\angle B$ और $\angle D$ सम्मुख कोणों के युग्म हैं। $\angle A$ और $\angle B$ आसन्न कोण हैं; ऐसे ही आसन्न कोणों के तीन अन्य युग्म हैं।

14. एक निश्चित बिंदु से समान दूरी पर चक्कर लगाने से बना बिंदुओं का पथ वृत कहलाता है।

निश्चित बिंदु वृत्त का केंद्र कहलाता है, निश्चित दूरी (समान दूरी) त्रिज्या कहलाती है तथा वृत्त के चारों ओर चली गयी दूरी उसकी परिधि कहलाती है।

वृत्त पर किन्हीं दो बिंदुओं को मिलाने वाला रेखाखंड वृत्त की एक जीवा (chord) कहलाती है।

केंद्र से होकर जाने वाली जीवा वृत का व्यास कहलाती है। वृत्तीय क्षेत्र का वह भाग जो दो त्रिज्याओं और संगत चाप से घिरकर बनता है एक त्रिज्यखंड (sector) कहलाता है। वृत्त की एक जीवा और संगत चाप से घिरा वृत्तीय क्षेत्र का भाग एक वृत्तखंड (segment of a circle) कहलाता है। वृत्त के एक व्यास के दोनों अंत बिंदु उसे दो बराबर भागों में विभाजित करते हैं। प्रत्येक भाग एक अर्धवृत्त (semicircle) कहलाता है।

अध्याय 5

प्रारंभिक आकारों को समझना

0651CH05

5.1 भूमिका

अपने आस-पास हम जो भी आकार (shapes) देखते हैं वे वक्रों या रेखाओं से बने होते हैं। हम अपने परिवेश में कोने, किनारे, तल, खुली वक्र और बंद वक्र देखते हैं। हम इन्हें रेखाखंडों, कोणों, त्रिभुजों, बहुभुजों और वृत्तों में संगठित करते हैं। हम पाते हैं कि ये विभिन्न साइज या मापों के होते हैं। आइए, इनकी मापों की तुलना करने की कुछ विधियाँ विकसित करें।

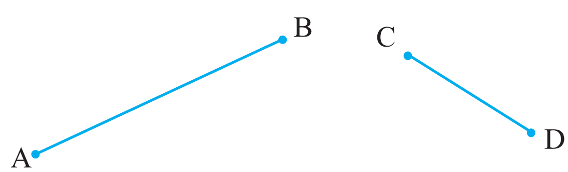
5.2 रेखाखंडों का मापना

हमने अनेक बार रेखाखंडों को देखा और खींचा है। एक त्रिभुज तीन रेखाखंडों से बनता है। और एक चतुर्भुज चार रेखाखंडों से बनता है।

एक रेखाखंड (line segment) एक रेखा (line) का एक निश्चित भाग होता है। इससे रेखाखंड को मापना संभव हो जाता है। प्रत्येक रेखाखंड का यह माप (measure) एक अद्वितीय संख्या है, जो उसकी लंबाई (lenghts) कहलाती है। हम इस अवधारणा को रेखाखंडों की तुलना करने में प्रयोग करते हैं।

दो रेखाखंडों की तुलना करने के लिए, हम उनकी लंबाइयों के बीच एक संबंध ज्ञात करते हैं। ऐसा अनेक विधियों से किया जा सकता है।

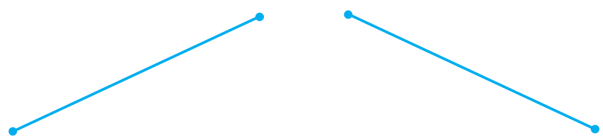
(i) देखकर तुलना



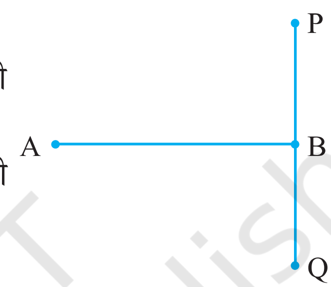
केवल देखकर ही क्या आप बता सकते हैं कि उपरोक्त में से कौन सा रेखाखंड बड़ा है?

आप देख सकते हैं कि रेखाखंड $\overline{AB}$ बड़ा है।

परंतु आप अपने सामान्य निर्णय के बारे में सदैव निश्चित नहीं हो सकते हैं। उदाहरणार्थ, निम्नलिखित रेखाखंडों को देखिए :



इन दोनों रेखाखंडों की लंबाइयों का अंतर इतना स्पष्ट नहीं है। अत:, हमें तुलना करने की अन्य विधियों की आवश्यकता है।



वास्तव में, संलग्न आकृति में, $\overline{AB}$ और $\overline{PQ}$ की एक ही लंबाई है। यह इतना स्पष्ट नहीं है।

इसलिए हमें रेखाखंडों की तुलना करने के लिए और अच्छी विधियों की आवश्यकता है।

(ii) **अक्स द्वारा तुलना**

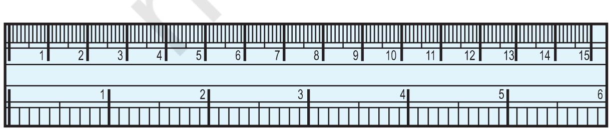
$\overline{AB}$ और $\overline{CD}$ की तुलना करने के लिए, हम एक अक्स कागज़ (tracing paper) का प्रयोग करते हैं। हम अक्स कागज़ पर $\overline{CD}$ का अक्स खींचते हैं और इस अक्स कागज़ पर बने रेखाखंड को $\overline{AB}$ पर रखते हैं।

क्या अब आप बता सकते हैं कि $\overline{AB}$ और $\overline{CD}$ में से कौन बड़ा है?

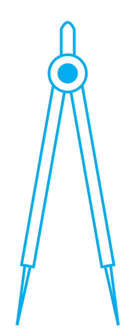
यह विधि इस बात पर निर्भर करती है कि हम रेखाखंड का अक्स कितनी शुद्धता से खींचते हैं। इसके अतिरिक्त, यदि आपको किसी और रेखाखंड से तुलना करनी हो, तो उस अन्य रेखाखंड का भी अक्स खींचना पड़ेगा। यह कठिन है, क्योंकि जब रेखाखंडों की तुलना करनी हो, तो आप सदैव रेखाखंड का अक्स ही नहीं खींचते रहेंगे।

(iii) **रूलर और डिवाइडर द्वारा तुलना**

क्या आप अपने ज्यामिति बक्स में रखी वस्तुओं को पहचानते हैं? अन्य वस्तुओं के अतिरिक्त इनमें एक रूलर (ruler) और एक डिवाइडर भी है।



रूलर


डिवाइडर

ध्यान दीजिए कि रूलर पर चिह्न किस प्रकार अंकित हैं। यह 15 बराबर भागों में विभाजित है। प्रत्येक भाग की लंबाई 1 सेमी है।

इनमें से प्रत्येक भाग को आगे और उपविभाजित (sub divide) किया गया है। कैसे? इस प्रकार उपविभाजित प्रत्येक भाग की लंबाई क्या है?

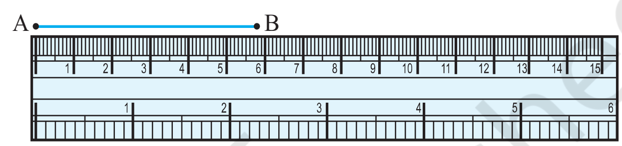
प्रत्येक सेंटीमीटर को दस बराबर भागों में उपविभाजित किया गया है। 1 सेमी का प्रत्येक उपविभाजित भाग 1 मिमी है।

कितने मिलीमीटरों से एक सेंटीमीटर बनता है?

1 सेमी = 10 मिमी होता है तो हम 2 सेमी और 3 मिमी को कैसे लिखेंगे? 7.7 सेमी का क्या अर्थ है?

> 1 मिमी 0.1 सेमी होता है,
> 2 मिमी 0.2 सेमी होता है,
> इत्यादि 2.3 सेमी का अर्थ होगा 2 सेमी और 3 मिमी

मान लीजिए रेखाखंड AB की लंबाई मापनी है। रूलर के शून्य चिह्न को A पर रखिए। B के सम्मुख चिह्न को रूलर पर पढ़िए। इससे रेखाखंड $\overline{AB}$ की

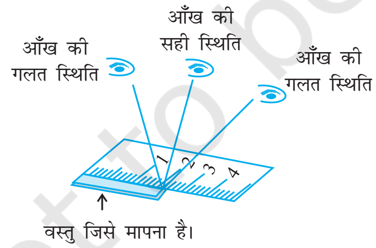


लंबाई ज्ञात हो जाएगी। मान लीजिए यह लंबाई 5.8 सेमी है। हम इसे लंबाई AB = 5.8 सेमी लिख सकते हैं या केवल AB = 5.8 सेमी लिख सकते हैं।

इस प्रक्रिया में भी त्रुटि की संभावना रहती है। रूलर की मोटाई के कारण उस पर अंकित चिह्नों को पढ़ने में कठिनाई हो सकती है।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

1. अन्य कौन-सी त्रुटियाँ और कठिनाइयाँ हमारे सम्मुख आ सकती हैं?
2. यदि रूलर पर अंकित चिह्नों को ठीक प्रकार से न पढ़ा जाए, तो किस प्रकार की त्रुटियाँ हो सकती हैं? इनसे कैसे बचा जा सकता है?

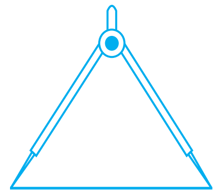


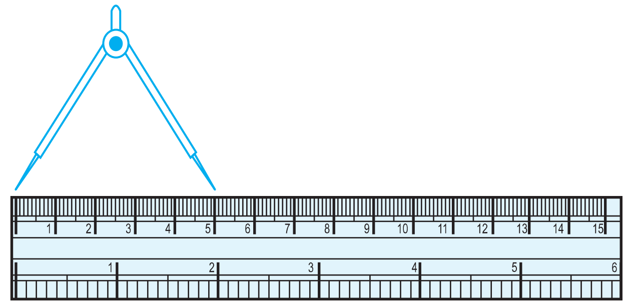
स्थिति के कारण त्रुटि

सही माप लेने के लिए आँख की स्थिति सही होनी चाहिए। आँख को चिह्न के ठीक ऊपर रखा जाए। अन्यथा तिरछा देखने पर त्रुटि हो सकती है।

क्या हम इस समस्या से बच सकते हैं? क्या इससे और कोई अच्छी विधि है? आइए, लंबाई मापने के लिए डिवाइडर (divider) का प्रयोग करें।

डिवाइडर को खोलिए। इसकी एक भुजा के अंतबिंदु को A पर रखिए और दूसरी भुजा के अंतबिंदु को B पर रखिए। इस फैलाव में बिना कोई परिवर्तन किए, डिवाइडर को रूलर पर इस प्रकार रखिए कि एक अंतबिंदु रूलर के शून्य चिह्न पर रहे। अब दूसरे अंतबिंदु के सम्मुख चिह्न को पढ़िए। यही रेखाखंड AB की लंबाई है (नीचे दी आकृति देखिए)।





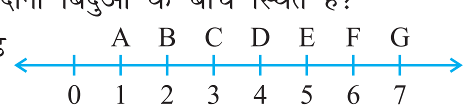
प्रयास कीजिए

1. एक पोस्टकार्ड लीजिए। उपरोक्त तकनीक का प्रयोग करके, इसकी दो आसन्न भुजाओं को मापिए।
2. कोई तीन वस्तुएँ चुनिए जिनके ऊपरी सिरे सपाट हों। डिवाइडर और रूलर का प्रयोग करते हुए, इन ऊपरी सिरों की सभी भुजाओं को मापिए।

प्रश्नावली 5.1

1. रेखाखंड की तुलना केवल देखकर करने से क्या हानि है?
2. एक रेखाखंड की लंबाई मापने के लिए रूलर की अपेक्षा डिवाइडर का प्रयोग करना क्यों अधिक अच्छा है?
3. कोई रेखाखंड $\overline{AB}$ खींचिए। A और B के बीच स्थित कोई बिंदु C लीजिए। AB, BC और CA की लंबाई मापिए। क्या $AB = AC + CB$ है?

   (**टिप्पणी :** यदि किसी रेखा पर बिंदु A, B, C इस प्रकार स्थित हों कि $AC + CB = AB$ है, तो निश्चित रूप से बिंदु C बिंदु A और B के बीच स्थित होता है।)
4. एक रेखा पर बिंदु A, B और C इस प्रकार स्थित हैं कि $AB = 5$ सेमी, $BC = 3$ सेमी और $AC = 8$ सेमी है। इनमें से कौन-सा बिंदु अन्य दोनों बिंदुओं के बीच स्थित है?
5. जाँच कीजिए कि संलग्न आकृति में D रेखाखंड $\overline{AG}$ का मध्य-बिंदु है।



6. B रेखाखंड $\overline{AC}$ का मध्य-बिंदु है और C रेखाखंड $\overline{BD}$ का मध्य बिंदु है, जहाँ A, B, C और D एक ही रेखा पर स्थित हैं। बताइए कि $AB = CD$ क्यों है।
7. पाँच त्रिभुज खींचिए और उनकी भुजाओं को मापिए। प्रत्येक स्थिति में जाँच कीजिए कि किन्हीं दो भुजाओं की लंबाइयों का योग तीसरी भुजा की लंबाई से सदैव बड़ा है।

5.3 कोण– 'समकोण' और 'ऋजुकोण'

आपने भूगोल (Geography) में दिशाओं के बारे में सुना है। हम जानते हैं कि चीन भारत के उत्तर में और श्रीलंका दक्षिण में है। हम यह भी जानते हैं कि सूर्य पूर्व में उदय होता है और पश्चिम में डूबता है। कुल मिलाकर चार दिशाएँ हैं।

ये हैं : उत्तर (North) (N), दक्षिण (South) (S), पूर्व (East) (E) और पश्चिम (West)(W)।

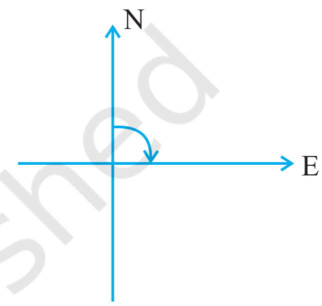
क्या आप जानते हैं कि उत्तर के विपरीत कौन-सी दिशा है?

पश्चिम के विपरीत कौन-सी दिशा है?

आप पहले से जो जानते हैं उसे याद कीजिए। अब हम इस ज्ञान का प्रयोग कोणों के कुछ गुणों को सीखने में करेंगे।

इन्हें कीजिए

उत्तर की ओर मुँह करके खड़े होइए।

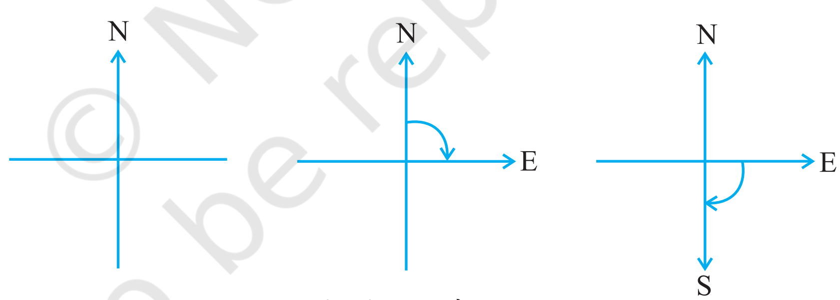


घड़ी की दिशा (दक्षिणावर्त दिशा) (clock-wise) में पूर्व की ओर घूम जाइए।

आप एक समकोण (right angle) के बराबर घूम गए हैं। घड़ी की दिशा में एक समकोण और घूमिए। अब आप दक्षिण की ओर मुँह करके खड़े हैं।

यदि आप घड़ी की विपरीत दिशा (वामावर्त दिशा) (anti clock-wise) में एक समकोण घूम जाएँ, तो आपका मुँह किस दिशा में होगा? यह पुनः पूर्व है (क्यों?)

निम्नलिखित स्थितियों को देखिए :

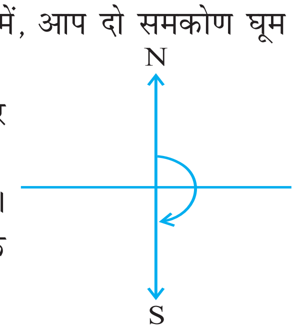


आप उत्तर की ओर मुँह किए खड़े हैं

घड़ी की दिशा में एक समकोण घूमने पर अब आप पूर्व की ओर मुँह किए खड़े हैं

एक अन्य समकोण घूमने पर अंत में दक्षिण की ओर मुँह किए खड़े हैं

उत्तर की ओर मुँह होने से दक्षिण की ओर मुँह होने तक घूमने में, आप दो समकोण घूम गए हैं। क्या यह दो समकोणों के एक घूर्णन के बराबर नहीं है?

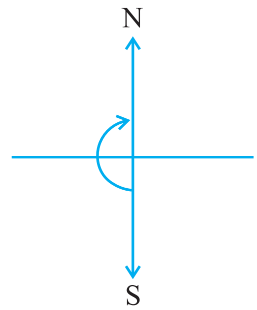


उत्तर से पूर्व तक का घूमना (घूर्णन) एक समकोण के बराबर घूमना है।

उत्तर से दक्षिण तक का घूमना दो समकोणों के बराबर घूमना है। इसे एक **ऋजुकोण (straight angle)** कहते हैं। NS एक सीधी रेखा है।

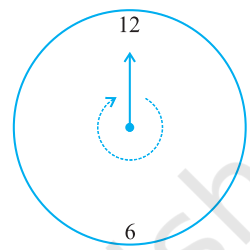
दक्षिण की ओर मुँह करके खड़े होइए।

एक ऋजुकोण के बराबर घूमिए।
अब आप किस दिशा में मुँह किए खड़े हैं?
आप उत्तर दिशा की ओर मुँह किए खड़े हैं।



उत्तर से दक्षिण तक घूमने के लिए आप एक ऋजुकोण के बराबर घूमे हैं। पुन: दक्षिण से उत्तर तक आने में आप एक ऋजुकोण के बराबर घूमे हैं। इस प्रकार, दो ऋजुकोणों के बराबर उसी दिशा में घूमने पर आप प्रारंभिक स्थिति में आ जाते हैं।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए :

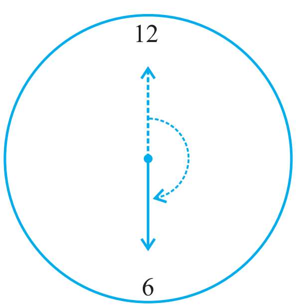


आप अपनी प्रारंभिक स्थिति तक आने के लिए, एक ही दिशा में कितने समकोण घूमेंगे?

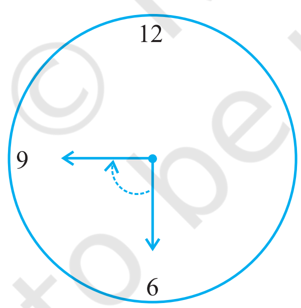
एक ही दिशा में दो ऋजुकोण (या चार समकोण) घूमने पर एक चक्कर पूरा हो जाता है। यह एक पूरा चक्कर एक घूर्णन कहलाता है। एक घूर्णन के लिए कोण एक **संपूर्ण कोण (complete angle)** कहलाता है।

हम इन घूर्णनों (revolutions) को एक घड़ी पर देख सकते हैं। जब घड़ी की एक सुई एक स्थान से अन्य स्थान पर पहुँचती है, तो वह एक कोण (angle) पर घूम जाती है।

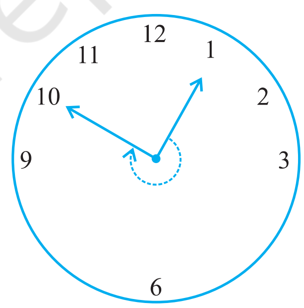
मान लीजिए घड़ी की एक सुई 12 से चलना प्रारंभ करके घूमती हुई 12 पर पुन: पहुँच जाती है। क्या उसने एक घूर्णन पूरा नहीं कर लिया है? अत: उसने कितने समकोण घूम लिए हैं? इन उदाहरणों (आकृतियों) को देखिए :



12 से 6 तक
एक घूर्णन का $\frac{1}{2}$
या 2 समकोण



6 से 9 तक
एक घूर्णन का $\frac{1}{4}$
या 1 समकोण



1 से 10 तक
एक घूर्णन का $\frac{3}{4}$
या 3 समकोण

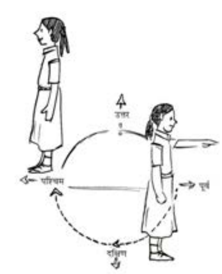
प्रयास कीजिए

1. आधे घूर्णन के लिए कोण का नाम क्या है?
2. एक-चौथाई घूर्णन के लिए कोण का नाम क्या है?
3. एक घड़ी पर आधे घूर्णन, एक चौथाई घूर्णन और तीन-चौथाई घूर्णन के लिए पाँच अन्य स्थितियाँ दीजिए।

ध्यान दीजिए कि तीन-चौथाई घूर्णन के लिए कोण का कोई विशेष नाम नहीं है।

प्रश्नावली 5.2

1. घड़ी की घंटे वाली सुई एक घूर्णन के कितनी भिन्न घूम जाती है, जब वह
   (a) 3 से 9 तक पहुँचती है? (b) 4 से 7 तक पहुँचती है?
   (c) 7 से 10 तक पहुँचती है? (d) 12 से 9 तक पहुँचती है?
   (e) 1 से 10 तक पहुँचती है? (f) 6 से 3 तक पहुँचती है?
2. एक घड़ी की सुई कहाँ रुक जाएगी, यदि वह
   (a) 12 से प्रारंभ करे और घड़ी की दिशा में $\frac{1}{2}$ घूर्णन करे?
   (b) 2 से प्रारंभ करे और घड़ी की दिशा में $\frac{1}{2}$ घूर्णन करे?
   (c) 5 से प्रारंभ करे और घड़ी की दिशा में $\frac{1}{4}$ घूर्णन करे?
   (d) 5 से प्रारंभ करे और घड़ी की दिशा में $\frac{3}{4}$ घूर्णन करे?
3. आप किस दिशा में देख रहे होंगे यदि आप प्रारंभ में
   (a) पूर्व की ओर देख रहे हों और घड़ी की दिशा में $\frac{1}{2}$ घूर्णन करें?
   (b) पूर्व की ओर देख रहे हों और घड़ी की दिशा में $1\frac{1}{2}$ घूर्णन करें?
   (c) पश्चिम की ओर देख रहे हों और घड़ी की विपरीत दिशा में $\frac{3}{4}$ घूर्णन करें?
   (d) दक्षिण की ओर देख रहे हों और एक घूर्णन करें?
   (क्या इस अंतिम प्रश्न के लिए, हमें घड़ी की दिशा या घड़ी की विपरीत दिशा की बात करनी चाहिए? क्यों नहीं?

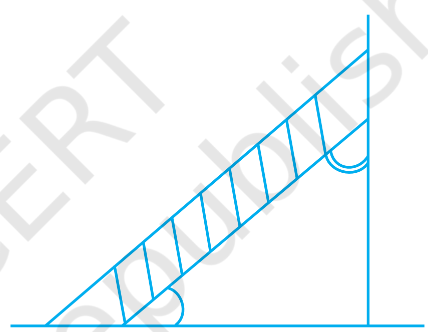


4. आप एक घूर्णन का कितना भाग घूम जाएँगे, यदि आप
   (a) पूर्व की ओर मुख किए खड़े हों और घड़ी की दिशा में घूमकर उत्तर की ओर मुख कर लें?
   (b) दक्षिण की ओर मुख किए खड़े हों और घड़ी की दिशा में घूमकर पूर्व की ओर मुख कर लें?
   (c) पश्चिम की ओर मुख किए खड़े हों और घड़ी की दिशा में घूमकर पूर्व की ओर मुख कर लें?
5. घड़ी की घंटे की सुई द्वारा घूमे गए समकोणों की संख्या ज्ञात कीजिए, जब वह
   (a) 3 से 6 तक पहुँचती है। (b) 2 से 8 तक पहुँचती है।
   (c) 5 से 11 तक पहुँचती है। (d) 10 से 1 तक पहुँचती है।
   (e) 12 से 9 तक पहुँचती है। (f) 12 से 6 तक पहुँचती है।

6. आप कितने समकोण घूम जाएँगे, यदि आप प्रारंभ में
   (a) दक्षिण की ओर देख रहे हों और घड़ी की दिशा में पश्चिम की ओर घूम जाएँ?
   (b) उत्तर की ओर देख रहे हों और घड़ी की विपरीत (वामावर्त) दिशा में पूर्व की ओर घूम जाएँ?
   (c) पश्चिम की ओर देख रहे हों और पश्चिम की ओर घूम जाएँ?
   (d) दक्षिण की ओर देख रहे हों और उत्तर की ओर घूम जाएँ?
7. घड़ी की घंटे वाली सुई कहाँ रुकेगी, यदि वह प्रारंभ करे
   (a) 6 से और 1 समकोण घूम जाए?
   (b) 8 से और 2 समकोण घूम जाए?
   (c) 10 से और 3 समकोण घूम जाए?
   (d) 7 से और 2 ऋजुकोण घूम जाए?

5.4 कोण–'न्यून', 'अधिक' और 'प्रतिवर्ती'

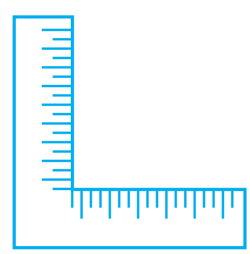
हमने देखा कि एक समकोण और एक ऋजुकोण का क्या अर्थ है। परंतु जो कोण हमें देखने को मिलते हैं वे सदैव इन दोनों प्रकारों के ही नहीं होते हैं। एक सीढ़ी द्वारा दीवार से (या फर्श से) बनाया गया कोण न तो समकोण है और न ही ऋजुकोण है।



सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

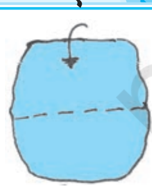
क्या कुछ ऐसे कोण हैं जो समकोण से छोटे हैं?

क्या कुछ ऐसे कोण हैं जो समकोण से बड़े हैं?

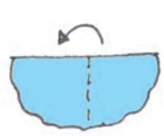


क्या आपने बढ़ई का वर्ग देखा है? यह अंग्रेज़ी वर्णमाला के अक्षर 'L' जैसा होता है। वह इससे समकोणों की जाँच करता है। आइए, हम भी समकोणों की जाँच के लिए इसी प्रकार के **'टेस्टर' (tester)** को बनाएँ।

इन्हें कीजिए



चरण 1
कागज़ का एक टुकड़ा लीजिए



चरण 2
इसे बीच से मोड़िए

चरण 3
सीधे किनारे पर पुनः मोड़िए। आपका टेस्टर तैयार है।

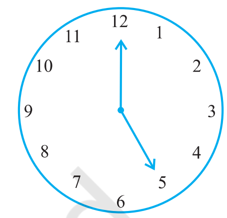
अपने द्वारा 'बनाए गए' समकोण टेस्टर को देखिए (क्या हम इसे RA टेस्टर कहें?) क्या इसका एक किनारा दूसरे पर सीधा खड़ा है?

मान लीजिए कोनों वाला कोई आकार दिया हुआ है। आप इसके कोनों पर बने कोणों की जाँच RA टेस्टर द्वारा कर सकते हैं।

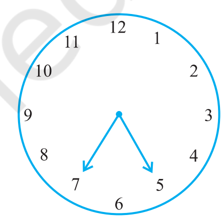
क्या इसके किनारे एक कागज़ के कोणों से दिखाई देते हैं? यदि हाँ, तो यह एक समकोण दर्शाता है।

प्रयास कीजिए

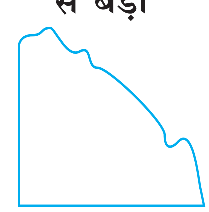
1. घड़ी की घंटे वाली सुई 12 से 5 तक चलती है। क्या इसका घूर्णन 1 समकोण से अधिक है?



2. घड़ी पर यह कोण कैसा दिखता है? घड़ी की घंटे वाली सुई 5 से 7 तक चलती है। क्या इस सुई द्वारा घूमा गया कोण 1 समकोण से अधिक है?

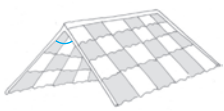


3. घड़ी पर सुइयों की स्थिति निम्न प्रकार बनाकर कोणों की जाँच RA टेस्टर द्वारा कीजिए।
   (a) 12 से 2 तक जाना
   (b) 6 से 7 तक जाना
   (c) 4 से 8 तक जाना
   (d) 2 से 5 तक जाना
4. कोने वाले पाँच भिन्न-भिन्न आकार लीजिए। कोनों के नाम लिखिए। अपने टेस्टर द्वारा इन कोणों की जाँच कीजिए और प्रत्येक स्थिति के परिणाम को एक सारणी के रूप में निम्न प्रकार लिखिए :

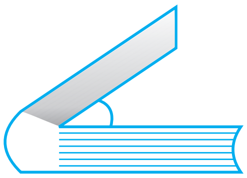
कोने	से छोटा 	से बड़ा 
A	....	....
B	....	....
C	....	....
⋮		

अन्य नाम

- समकोण से छोटा कोण **न्यूनकोण (acute augle)** कहलाता है। ये कोण न्यून कोण हैं :

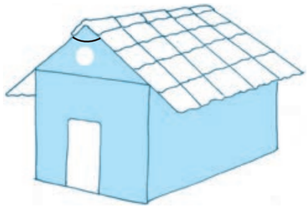

छत का ऊपरी सिरा

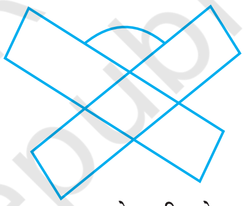

सी-सॉ (see-saw)


पुस्तक खोलना

क्या आप देख रहे हैं कि इनमें से प्रत्येक एक घूर्णन के एक-चौथाई से छोटा है? अपने RA टेस्टर से इनकी जाँच कीजिए।

- यदि कोई कोण एक समकोण से बड़ा और एक ऋजुकोण से छोटा है, तो वह एक **अधिक कोण (obtuse angle)** कहलाता है।
ये कोण अधिक कोण हैं :

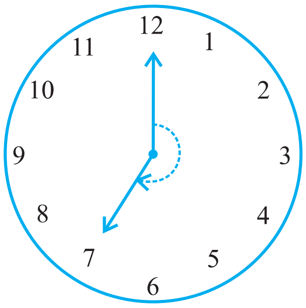

घर


पुस्तक पढ़ने की डेस्क

क्या आप देख सकते हैं कि इनमें से प्रत्येक $\frac{1}{4}$ घूर्णन से अधिक है और $\frac{1}{2}$ घूर्णन से कम है? इसकी जाँच करने में आपका RA टेस्टर सहायता कर सकता है।

पिछले उदाहरणों में भी अधिक कोणों की पहचान कीजिए।

- एक **प्रतिवर्ती कोण (reflex angle)** एक ऋजुकोण से बड़ा होता है और एक संपूर्ण कोण से छोटा होता है। यह इस आकृति में दर्शाए प्रकार का होता है (घड़ी पर कोण को देखिए)। आपने जो इससे पहले आकृतियाँ बनाई थीं, क्या उनमें प्रतिवर्ती कोण बने थे? आप इनकी जाँच किस प्रकार करेंगे?



प्रयास कीजिए

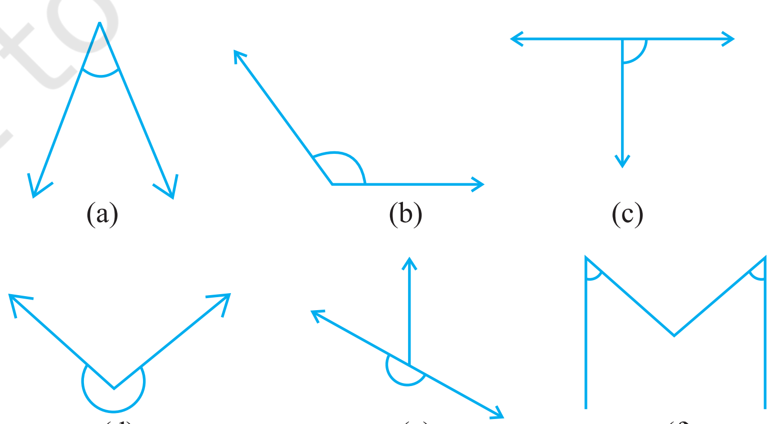
1. आप अपने आस–पास देखिए और कोनों पर मिलने वाले किनारों को पहचानिए, जो कोण बना रहे हों। ऐसी दस स्थितियाँ लिखिए।
2. ऐसी दस स्थितियाँ लिखिए, जहाँ न्यूनकोण बन रहे हों।
3. ऐसी दस स्थितियाँ लिखिए, जहाँ समकोण बन रहे हों।
4. ऐसी पाँच स्थितियाँ लिखिए, जहाँ अधिक कोण बन रहे हों।
5. ऐसी पाँच स्थितियाँ लिखिए, जहाँ प्रतिवर्ती कोण बन रहे हों।

प्रश्नावली 5.3

1. निम्न को सुमेलित (match) कीजिए :

(i) ऋजुकोण	(a) $\frac{1}{4}$ घूर्णन से कम
(ii) समकोण	(b) $\frac{1}{2}$ घूर्णन से अधिक
(iii) न्यून कोण	(c) $\frac{1}{2}$ घूर्णन
(iv) अधिक कोण	(d) $\frac{1}{4}$ घूर्णन
(v) प्रतिवर्ती कोण	(e) $\frac{1}{4}$ घूर्णन और $\frac{1}{2}$ घूर्णन के बीच में
	(f) एक पूरा या संपूर्ण घूर्णन

2. निम्न में से प्रत्येक कोण को समकोण, ऋजुकोण, न्यूनकोण, अधिक कोण या प्रतिवर्ती कोण के रूप में वर्गीकृत कीजिए :



(a) (b) (c) (d) (e) (f)

5.5 कोणों का मापन

अपने बनाए गए 'RA टेस्टर' की सहायता से, हमने कोणों की समकोण से तुलना की। इससे हम कोणों को न्यून कोण, अधिक कोण और प्रतिवर्ती कोणों में वर्गीकृत करने में भी समर्थ हो गए थे।

परंतु इससे कोणों की परिशुद्धता की तुलना नहीं हो पाती है। इससे यह पता नहीं लगता कि दिए हुए दो अधिक कोणों में कौन बड़ा है। इसलिए, कोणों की तुलना अधिक परिशुद्धता से करने के लिए यह आवश्यक है कि उन्हें 'माप' लिया जाए। ऐसा हम एक चाँदे (protractor) की सहायता से कर सकते हैं।

कोण का माप

हम अपनी इस माप को डिगरी माप (अंश माप) (degree measure) कहते हैं। एक संपूर्ण घूर्णन को 360 बराबर भागों में विभाजित किया जाता है। प्रत्येक भाग एक **अंश (degree)** कहलाता है। हम तीन सौ साठ अंश कहने के लिए 360° लिखते हैं।

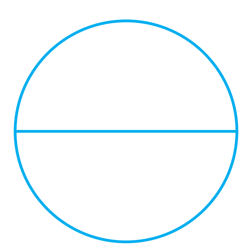
सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

$\frac{1}{2}$ घूर्णन में कितनी डिगरी हैं? 1 समकोण में कितनी डिगरी हैं?

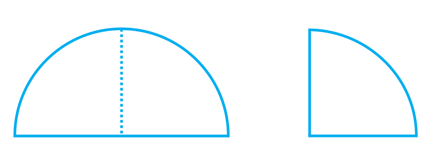
1 ऋजुकोण में कितनी डिगरी (अंश) हैं? कितने समकोणों से 180° बनते हैं? कितने समकोणों से 360° बनते हैं?

इन्हें कीजिए

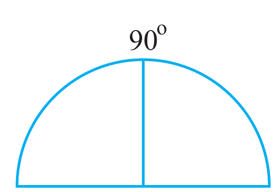
1. एक चूड़ी की सहायता से एक वृत्ताकार आकृति बनाइए या इसी मान की एक वृत्ताकार शीट लीजिए।



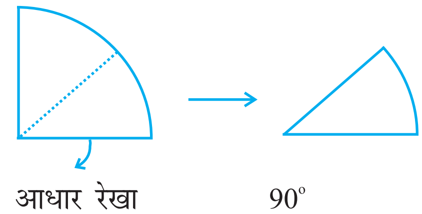
2. इसे दो बार मोड़िए जिससे दर्शाई गई आकृति प्राप्त हो। इसे एक चतुर्थांश (quadrant) कहते हैं।



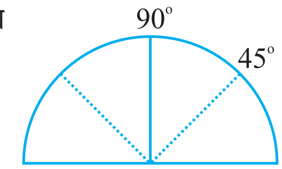
3. इसे खोल लीजिए। आपको एक अर्धवृत्त प्राप्त होगा। जिसके बीच में एक मोड़ का निशान है।



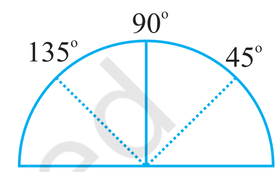
4. इस वृत्त को मोड़कर चतुर्थांश बना लीजिए। इस चतुर्थांश को एक बार पुनः मोड़कर दर्शाई हुई आकृति प्राप्त कीजिए। अब कोण 90° का आधा, अर्थात् 45° है।



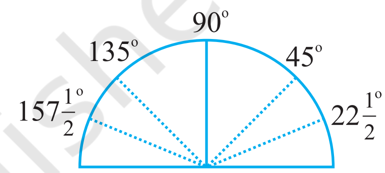
5. अब इसे खोल लीजिए। दोनों ओर एक-एक मोड़ का निशान दिखाई दे रहा है। आधार रेखा की बाईं ओर वाले पहले मोड़ के निशान पर 45° लिखिए।



6. दूसरी ओर वाले मोड़ के निशान पर $90° + 45° = 135°$ लिखा जाएगा।

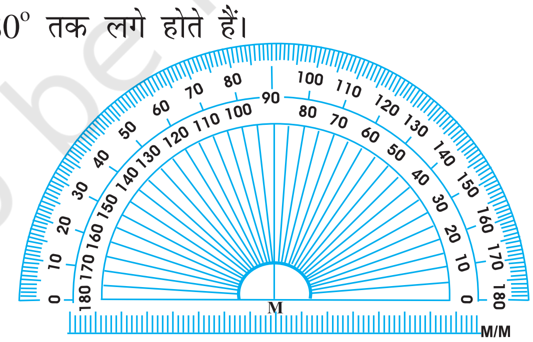


7. कागज़ को अब 45° तक (चतुर्थांश के आधे) मोड़िए। अब इसका आधा कीजिए। आधार रेखा के बाईं ओर वाला पहला मोड़ का निशान 45° का आधा, अर्थात् 22½° दर्शाएगा। 135° के बाईं ओर का कोण 157½° है।

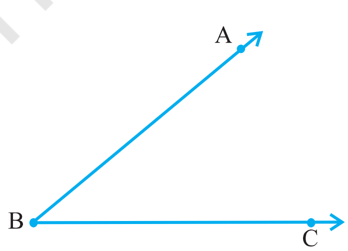


चाँदा

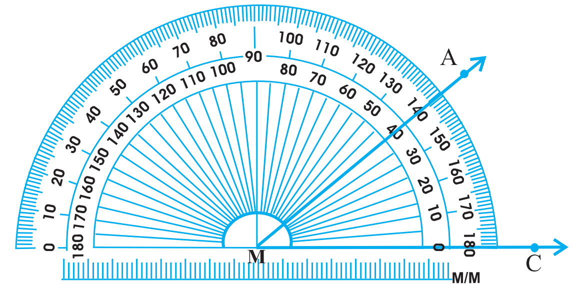
आपके ज्यामिति बक्स में आपको चाँदा बना बनाया मिल जाएगा। इसके वक्रीय किनारे (edge) को 180 बराबर भागों में विभाजित किया गया है। प्रत्येक भाग एक **अंश (डिगरी) (degree)** कहलाता है। इस पर चिह्न दाईं या बाईं ओर से प्रारंभ करके क्रमशः बाईं या दाईं ओर तक 0° से 180° तक लगे होते हैं।



मान लीजिए आप कोई कोण ABC को मापना चाहते हैं।



∠ABC दिया है

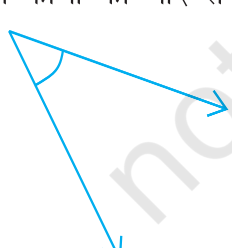


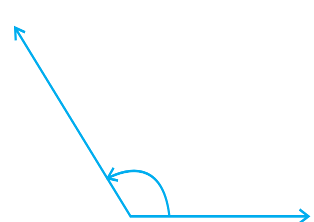
∠ABC का मापना

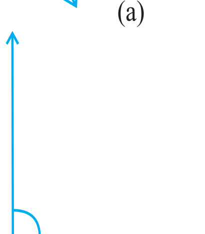
1. चाँदे को इस प्रकार रखिए कि इसके सीधे किनारे का मध्य-बिंदु (आकृति में M) कोण के शीर्ष B पर स्थित हो।
2. चाँदे को इस प्रकार समायोजित कीजिए कि किरण BC इस सीधे किनारे के अनुदिश रहे।
3. चाँदे पर दो 'स्केल' (scale) हैं : वह स्केल पढ़िए जिससे किरण BC चिह्न 0° से मिल रही है।
4. वक्रीय किनारे पर किरण AB द्वारा दर्शित चिह्न कोण का अंशीय माप (degree measure) ज्ञात कराता है।
   आकृति में यह 40° है।
   हम इसे $m\angle ABC = 40^\circ$ या केवल $\angle ABC = 40^\circ$ लिखते हैं।

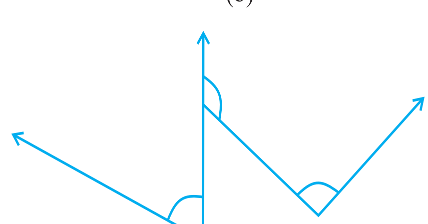
प्रश्नावली 5.4

1. निम्न के क्या माप हैं :
   (i) एक समकोण? (ii) एक ऋजुकोण?
2. बताइए सत्य (T) या असत्य (F) :
   (a) एक न्यून कोण का माप $< 90^\circ$ है।
   (b) एक अधिक कोण का माप $< 90^\circ$ है।
   (c) एक प्रतिवर्ती कोण का माप $>180^\circ$ है।
   (d) एक संपूर्ण घूर्णन का माप $= 360^\circ$ है।
   (e) यदि $m\angle A = 53^\circ$ और $m < B = 35^\circ$ है, तो $m\angle A > m\angle B$ है।
3. निम्न के माप लिखिए :
   (a) कुछ न्यून कोण
   (b) कुछ अधिक कोण
   (प्रत्येक के दो उदाहरण दीजिए।)
4. निम्न कोणों को चाँदे से मापिए और उनके माप लिखिए :


(a)


(b)

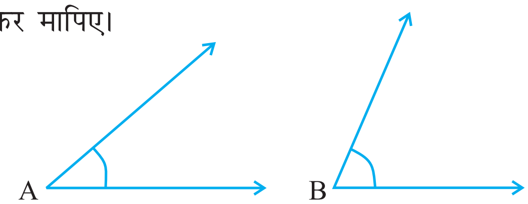

(c)


(d)

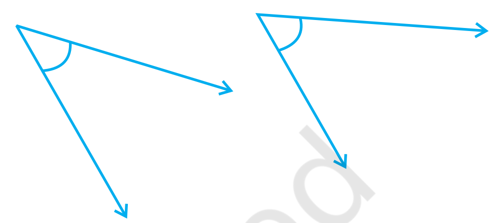
5. किस कोण का माप बड़ा है?
पहले आकलन (estimate) कीजिए और फिर मापिए।

कोण A का माप =

कोण B का माप =



6. निम्न दो कोणों में से किस कोण का माप बड़ा है? पहले आकलन कीजिए और फिर मापन द्वारा पुष्टि कीजिए।



7. न्यून कोण, अधिक कोण, समकोण या ऋजुकोण से रिक्त स्थानों को भरिए :

(a) वह कोण, जिसका माप एक समकोण के माप से कम है, ... होता है।

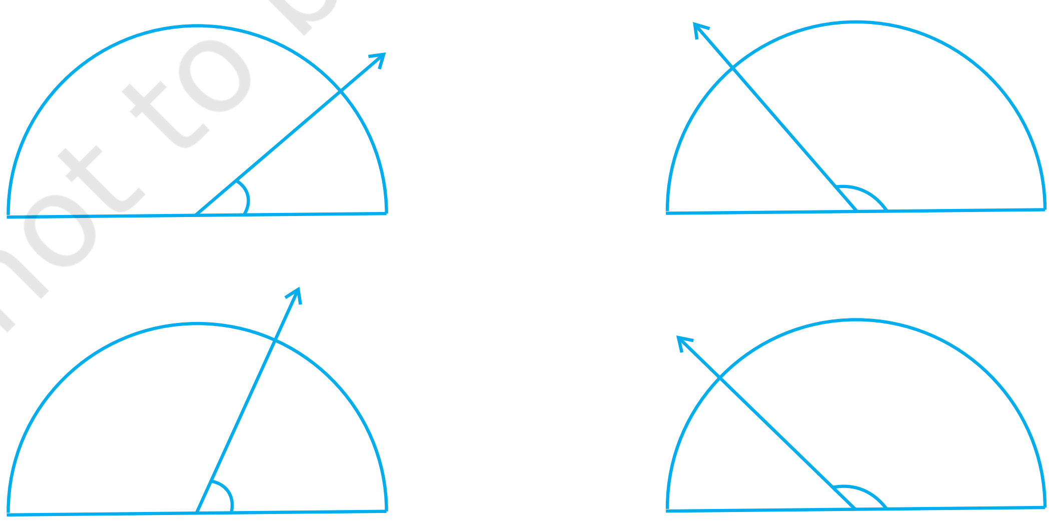
(b) वह कोण, जिसका माप एक समकोण के माप से अधिक हो, ... होता है।

(c) वह कोण जिसका माप दो समकोणों के योग के बराबर है .... होता है।

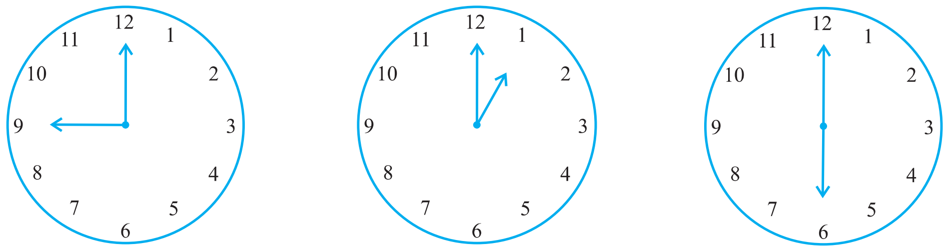
(d) यदि दो कोणों के मापों का योग समकोण के माप के बराबर है, तो प्रत्येक कोण .... होता है।

(e) यदि दो कोणों के मापों का योग एक ऋजुकोण के माप के बराबर है, और इनमें से एक कोण न्यून कोण है, तो दूसरा कोण .... होना चाहिए।

8. नीचे दी आकृति में दिए प्रत्येक कोण का माप ज्ञात कीजिए (पहले देखकर आकलन कीजिए और फिर चाँदे से मापिए।) :

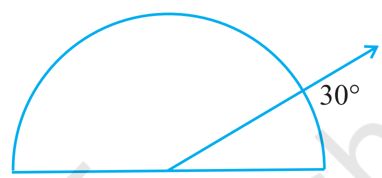


9. नीचे दी प्रत्येक आकृति में घड़ी की सुइयों के बीच के कोण का माप ज्ञात कीजिए :



प्रात: 9 : 00 | दोपहर 1 : 00 | सायं 6 : 00

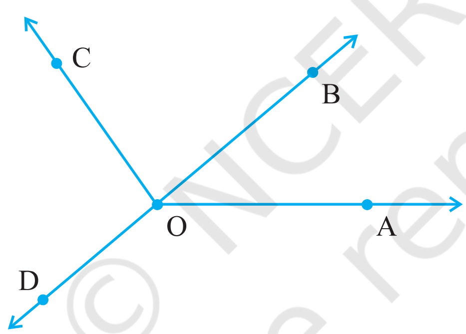
10. **खोज कीजिए :**



दी हुई आकृति में चाँदा 30° दर्शा रहा है। इसी आकृति को एक आवर्धन शीशे (magnifying glass) द्वारा देखिए। क्या यह कोण बड़ा हो जाता है?

क्या कोण का माप बड़ा हो जाता है?

11. मापिए और प्रत्येक कोण को वर्गीकृत कीजिए :



कोण	∠AOB	∠AOC	∠BOC	∠DOC	∠DOA	∠DOB
माप						
प्रकार						

5.6 लंब रेखाएँ

यदि दो रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करें और उनके बीच का कोण एक समकोण हो, तो वे रेखाएँ एक दूसरे पर **लंब (perpendicular)** रेखाएँ कहलाती हैं। यदि एक रेखा AB रेखा CD पर लंब है, तो इसे $AB \perp CD$ लिखते हैं।

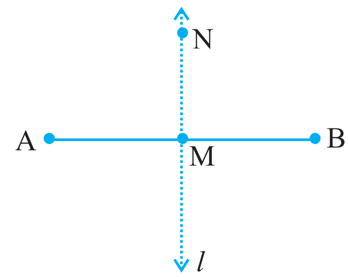
सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

यदि $AB \perp CD$ है, तो हमें क्या यह भी कहना चाहिए कि $CD \perp AB$ है?

हमारे आस-पास लंब रेखाएँ!

आप अपने आस-पास की वस्तुओं में से लंब रेखाओं (या रेखाखंडों) के अनेक उदाहरण दे सकते हैं। अंग्रेज़ी वर्णमाला का अक्षर T इनमें से एक है। क्या कोई और अक्षर भी है, जो लंबों का उदाहरण है?

एक पोस्टकार्ड को लीजिए। क्या इसके किनारे परस्पर लंब हैं? मान लीजिए। MN बिंदु M से होकर जाने वाली रेखाखंड AB पर कोई रेखा लंब है। क्या रेखा MN रेखाखंड AB को दो बराबर भागों में विभाजित करती हैं?



क्या MN रेखाखंड AB पर लंब है?

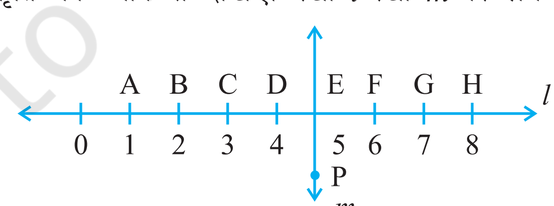
इस प्रकार, MN रेखाखंड AB को समद्विभाजित करती है (अर्थात् दो बराबर भागों में विभाजित करती है) और उस पर लंब भी है।

इसलिए, हम कहते हैं कि रेखा MN रेखाखंड AB का **लंब समद्विभाजक (perpendicular bisector)** है।

इसकी रचना करना आप बाद में सीखेंगे।

प्रश्नावली 5.5

1. निम्नलिखित में से कौन लंब रेखाओं के उदाहरण हैं?
   (a) मेज़ के ऊपरी सिरे की आसन्न भुजाएँ
   (b) रेल पथ की पटरियाँ
   (c) अक्षर L बनाने वाले रेखाखंड
   (d) अक्षर V बनाने वाले रेखाखंड
2. मान लीजिए रेखाखंड PQ रेखाखंड XY पर लंब है। मान लीजिए ये परस्पर बिंदु A पर प्रतिच्छेद करते हैं। $\angle PAY$ की माप क्या है?
3. आपके ज्यामिति बक्स में दो सेट स्क्वेयर हैं। इनके कोनों पर बने कोणों के माप क्या हैं? क्या इनमें कोई ऐसी माप है जो दोनों में उभयनिष्ठ है?
4. इस आकृति को ध्यान से देखिए। रेखा l रेखा m पर लंब है।



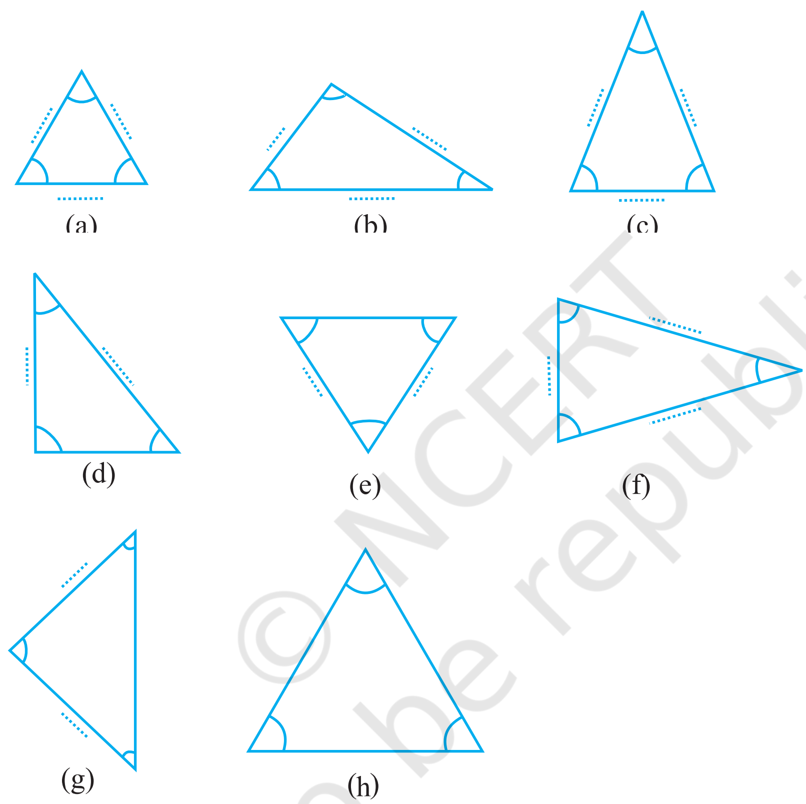
   (a) क्या $CE = EG$ है?
   (b) क्या रेखा PE रेखाखंड CG को समद्विभाजित करती है?
   (c) कोई दो रेखाखंडों के नाम लिखिए जिनके लिए PE लंब समद्विभाजक है।
   (d) क्या निम्नलिखित सत्य हैं?
      (i) $AC > FG$
      (ii) $CD = GH$
      (iii) $BC < EH$

5.7 त्रिभुजों का वर्गीकरण

क्या आपको सबसे कम भुजाओं वाले बहुभुज के बारे में याद है? यह एक त्रिभुज (triangle) है। आइए, विभिन्न प्रकार के जो त्रिभुज हो सकते हैं, उन्हें देखें।

इन्हें कीजिए

आइए, नीचे दिए हुए त्रिभुजों के कोणों और भुजाओं को क्रमशः चाँदे और रूलर से मापें। दी हुई सारणी में इनकी मापों को भरिए :



त्रिभुज के कोणों की माप	आप कोणों के बारे में क्या कह सकते हैं?	त्रिभुज की भुजाओं की माप
(a) ...60^0..., ...60^0.., ...60^0.....,	सभी कोण बराबर हैं	
(b) ...., ..., ...,	.... कोण ....,	
(c) ...., ..., ...,	.... कोण ....,	
(d) ...., ..., ...,	.... कोण ....,	
(e) ...., ..., ...,	.... कोण ....,	
(f) ...., ..., ...,	.... कोण ....,	
(g) ...., ..., ...,	.... कोण ....,	
(h) ...., ..., ...,	.... कोण ....,	

उपरोक्त कोण, त्रिभुज और उनकी भुजाओं की मापों को ध्यानपूर्वक देखिए। क्या इनके बारे में कोई बात कही जा सकती है?

आप क्या प्राप्त करते हैं?

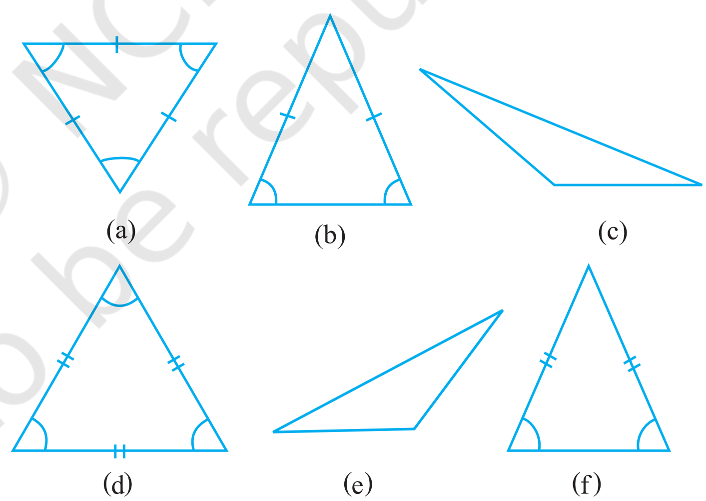
- त्रिभुज जिनके सभी कोण बराबर हैं।

  यदि किसी त्रिभुज के सभी कोण बराबर हैं, तो इसकी भुजाएँ भी .... हैं।
- त्रिभुज जिनमें सभी भुजाएँ बराबर हैं।

  यदि एक त्रिभुज की सभी भुजाएँ बराबर हैं, तो उसके कोण भी .... हैं।
- त्रिभुज जिनमें दो कोण बराबर हैं और दो भुजाएँ बराबर हैं। यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ बराबर हैं, तो उसके ....कोण बराबर होते हैं।
- त्रिभुज जिनमें कोई भी दो भुजाएँ बराबर नहीं हैं। यदि किसी त्रिभुज के कोई भी दो कोण बराबर नहीं हैं, तो उसकी कोई भी दो भुजाएँ बराबर नहीं होती हैं। यदि किसी त्रिभुज की तीनों भुजाएँ बराबर नहीं हैं, तो उसके तीनों कोण भी .... नहीं हैं।

  कुछ और त्रिभुज लीजिए और उपरोक्त कथनों की जाँच कीजिए। इसके लिए, हमें त्रिभुजों के कोण और उनकी भुजाओं को पुनः मापना पड़ेगा।

त्रिभुजों को विभिन्न श्रेणियों में वर्गीकृत किया गया है और उन्हें विशेष नाम दिए गए हैं। आइए, देखें कि ये क्या हैं।



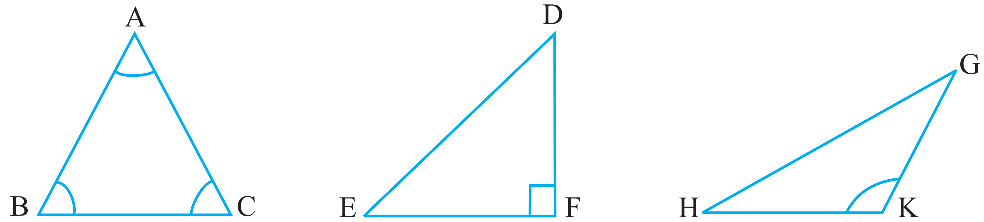
भुजाओं के आधार पर त्रिभुजों का नामकरण

एक त्रिभुज जिसकी तीनों भुजाएँ बराबर नहीं हों, **विषमबाहु त्रिभुज (Scalene triangle)** कहलाता [(c), (e)] है। एक त्रिभुज जिसकी दो भुजाएँ बराबर हों, एक **समद्विबाहु त्रिभुज (Isosceles triangle)** कहलाता [(b), (f)] है।

त्रिभुज जिसकी तीनों भुजाएँ बराबर हों, **समबाहु त्रिभुज (Equilateral triangle)** कहलाता है। [(a), (d)] इन परिभाषाओं का प्रयोग करके उन सभी त्रिभुजों का वर्गीकरण कीजिए, जिनकी भुजाएँ आप पहले माप चुके हैं।

कोणों के आधार पर त्रिभुजों का नामकरण

यदि त्रिभुज का प्रत्येक कोण 90° से कम हो, तो वह एक **न्यूनकोण त्रिभुज (acute angled triangle)** कहलाता है। यदि इसका कोई कोण समकोण हो, तो वह त्रिभुज एक **समकोण त्रिभुज (right angled triangle)** कहलाता है। यदि इसका कोई कोण 90° से अधिक हो, तो वह त्रिभुज एक **अधिक कोण त्रिभुज (obtuse angled triangle)** कहलाता है।



न्यून कोण त्रिभुज   समकोण त्रिभुज   अधिक कोण त्रिभुज

उपरोक्त परिभाषाओं के अनुसार, उन त्रिभुजों का वर्गीकरण कीजिए जिनके कोण आप पहले माप चुके हैं। इनमें से कितने समकोण त्रिभुज थे?

इन्हें कीजिए

निम्न के रफ चित्र खींचने का प्रयत्न कीजिए :

(a) एक विषमबाहु न्यूनकोण त्रिभुज

(b) एक अधिक कोण समद्विबाहु त्रिभुज

(c) एक समकोण समद्विबाहु त्रिभुज

(d) एक विषमबाहु समकोण त्रिभुज

क्या आप सोचते हैं कि निम्न आकृति खींचना संभव है :

(e) एक अधिक कोण समबाहु त्रिभुज?

(f) एक समकोण समबाहु त्रिभुज?

(g) एक त्रिभुज जिसमें दो समकोण हों?

सोचिए, चर्चा कीजिए और फिर अपने निष्कर्षों को लिखिए।

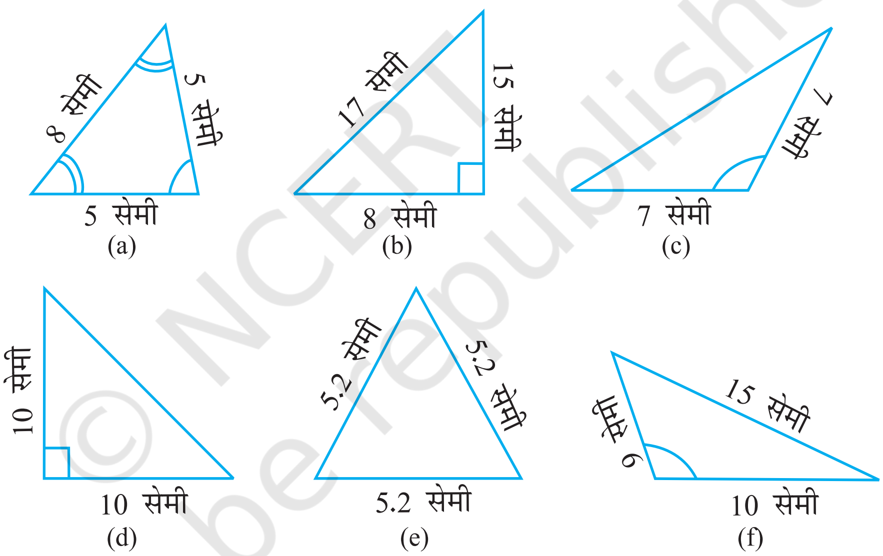
प्रश्नावली 5.6

1. निम्नलिखित त्रिभुजों के प्रकार लिखिए :
   (a) त्रिभुज जिसकी भुजाएँ 7 सेमी, 8 सेमी और 9 सेमी हैं।
   (b) ΔABC जिसमें $AB = 8.7$ सेमी, $AC = 7$ सेमी और $BC = 6$ सेमी है।
   (c) ΔPQR जिसमें $PQ = QR = RP = 5$ सेमी है।
   (d) ΔDEF जिसमें $m \angle D = 90^\circ$ है।
   (e) ΔXYZ जिसमें $m \angle Y = 90^\circ$ और $XY = YZ$ है।
   (f) ΔLMN जिसमें $m\angle L = 30^\circ$, $m \angle M = 70^\circ$ और $m \angle N = 80^\circ$ है।

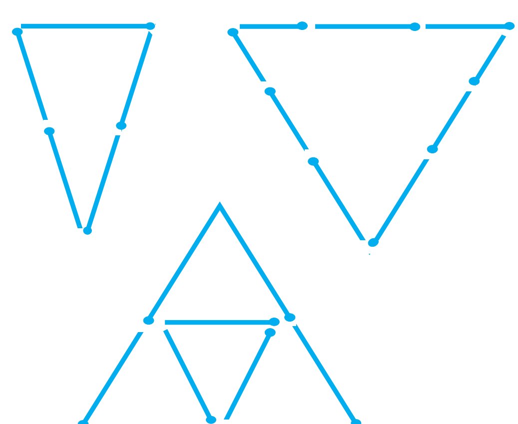
2. निम्न का सुमेलन कीजिए :

त्रिभुज के माप	**त्रिभुज का प्रकार**
(i) समान लंबाई की तीन भुजाएँ	(a) विषमबाहु समकोण त्रिभुज
(ii) समान लंबाई की दो भुजाएँ	(b) समद्विबाहु समकोण त्रिभुज
(iii) अलग-अलग लंबाइयों की सभी भुजाएँ	(c) अधिक कोण त्रिभुज
(iv) 3 न्यूनकोण	(d) समकोण त्रिभुज
(v) 1 समकोण	(e) समबाहु त्रिभुज
(vi) 1 अधिक कोण	(f) न्यून कोण त्रिभुज
(vii) दो बराबर लंबाइयों की भुजाओं के साथ 1 समकोण	(g) समद्विबाहु त्रिभुज

3. निम्नलिखित त्रिभुजों में से प्रत्येक का दो प्रकार से नामकरण कीजिए (आप कोण का प्रकार केवल देखकर ज्ञात कर सकते हैं।)



4. माचिस की तीलियों की सहायता से त्रिभुज बनाने का प्रयत्न कीजिए। इनमें से कुछ आकृति में दिखाए गए हैं। क्या आप निम्न से त्रिभुज बना सकते हैं?



(a) 3 माचिस की तीलियाँ
(b) 4 माचिस की तीलियाँ
(c) 5 माचिस की तीलियाँ
(d) 6 माचिस की तीलियाँ

(ध्यान रखिए कि आपको प्रत्येक स्थिति में सभी उपलब्ध माचिस की तीलियों का उपयोग करना है)।

प्रत्येक स्थिति में त्रिभुज के प्रकार का नाम बताइए। यदि आप त्रिभुज नहीं बना पाते हैं, तो उसके कारण के बारे में सोचिए।

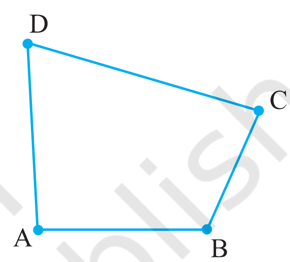
5.8 चतुर्भुज

आपको याद होगा कि चार भुजाओं का बहुभुज एक **चतुर्भुज (quadrilateral)** कहलाता है।

इन्हें कीजिए

1. दो डंडी लीजिए और उन्हें इस प्रकार रखिए कि उनका एक-एक सिरा एक सिरे पर मिले। अब डंडियों के एक अन्य युग्म को इस प्रकार रखिए कि उनके सिरे डंडियों के पहले युग्म के स्वतंत्र सिरों से जुड़ जाएँ। इस प्रकार हमें क्या आकृति प्राप्त होती है?

यह एक चतुर्भुज है, जो आप सामने देख रहे हैं। इस चतुर्भुज की भुजाएँ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, ____, ____ हैं।
इस चतुर्भुज के चार कोण हैं। ये $\angle BAD$, $\angle ADC$, $\angle DCB$, और ______ हैं।
$\overline{AC}$ इसका एक विकर्ण है। अन्य विकर्ण कौन सा है? सभी भुजाओं और विकर्णों की लंबाइयाँ मापिए। सभी कोणों को भी मापिए।



2. जैसा आपने ऊपर क्रियाकलाप किया है, चार डंडियाँ लेकर देखिए कि क्या आप इनसे ऐसा चतुर्भुज बना सकते हैं जिसमें
   (a) चारों कोण न्यून कोण हैं।
   (b) एक कोण अधिक कोण है।
   (c) एक कोण समकोण है।
   (d) दो कोण अधिक कोण हैं।
   (e) दो कोण समकोण हैं।
   (f) विकर्ण परस्पर समकोण पर हैं।

आयत

इन्हें कीजिए

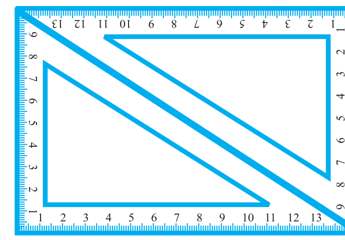
आपके ज्यामिति बक्स में दो सेट स्क्वेयर हैं। एक 30°–60°–90° सेट स्क्वेयर है और दूसरा 45°–45°–90° सेट स्क्वेयर।

आप और आपका मित्र मिलकर इस क्रिया को कर सकते हैं :

(a) आप दोनों के पास एक-एक 30°–60°–90° सेट स्क्वेयर है। इनको आकृति में दर्शाए अनुसार रखिए। क्या आप इस प्रकार बने चतुर्भुज का नाम बता सकते हैं? इसके प्रत्येक कोण का माप क्या है?

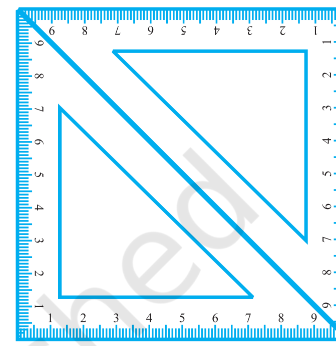
यह चतुर्भुज एक **आयत (rectangle)** है।

आयत का एक और गुण जो आप स्पष्ट रूप से यहाँ देख सकते हैं कि इसकी सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।



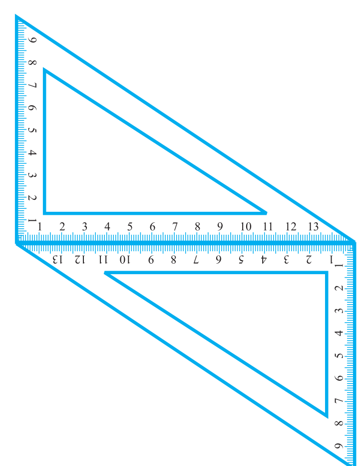
आप अन्य कौन से गुण ज्ञात कर सकते हैं?

(b) यदि अन्य सेट स्क्वेयर 45°–45°–90° के युग्म का प्रयोग करें, तो आपको एक अन्य चतुर्भुज प्राप्त होगा। यह एक **वर्ग** (square) है।



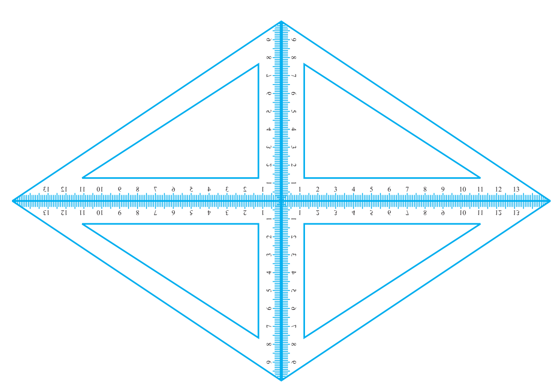
क्या आप देख सकते हैं कि सभी भुजाओं की लंबाइयाँ बराबर हैं? आप इसके कोणों और विकर्णों के बारे में क्या कह सकते हैं? वर्ग के कुछ अन्य गुण ज्ञात करने का प्रयत्न कीजिए।

(c) यदि आप 30°–60°–90° सेट स्क्वेयरों को आकृति में दर्शाए अनुसार एक अन्य स्थिति में रखें, तो आपको एक **समांतर चतुर्भुज (parallelograms)** प्राप्त होता है। क्या आप देख रहे हैं कि इसकी सम्मुख भुजाएँ समांतर हैं? क्या इसकी सम्मुख भुजाएँ बराबर हैं?

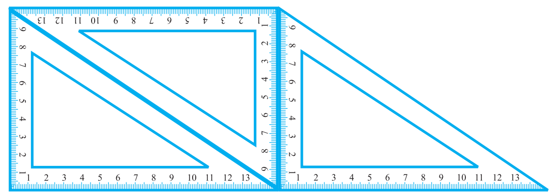


क्या इसके विकर्ण बराबर हैं?

(d) यदि आप चार 30°–60°–90° सेट स्क्वेयरों का प्रयोग करें, तो आपको एक **समचतुर्भुज (rhombus)** प्राप्त होता है।



(e) यदि आप आकृति में दर्शाए अनुसार कई सेट स्क्वेयरों का प्रयोग करें, तो हमें एक ऐसा चतुर्भुज प्राप्त होगा जिसकी दो सम्मुख भुजाओं का एक युग्म समांतर है।



यह एक समलंब (trapezium) है।

यहाँ आपकी खोजों के सारांश की एक रूपरेखा दी जा रही है। इसे पूरा कीजिए।

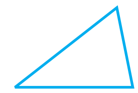
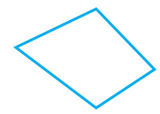
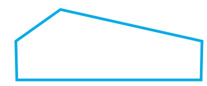
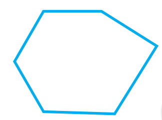
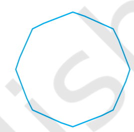
चतुर्भुज	सम्मुख भुजाएँ		सभी भुजाएँ	सम्मुख कोण	विकर्ण	
	समांतर	बराबर	बराबर	बराबर	बराबर	परस्पर लंब
समांतर चतुर्भुज	हाँ	हाँ	नहीं	हाँ	नहीं	नहीं
आयत			नहीं			
वर्ग						हाँ
समचतुर्भुज				हाँ		
समलंब		नहीं				

प्रश्नावली 5.7

1. सत्य (T) या असत्य (F) कहिए :
   (a) आयत का प्रत्येक कोण समकोण होता है।
   (b) आयत की सम्मुख भुजाओं की लंबाई बराबर होती है।
   (c) वर्ग के विकर्ण एक दूसरे पर लंब होते हैं।
   (d) समचतुर्भुज की सभी भुजाएँ बराबर लंबाई की होती हैं।
   (e) समांतर चतुर्भुज की सभी भुजाएँ बराबर लंबाई की होती हैं।
   (f) समलंब की सम्मुख भुजाएँ समांतर होती हैं।
2. निम्नलिखित के लिए कारण दीजिए :
   (a) वर्ग को एक विशेष प्रकार का आयत समझा जा सकता है।
   (b) आयत को एक विशेष प्रकार का समांतर चतुर्भुज समझा जा सकता है।
   (c) वर्ग को एक विशेष प्रकार का समचतुर्भुज समझा जा सकता है।
   (d) वर्ग, आयत, समचतुर्भुज और समांतर चतुर्भुज में से प्रत्येक एक चतुर्भुज भी है।
   (e) वर्ग एक समांतर चतुर्भुज भी है।
3. एक बहुभुज सम (regular) होता है, यदि उसकी सभी भुजाएँ बराबर हों और सभी कोण बराबर हों। क्या आप एक सम चतुर्भुज (regular quadrilateral) की पहचान कर सकते हैं?

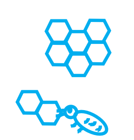
5.9 बहुभुज

अभी तक आपने 3 और 4 भुजाओं वाले बहुभुजों (polygons) का अध्ययन किया है। जिन्हें क्रमशः त्रिभुज और चतुर्भुज कहते हैं। अब हम बहुभुजों की अवधारणा को ऐसी आकृतियों के रूप में विस्तृत करने का प्रयत्न करेंगे, जिनमें चार से अधिक भुजाएँ होंगी। हम बहुभुजों को उनकी भुजाओं की संख्याओं के आधार पर निम्न प्रकार वर्गीकृत कर सकते हैं :

भुजाओं की संख्या	नाम	आकृति
3	त्रिभुज	
4	चतुर्भुज	
5	पंचभुज	
6	षड्भुज	
8	अष्टभुज	

आप इस प्रकार के आकार (shapes) अपने दैनिक जीवन में देखते हैं। खिड़कियाँ, दरवाज़े, दीवार, अलमारियाँ, ब्लैकबोर्ड, अभ्यास-पुस्तिकाएँ आदि सभी आयत के आकार के होते हैं। फर्श की टाइल भी आयताकार होती हैं। त्रिभुज की दृढ़ता वाली प्रकृति के कारण इस आकार का इंजीनियरिंग निर्माणों में लाभप्रद रूप से प्रयोग किया जाता है।

निर्माण कार्यों में त्रिभुज का अनुप्रयोग होता है।

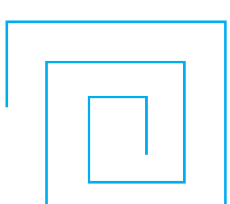


मधुमक्खी अपना घर बनाने में षड्भुज के आकार की उपयोगिता जानती हैं।

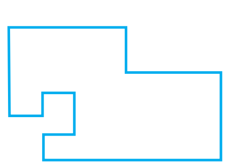
अपने परिवेश में देखिए कि आप इन आकारों को कहाँ-कहाँ पा सकते हैं।

प्रश्नावली 5.8

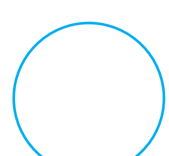
1. जाँच कीजिए कि निम्न में से कौन-सी आकृतियाँ बहुभुज हैं। यदि इनमें से कोई बहुभुज नहीं है, तो कारण बताइए।



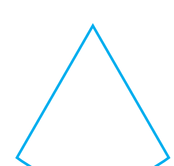
(a)



(b)

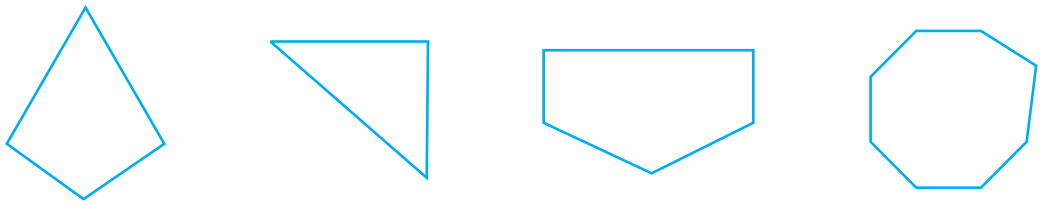


(c)



(d)

2. प्रत्येक बहुभुज का नाम लिखिए :



(a) (b) (c) (d)

इनमें से प्रत्येक के दो और उदाहरण बनाइए।

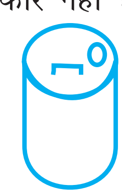
3. एक सम षड्भुज (reguler hexagon) का एक रफ़ चित्र खींचिए। उसके किन्हीं तीन शीर्षों को जोड़कर एक त्रिभुज बनाइए। पहचानिए कि आपने किस प्रकार का त्रिभुज खींच लिया है।
4. एक सम अष्टभुज (reguler octagon) का रफ़ चित्र खींचिए। [यदि आप चाहें, तो वर्गांकित कागज़ (squared paper) का प्रयोग कर सकते हैं।] इस अष्टभुज के ठीक चार शीर्षों को जोड़कर एक आयत खींचिए।
5. किसी बहुभुज का विकर्ण उसके किन्हीं दो शीर्षों (आसन्न शीर्षों को छोड़कर) को जोड़ने से प्राप्त होता है (यह इसकी भुजाएँ नहीं होती हैं)। एक पंचभुज का एक रफ़ चित्र खींचिए और उसके विकर्ण खींचिए।

5.10 त्रिविमीय आकार

यहाँ कुछ आकार (shapes) दिए जा रहे हैं, जिन्हें आप अपने दैनिक जीवन में देखते हैं। प्रत्येक आकार एक ठोस (solid) है। यह एक 'सपाट (flat)' आकार नहीं है।

यह गेंद एक गोला (sphere) है।

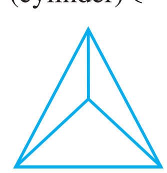
आइसक्रीम शंकु (cone) के आकार में है।



यह केन (can) एक बेलन (cylinder) है

यह बॉक्स (box) एक घनाभ (cuboid) है।

यह पासा (die) एक घन (cube) है।

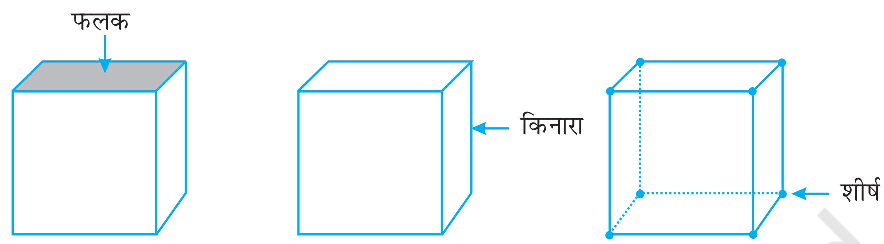


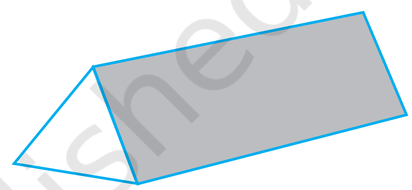
यह एक पिरामिड (pyramid) का आकार है।

किन्हीं पाँच वस्तुओं के नाम बताइए जो एक गोले से मिलती-जुलती हों।
किन्हीं ऐसी पाँच वस्तुओं के नाम बताइए जो एक शंकु से मिलती-जुलती हों।

फलक, किनारे और शीर्ष

अनेक त्रिविमीय आकारों (three dimensional shapes) में हम उनके फलकों, किनारों और शीर्षों की सरलता से पहचान कर सकते हैं। इन तीन पदों, अर्थात् फलक, किनारे और शीर्ष से हमारा क्या तात्पर्य है?





उदाहरण के लिए, एक घन (cube) को लीजिए।

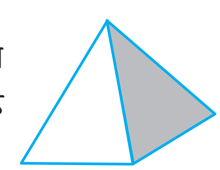
घन का प्रत्येक ऊपरी सपाट (वर्गाकार) पृष्ठ एक **फलक** है। इसके दो फलक एक रेखाखंड में मिलते हैं, जो घन का एक **किनारा** कहलाता है। तीन किनारे एक बिंदु पर मिलते हैं, जो घन का **शीर्ष** कहलाता है।

सामने एक **प्रिज़्म (prism)** का चित्र दिया है। क्या आपने इसे अपनी प्रयोगशाला में देखा है? इसके दो फलक त्रिभुज के आकार के हैं। इसलिए यह प्रिज्म एक **त्रिभुजाकार प्रिज़्म (triangulur prism)** कहलाता है।

यह त्रिभुजाकार फलक इसका **आधार (base)** भी कहलाता है। इस प्रिज़्म के दो सर्वसम (identical) त्रिभुजाकार फलक हैं। एक आधार और दूसरा ऊपरी (top) सिरा कहलाता है। इन दोनों फलकों के अतिरिक्त अन्य फलक समांतर चतुर्भुज हैं।

यदि प्रिज़्म का आधार आयताकार हो, तो यह प्रिज़्म एक **आयताकार (rectangular) प्रिज़्म** कहलाता है। आयताकार प्रिज़्म के लिए क्या आपको याद है कि एक अन्य नाम क्या है?

एक **पिरामिड** वह आकार है जिसमें आधार का फलक किसी भी बहुभुज के आकार का हो सकता है और शेष फलक त्रिभुजाकार होते हैं।

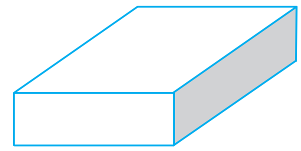


सामने की आकृति में एक वर्ग पिरामिड (square pyramid) का चित्र दिखाया गया है। इसका आधार एक वर्ग है। क्या आप एक त्रिभुजाकार पिरामिड की कल्पना कर सकते हैं? इसका एक रफ़ चित्र बनाने का प्रयत्न कीजिए।

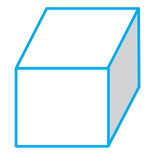
बेलन, शंकु और गोले में कोई सीधा किनारा (straight edge) नहीं होता है। शंकु का आधार क्या है? क्या यह एक वृत्त है? बेलन का आधार भी एक वृत्त है। बेलन का ऊपरी सिरा आधार जैसा एक सर्वसम वृत्त है। निःसंदेह, गोले का कोई फलक नहीं है। इसके बारे में सोचिए !

इन्हें कीजिए

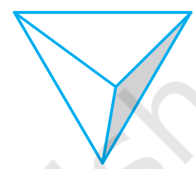
1. एक घनाभ एक आयताकार बक्स जैसा है। इसके 6 फलक हैं। प्रत्येक फलक के चार किनारे हैं। प्रत्येक फलक के चार कोने हैं (जो इसके शीर्ष कहलाते हैं)।



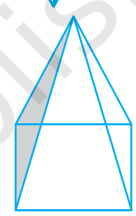
2. एक घन ऐसा घनाभ होता है, जिसके सभी किनारे बराबर लंबाई के होते हैं।
   इसके _______ फलक हैं।
   प्रत्येक फलक के _______ किनारे हैं।
   प्रत्येक फलक के _______ शीर्ष हैं।



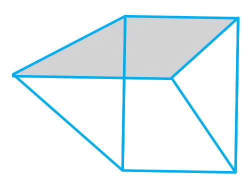
3. एक त्रिभुजाकार पिरामिड का आधार एक त्रिभुज होता है। यह चतुष्फलक (tetrahedron) भी कहलाता है।
   फलक : _______
   किनारे : _______
   कोने : _______



4. एक वर्ग पिरामिड का आधार एक वर्ग होता है।
   फलक : _______
   किनारे : _______
   कोने : _______

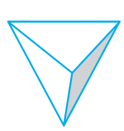


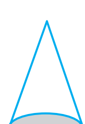
5. एक त्रिभुजाकार प्रिज़्म प्राय: एक केलाइडोस्कोप (Kaleidoscope) के आकार का होता है। इसका आधार और ऊपरी सिरा त्रिभुज के आकार के होते हैं।
   फलक : _______
   किनारे : _______
   कोने : _______

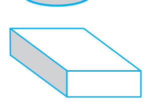


प्रश्नावली 5.9

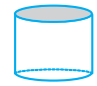
1. निम्न का सुमेलन कीजिए :

(a) शंकु (i) 

(b) गोला (ii) 

(c) बेलन (iii) 

(d) घनाभ (iv) 

(e) पिरामिड (v) 

इन आकारों में से प्रत्येक के दो और उदाहरण दीजिए।

2. निम्न किस आकार के हैं?
   - (a) आपका ज्यामिति बक्स
   - (b) एक ईंट
   - (c) एक माचिस की डिब्बी
   - (d) सड़क बनाने वाला रोलर (roller)
   - (e) एक लड्डू

हमने क्या चर्चा की?

1. एक रेखाखंड के दोनों अंत:बिंदुओं के बीच की दूरी उसकी लंबाई कहलाती है।

2. रेखाखंडों की तुलना करने के लिए एक अंशांकिक रूलर और एक डिवाइडर उपयोगी होते हैं।

3. जब घड़ी की एक सुई एक स्थान से दूसरे स्थान पर जाती है, तो हमें कोण का एक उदाहरण प्राप्त होता है।

   सुई का एक पूरा चक्कर 1 **घूर्णन** कहलाता है।

   समकोण $\frac{1}{4}$ घूर्णन है और **ऋजुकोण** $\frac{1}{2}$ घूर्णन है। कोणों को अंशों (degrees) में मापने के लिए हम **चाँदे** का प्रयोग करते हैं।

   समकोण की माप 90° और **ऋजुकोण** की माप 180° होती है। एक कोण जिसकी माप समकोण से कम हो, **न्यून कोण** कहलाता है और जिसकी माप समकोण से अधिक और ऋजुकोण से कम हो **अधिक कोण** कहलाता है।

   एक **प्रतिवर्ती कोण** ऋजुकोण से बड़ा और संपूर्ण कोण से छोटा होता है।

4. दो प्रतिच्छेदी रेखाएँ परस्पर लंब कहलाती हैं, यदि उनके बीच का कोण 90° हो।

5. एक रेखाखंड का लंब समद्विभाजक उस रेखाखंड पर लंब होता है और उसे दो बराबर भागों में विभाजित करता है।

6. कोणों के आधार पर त्रिभुजों को निम्न प्रकार वर्गीकृत किया जाता है :

त्रिभुज के कोणों के प्रकार	*नाम*
प्रत्येक कोण न्यून कोण	न्यून कोण त्रिभुज
एक कोण समकोण	समकोण त्रिभुज
एक कोण अधिक कोण	अधिक कोण त्रिभुज

7. भुजाओं की लंबाइयों के आधार पर त्रिभुजों का वर्गीकरण निम्न प्रकार होता है :

त्रिभुजों की भुजाओं की लंबाइयाँ	*नाम*
तीनों भुजाएँ असमान लंबाइयों वाली	विषमबाहु त्रिभुज
दो भुजाओं की लंबाइयाँ बराबर	समद्विबाहु त्रिभुज
तीनों भुजाओं की लंबाइयाँ बराबर	समबाहु त्रिभुज

8. बहुभुजों के नाम उनकी भुजाओं की संख्या के आधार पर निम्न प्रकार हैं :

भुजाओं की संख्या	*बहुभुज का नाम*
3	त्रिभुज
4	चतुर्भुज
5	पंचभुज
6	षड्भुज
8	अष्टभुज

9. चतुर्भुजों को उनके गुणों के आधार पर वर्गीकृत किया जाता है :

गुण	*चतुर्भुज का नाम*
समांतर रेखाओं के दो युग्म	समांतर चतुर्भुज
4 समकोण वाला समांतर चतुर्भुज	आयत
4 बराबर भुजाओं वाला समांतर चतुर्भुज	समचतुर्भुज
4 समकोण वाला समचतुर्भुज	वर्ग

10. हम अपने परिवेश में (आस-पास) अनेक त्रिविमीय आकार देखते हैं। इनमें से कुछ घन, घनाभ, गोला, बेलन, शंकु और पिरामिड हैं।

पूर्णांक

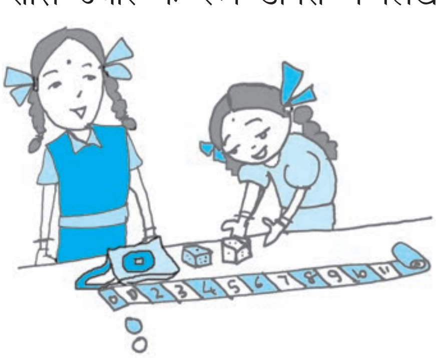
अध्याय 6

0651CH06

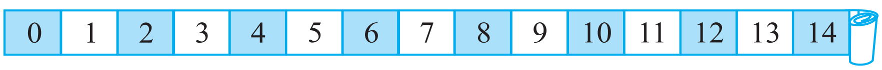
6.1 भूमिका

सुनीता की माँ के पास 8 केले हैं। सुनीता को अपने मित्रों के साथ एक पिकनिक पर जाना है। वह अपने साथ 10 केले ले जाना चाहती है। क्या उसकी माँ उसे 10 केले दे सकती है? उसके पास पर्याप्त केले नहीं हैं, इसलिए वह अपनी पड़ोसन से 2 केले उधार लेकर उन्हें बाद में लौटाने का आश्वासन देती है। सुनीता को 10 केले देने के बाद, उसकी माँ के पास कितने केले बचते हैं? उसके पास कोई भी केला शेष नहीं बचता है, परंतु उसे अपनी पड़ोसन को 2 केले वापस करने हैं। इसलिए जब उसके पास कुछ और केले आ जाएँगे, मान लीजिए 6 केले, तो वह 2 केले वापस कर देगी और उसके पास केवल 4 केले बचेंगे।

रोनाल्ड एक पेन खरीदने बाजार जाता है। उसके पास केवल ₹ 12 हैं, परंतु एक पेन का मूल्य ₹ 15 है। दुकानदार उसकी ओर ₹ 3 की राशि उधार के रूप डायरी में लिख देता है। परंतु वह किस प्रकार याद रखेगा कि उसे ₹ 3 की राशि रोनाल्ड को देनी है या उससे लेनी है? क्या वह इस उधार की राशि को किसी रंग या चिह्न से व्यक्त कर सकता है?



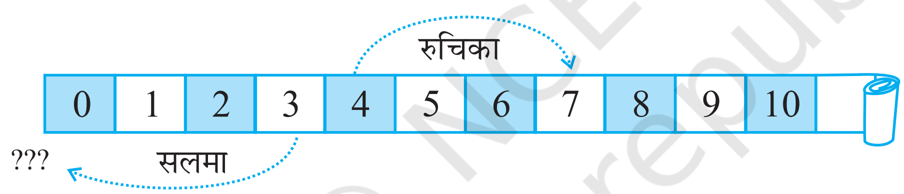
रुचिका और सलमा एक संख्या पट्टी का जिस पर समान अंतराल पर 0 से 25 अंक अंकित हैं एक खेल खेल रही हैं।



प्रारंभ में, वे दोनों शून्य चिह्न पर एक-एक रंगीन टोकन रखती हैं। एक थैले में दो रंगीन पासे (dice) रखे हैं और वे एक के बाद एक निकाले जाते हैं। इन पासों में से एक पासा लाल रंग का है और दूसरा नीले रंग का। यदि पासा लाल रंग का है, तो उसे फेंकने पर जो संख्या प्राप्त होती है टोकन को उतने स्थान आगे बढ़ा दिया जाता है। यदि पासा नीले रंग का है, तो उसे फेंकने पर जो संख्या प्राप्त होती है, टोकन को उतने स्थान पीछे कर दिया जाता है। प्रत्येक चाल के बाद पासों को थैले में वापस रख दिया जाता है, ताकि दोनों व्यक्तियों को दोनों पासों को फेंकने के समान अवसर मिलें। जो 25वें चिह्न पर पहले पहुँचता है, उसे जीता हुआ माना जाता है। वह खेलना प्रारंभ करती हैं। रुचिका लाल पासा प्राप्त करती है और उसे फेंकने पर चार प्राप्त होता है। इस प्रकार, वह टोकन को पट्टी पर चार से अंकित स्थान पर रख देती है। सलमा भी थैले में से लाल पासा निकालती है और उसे फेंकने पर संख्या 3 प्राप्त करती है। इस प्रकार, वह अपने टोकन को तीन से अंकित स्थान पर रख देती है।

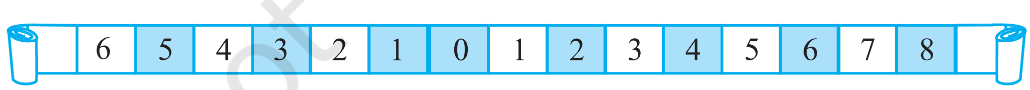
दूसरे प्रयत्न में, रुचिका लाल पासे से 3 अंक प्राप्त करती है और सलमा नीले पासे से 4 अंक प्राप्त करती है। क्या आप सोच सकते हैं कि दूसरे प्रयत्न के बाद वे अपने-अपने टोकन किन स्थानों पर रखेंगे?

रुचिका आगे बढ़ती है और $4 + 3$, अर्थात् 7वें स्थान पर अपना टोकन रखती है।



सलमा अपना टोकन शून्य स्थान पर रखती है। रुचिका ने इस पर आपत्ति जताई और कहा कि उसे शून्य से पीछे होना चाहिए। सलमा उससे सहमत हो जाती है। परंतु शून्य के पीछे कुछ भी नहीं है। वे क्या करें?

तब सलमा और रुचिका ने इस पट्टी को दूसरी ओर बढ़ा दिया। उन्होंने दूसरी ओर एक नीली पट्टी का प्रयोग किया।



अब सलमा ने सुझाव दिया कि चूँकि वह शून्य से एक स्थान पीछे है, इसलिए इस स्थान को नीले एक से अंकित किया जा सकता है। यदि टोकन नीले एक पर है, तो नीले एक के पीछे वाला स्थान 'नीला दो' होगा। इसी प्रकार 'नीले दो' के पीछे वाला स्थान 'नीला तीन' होगा। इस प्रकार से वे पीछे चलने का निर्णय लेती हैं। परंतु उन्हें नीला कागज़ नहीं मिला। तब रुचिका ने कहा कि जब हम विपरीत दिशा में चल रहे हों, तो हमें दूसरी ओर एक चिह्न का प्रयोग कर लेना चाहिए। इस प्रकार, देखिए कि शून्य से छोटी संख्याओं पर जाने के लिए

–8	–7	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7	8

हमें एक चिह्न का प्रयोग करने की आवश्यकता होती है। इसके लिए उस संख्या के आगे ऋण (–) चिह्न का प्रयोग किया जाता है। इससे यह प्रदर्शित होता है कि ऋणात्मक (negative) चिह्न लगी हुई संख्याएँ शून्य से छोटी होती हैं। इन्हें **ऋणात्मक संख्याएँ** कहते हैं।

इन्हें कीजिए

(कौन कहाँ है)

मान लीजिए डेविड और मोहन ने 0 स्थान से विपरीत दिशाओं में चलना प्रारंभ कर दिया है। मान लीजिए कि 0 के दाईं ओर चले कदमों को '+' चिह्न से निरूपित किया जाता है और 0 से बाईं ओर चले कदमों को '–' चिह्न से निरूपित किया जाता है। यदि मोहन शून्य के दाईं ओर 5 कदम चलता है, तो उसे +5 से निरूपित किया जा सकता है और यदि डेविड शून्य के बाईं ओर 5 कदम चलता है, तो उसे – 5 से निरूपित किया जा सकता है। अब निम्नलिखित स्थानों को + या – चिह्न से निरूपित कीजिए :

(a) शून्य के बाईं ओर 8 कदम
(b) शून्य के दाईं ओर 7 कदम
(c) शून्य के दाईं ओर 11 कदम
(d) शून्य के बाईं ओर 6 कदम

इन्हें कीजिए

(मेरे पीछे कौन आ रहा है)

पिछले उदाहरणों में हमने देखा कि यदि एक ऐसी संख्या के बराबर चलना है, जो धनात्मक है, तो हम दाईं ओर चलते हैं। यदि इस प्रकार का केवल 1 कदम चला जाता है, तो हमें उस

–8	–7	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7	8

संख्या का परवर्ती (Successor) प्राप्त होता है।

निम्नलिखित संख्याओं के परवर्ती लिखिए :

संख्या	परवर्ती
10	
8	
– 5	
– 3	
0	

यदि हमें ऋणात्मक संख्या के बराबर चलना है, तो बाईं ओर को चला जाता है।

यदि बाईं ओर केवल 1 कदम चला जाता है, तो हमें उस संख्या का पूर्ववर्ती (Predecessor) प्राप्त होता है।

–8	–7	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7	8

अब निम्नलिखित संख्याओं के पूर्ववर्ती लिखिए :

संख्या	पूर्ववर्ती
10	
8	
5	
3	
0	

6.1.1 मेरे साथ एक चिह्न लगाइए

हम देख चुके हैं कि कुछ संख्याओं के आगे ऋण (–) चिह्न लगा होता है। उदाहरणार्थ, यदि हम दुकानदार को दी जाने वाली रोनाल्ड की देय राशि को दर्शाना चाहते हैं, तो हम इसे – लिखेंगे।

नीचे एक दुकानदार का खाता दिखाया जा रहा है जो कुछ विशेष वस्तुओं की बिक्री से प्राप्त लाभ और हानि को दर्शाता है :

वस्तु का नाम	लाभ	हानि	उचित चिह्न द्वारा निरूपण
सरसों का तेल	₹ 150		....
चावल		₹ 250	....
काली मिर्च	₹ 225		....
गेहूँ	₹ 200		....
मूँगफली का तेल		₹ 330	....

चूँकि लाभ और हानि विपरीत स्थितियाँ हैं, इसलिए यदि लाभ को '+' चिह्न से निरूपित किया जाता है, तो हानि को '–' चिह्न से निरूपित किया जाएगा। उपरोक्त खाते में उचित चिह्न का प्रयोग करते हुए रिक्त स्थानों को भरिए।

इसी प्रकार की अन्य स्थितियाँ, जहाँ हम इन चिह्नों का प्रयोग करते हैं नीचे दी गई हैं।

जैसे-जैसे हम नीचे जाते हैं, ऊँचाई कम होती जाती है। इस प्रकार, समुद्र स्तर (तल) से नीचे की ऊँचाई को हम एक ऋणात्मक संख्या से व्यक्त कर सकते हैं और समुद्र तल से ऊपर की ऊँचाई को एक धनात्मक संख्या से व्यक्त कर सकते हैं।

यदि कमाई गई (अर्जित की गई) राशि को '+' चिह्न से निरूपित किया जाए, तो खर्च (व्यय) की गई राशि को '–' चिह्न से निरूपित किया जा सकता है। इसी प्रकार 0°C से ऊपर के तापमान को '+' चिह्न और 0°C से नीचे के तापमान को '–' चिह्न से निरूपित किया जाता है।

उदाहरणार्थ, 0° C से 10° नीचे के तापमान को – 10°C लिखा जाता है।

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित को उचित चिह्न के साथ लिखिए :

(a) समुद्र तल से 100 मी नीचे

(b) 0°C से 25°C ऊपर तापमान

(c) 0°C से 15°C नीचे तापमान

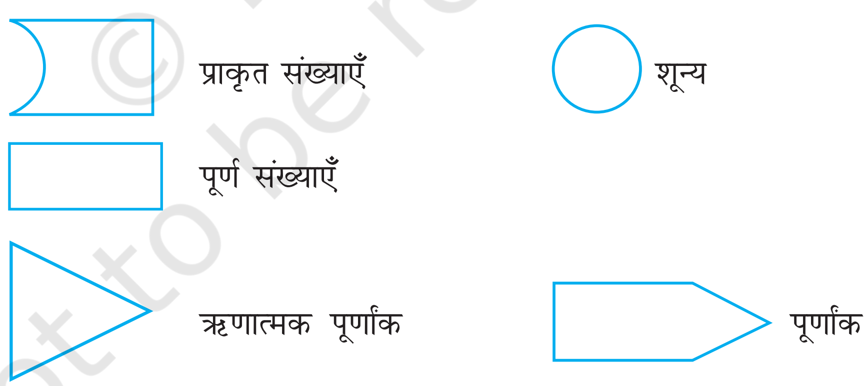
(d) 0 से छोटी कोई भी पाँच संख्याएँ

6.2 पूर्णांक

सबसे पहले ज्ञात की गई संख्याएँ प्राकृत संख्याएँ, अर्थात् 1, 2, 3, 4,... हैं। यदि हम प्राकृत संख्याओं के संग्रह में शून्य को सम्मिलित कर लेते हैं, तो हमें संख्याओं का एक नया संग्रह प्राप्त होता है। इन संख्याओं को पूर्ण संख्याएँ कहते हैं। इस प्रकार 0, 1, 2, 3, 4,... पूर्ण संख्याएँ हैं। इन संख्याओं का आप अध्याय 2 में अध्ययन कर चुके हैं। अब हमें ज्ञात हो गया है कि ऋणात्मक संख्याएँ, जैसे –1, – 2, – 3, – 4, – 5, ... भी होती हैं। यदि हम पूर्ण संख्याओं और इन ऋणात्मक संख्याओं को मिला लें, तो हमें संख्याओं का एक नया संग्रह प्राप्त होगा, जो, 1, 2, 3, ..., – 1, – 2, – 3, – 4, ... है। संख्याओं के इस संग्रह को पूर्णांकों (integers) का संग्रह कहते हैं।

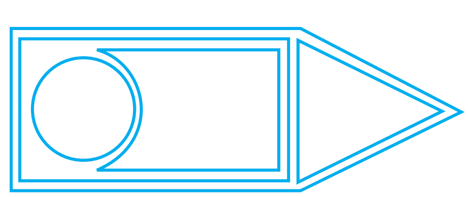
इस संग्रह में 1, 2, 3, ... धनात्मक पूर्णांक कहलाते हैं और – 1, – 2, – 3, ... ऋणात्मक पूर्णांक कहलाते हैं।

आइए, इसे निम्न आकृतियों द्वारा समझने का प्रयत्न करें। मान लीजिए ये आकृतियाँ अपने सम्मुख लिखी संख्याओं या उनके संग्रहों को निरूपित करती हैं।

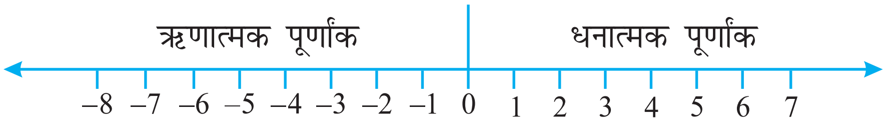


तब पूर्णांकों के संग्रह को निम्नलिखित आरेख से समझा जा सकता है, जिसमें पिछली सभी संख्याएँ और उनके संग्रह सम्मिलित हैं।

पूर्णांक



6.2.1 संख्या रेखा पर पूर्णांकों का निरूपण



एक रेखा खींचिए और उस पर समान दूरी पर कुछ बिंदु अंकित कीजिए, जैसा कि ऊपर आकृति में दिखाया गया है। इनमें से एक बिंदु को शून्य से अंकित कीजिए। शून्य के दाईं ओर के बिंदु धनात्मक पूर्णांक हैं और इन्हें + 1, + 2, + 3 इत्यादि या केवल 1, 2, 3 इत्यादि से अंकित किया गया है। शून्य के बाईं ओर के बिंदु ऋणात्मक पूर्णांक हैं और इन्हें – 1, – 2, – 3 इत्यादि से अंकित किया गया है।

इस रेखा पर – 6 अंकित करने के लिए, हम शून्य के बाईं ओर 6 बिंदु (कदम) चलते हैं (आकृति 6.1)

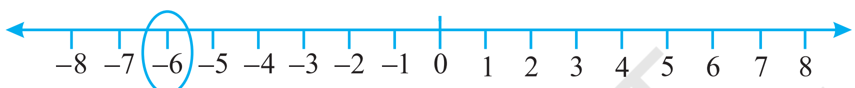


Fig 6.1

इस रेखा पर + 2 अंकित करने के लिए, हम शून्य के दाईं ओर 2 बिंदु चलते हैं (आकृति 6.2)

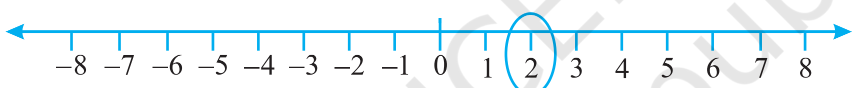


Fig 6.2

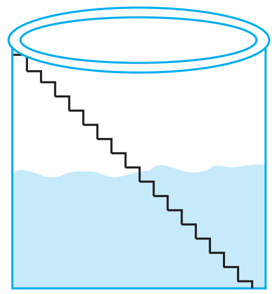
प्रयास कीजिए

संख्या रेखा पर – 3, 7, – 4, – 8, – 1 और – 3 को अंकित कीजिए।

6.2.2 पूर्णांकों में क्रमबद्धता

रमन और इमरान एक गाँव में रहते हैं, जहाँ सीढ़ियों वाला एक कुआँ है। इस कुएँ में तली तक कुल 25 सीढ़ियाँ हैं।

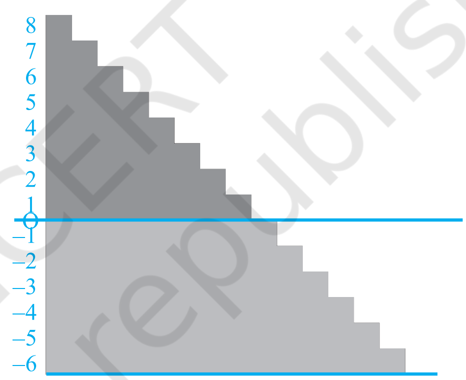
एक दिन रमन और इमरान कुएँ के अंदर गए और उन्होंने पाया कि उसमें जल स्तर तक 8 सीढ़ियाँ हैं। उन्होंने यह देखने का निर्णय लिया कि वर्षा होने पर उस कुएँ में कितना जल आ जाएगा। उन्होंने इस समय के जल स्तर पर शून्य अंकित किया और उसमें ऊपर की सीढ़ियों को क्रम से 1,2,3,4,... अंकित किया। वर्षा के बाद उन्होंने देखा कि जल स्तर छठी सीढ़ी तक बढ़ गया है। कुछ महीने बाद, उन्होंने देखा कि जल स्तर शून्य के चिह्न से तीन सीढ़ी नीचे पहुँच गया है। अब वे जल स्तर के गिरने को संगत सीढ़ियों से अंकित करके देखना प्रारंभ करने के बारे में सोचने लगे। क्या आप उनकी सहायता कर सकते हैं?



यकायक, रमन को याद आता है कि उसने एक बड़े बाँध पर शून्य से भी नीचे लिखी संख्याओं को देखा था। इमरान इस ओर ध्यान दिलाता है कि शून्य के ऊपर की संख्याओं और शून्य के नीचे की संख्याओं में भेद जानने के लिए कोई न कोई विधि अवश्य होनी चाहिए। तब रमन याद करता है कि शून्य चिह्न के नीचे अंकित संख्याओं के आगे ऋण चिह्न लगा हुआ था। इसलिए, उन्होंने शून्य के नीचे की एक सीढ़ी को – 1 से अंकित किया, शून्य के नीचे की दो सीढ़ियों को – 2 से अंकित किया, इत्यादि।

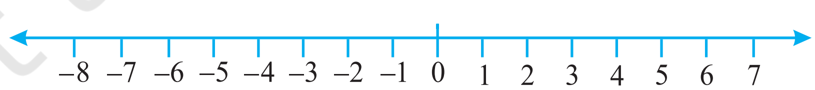
इसलिए, इस समय जल स्तर – 3 है (शून्य से 3 सीढ़ी नीचे)। इसके बाद, जल का प्रयोग होने के कारण, जल स्तर 1 सीढ़ी और नीचे गिर जाता है और – 4 हो जाता है। आप देख सकते हैं कि – 4 < – 3 है।

उपरोक्त उदाहरण को ध्यान में रखते हुए, रिक्त खानों को > और < चिह्नों का प्रयोग करते हुए भरिए :



0	☐	– 1	– 100	☐	– 101
– 50	☐	–70	50	☐	– 51
– 53	☐	– 5	– 7	☐	1

आइए, अब पुनः उन पूर्णांकों को देखें जो एक संख्या रेखा पर निरूपित किए गए हैं।



आकृति 6.3

हम जानते हैं कि 7 > 4 होता है और ऊपर खींची गई संख्या रेखा से हम देखते हैं कि संख्या 7 संख्या 4 के दाईं ओर स्थित है (आकृति 6.3)।

इसी प्रकार, 4 > 0 और संख्या 4 संख्या 0 के दाईं ओर स्थित है। अब चूँकि संख्या 0 संख्या – 3 के दाईं ओर स्थित है इसलिए 0 > – 3 है। पुनः संख्या – 3 संख्या – 8 के दाईं ओर स्थित है। इसलिए – 3 > – 8 है।

इस प्रकार, हम देखते हैं कि संख्या रेखा पर जब हम दाईं ओर चलते हैं, तो संख्या का मान बढ़ता है और जब हम बाईं ओर चलते हैं, तो संख्या का मान घटता है।

अत:, $-3 < -2$, $-2 < -1$, $-1 < 0$, $0 < 1$, $1 < 2$, $2 < 3$ इत्यादि।

अत:, पूर्णांकों के संग्रह को..., –5, –4, – 3, – 2, – 1, 0, 1, 2, 3, 4, 5... लिखा जा सकता है।

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित संख्या युग्म > या < का प्रयोग करते हुए तुलना कीजिए :

$0 \;\square\; -8$; $-1 \;\square\; -15$

$5 \;\square\; -5$; $11 \;\square\; 15$

$0 \;\square\; 6$; $-20 \;\square\; 2$

उपरोक्त प्रश्नों से, रोहिणी निम्नलिखित निष्कर्षों पर पहुँचती है :

(a) प्रत्येक धनात्मक पूर्णांक प्रत्येक ऋणात्मक पूर्णांक से बड़ा होता है।

(b) शून्य प्रत्येक धनात्मक पूर्णांक से छोटा होता है।

(c) शून्य प्रत्येक ऋणात्मक पूर्णांक से बड़ा होता है।

(d) शून्य न तो एक ऋणात्मक पूर्णांक है और न ही एक धनात्मक पूर्णांक है।

(e) कोई संख्या शून्य से दाईं ओर जितनी अधिक दूरी पर होगी उतनी ही बड़ी होगी।

(f) कोई संख्या शून्य से बाईं ओर जितनी अधिक दूरी पर होगी, उतनी ही छोटी होगी।

क्या आप उससे सहमत हैं? उदाहरण दीजिए।

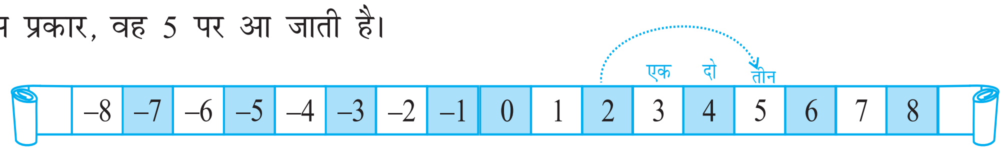
उदाहरण 1 : संख्या रेखा को देखकर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

– 8 और – 2 के बीच में कौन सी पूर्णांक संख्याएँ स्थित हैं? इनमें से कौन-सी संख्या सबसे बड़ी है और कौन-सी संख्या सबसे छोटी है?

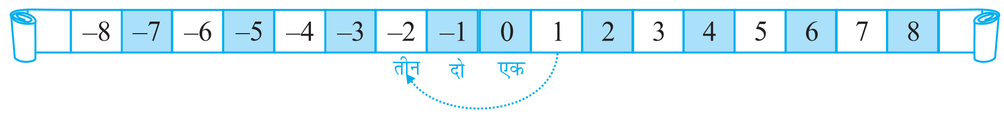
हल : – 8 और – 2 के बीच स्थित संख्याएँ – 7, – 6, – 5, – 4 और – 3 है। इनमें से – 3 सबसे बड़ी संख्या है और – 7 सबसे छोटी संख्या हैं।

यदि मैं शून्य पर नहीं हूँ, तो मेरे चलने पर क्या होता है?

आइए, सलमा और रुचिका द्वारा पहले खेले गए खेल पर विचार करें। मान लीजिए कि रुचिका का टोकन 2 पर है। अगली बार, उसे लाल पासा प्राप्त होता है और उसे फेंकने पर संख्या 3 प्राप्त होती है। इसका अर्थ है कि वह 2 के दाईं ओर 3 स्थान चलेगी। इस प्रकार, वह 5 पर आ जाती है।



दूसरी ओर, यदि सलमा 1 पर थी और थैले में से नीला पासा निकालती है, जिसे फेंकने पर उसे संख्या 3 प्राप्त होती है, तो इसका अर्थ है कि वह 1 के बाईं ओर 3 स्थान चलेगी। इस प्रकार, वह – 2 पर पहुँच जाएगी।



संख्या रेखा को देखकर निम्नलिखित प्रश्न का उत्तर दीजिए :

उदाहरण 2 : (a) – 3 पर एक बटन रखा गया है। – 9 पर पहुँचने के लिए, हम किस दिशा में और कितने कदम चलें?

(b) यदि हम संख्या – 6 के दाईं ओर 4 कदम चलें, तो किस संख्या पर पहुँच जाएँगे?

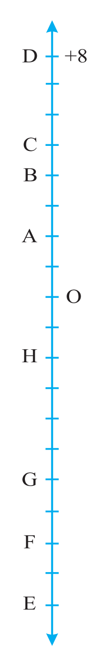
हल : (a) हमें – 3 के बाईं ओर 6 कदम चलने पड़ेंगे।

(b) हम संख्या – 2 पर पहुँच जाएँगे।

(c) यदि हम संख्या –6 के दाईं ओर 4 कदम चलें, तो हम संख्या – 2 पर पहुँच जाएँगे।

प्रश्नावली 6.1

1. निम्नलिखित के विपरीत (opposites) लिखिए :
   (a) भार में वृद्धि (b) 30 किमी उत्तर दिशा
   (c) 80 मी पूर्व (d) ₹ 700 की हानि
   (e) समुद्र तल से 100 मी ऊपर
2. निम्नलिखित में प्रयुक्त हुई संख्याओं को उचित चिह्न लगाकर पूर्णांकों के रूप में लिखिए :
   (a) एक हवाई जहाज़ भूमि से दो हजार मीटर की ऊँचाई पर उड़ रहा है।
   (b) एक पनडुब्बी समुद्र तल से 800 मीटर की गहराई पर चल रही है।
   (c) खाते में ₹ 200 जमा कराना।
   (d) खाते में से ₹ 700 निकालना।
3. निम्नलिखित संख्याओं को संख्या रेखा पर निरूपित कीजिए :
   (a) + 5 (b) – 10 (c) + 8 (d) – 1 (e) – 6
4. संलग्न आकृति में एक ऊर्ध्वाधर संख्या रेखा को दिखाया गया है, जो पूर्णांकों को निरूपित करती है। इस रेखा को देखिए और निम्नलिखित बिंदुओं के स्थान ज्ञात कीजिए :
   (a) यदि बिंदु D पूर्णांक + 8 है, तो – 8 वाला बिंदु कौन सा है?
   (b) क्या G एक ऋणात्मक पूर्णांक है या धनात्मक?
   (c) बिंदु B और E के संगत पूर्णांक लिखिए।
   (d) इस संख्या रेखा पर अंकित बिंदुओं में से किसका मान सबसे कम है?
   (e) सभी बिंदुओं को उनके मानों के घटते हुए क्रम में लिखिए।

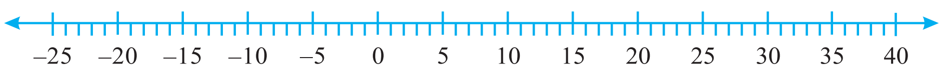


5. वर्ष के विशेष दिन के लिए भारत के पाँच स्थानों पर रहे तापमानों की सूची नीचे दी गई है :

स्थान	**तापमान**	
सियाचिन	0°C से 10°C नीचे	....
शिमला	0°C से 2°C नीचे	....
अहमदाबाद	0°C से 30°C ऊपर	....
दिल्ली	0°C से 20°C ऊपर	....
श्रीनगर	0°C से 5°C नीचे	....

(a) इन स्थानों के तापमानों को पूर्णांकों के रूप में रिक्त स्तंभ में लिखिए।

(b) निम्नलिखित संख्या रेखा डिग्री सेल्सियस (Degree Celsius) में तापमानों को निरूपित करती है :



उपरोक्त स्थानों के नाम संख्या रेखा पर उनके तापमानों के संगत अंकित कीजिए।

(c) कौन-सा स्थान सबसे ठंडा है?

(d) उन स्थानों के नाम लिखिए जिनका तापमान 10°C से ऊपर है।

6. निम्नलिखित युग्मों में, कौन-सी संख्या, संख्या रेखा पर दूसरी संख्या के दाईं ओर स्थित है?

(a) 2, 9 (b) – 3, – 8 (c) 0, – 1

(d) – 11, 10 (e) – 6, 6 (f) 1, – 100

7. नीचे दिए हुए युग्मों के पूर्णांकों के बीच के सभी पूर्णांक लिखिए (बढ़ते हुए क्रम में लिखिए) :

(a) 0 और – 7 (b) – 4 और 4

(c) – 8 और – 15 (d) – 30 और – 23

8. (a) – 20 से बड़े चार ऋणात्मक पूर्णांक लिखिए।

(b) – 10 से छोटे चार पूर्णांक लिखिए।

9. निम्नलिखित कथनों के लिए सत्य अथवा असत्य लिखिए। यदि कथन असत्य है, तो सत्य बनाइए।

(a) संख्या रेखा पर – 8, – 10 के दाईं ओर स्थित है।

(b) संख्या रेखा पर – 100, – 50 के दाईं ओर स्थित है।

(c) सबसे छोटा ऋणात्मक पूर्णांक – 1 है।

(d) – 26 पूर्णांक – 25 से बड़ा है।

10. एक संख्या रेखा खींचिए और निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(a) यदि हम – 2 के दाईं ओर 4 कदम चलें, तो हम किस संख्या पर पहुँच जाएँगे?

(b) यदि हम 1 के बाईं ओर 5 कदम चलें, तो हम किस संख्या पर पहुँच जाएँगे?

(c) यदि हम संख्या रेखा पर – 8 पर हैं, तो – 13 पर पहुँचने के लिए हमें किस दिशा में चलना चाहिए?

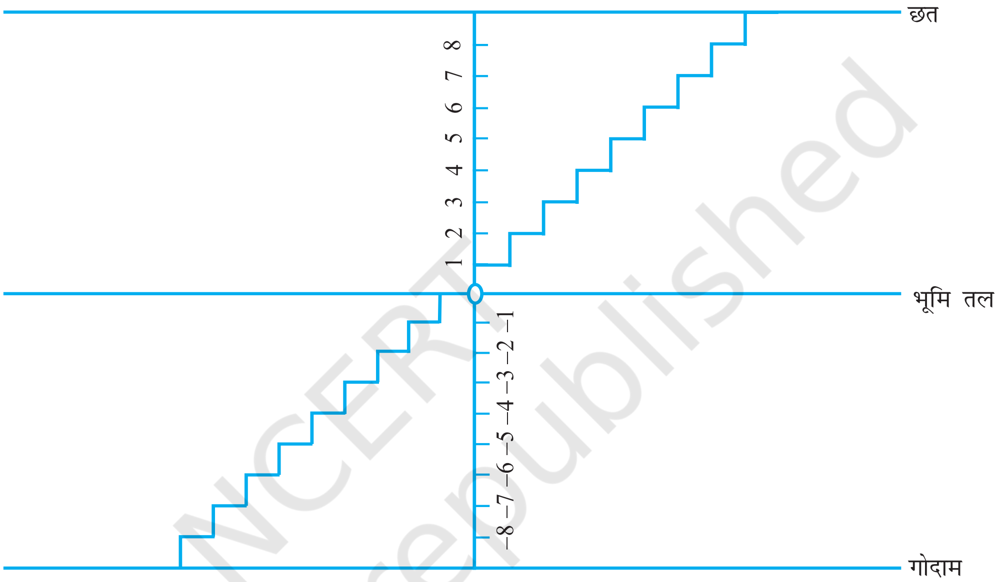
(d) यदि हम संख्या रेखा पर – 6 पर हैं, तो – 1 पर पहुँचने के लिए, हमें किस दिशा में चलना चाहिए?

6.3 पूर्णांकों का योग

इन्हें कीजिए

(ऊपर और नीचे जाना या चलना)

मोहन के घर में, छत पर जाने के लिए और नीचे गोदाम में जाने के लिए सीढ़ियाँ बनी हुई हैं। आइए, छत पर जाने के लिए सीढ़ियों की संख्या को धनात्मक पूर्णांक मानें और नीचे गोदाम में जाने के लिए सीढ़ियों की संख्या को ऋणात्मक पूर्णांक मानें तथा भूमि तल से निरूपित संख्या को 0 मानें।



निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए और अपने उत्तर को पूर्णांकों के रूप में लिखिए :

(a) भूमि तल से 6 सीढ़ी ऊपर चलिए।

(b) भूमि तल से 4 सीढ़ी नीचे चलिए।

(c) भूमि तल से 5 सीढ़ी ऊपर चलिए और फिर वहाँ से 3 सीढ़ी और ऊपर चलिए।

(d) भूमि तल से 6 सीढ़ी नीचे चलिए और फिर वहाँ से 2 सीढ़ी और नीचे चलिए।

(e) भूमि तल से 5 सीढ़ी नीचे चलिए और फिर वहाँ से 12 सीढ़ी ऊपर चलिए।

(f) भूमि तल से 8 सीढ़ी नीचे चलिए और फिर वहाँ से 5 सीढ़ी ऊपर चलिए।

(g) भूमि तल से 7 सीढ़ी ऊपर चलिए और फिर वहाँ से 10 सीढ़ी नीचे चलिए।

अमीना ने इन्हें नीचे दिखाए अनुसार लिखा :

(a) $+ 6$ (b) $- 4$

(c) $(+ 5) +(+ 3) = + 8$ (d) $(- 6) + (-2) = - 4$

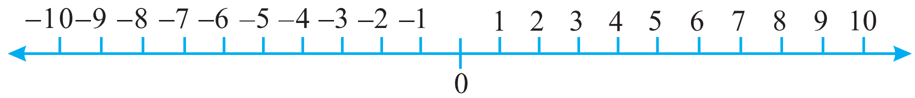
(e) $(- 5) + (+ 12) = + 7$ (f) $(- 8) + (+5) = - 3$

(g) $(+7) + (-10) = 17$

उसने कुछ गलतियाँ की हैं। क्या आप उसके उत्तरों की जाँच कर सकते हैं और गलतियों को सही कर सकते हैं?

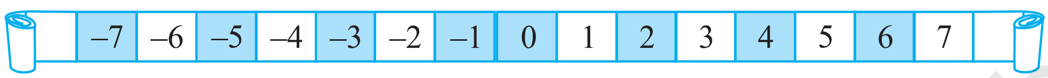
प्रयास कीजिए

भूमि पर क्षैतिज संख्या रेखा के रूप में एक आकृति खींचिए, जैसा कि नीचे दर्शाया गया है। उपरोक्त उदाहरण में दिए प्रश्नों की ही तरह कुछ प्रश्न बनाइए और फिर उन्हें अपने मित्रों को हल करने के लिए कहिए।



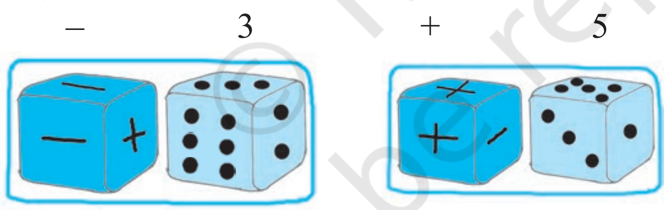
एक खेल

एक संख्या पट्टी लीजिए जिस पर + 25 से – 25 तक के पूर्णांक लिखे हों।



दो पासे लीजिए जिनमें से एक पर 1 से 6 तक की संख्याएँ अंकित हों और दूसरे पर तीन '+' चिह्न और तीन '–' चिह्न अंकित हों।

खिलाड़ी भिन्न-भिन्न रंगों के बटन [(या प्लास्टिक के काउंटर (Counter)] संख्या पट्टी पर 0 स्थान पर रखेंगे। दोनों पासों को प्रत्येक बार फेंकने के बाद, खिलाड़ी देखेगा कि उसने उन पासों पर क्या प्राप्त किया है। यदि पहले पासे पर 3 और दूसरे पासे पर – आता है, तो उसे – 3 प्राप्त हुआ है। यदि पहला पासा 5 दर्शाता है और दूसरा पासा '+' दर्शाता है, तो उसे + 5 प्राप्त हुआ है।

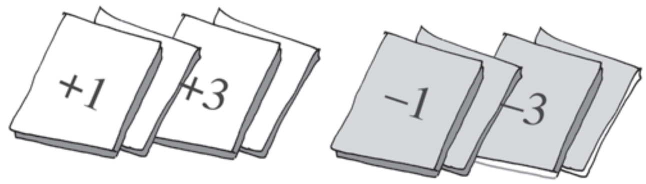


जब किसी खिलाड़ी को + चिह्न प्राप्त होता है, तो वह आगे की दिशा में (+ 25 की ओर) चलता है और जब किसी खिलाड़ी को – चिह्न प्राप्त होता है, तो वह पीछे की ओर (– 25 की ओर) चलता है।

प्रत्येक खिलाड़ी दोनों पासों को एक साथ फेंकता है। वह खिलाड़ी जिसका बटन (या काउंटर) – 25 को छू लेता है, वह खेल से बाहर हो जाता है और वह खिलाड़ी जिसका बटन (या काउंटर) + 25 को छू लेता है, वह खेल में जीत जाता है।

आप इसी खेल को ऐसे 12 कार्ड लेकर जिन पर + 1, + 2, + 3, + 4, + 5 और + 6 तथा – 1, – 2, – 3, – 4, – 5 और – 6 अंकित हो, भी खेल सकते हैं। कार्ड निकालने के प्रत्येक प्रयत्न के बाद उन्हें फेंट लीजिए।

कमला, रेशमा और मीनू इस खेल को खेल रही हैं :

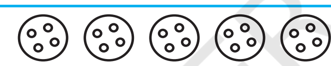
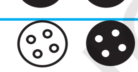


कमला ने तीन लगातार प्रयत्नों में + 3, + 2, + 6 प्राप्त किया। उसने अपना काउंटर + 1 1 पर रख दिया। रेशमा ने – 5, + 3 और + 1 प्राप्त किया। उसने अपना काउंटर – 1 पर रख दिया। मीनू ने तीन लगातार प्रयत्नों में + 4, – 3 और – 2 प्राप्त किया। उसका काउंटर किस स्थान पर रखा जाएगा? –1 पर या + 1 पर?

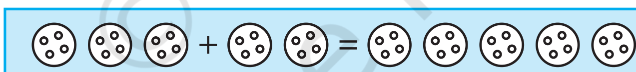
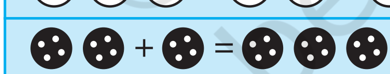
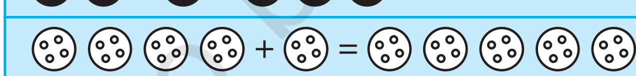
इन्हें कीजिए

दो भिन्न-भिन्न रंगों के सफ़ेद और काले रंगों के दो बटन लीजिए। आइए, एक सफ़ेद बटन को (+ 1) और एक काले बटन को (– 1) से व्यक्त करें। एक सफ़ेद बटन (+ 1) और एक काले बटन (– 1) का युग्म शून्य व्यक्त करेगा, अर्थात् [1 + (– 1) = 0]

निम्नलिखित सारणी में, पूर्णांकों को रंगीन के बटनों की सहायता से दिखाया गया है :

रंगीन बटन	पूर्णांक
	= 5
	= – 3
	= 0

आइए, इन रंगीन बटनों की सहायता से पूर्णांकों को जोड़ें। निम्नलिखित सारणी को देखिए और उसे पूरा कीजिए :

	*(+ 3) + (+ 2) = +5*
	*(– 2) + (– 1) = –3*
	....
 = ...	....

जब आप दो धनात्मक पूर्णांक प्राप्त करें, तो उन्हें जोड़िए। जैसे (+3) + (+2) = +5 [= 3 + 2] है। जब आप दो ऋणात्मक पूर्णांक प्राप्त करें, तो भी उन्हें जोड़िए, परंतु उत्तर में ऋण चिह्न (–) लगा दें। जैसे (–2) + (–1) = –3 है।

प्रयास कीजिए

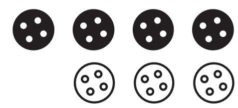
निम्नलिखित का योग ज्ञात कीजिए :

(a) (– 11) + (– 12) (b) (+ 10) + (+ 4)

(c) (– 32) + (– 25) (d) (+ 23) + (+ 40)

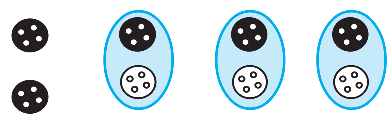
अब इन्हीं बटनों की सहायता से एक धनात्मक पूर्णांक और एक ऋणात्मक पूर्णांक को जोड़िए। बटनों को युग्मों में हटाइए, अर्थात् 1 सफ़ेद बटन और 1 काले बटन को साथ लेकर हटाइए [चूँकि (+ 1) + (– 1) = 0]। शेष बटनों की जाँच कीजिए।

(a) (– 4) + (+ 3)

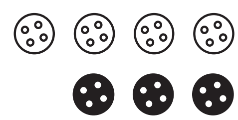


= (– 1) + (– 3) + (+ 3)

= (– 1) + 0 = – 1

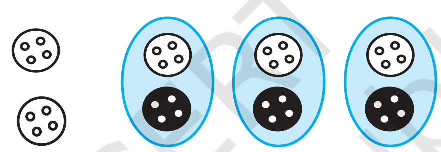


(b) (+ 4) + (– 3)



= (+ 1) + (+ 3) + (– 3)

= (+ 1) + 0 = + 1



आप देख सकते हैं कि 4 – 3 का उत्तर 1 है और – 4 + 3 = – 1 है।

अतः, जब आपको एक धनात्मक पूर्णांक और एक ऋणात्मक पूर्णांक को जोड़ना हो, तो आपको इन पूर्णांकों के संख्यात्मक मानों (numerical values) को देखकर, (दोनों संख्याओं में बड़ी संख्या जाँचने के लिए उनके साथ लगे + या – चिह्नों को छोड़ दीजिए)। सहायता के लिए कुछ और उदाहरण नीचे दिए जा रहे हैं :

(c) (+ 5) + (– 8) = (+ 5) + (– 5) + (– 3) = 0 + (– 3) = (– 3)

(d) (+ 6) + (– 4) = (+ 2) + (+ 4) + (– 4) = (+ 2) + 0 = + 2

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित में प्रत्येक का योग ज्ञात कीजिए :

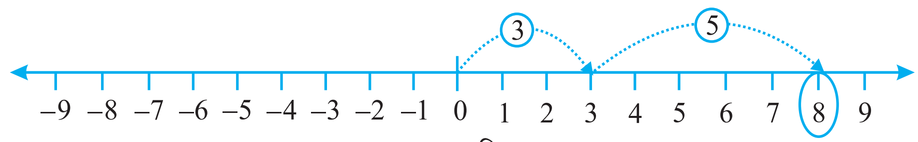
(a) (– 7) + (+ 8) (b) (– 9) + (+13)

(c) (+ 7) + (– 10) (d) (+12) + (– 7)

6.3.1 संख्या रेखा पर पूर्णांकों का जोड़ना (योग)

भिन्न-भिन्न रंगों के बटनों का प्रयोग करके पूर्णांकों को जोड़ना सदैव सरल नहीं होता है। क्या हमें जोड़ने के लिए, संख्या रेखा का प्रयोग करना चाहिए?

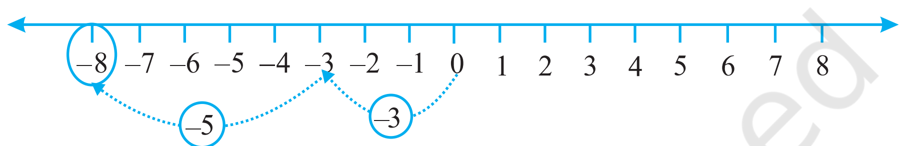
(i) आइए, संख्या रेखा पर 3 और 5 को जोड़ें।



आकृति 6.4

संख्या रेखा पर, पहले हम 0 से प्रारंभ करके 0 के दाईं ओर 3 कदम चलते हैं और 3 पर पहुँचते हैं। फिर हम 3 के दाईं ओर 5 कदम चलते हैं और 8 पर पहुँचते हैं (आकृति 6.4)। इस प्रकार, हमें $3 + 5 = 8$ प्राप्त होता है।

(ii) आइए, संख्या रेखा पर – 3 और – 5 को जोड़ें



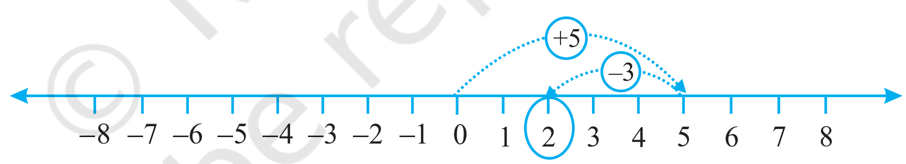
आकृति 6.5

संख्या रेखा पर, पहले हम 0 से प्रारंभ करके 0 के बाईं ओर 3 कदम चलते हैं और – 3 पर पहुँचते हैं। फिर हम – 3 के बाईं ओर 5 कदम चलते हैं और – 8 पर पहुँचते हैं (आकृति 6.5)।

इस प्रकार, हमें $(-3) + (-5) = -8$ प्राप्त होता है।

हम देखते हैं कि जब हम किन्हीं दो धनात्मक पूर्णांकों को जोड़ते हैं, तो योग एक धनात्मक पूर्णांक होता है। जब हम दो ऋणात्मक पूर्णांकों को जोड़ते हैं, तो योग एक ऋणात्मक पूर्णांक होता है।

(iii) मान लीजिए हम संख्या रेखा पर (+ 5) और (– 3) का योग ज्ञात करना चाहते हैं।

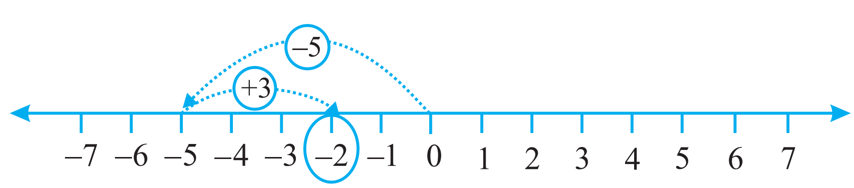


आकृति 6.6

पहले हम, संख्या रेखा पर 0 से प्रारंभ करके 0 के दाईं ओर 5 कदम चलते हैं और 5 पर पहुँचते हैं। फिर हम 5 के बाईं ओर 3 कदम चलते हैं और 2 पर पहुँचते हैं। (आकृति 6.6)

इस प्रकार, $(+5) + (-3) = 2$ है।

(iv) इसी प्रकार, आइए संख्या रेखा पर (– 5) और (+ 3) का योग ज्ञात करें



आकृति 6.7

पहले हम 0 से प्रारंभ करके, 0 के बाईं ओर 5 कदम चलते हैं और – 5 पर पहुँचते हैं। फिर हम – 5 के दाईं ओर 3 कदम चलते हैं और – 2 पर पहुँचते हैं।

इस प्रकार, (– 5) + (+3) = – 2 है। (आकृति 6.7)

यदि किसी पूर्णांक में एक धनात्मक पूर्णांक जोड़ा जाता है, तो परिणामी पूर्णांक दिए हुए पूर्णांक से बड़ा हो जाता है। यदि किसी पूर्णांक में एक ऋणात्मक पूर्णांक जोड़ा जाता है, तो परिणामी पूर्णांक दिए हुए पूर्णांक से छोटा हो जाता है।

प्रयास कीजिए

1. संख्या रेखा का प्रयोग करते हुए, निम्नलिखित योग ज्ञात कीजिए :

(a) (– 2) + 6 (b) (– 6) + 2

ऐसे दो और प्रश्न बनाइए तथा संख्या रेखा की सहायता से उन्हें हल कीजिए।

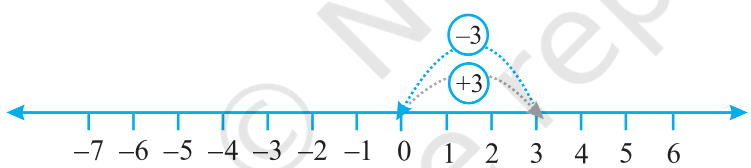
2. संख्या रेखा का प्रयोग किए बिना निम्नलिखित का योग ज्ञात कीजिए :

(a) (+ 7) + (– 11) (b) (– 13) + (+ 10)

(c) (– 7) + (+ 9) (d) (+ 10) + (– 5)

ऐसे पाँच प्रश्न और बनाइए तथा उन्हें हल कीजिए।

आइए 3 और – 3 को जोड़ें। पहले हम 0 से प्रारंभ करके, 0 के दाईं ओर 3 कदम चलकर 3 पर पहुँचते हैं। फिर हम 3 के बाईं ओर 3 कदम चलते हैं। अंत में हम कहाँ पहुँचते हैं?



आकृति 6.8

आकृति 6.8 से, हम देख सकते हैं कि हम 0 पर पहुँच गए हैं। अत: 3 + (– 3) = 0 है। इसी प्रकार, यदि हम 2 और – 2 को जोड़े, तो हमें 0 प्राप्त होगा। इस प्रकार, संख्या युग्मों 3 और – 3, 2 और – 2, इत्यादि संख्याओं को जोड़ने पर 0 प्राप्त होता है। ऐसी संख्याएँ एक दूसरे के **योज्य प्रतिलोम (additive inverse)** कहलाती हैं।

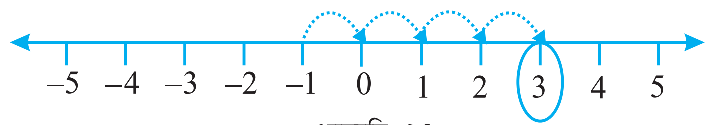
6 का योज्य प्रतिलोम क्या है? – 7 का योज्य प्रतिलोम क्या है?

उदाहरण 3 : संख्या रेखा का प्रयोग करते हुए, वह पूर्णांक लिखिए, जो

(a) –1 से 4 अधिक है।

(b) 3 से 5 कम है।

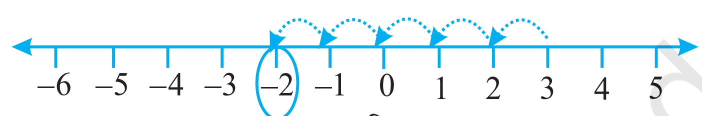
हल : (a) हम वह पूर्णांक ज्ञात करना चाहते हैं जो –1 से 4 अधिक है। इसलिए, हम –1 से प्रारंभ करते हैं और –1 के दाईं ओर 4 कदम चलते हैं। इससे हम 3 पर पहुँच जाते हैं, जैसा कि नीचे आकृति 6.9 में दर्शाया गया है।



आकृति 6.9

अतः, –1 से 4 अधिक पूर्णांक 3 है।

(b) हम वह पूर्णांक ज्ञात करना चाहते हैं, जो 3 से 5 कम है। इसलिए, हम 3 से प्रारंभ करते हैं और 3 के बाईं ओर 5 कदम चलते हैं। इस प्रकार, हम –2 पर पहुँच जाते हैं, जैसा कि आकृति 6.10 में नीचे दिखाया गया है।



आकृति 6.10

अतः, 3 से 5 कम पूर्णांक –2 है।

उदाहरण 4 : योग (– 9) + (+ 4) + (– 6) + (+ 3) ज्ञात कीजिए।

हल : हम संख्याओं को इस प्रकार पुनर्व्यवस्थित कर सकते हैं कि धनात्मक पूर्णांक एक समूह में हों और ऋणात्मक पूर्णांक एक समूह में हों। इस प्रकार

$(-9) + (+4) + (-6) + (+3)$

$= (-9) + (-6) + (+4) + (+3) = (-15) + (+7)$

$= -8 + (-7) + (+7) = -8 + 0 = -8$

उदाहरण 5 : (30) + (– 23) + (– 63) + (+ 55) का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $(30) + (+55) + (-23) + (-63)$

$= 85 + (-86) = -1$

उदाहरण 6 : (– 10), (92), (84) और (– 15) का योग ज्ञात कीजिए।

हल : $(-10) + (92) + (84) + (-15)$

$= (-10) + (-15) + 92 + 84$

$= (-25) + 176 = 151$

प्रश्नावली 6.2

1. संख्या रेखा का प्रयोग करते हुए, वह पूर्णांक ज्ञात कीजिए जो
   (a) 5 से 3 अधिक है (b) –5 से 5 अधिक है
   (c) 2 से 6 कम है (d) –2 से 3 कम है
2. संख्या रेखा का प्रयोग करते हुए निम्नलिखित योग ज्ञात कीजिए :
   (a) $9 + (-6)$ (b) $5 + (-11)$
   (c) $(-1) + (-7)$ (d) $(-5) + 10$
   (e) $(-1) + (-2) + (-3)$ (f) $(-2) + 8 + (-4)$

3. संख्या रेखा का प्रयोग किए बिना, निम्नलिखित योग ज्ञात कीजिए :
   (a) $11 + (-7)$ (b) $(-13) + (+18)$
   (c) $(-10) + (+19)$ (d) $(-250) + (+150)$
   (e) $(-380) + (-270)$ (f) $(-217) + (-100)$
4. निम्नलिखित का योग ज्ञात कीजिए :
   (a) 137 और – 354 (b) – 52 और 52
   (c) – 312, 39 और 192 (d) – 50, – 200 और 300
5. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए :
   (a) $(-7) + (-9) + 4 + 16$
   (b) $(37) + (-2) + (-65) + (-8)$

6.4 संख्या रेखा की सहायता से पूर्णांकों का व्यवकलन (घटाना)

हम संख्या रेखा पर दो धनात्मक पूर्णांकों को जोड़ चुके हैं। उदाहरणार्थ, $6 + 2$ पर विचार कीजिए। हम 6 से प्रारम्भ करते हैं और दाईं ओर 2 कदम चलते हैं। हम 8 पर पहुँचते हैं। अत:, $6 + 2 = 8$ है (आकृति 6.11)।

आकृति 6.11

हमने यह भी देखा था कि संख्या रेखा पर 6 और (–2) को जोड़ने के लिए, हम 6 से प्रारंभ कर सकते हैं तथा फिर उसके बाईं ओर 2 कदम चल सकते हैं। हम 4 पर पहुँचते हैं। अत:, हमें $6 + (-2) = 4$ प्राप्त होता है (आकृति 6.12)।

आकृति 6.12

इस प्रकार, हम पाते हैं कि एक धनात्मक पूर्णांक जोड़ने के लिए, हम संख्या पर दाईं ओर को चलते हैं तथा एक ऋणात्मक पूर्णांक को जोड़ने के लिए हम संख्या रेखा पर बाईं ओर को चलते हैं।

पूर्ण संख्याओं के लिए, संख्या रेखा का प्रयोग करते समय भी हमने देखा था कि 6 में से 2 घटाने के लिए हम 2 कदम बाईं ओर को चले थे (आकृति 6.13)।

आकृति 6.13

अर्थात् $6 - 2 = 4$ है।

हम $6 - (-2)$ के लिए क्या करेंगे? क्या हम संख्या रेखा पर बाईं ओर चलेंगे या दाईं ओर चलेंगे?

यदि हम बाईं ओर चलें, तो हम 4 पर पहुँचेंगे। तब, हमें कहना पड़ेगा कि $6 - (-2) = 4$ है। यह सही नहीं है, क्योंकि हमें ज्ञात है कि $6 - 2 = 4$ होता है तथा $6 - 2 \neq 6 - (-2)$ है।

अतः, हमें दाईं ओर चलना होगा (आकृति 6.14)।

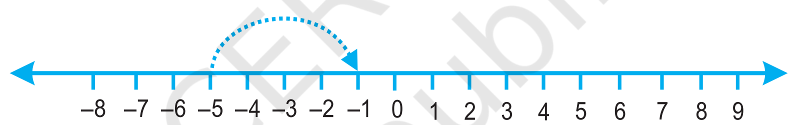
आकृति 6.14

इसका अर्थ यह भी है कि जब हम एक ऋणात्मक पूर्णांक घटाते हैं, तो हमें एक बड़ा पूर्णांक प्राप्त होता है। इस पर एक दूसरी प्रकार से विचार कीजिए। हम जानते हैं कि (–2) का योज्य प्रतिलोम 2 है। अतः, इससे ऐसा प्रतीत होता है कि 6 में –2 के योज्य प्रतिलोम जोड़ने का अर्थ वही है, जो 6 में से (–2) को घटाने का है।

हम लिखते हैं : $6 - (-2) = 6 + 2$

आइए, अब $-5 - (-4)$ का मान संख्या रेखा की सहायता से ज्ञात करें। हम कह सकते हैं कि यह $-5 + 4$ के बराबर है, क्योंकि –4 का योज्य प्रतिलोम 4 है।

अतः, हम संख्या रेखा पर –5 से प्रारंभ करके 4 कदम दाईं ओर को चलते हैं (आकृति 6.15)। हम –1 पर पहुँचते हैं।

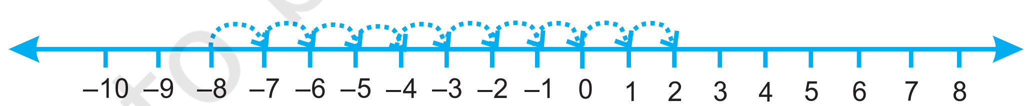


आकृति 6.15

अर्थात्, $-5 + 4 = -1$ है। इस प्रकार, $-5 - (-4) = -1$ होगा।

उदाहरण 7 : संख्या रेखा की सहायता से $(-8) - (-10)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : चूँकि – 10 का योज्य प्रतिलोम + 10 है, इसलिए $(-8) - (-10) = -8 + 10$ है।



आकृति 6.16

संख्या रेखा पर, हम – 8 से 10 कदम दाईं ओर को चलेंगे।

हम 2 पर पहुँचते हैं (आकृति 6.16)। अतः, $-8 - (-10) = 2$ है।

इस प्रकार, एक पूर्णांक में से एक अन्य पूर्णांक घटाने के लिए, यह पर्याप्त है कि घटाए जाने वाले पूर्णांक के योज्य प्रतिलोम को दूसरे पूर्णांक में जोड़ लिया जाए।

उदाहरण 8 : (– 10) में से (– 4) को घटाइए।

हल : $(-10) - (-4) = (-10) +$ (– 4 का योज्य प्रतिलोम)

$= -10 + 4 = -6$

उदाहरण 9 : (-3) में से $(+3)$ को घटाइए।

हल : $(-3) - (+3) = (-3) + (+3$ का योज्य प्रतिलोम$)$

$$= (-3) + (-3) = -6$$

प्रश्नावली 6.3

1. घटाइए :

   (a) $35 - (20)$ (b) $72 - (90)$

   (c) $(-15) - (-18)$ (d) $(-20) - (13)$

   (e) $23 - (-12)$ (f) $(-32) - (-40)$

2. रिक्त स्थानों को $>$, $<$ या $=$ से भरिए :

   (a) $(-3) + (-6)$ ______ $(-3) - (-6)$

   (b) $(-21) - (-10)$ ______ $(-31) + (-11)$

   (c) $45 - (-11)$ ______ $57 + (-4)$

   (d) $(-25) - (-42)$ ______ $(-42) - (-25)$

3. रिक्त स्थानों को भरिए :

   (a) $(-8) +$ ______ $= 0$ (b) $13 +$ ______ $= 0$

   (c) $12 + (-12) =$ ______ (d) $(-4) +$ ______ $= -12$

   (e) ______ $- 15 = -10$

4. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए :

   (a) $(-7) - 8 - (-25)$ (b) $(-13) + 32 - 8 - 1$

   (c) $(-7) + (-8) + (-90)$ (d) $50 - (-40) - (-2)$

हमने क्या चर्चा की?

1. हमने देखा कि कई बार हमें ऋणात्मक चिह्नों वाली संख्याओं की आवश्यकता पड़ती है। यह तब होता है जब हम संख्या रेखा पर शून्य के नीचे जाएँ। ये ऋणात्मक संख्याएँ कहलाती हैं। इनका प्रयोग किए जाने वाले कुछ उदाहरण हैं तापमान, झील या नदी में पानी का स्तर, टैंक में तेल का स्तर इत्यादि। इनका प्रयोग उधार खाते या लेनदारी में भी होता है।

2. $\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ जैसी संख्याओं के संग्रह को पूर्णांक कहते हैं। अत: $-1, -2, -3, -4, \ldots$ ऋणात्मक संख्याएँ हैं जिन्हें ऋणात्मक पूर्णांक कहा जाता है और $1, 2, 3, 4, \ldots$ धनात्मक संख्याएँ हैं जिन्हें धनात्मक पूर्णांक कहते हैं।

3. हमने यह भी देखा कि किसी दी हुई संख्या का एक अधिक उसकी परवर्ती संख्या होती है और एक कम लेने पर पूर्ववर्ती संख्या प्राप्त होती है।

4. हमने देखा

   (a) जब समान चिह्न हों तो, जोड़िए और वही चिह्न लगाइए।

(i) जब-जब दो धनात्मक पूर्णांकों को जोड़ा जाता है, हमें एक धनात्मक पूर्णांक मिलता है [जैसे, $(+3) + (+2) = +5$]

(ii) जब-जब दो ऋणात्मक पूर्णांकों को जोड़ा जाता है, हमें एक ऋणात्मक पूर्णांक मिलता है [जैसे, $(-2) + (-1) = -3$]

(b) जब हमारे पास अलग-अलग चिह्न हों तो घटाकर बड़ी संख्या का चिह्न लगा देते हैं।

(c) जब एक धनात्मक और एक ऋणात्मक पूर्णांकों को जोड़ा जाता है तो हम उन्हें पूर्ण संख्याओं की तरह घटाते हैं और बड़े पूर्णांक का चिह्न लगा देते हैं। बड़ी संख्या का अभिप्राय उस संख्या से है जिसका संख्यात्मक मान अधिक हो [जैसे, $(+4) + (-3) = +1$ और $(-4) + (+3) = -1$]

5. हमने दिखाया कि किस प्रकार पूर्णांकों का योग तथा व्यवकलन संख्या-रेखा पर दिखाया जा सकता है।

भिन्न

अध्याय 7

0651CH07

7.1 भूमिका

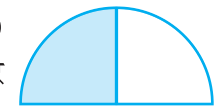
सुभाष ने IV और V कक्षा में भिन्नों (Fractions) के बारे में पढ़ा था। परंतु वह इस बारे में बहुत विश्वस्त नहीं था और इसीलिए जब भी उसे अवसर मिलता वह भिन्नों का प्रयोग करने का प्रयत्न करता था। एक अवसर तब आया जब वह घर से अपना लंच (lunch) लाना भूल गया। उसकी एक मित्र फरीदा ने उसे अपने साथ लंच करने के लिए आमंत्रित किया। उसके लंच बॉक्स में पाँच पूरियाँ थीं। इसलिए, सुभाष और फरीदा दोनों ने दो-दो पूरियाँ ले लीं। फिर फरीदा ने पाँचवीं पूरी के दो बराबर भाग (आधे भाग) किए और उनमें से एक-आधा (one half) भाग सुभाष को दे दिया और दूसरा आधा भाग स्वयं ले लिया। इस प्रकार, सुभाष और फरीदा दोनों ने दो पूर्ण पूरियाँ और एक आधी पूरी ली।

2 पूरियाँ + आधी पूरी-सुभाष 2 पूरियाँ + आधी पूरी-फरीदा

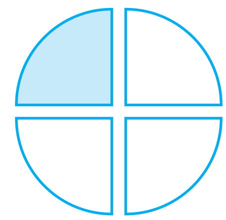
आपको अपने दैनिक जीवन में, किन परिस्थितियों में भिन्नों का सामना करना पड़ता है?

सुभाष जानता था कि एक-आधे (one-half) को $\frac{1}{2}$ लिखा जाता है। पूरी खाते समय, उसने अपनी आधी पूरी को पुनः दो बराबर भागों में बाँट लिया और फरीदा से पूछा

कि यह टुकड़ा पूर्ण पूरी का कौन सा भाग अथवा भिन्न है। (आकृति 7.1) बिना कोई उत्तर दिए, फरीदा ने भी अपनी आधी पूरी को दो बराबर भागों में बाँट लिया और सुभाष के भागों के साथ रख दिया। उसने कहा कि इन चारों बराबर भागों से मिलकर एक पूर्ण (whole) बनता है। (आकृति 7.2) अत:, प्रत्येक बराबर भाग एक पूर्ण पूरी का एक-चौथाई (One-fourth) है और ये चारों भाग मिलकर $\frac{4}{4}$ या 1 पूर्ण पूरी होगा।

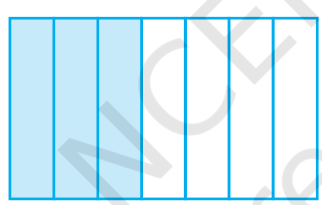


आकृति 7.1

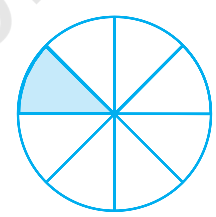


आकृति 7.2

खाते समय उन्होंने यह चर्चा की कि वे भिन्नों के बारे में पहले क्या पढ़ चुके हैं। 4 बराबर भागों में से 3 भाग $\frac{3}{4}$ दर्शाते हैं। इसी प्रकार, जब हम एक पूर्ण को 7 बराबर भागों में विभाजित (बाँट) कर उसमें से 3 भाग लें, तो $\frac{3}{7}$ प्राप्त होता है (आकृति 7.3)। $\frac{1}{8}$ के लिए, हम एक पूर्ण को 8 बराबर भागों में बाँटते हैं और इनमें से एक भाग ले लेते हैं। (आकृति 7.4)



आकृति 7.3



आकृति 7.4

फरीदा ने कहा कि हम पढ़ चुके हैं कि **भिन्न वह संख्या है जो एक पूर्ण (whole) का भाग निरूपित करती है। यह पूर्ण एक अकेली वस्तु हो सकती है अथवा वस्तुओं का एक समूह (group) भी हो सकता है।** सुभाष ने देखा कि **[ये सभी भाग बराबर होने चाहिए।]**

7.2 एक भिन्न

आइए, उपरोक्त चर्चा पर पुनर्विचार करें।

एक भिन्न का अर्थ है एक समूह का अथवा एक क्षेत्र (region) का एक भाग।

$\frac{5}{12}$ एक भिन्न है। हम इसे 'पाँच-बारहांश' (Five-twelveth) पढ़ते हैं।

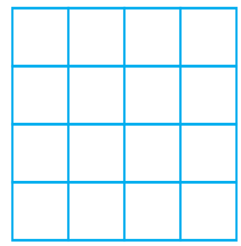
"12" क्या दर्शाता है? यह बराबर भागों की वह संख्या है जिनमें एक पूर्ण को बाँटा गया है।

"5" क्या दर्शाता है? यह बराबर भागों की वह संख्या है जो सभी 12 भागों में से लिए गए हैं।

यहाँ 5 **अंश (numerator)** और 12 **हर (denominator)** कहलाता है।

भिन्न $\frac{3}{7}$ का अंश बताइए। $\frac{4}{15}$ का हर क्या है?

यह खेल खेलिए :



आप अपने मित्रों के साथ इस खेल को खेल सकते हैं।

यहाँ दर्शाई हुई जाली या ग्रिड (grid) की कई प्रतियाँ लीजिए।

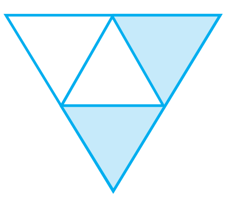
कोई भिन्न, मान लीजिए, $\frac{1}{2}$ पर विचार कीजिए।

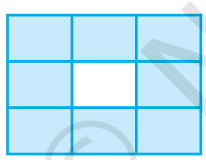
आप में से प्रत्येक विद्यार्थी ग्रिड का $\frac{1}{2}$ भाग छायांकित करे।

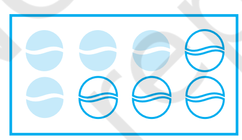
प्रतिबंध यह है कि आप में से किसी का भी छायांकित भाग समान नहीं होना चाहिए।

प्रश्नावली 7.1

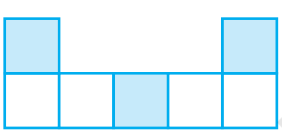
1. छायांकित भाग को निरूपित करने वाली भिन्न लिखिए :

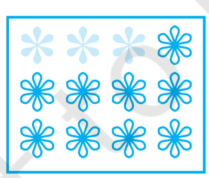

(i)

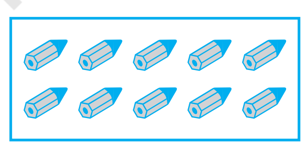

(ii)

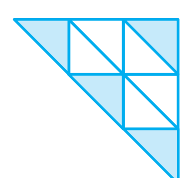

(iii)


(iv)

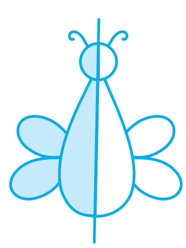

(v)


(vi)


(vii)

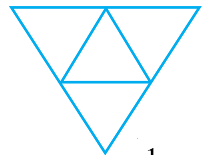

(viii)

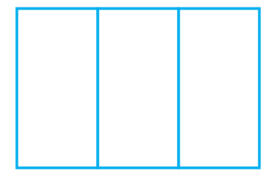

(ix)

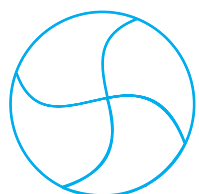

(x)

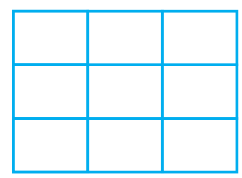
2. दी हुई भिन्न के अनुसार, भागों को छायांकित कीजिए :


(i) $\frac{1}{6}$


(ii) $\frac{1}{4}$

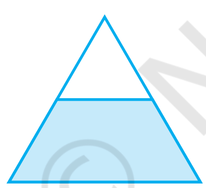

(iii) $\frac{1}{3}$


(iv) $\frac{3}{4}$


(v) $\frac{4}{9}$

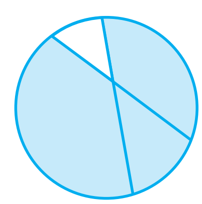
3. निम्न में, यदि कोई गलती है, तो पहचानिए :

यह $\frac{1}{2}$ है



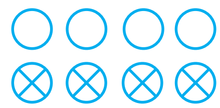
यह $\frac{1}{4}$ है

यह $\frac{3}{4}$ है



4. 8 घंटे एक दिन की कौन सी भिन्न है?
5. 40 मिनट एक घंटे की कौन सी भिन्न है?
6. आर्या, अभिमन्यु और विवेक एक साथ, बाँटकर खाना खाते हैं। आर्या दो सैंडविच लेकर आता है–एक सब्ज़ी वाला और दूसरा जैम (Jam) वाला। अन्य दो लड़के अपना खाना लाना भूल गए। आर्या अपने सैंडविचों को उन दोनों के साथ बाँटकर खाने को तैयार हो जाता है, ताकि प्रत्येक व्यक्ति को प्रत्येक सैंडविच में से बराबर भाग मिले।
   (a) आर्या अपनी सैंडविचों को किस प्रकार बाँटे कि प्रत्येक को बराबर भाग मिले?
   (b) प्रत्येक लड़के को एक सैंडविच का कौन-सा भाग मिलेगा?
7. कंचन ड्रेसों (dresses) को रंगती है। उसे 30 ड्रेस रंगनी थीं। उसने अब तक 20 ड्रेस रंग ली हैं। उसने ड्रेसों की कितनी भिन्न रंग ली हैं?
8. 2 से 12 तक की प्राकृत संख्याएँ लिखिए। अभाज्य संख्याएँ इनकी कौन-सी भिन्न हैं?
9. 102 से 113 तक की प्राकृत संख्याएँ लिखिए। अभाज्य संख्याएँ इनकी कौन-सी भिन्न हैं?

10. इन वृत्तों की कौन-सी भिन्नों में X है?

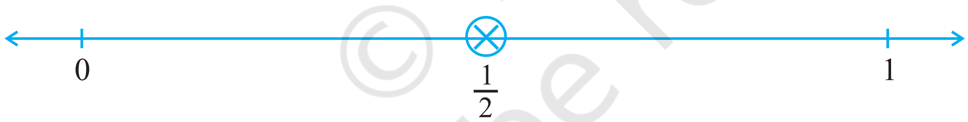


11. क्रिस्तिन अपने जन्म दिन पर एक सीडी प्लेयर (CD Player) प्राप्त करती है। वह तब से सीडी इकट्ठी करना प्रारंभ कर देती है। वह 3 सीडी खरीदती है और 5 सीडी उपहार के रूप में प्राप्त करती है। उसके द्वारा खरीदी गई सीडी की संख्या, कुल सीडी की संख्या की कौन-सी भिन्न है?

7.3 संख्या रेखा पर भिन्न

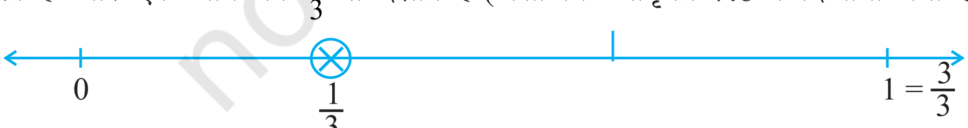
आप एक संख्या रेखा पर पूर्ण संख्याओं 0,1,2... को दर्शाना सीख चुके हैं। क्या आप भिन्नों को संख्या रेखा पर दर्शा सकते हैं? आइए, एक संख्या रेखा खींचें। क्या हम इस पर $\frac{1}{2}$ को दर्शा सकते हैं? हम जानते हैं कि $\frac{1}{2}$ संख्या 0 से बड़ी है और 1 से छोटी है। इसलिए इसे 0 से 1 के बीच में स्थित होना चाहिए।

चूँकि हमें $\frac{1}{2}$ को दर्शाना है, इसलिए हम 0 और 1 के बीच की दूरी को दो बराबर भागों में विभाजित करते हैं और एक भाग को $\frac{1}{2}$ से दर्शाते हैं (जैसा कि आकृति 7.5 में दिखाया गया है)।



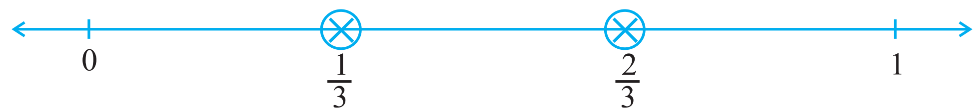
आकृति 7.5

संख्या रेखा पर $\frac{1}{3}$ को दर्शाने के लिए, 0 और 1 के बीच की दूरी को कितने बराबर भागों में विभाजित करना चाहिए? हम 0 और 1 के बीच की दूरी को 3 बराबर भागों में विभाजित करते हैं और एक भाग को $\frac{1}{3}$ से दर्शाते हैं (जैसा कि आकृति 7.6 में दिखाया गया है।)।



आकृति 7.6

क्या हम इस संख्या रेखा पर $\frac{2}{3}$ को दर्शा सकते हैं? $\frac{2}{3}$ का अर्थ है 3 बराबर भागों में से 2 भाग, जैसा कि आकृति 7.7 में दिखाया गया है।



आकृति 7.7

इसी प्रकार, आप $\frac{0}{3}$ और $\frac{3}{3}$ संख्या रेखा पर किस प्रकार दर्शाएँगे?

$\frac{0}{3}$ बिंदु शून्य है और चूँकि $\frac{3}{3}$ एक पूर्ण है, इसलिए इसे संख्या रेखा पर बिंदु 1 से दर्शाया जा सकता है (जैसा आकृति 7.7 में दिखाया है)।

अब यदि हमें एक संख्या रेखा पर $\frac{3}{7}$ को दर्शाना है, तो हम 0 और 1 के बीच की दूरी को कितने बराबर भागों में विभाजित करेंगे? यदि P भिन्न $\frac{3}{7}$ को दर्शाता है, तो शून्य और P के बीच कुल कितने बराबर भाग हैं? $\frac{0}{7}$ और $\frac{7}{7}$ कहाँ स्थित होंगे?

प्रयास कीजिए

1. संख्या रेखा पर $\frac{3}{5}$ को दर्शाइए।
2. संख्या रेखा पर $\frac{1}{10}, \frac{0}{10}, \frac{5}{10}$ और $\frac{10}{10}$ को दर्शाइए।
3. क्या आप 0 और 1 के बीच कोई अन्य भिन्न को दर्शा सकते हैं? ऐसी पाँच भिन्न और लिखिए जिन्हें आप दर्शा सकते हैं और उन्हें संख्या रेखा पर दर्शाइए।
4. 0 और 1 के बीच में कितनी भिन्न स्थित हैं? सोचिए, चर्चा कीजिए और अपने उत्तर को लिखिए।

7.4 उचित भिन्न

अब आप सीख चुके हैं कि भिन्नों को संख्या रेखा पर किस प्रकार दर्शाया जाता है। अलग-अलग संख्या रेखाओं पर भिन्न $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{9}{10}, \frac{0}{3}, \frac{5}{8}$ की स्थिति दर्शाइए।

क्या इनमें से कोई भी भिन्न 1 के दाईं ओर है। ये सभी भिन्न 1 के बाईं ओर स्थित हैं, क्योंकि ये 1 से छोटी हैं।

वास्तव में, अभी तक हमारे द्वारा पढ़ी गई भिन्न 1 से छोटी ही हैं। ये **उचित भिन्न** हैं। जैसाकि फरीदा ने कहा है (अनुच्छेद 7.1), उचित भिन्न वह संख्या है जो एक पूर्ण (Whole) के भाग को निरूपित करती है। इसमें हर यह बताता है कि पूर्ण को कितने बराबर भागों में विभाजित किया गया है तथा अंश यह दर्शाता है कि इसमें से कितने भाग चुने गए हैं। अत:, एक उचित भिन्न में अंश सदैव हर से छोटा होता है।

प्रयास कीजिए

1. एक उचित भिन्न लिखिए :
   (a) जिसका अंश 5 और हर 7 है।
   (b) जिसका हर 9 है और अंश 5 है।
   (c) जिसके अंश और हर का योग 10 है। आप इस प्रकार की कितनी भिन्न लिख सकते हैं?
   (d) जिसका हर उसके अंश से 4 अधिक है।
   (कोई पाँच भिन्न बनाइए। आप और कितनी भिन्न बना सकते हैं?)
2. एक भिन्न दी हुई है। इसे देखकर, आप कैसे बता सकते हैं कि यह भिन्न
   (a) 1 से छोटी है? (b) 1 के बराबर है?
3. संकेत '>', '<' या '=' का प्रयोग करके, रिक्त स्थानों को भरिए :
   (a) $\frac{1}{2} \square 1$ (b) $\frac{3}{5} \square 1$ (c) $1 \square \frac{7}{8}$
   (d) $\frac{4}{4} \square 1$ (e) $\frac{0}{6} \square 1$ (f) $\frac{2005}{2005} \square 1$

7.5 विषम भिन्न और मिश्रित भिन्न (संख्याएँ)

अनघा, रवि, रेशमा और जॉन ने अपना खाना बाँटकर खाया। अपने साथ वे पाँच सेब भी लाए थे। खाना खाने के बाद चारों मित्र सेब खाना चाहते थे। वे चारों आपस में इन पाँच सेबों को किस प्रकार बाँट सकते हैं?

अनघा ने कहा, आओ हम सभी एक पूरा सेब और पाँचवें का एक-चौथाई ले लें।

रेशमा ने कहा यह ठीक है, परंतु हम प्रत्येक सेब को चार बराबर भागों में बाँट सकते हैं और प्रत्येक सेब का एक-चौथाई ले सकते हैं।

रवि ने कहा, 'बाँटने की दोनों विधियों से प्रत्येक को बराबर भाग मिलेगा और वह है, 5 चतुर्थांश (quarters)। चूँकि 4 चतुर्थांशों से एक पूर्ण बनता है, इसलिए हम कह सकते हैं कि हममें से प्रत्येक को एक पूर्ण और एक चतुर्थांश (चौथाई) मिलता है। प्रत्येक भाग 5 भाग 4 है। क्या इसे $5 \div 4$ लिखते हैं? जॉन ने कहा, हाँ इसे $\frac{5}{4}$ भी लिखा जा सकता है। अनघा ने कहा, $\frac{5}{4}$ में अंश हर से बड़ा है। वे भिन्न जिनमें अंश हर से बड़ा होता है विषम भिन्न (improper fractions) कहलाती हैं।

इस प्रकार, $\frac{3}{2}, \frac{12}{7}, \frac{18}{5}$ प्रत्येक एक विषम भिन्न हैं।

1. हर 7 वाली पाँच विषम भिन्न लिखिए।
2. अंश 11 वाली पाँच विषम भिन्न लिखिए।

रवि ने जॉन से पूछा, 'इस भाग को लिखने की अन्य विधि क्या है? क्या यह 5 सेबों को अनघा द्वारा विभाजित करने की विधि से प्राप्त हो जाता है?'

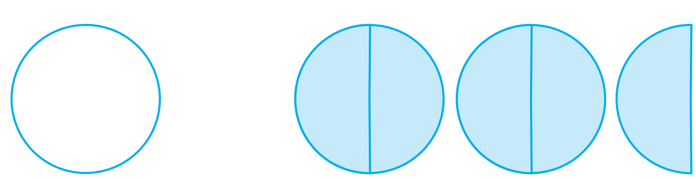
यह 1 है
(एक)

इनमें से प्रत्येक $\frac{1}{4}$ है
(एक-चौथाई)

आकृति 7.8

जॉन ने कहा, 'हाँ, वास्तव में यह अनघा की विधि से प्राप्त हो जाता है। उसकी विधि में, प्रत्येक का भाग एक पूर्ण और एक चौथाई से मिलकर बना है। यह $1+\frac{1}{4}$ है, जिसे $1\frac{1}{4}$ भी लिखा जाता है। याद रखिए $1\frac{1}{4}$ और $\frac{5}{4}$ एक ही हैं।' (आकृति 7.8)

याद कीजिए कि फरीदा ने कितनी पूरियाँ खाई थीं। उसने $2\frac{1}{2}$ पूरियाँ खाई थीं (आकृति 7.9)।



यह 1 है

यह $2\frac{1}{2}$ है

आकृति 7.9

$2\frac{1}{2}$ में कितने आधे भाग (halves) छायांकित हैं? इसमें 5 आधे भाग छायांकित हैं।

इसलिए, यह भिन्न $\frac{5}{2}$ है। स्पष्ट है कि यह $\frac{5}{4}$ नहीं है।

$1\frac{1}{4}$ और $2\frac{1}{2}$ जैसी भिन्न, **मिश्रित भिन्न** (**mixed fractions**) कहलाती हैं। एक मिश्रित भिन्न में एक भाग पूर्ण होता है और एक भाग भिन्न होता है।

क्या आप जानते हैं?

टेनिस रैकिटों के हत्थे की माप प्रायः मिश्रित संख्याओं में होती हैं। उदाहरणार्थ, एक माप '$3\frac{7}{8}$' इंच है और अन्य माप '$4\frac{3}{8}$' इंच है।

आपको मिश्रित संख्याएँ कहाँ–कहाँ मिलती हैं? कुछ उदाहरण दीजिए।

उदाहरण 1 : निम्न को मिश्रित संख्याओं के रूप में व्यक्त कीजिए :

(a) $\frac{17}{4}$ (b) $\frac{11}{3}$ (c) $\frac{27}{5}$ (d) $\frac{7}{3}$

हल : (a) $\frac{17}{4}$

$$\begin{array}{r|l} 4 & \overline{17}\ (4 \\ & -16 \\ \hline & \ \ 1 \end{array}$$

अर्थात्, 4 पूर्ण और $\frac{1}{4}$ अधिक या $4\frac{1}{4}$

(b) $\frac{11}{3}$

$$\begin{array}{r|l} 3 & \overline{11}\ (3 \\ & -9 \\ \hline & \ \ 2 \end{array}$$

अर्थात्, 3 पूर्ण और $\frac{2}{3}$ अधिक या $3\frac{2}{3}$

[वैकल्पिक रूप में, $\frac{11}{3} = \frac{9+2}{3} = \frac{9}{3} + \frac{2}{3} = 3 + \frac{2}{3} = 3\frac{2}{3}$]

(c) और (d) को उपरोक्त दोनों विधियों द्वारा करने का प्रयत्न कीजिए।

इस प्रकार, हम एक विषम भिन्न को एक मिश्रित संख्या के रूप में व्यक्त कर सकते हैं। इसके लिए हम अंश को हर से भाग देकर भागफल और शेषफल प्राप्त करते हैं। फिर मिश्रित संख्या को भागफल $\frac{\text{शेषफल}}{\text{भाजक}}$ के रूप में लिख लेते हैं।

उदाहरण 2 : निम्नलिखित मिश्रित भिन्नों को विषम भिन्नों के रूप में व्यक्त कीजिए :

(a) $2\frac{3}{4}$ (b) $7\frac{1}{9}$ (c) $5\frac{3}{7}$

हल : (a) $2\frac{3}{4} = \frac{(2 \times 4) + 3}{4} = \frac{11}{4}$

(b) $7\frac{1}{9} = \frac{(7 \times 9) + 1}{9} = \frac{64}{9}$

(c) $5\frac{3}{7} = \frac{(5 \times 7) + 3}{7} = \frac{38}{7}$

इस प्रकार, हम एक मिश्रित भिन्न को एक विषम भिन्न के रूप में व्यक्त कर सकते हैं। इसके लिए हम पूर्ण को हर से गुणा करके गुणनफल में अंश को जोड़ते हैं। फिर विषम भिन्न $\frac{(\text{पूर्ण} \times \text{हर}) + \text{अंश}}{\text{हर}}$ होगा।

प्रश्नावली 7.2

1. संख्या रेखाएँ खींचिए और उन पर निम्नलिखित भिन्नों को बिंदु रूप में दर्शाइए :

   (a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}$ (b) $\frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{7}{8}$ (c) $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{8}{5}, \frac{4}{5}$

2. निम्नलिखित को मिश्रित भिन्न के रूप में व्यक्त कीजिए :

   (a) $\frac{20}{3}$ (b) $\frac{11}{5}$ (c) $\frac{17}{7}$

   (d) $\frac{28}{5}$ (e) $\frac{19}{6}$ (f) $\frac{35}{9}$

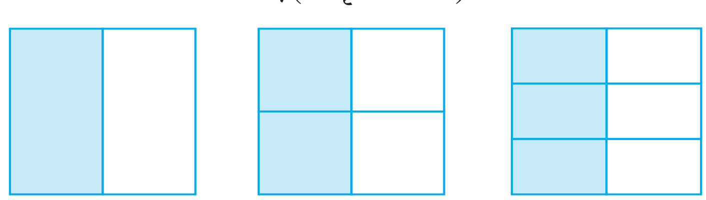
3. निम्नलिखित को विषम भिन्नों के रूप में व्यक्त कीजिए :

   (a) $7\frac{3}{4}$ (b) $5\frac{6}{7}$ (c) $2\frac{5}{6}$

   (d) $10\frac{3}{5}$ (e) $9\frac{3}{7}$ (f) $8\frac{4}{9}$

7.6 तुल्य भिन्न

भिन्नों के निम्न निरूपणों को देखिए (आकृति 7.10) :



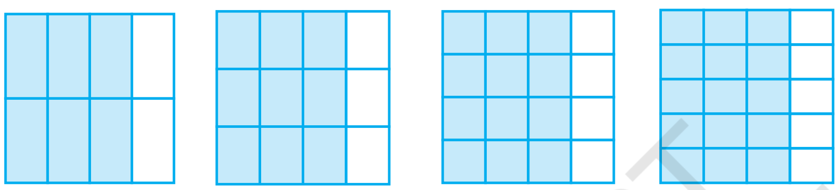
आकृति 7.10

ये भिन्न $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}$ हैं। जो कुल भागों में से लिए गए भागों को दर्शाती हैं। यदि हम इन भिन्नों के चित्रीय निरूपणों को एक दूसरे पर रखें, तो वे बराबर होंगे। क्या आप इससे सहमत हैं?

ऐसी भिन्न **तुल्य भिन्न (Equivalent fractions)** कहलाती हैं। ऐसी ही 3 और भिन्नों को बताइए जो ऊपर ली गई भिन्नों के तुल्य हों।

प्रयास कीजिए

1. क्या $\frac{1}{3}$ और $\frac{2}{7}$; $\frac{2}{5}$ और $\frac{2}{7}$ तथा $\frac{2}{9}$ और $\frac{6}{27}$ तुल्य भिन्न हैं? कारण दीजिए।
2. चार तुल्य भिन्नों का एक अन्य उदाहरण दीजिए।
3. प्रत्येक भिन्न को पहचानिए। क्या ये भिन्न तुल्य हैं?



तुल्य भिन्नों को समझना

$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, ..., \frac{36}{72}, ...,$ में से सभी तुल्य भिन्न हैं। ये एक पूर्ण का समान भाग निरूपित करती हैं।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए :

तुल्य भिन्न एक पूर्ण का समान भाग क्यों निरूपित करती हैं? हम इनमें से एक भिन्न को अन्य भिन्न से किस प्रकार प्राप्त कर सकते हैं?

हम देखते हैं कि $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1 \times 2}{2 \times 2}$ है।

इसी प्रकार, $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3}$ तथा

$\frac{1}{2} = \frac{4}{8} = \frac{1 \times 4}{2 \times 4}$ है।

एक दी हुई भिन्न की तुल्य भिन्न ज्ञात करने के लिए, आप उसके अंश और हर को एक समान शून्येतर संख्या से गुणा कर सकते हैं।

रजनी कहती है कि $\frac{1}{3}$ की समतुल्य भिन्न हैं :

$\frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{2}{6}$, $\frac{1 \times 3}{3 \times 3} = \frac{3}{9}$, $\frac{1 \times 4}{3 \times 4} = \frac{4}{12}$ इत्यादि।

क्या आप उससे सहमत हैं? कारण सहित स्पष्ट कीजिए।

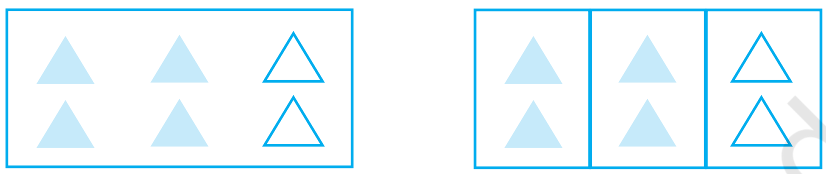
प्रयास कीजिए

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक की पाँच तुल्य भिन्न ज्ञात कीजिए :

   (i) $\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{1}{5}$ (iii) $\frac{3}{5}$ (iv) $\frac{5}{9}$

अन्य विधि :

क्या तुल्य भिन्न ज्ञात करने की कोई अन्य विधि भी है? आकृति 7.11 को देखिए :



यहाँ $\frac{4}{6}$ छायांकित है यहाँ $\frac{2}{3}$ छायांकित है।

आकृति 7.11

इनमें छायांकित वस्तुओं की संख्याएँ समान हैं, अर्थात् $\frac{4}{6}$ और $\frac{2}{3}$ तुल्य भिन्न हैं।

$$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}=\frac{4\div 2}{6\div 2}$$

एक दी हुई भिन्न के तुल्य भिन्न ज्ञात करने के लिए हम उस भिन्न के अंश और हर को एक समान शून्येतर संख्या से भाग दे सकते हैं।

$\frac{12}{15}$ के तुल्य एक भिन्न $\frac{12\div 3}{15\div 3}=\frac{4}{5}$ है।

क्या आप $\frac{9}{15}$ के तुल्य एक ऐसी भिन्न ज्ञात कर सकते हैं जिसका हर 5 हो?

उदाहरण 3 : $\frac{2}{5}$ के तुल्य ऐसी भिन्न ज्ञात कीजिए जिसका अंश 6 है।

हल : हम जानते हैं कि $2\times 3=6$ है। इसका अर्थ है कि तुल्य भिन्न प्राप्त करने के लिए, हमें दी हुई भिन्न के अंश और हर को 3 से गुणा करना चाहिए।

इस प्रकार, $\frac{2}{5}=\frac{2\times 3}{5\times 3}=\frac{6}{15}$

अतः, वांछित तुल्य भिन्न $\frac{6}{15}$ है।

क्या आप इसे चित्रीय रूप से दर्शा सकते हैं?

उदाहरण 4 : $\frac{15}{35}$ के तुल्य वह भिन्न ज्ञात कीजिए जिसका हर 7 हो।

हल : हमें प्राप्त है : $\frac{15}{35} = \frac{\square}{7}$

हम हरों को देखें। चूँकि $35 \div 5 = 7$ है, इसलिए हम $\frac{15}{35}$ के अंश और हर दोनों को 5 से भाग देंगे।

हमें प्राप्त होता है $\frac{15}{35} = \frac{15 \div 5}{35 \div 5} = \frac{3}{7}$

इस प्रकार $\square$ को 3 से प्रतिस्थापित कर हम $\frac{15}{35} = \frac{3}{7}$ प्राप्त करते हैं।

एक रोचक तथ्य :

तुल्य भिन्नों के बारे में एक बात बहुत रोचक है। दी हुई सारणी को पूरा कीजिए। पहली दो पंक्तियाँ पूरी कर दी गई हैं।

तुल्य भिन्न	पहली के अंश और दूसरी के हर का गुणनफल	दूसरी के अंश और पहली के हर का गुणनफल	क्या गुणन-फल समान है?
$\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$	$1 \times 9 = 9$	$3 \times 3 = 9$	हाँ
$\frac{4}{5} = \frac{28}{35}$	$4 \times 35 = 140$	$5 \times 28 = 140$	हाँ
$\frac{1}{4} = \frac{4}{16}$			
$\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$			
$\frac{3}{7} = \frac{24}{56}$			

उपरोक्त सारणी से हम क्या निष्कर्ष निकालते हैं? इन सभी में, पहली के अंश और दूसरी के हर का गुणनफल दूसरी के अंश और पहली के हर के गुणनफल के बराबर है। ये दोनों गुणनफल कैंची गुणनफल (cross products) कहलाते हैं। तुल्य भिन्नों के अन्य युग्मों के लिए भी कैंची गुणनफल ज्ञात कीजिए। क्या आप तुल्य भिन्नों का ऐसा युग्म प्राप्त करते हैं, जिनमें कैंची या क्रास गुणनफल बराबर नहीं हैं? इस नियम से कभी-कभी तुल्य भिन्नों को ज्ञात करने में सहायता मिलती है।

उदाहरण 5 : $\frac{2}{9}$ के तुल्य वह भिन्न ज्ञात कीजिए जिसका हर 63 है।

हल : हमें प्राप्त है : $\frac{2}{9} = \frac{\square}{63}$

इसके लिए, $9 \times \square = 2 \times 63$ होना चाहिए।

परंतु $63 = 7 \times 9$ है। इसलिए $9 \times \square = 2 \times 7 \times 9$,

$= 14 \times 9 = 9 \times 14$

या $9 \times \square = 4 \times 14$

तुलना करने पर $\square = 14$ हुआ।

अत:, $\frac{2}{9} = \frac{14}{63}$ है।

7.7 भिन्न का सरलतम रूप

एक भिन्न $\frac{36}{54}$ दी हुई है। आइए, इसके तुल्य एक ऐसी भिन्न प्राप्त करने का प्रयत्न करें जिसके अंश और हर में 1 के अतिरिक्त कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड न हों।

हम ऐसा कैसे करते हैं? हम जानते हैं कि 36 और 54 दोनों 2 से विभाज्य हैं।

इसलिए, $\frac{36}{54} = \frac{36 \div 2}{54 \div 2} = \frac{18}{27}$

परंतु 18 और 27 में भी 1 के अतिरिक्त अन्य उभयनिष्ठ गुणनखंड हैं। ये उभयनिष्ठ गुणनखंड 1, 3 और 9 हैं।

अत:, $\frac{18}{27} = \frac{18 \div 9}{27 \div 9} = \frac{2}{3}$

चूँकि 2 और 3 में 1 के अतिरिक्त कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है। इसलिए वांछित भिन्न $\frac{2}{3}$ है। इस प्रकार की भिन्न सरलतम रूप (simplest form) की भिन्न कहलाती है। इस प्रकार, **एक भिन्न सरलतम रूप (simplest form) या न्यूनतम रूप (lowest form) में तब कही जाती है, जब उसके अंश और हर में 1 के अतिरिक्त कोई अन्य उभयनिष्ठ गुणनखंड न हो।**

सबसे छोटा रास्ता :

सरलतम रूप में तुल्य भिन्न ज्ञात करने का सबसे छोटा रास्ता यह है कि दी हुई भिन्न के अंश और हर का म.स. निकाला जाए और फिर अंश और हर दोनों को इस म.स. से भाग दे दिया जाए। इस प्रकार, सरलतम रूप में तुल्य भिन्न प्राप्त हो जाएगी।

एक खेल

यहाँ दी हुई समतुल्य भिन्न बहुत रोचक है। प्रत्येक में 1 से 9 तक के अंक एक बार प्रयोग किए गए हैं।

$$\frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{58}{174}$$

$$\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{79}{158}$$

क्या आप ऐसी दो और समतुल्य भिन्न ज्ञात कर सकते हैं।

भिन्न $\frac{36}{24}$ को लीजिए

36 और 24 का म.स. 12 है।

अत:, $\frac{36 \div 12}{24 \div 12} = \frac{3}{2}$

इस प्रकार, म.स. की अवधारणा एक भिन्न को न्यूनतम (या सरलतम) रूप में बदलने में हमारी सहायता करती है।

प्रयास कीजिए

1. निम्न को सरलतम में लिखिए :

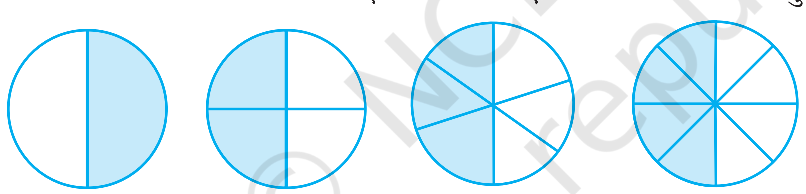
(i) $\frac{15}{75}$ (ii) $\frac{16}{72}$ (iii) $\frac{17}{51}$ (iv) $\frac{42}{28}$ (v) $\frac{80}{24}$

2. क्या $\frac{49}{64}$ अपने सरलतम रूप में है?

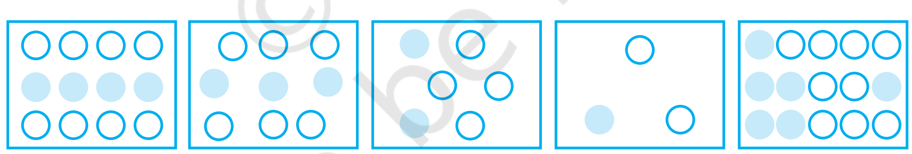
प्रश्नावली 7.3

1. प्रत्येक चित्र में छायांकित भागों के लिए भिन्न लिखिए। क्या ये सभी भिन्न तुल्य हैं?

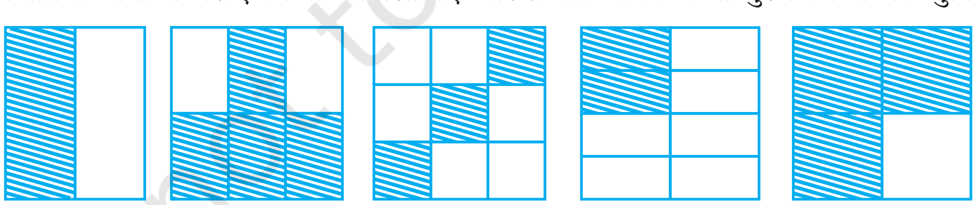
(a)



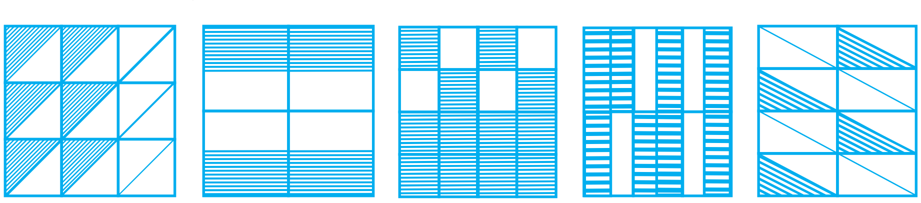
(b)



2. छायांकित भागों के लिए भिन्नों को लिखिए और प्रत्येक पंक्ति में से तुल्य भिन्नों को चुनिए।



(a) (b) (c) (d) (e)



(i) (ii) (iii) (iv) (v)

3. निम्न में से प्रत्येक में $\square$ को सही संख्या से प्रतिस्थापित कीजिए :

   (a) $\frac{2}{7}=\frac{8}{\square}$ (b) $\frac{5}{8}=\frac{10}{\square}$ (c) $\frac{3}{5}=\frac{\square}{20}$

   (d) $\frac{45}{60}=\frac{15}{\square}$ (e) $\frac{18}{24}=\frac{\square}{4}$

4. $\frac{3}{5}$ के तुल्य वह भिन्न ज्ञात कीजिए जिसका

   (a) हर 20 है (b) अंश 9 है

   (c) हर 30 है (d) अंश 27 है

5. $\frac{36}{48}$ के तुल्य वह भिन्न ज्ञात कीजिए जिसका

   (a) अंश 9 है (b) हर 4 है

6. जाँच कीजिए कि निम्न भिन्न तुल्य हैं या नहीं :

   (a) $\frac{5}{9}, \frac{30}{54}$ (b) $\frac{3}{10}, \frac{12}{50}$ (c) $\frac{7}{13}, \frac{5}{11}$

7. निम्नलिखित भिन्नों को उनके सरलतम रूप में बदलिए :

   (a) $\frac{48}{60}$ (b) $\frac{150}{60}$ (c) $\frac{84}{98}$

   (d) $\frac{12}{52}$ (e) $\frac{7}{28}$

8. रमेश के पास 20 पेंसिल थीं। शीलू के पास 50 पेंसिल और जमाल के पास 80 पेंसिल थीं। 4 महीने के बाद रमेश ने 10 पेंसिल तथा शीलू ने 25 पेंसिल प्रयोग कर लीं और जमाल ने 40 पेंसिल प्रयोग कर ली। प्रत्येक ने अपनी पेंसिलों की कौन-सी भिन्न प्रयोग कर ली? जाँच कीजिए कि प्रत्येक ने अपनी पेंसिलों की समान भिन्न प्रयोग की है।

9. तुल्य भिन्नों का मिलान कीजिए और प्रत्येक के लिए दो भिन्न और लिखिए :

(i) $\frac{250}{400}$	(a) $\frac{2}{3}$
(ii) $\frac{180}{200}$	(b) $\frac{2}{5}$
(iii) $\frac{660}{990}$	(c) $\frac{1}{2}$
(iv) $\frac{180}{360}$	(d) $\frac{5}{8}$
(v) $\frac{220}{550}$	(e) $\frac{9}{10}$

7.8 समान भिन्न

समान हर वाली भिन्न, समान भिन्न (like fractions) कहलाती हैं।

इस प्रकार, $\frac{1}{15}, \frac{2}{15}, \frac{3}{15}, \frac{8}{15}$ सभी समान भिन्न हैं।

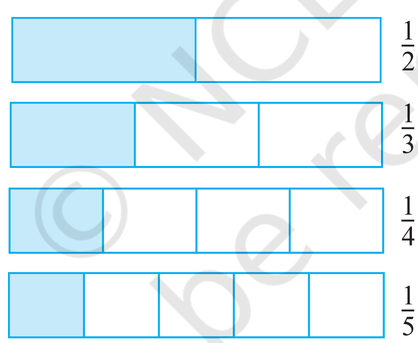
क्या $\frac{7}{27}$ और $\frac{7}{28}$ समान भिन्न हैं? इनके हर भिन्न हैं। अतः ये समान भिन्न नहीं हैं। ये **असमान भिन्न (unlike fractions)** कहलाती हैं।

समान भिन्नों के पाँच युग्म और असमान भिन्नों के पाँच युग्म लिखिए।

7.9 भिन्नों की तुलना

सोहनी की थाली में $3\frac{1}{2}$ रोटियाँ हैं और रीता की थाली में $2\frac{2}{4}$ रोटियाँ हैं। किसकी थाली में अधिक रोटियाँ हैं? स्पष्टतः, सोहनी के पास 3 से अधिक रोटियाँ हैं और रीता के पास 3 से कम रोटियाँ हैं। अतः, सोहनी के पास अधिक रोटियाँ हैं।

अब आकृति 7.12 में दर्शायी भिन्नों $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{3}$ पर विचार कीजिए। पूर्ण के $\frac{1}{2}$ का संगत भाग उसी पूर्ण के $\frac{1}{3}$ के संगत भाग से स्पष्ट रूप से बड़ा है। अतः, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ से बड़ी है।



आकृति 7.12

परंतु प्रायः भिन्नों में यह बताना इतना सरल नहीं होता कि इनमें कौन सी भिन्न बड़ी है। उदाहरणार्थ, $\frac{1}{4}$ बड़ी है या $\frac{1}{5}$? इसके लिए, हम भिन्नों को आकृतियों से दर्शाने की सोच सकते हैं (जैसा आकृति 7.12 में है)। परंतु आकृतियाँ बनाना सदैव सरल नहीं होता, विशेषकर जब हर 13 जैसे हों। अतः, हमें भिन्नों की तुलना करने की कोई क्रमबद्ध विधि ज्ञात करनी चाहिए। विशेष रूप से, समान भिन्नों की तुलना करना सरल है। इसलिए हम पहले समान भिन्नों की ही तुलना करते हैं।

प्रयास कीजिए

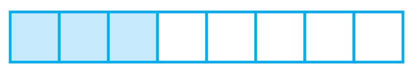
1. आप जूस की बोतल का $\frac{1}{5}$ वाँ भाग प्राप्त करते हैं और आपकी बहन को उस बोतल का एक-तिहाई भाग मिलता है। किसको अधिक जूस मिलता है?

7.9.1 समान भिन्नों की तुलना

समान हर वाली भिन्न, समान भिन्न होती हैं। इनमें से कौन सी भिन्न समान भिन्न हैं?

$\frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{7}{2}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{4}{7}$

आइए, दो समान भिन्नों $\frac{3}{8}$ और $\frac{5}{8}$ की तुलना करें।


$\frac{3}{8}$


$\frac{5}{8}$

दोनों भिन्नों में पूर्ण को 8 बराबर भागों में विभाजित किया गया है। इन 8 बराबर भागों में से, हम $\frac{3}{8}$ और $\frac{5}{8}$ के लिए क्रमशः 3 और 5 भाग लेते हैं। स्पष्ट है कि 5 भागों का संगत भाग 3 भागों के संगत भाग से बड़ा है। अतः, $\frac{5}{8} > \frac{3}{8}$ है। ध्यान दीजिए कि लिए गए भाग अंश से प्राप्त होते हैं। अतः, यह स्पष्ट है कि समान हरों वाली दो भिन्नों के लिए, बड़े अंश वाली भिन्न बड़ी होती है। $\frac{4}{5}$ और $\frac{3}{5}$ में $\frac{4}{5}$ बड़ी भिन्न है। $\frac{11}{20}$ और $\frac{13}{20}$ में $\frac{13}{20}$ बड़ी है, इत्यादि।

प्रयास कीजिए

1. कौन-सी भिन्न बड़ी है?

   (i) $\frac{7}{10}$ या $\frac{8}{10}$ (ii) $\frac{11}{24}$ या $\frac{13}{24}$ (iii) $\frac{17}{102}$ या $\frac{12}{102}$

   ऐसी भिन्नों की तुलना करना क्यों सरल है?

2. निम्न को आरोही क्रम में लिखिए और साथ ही अवरोही क्रम में भी लिखिए :

   (a) $\frac{1}{8}, \frac{5}{8}, \frac{3}{8}$

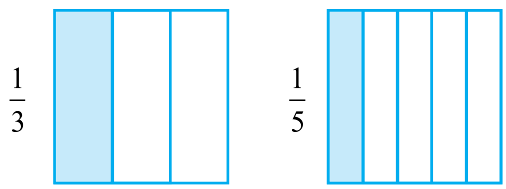
   (b) $\frac{1}{5}, \frac{11}{5}, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{7}{5}$

   (c) $\frac{1}{7}, \frac{3}{7}, \frac{13}{7}, \frac{11}{7}, \frac{7}{7}$

7.9.2 असमान भिन्नों की तुलना

दो भिन्नें असमान होती हैं, यदि उनके हर भिन्न-भिन्न हों। उदाहरणार्थ $\frac{1}{3}$ और $\frac{1}{5}$ असमान भिन्न हैं। $\frac{2}{3}$ और $\frac{3}{5}$ भी असमान भिन्न हैं।

समान अंश वाली असमान भिन्न



असमान भिन्नों $\frac{1}{3}$ और $\frac{1}{5}$ के एक युग्म पर विचार कीजिए, जिसमें अंश समान हैं।

$\frac{1}{3}$ बड़ी है या $\frac{1}{5}$?

$\frac{1}{3}$ के लिए, हम एक पूर्ण को 3 बराबर भागों में विभाजित करते हैं और उसमें से एक भाग लेते हैं। $\frac{1}{5}$ के लिए, हम एक पूर्ण को 5 बराबर भागों में विभाजित करते हैं और उसमें से एक भाग लेते हैं। ध्यान दीजिए कि $\frac{1}{3}$ में पूर्ण को $\frac{1}{5}$ की तुलना में कम भागों में विभाजित किया गया है। अत:, $\frac{1}{3}$ में प्राप्त बराबर भाग $\frac{1}{5}$ में प्राप्त बराबर भागों से बड़े हैं। चूँकि दोनों स्थितियों में, हम एक ही (1) भाग ले रहे हैं, इसलिए पूर्ण का $\frac{1}{3}$ दर्शाने वाला भाग उसके $\frac{1}{5}$ दर्शाने वाले भाग से बड़ा है। अत:, $\frac{1}{3} > \frac{1}{5}$ है।

इसी प्रकार, हम कह सकते हैं कि $\frac{2}{3} > \frac{2}{5}$ है। इस दशा में, स्थिति पहले जैसी है, केवल यह अंतर है कि अंश 1 न होकर 2 है। पूर्ण $\frac{2}{5}$ के लिए $\frac{2}{3}$ की तुलना में अधिक बराबर भागों में बाँटा गया है। अत:, $\frac{2}{3}$ की स्थिति वाला प्रत्येक बराबर भाग $\frac{2}{5}$ वाली स्थिति के बराबर भाग से बड़ा है। अब हम बराबर भागों की समान संख्या ले रहे हैं (क्योंकि अंश समान हैं)। अत:, पूर्ण का $\frac{2}{3}$ दर्शाने वाला भाग उसके $\frac{2}{5}$ दर्शाने वाले भाग से बड़ा है। इसीलिए, $\frac{2}{3} > \frac{2}{5}$ है।

उपरोक्त उदाहरण से, हम देख सकते हैं कि **यदि दो भिन्नों में अंश समान हो, तो दोनों भिन्नों में छोटे हर वाली भिन्न बड़ी होती है।**

इस प्रकार, $\frac{1}{8} > \frac{1}{10}, \frac{3}{5} > \frac{3}{7}, \frac{4}{9} > \frac{4}{11}$ इत्यादि है।

आइए $\frac{2}{1}, \frac{2}{13}, \frac{2}{9}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}$ को बढ़ते हुए (आरोही) क्रम में व्यवस्थित करें। ये सभी भिन्न असमान भिन्न हैं, परन्तु इनके अंश समान हैं। अत:, जितना हर बड़ा होगा, भिन्न उतनी ही

छोटी होगी। सबसे छोटी भिन्न $\frac{2}{13}$ है, क्योंकि इसका हर सबसे बड़ा है। इस क्रम में अगली तीन भिन्न $\frac{2}{9}, \frac{2}{7}, \frac{2}{5}$ हैं। सबसे बड़ी भिन्न $\frac{2}{1}$ है (इसका सबसे छोटा हर है)। अतः आरोही क्रम में भिन्न $\frac{2}{13}, \frac{2}{9}, \frac{2}{7}, \frac{2}{5}, \frac{2}{1}$ हैं।

प्रयास कीजिए

1. निम्नलिखित भिन्नों को आरोही और अवरोही क्रमों में व्यवस्थित कीजिए :

   (a) $\frac{1}{12}, \frac{1}{23}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{50}, \frac{1}{9}, \frac{1}{17}$

   (b) $\frac{3}{7}, \frac{3}{11}, \frac{3}{5}, \frac{3}{2}, \frac{3}{13}, \frac{3}{4}, \frac{3}{17}$

   (c) उपरोक्त प्रकार के तीन और उदाहरण लिखिए तथा उन्हें आरोही और अवरोही क्रमों में व्यवस्थित कीजिए।

मान लीजिए, हम दो असमान भिन्न $\frac{2}{3}$ और $\frac{3}{4}$ की तुलना करना चाहते हैं। ऐसा करना तब संभव होगा, जब हम दोनों भिन्नों के हरों के भाग किसी तरह से बराबर बना लें, अर्थात् उनके हर बराबर बना लें। एक बार ऐसा कर लेने पर जो समान भिन्न प्राप्त होगी उसके अंशों के भागों की तुलना करके भिन्नों की तुलना सरलता से की जा सकती है।

आइए, पुनः $\frac{2}{3}$ और $\frac{3}{4}$ को लें और इनकी तुल्य भिन्न ज्ञात करें।

अब, $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{10}{15} = ...$

इसी प्रकार, $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16} = ...$

$\frac{2}{3}$ और $\frac{3}{4}$ में समान हर 12 वाली तुल्य भिन्न क्रमशः $\frac{8}{12}$ और $\frac{9}{12}$ हैं। अर्थात्

$\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ है और $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ है।

चूँकि, $\frac{9}{12} > \frac{8}{12}$ है, इसलिए, $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$ है।

उदाहरण 6 : $\frac{4}{5}$ और $\frac{5}{6}$ की तुलना कीजिए।

हल : ये असमान भिन्न हैं। इनके अंश भी भिन्न-भिन्न हैं। आइए, इनकी तुल्य भिन्नों को लिखें।

$$\frac{4}{5} = \frac{8}{10} = \frac{12}{15} = \frac{16}{20} = \frac{20}{25} = \frac{24}{30} = \frac{28}{35} = ...$$

$$\frac{5}{6}=\frac{10}{12}=\frac{15}{18}=\frac{20}{24}=\frac{25}{30}=\frac{30}{36}=......$$

समान हर वाली तुल्य भिन्न हैं :

$$\frac{4}{5}=\frac{24}{30} \text{ और } \frac{5}{6}=\frac{25}{30}$$

चूँकि $\frac{25}{30}>\frac{24}{30}$ है, इसलिए $\frac{5}{6}>\frac{4}{5}$ है। ध्यान दीजिए कि तुल्य भिन्नों का समान हर 30 है, जो 5×6 के बराबर है। यह 5 और 6 का एक सार्व गुणज है।

इसलिए, दो असमान भिन्नों की तुलना करते समय हम पहले इन भिन्नों की ऐसी तुल्य भिन्नें ज्ञात करते हैं जिनमें इनके हरों के सार्व गुणज हों।

उदाहरण 7 : $\frac{5}{6}$ और $\frac{13}{15}$ की तुलना कीजिए।

हल : ये असमान भिन्न हैं। पहले हमें 6 और 15 के सार्व गुणज वाली तुल्य भिन्नें ज्ञात करनी चाहिए।

अब, $\frac{5\times 5}{6\times 5}=\frac{25}{30}, \frac{13\times 2}{15\times 2}=\frac{26}{30}$ है।

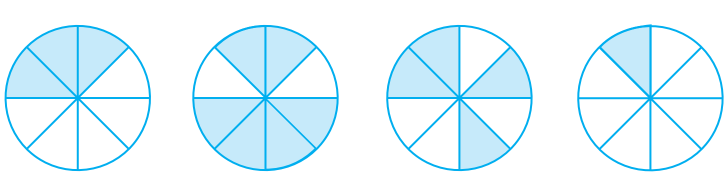
चूँकि $\frac{26}{30}>\frac{25}{30}$ है, इसलिए $\frac{13}{15}>\frac{5}{6}$ है।

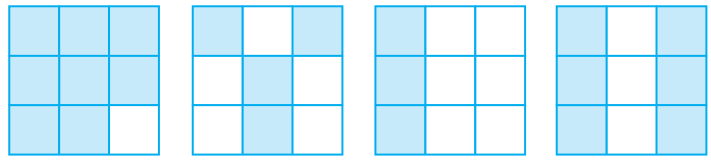
ल.स. क्यों?

6 और 15 का गुणनफल 90 है। स्पष्टत:, 90 भी 6 और 15 का एक सार्व गुणज है। हम 30 के स्थान पर 90 का भी प्रयोग कर सकते हैं। इसमें कोई गलती नहीं होगी। परंतु हम जानते हैं कि छोटी संख्याओं के साथ कार्य करना अधिक सरल और सुविधाजनक होता है। इसलिए हम सार्व गुणज को अधिक से अधिक छोटा लेना चाहेंगे। इसीलिए, समान हर बनाने के लिए हरों के ल.स. को प्राथमिकता दी जाती है।

प्रश्नावली 7.4

1. प्रत्येक चित्र के लिए भिन्नों को लिखिए। भिन्नों के बीच में सही चिह्न '<', '=', '>' का प्रयोग करते हुए, इन्हें आरोही और अवरोही क्रमों में व्यवस्थित कीजिए :

(a) 

(b) 

(c) $\frac{2}{6}, \frac{4}{6}, \frac{8}{6}$ और $\frac{6}{6}$ को संख्या रेखा पर दर्शाइए।

दी हुई भिन्न के बीच में उचित चिह्न '<' या '>' भरिए :

$\frac{5}{6} \square \frac{2}{6}$, $\frac{3}{6} \square 0$, $\frac{1}{6} \square \frac{6}{6}$, $\frac{8}{6} \square \frac{5}{6}$

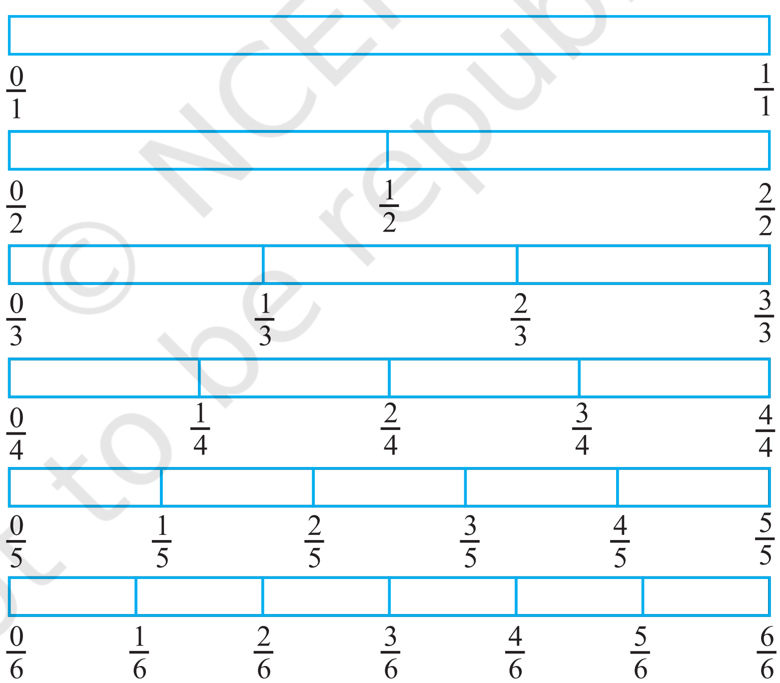
2. भिन्नों की तुलना कीजिए और उचित चिह्न लगाइए :

(a) $\frac{3}{6} \square \frac{5}{6}$ (b) $\frac{1}{7} \square \frac{1}{4}$

(c) $\frac{4}{5} \square \frac{5}{5}$ (d) $\frac{3}{5} \square \frac{3}{7}$

3. ऐसे ही पाँच और युग्म लीजिए और उचित चिह्न लगाइए।

4. निम्न आकृतियों को देखिए और भिन्नों के बीच में उचित चिह्न '>' = या '<' लिखिए :



(a) $\frac{1}{6} \square \frac{1}{3}$ (b) $\frac{3}{4} \square \frac{2}{6}$ (c) $\frac{2}{3} \square \frac{2}{4}$

(d) $\frac{6}{6} \square \frac{3}{3}$ (e) $\frac{5}{6} \square \frac{5}{5}$

ऐसे ही पाँच और प्रश्न बनाइए और अपने मित्रों के साथ उन्हें हल कीजिए।

5. देखें कितनी जल्दी आप करते हैं? उचित चिह्न भरिए : (<, =, >)

(a) $\frac{1}{2}\square\frac{1}{5}$ (b) $\frac{2}{4}\square\frac{3}{6}$ (c) $\frac{3}{5}\square\frac{2}{3}$

(d) $\frac{3}{4}\square\frac{2}{8}$ (e) $\frac{3}{5}\square\frac{6}{5}$ (f) $\frac{7}{9}\square\frac{3}{9}$

(g) $\frac{1}{4}\square\frac{2}{8}$ (h) $\frac{6}{10}\square\frac{4}{5}$ (i) $\frac{3}{4}\square\frac{7}{8}$

(j) $\frac{6}{10}\square\frac{3}{5}$ (k) $\frac{5}{7}\square\frac{15}{21}$

6. निम्नलिखित भिन्न तीन अलग-अलग संख्याएँ निरूपित करती हैं इन्हें सरलतम रूप में बदलकर उन तीन तुल्य भिन्नों के समूहों में लिखिए :

(a) $\frac{2}{12}$ (b) $\frac{3}{15}$ (c) $\frac{8}{50}$

(d) $\frac{16}{100}$ (e) $\frac{10}{60}$ (f) $\frac{15}{75}$

(g) $\frac{12}{60}$ (h) $\frac{16}{96}$ (i) $\frac{12}{75}$

(j) $\frac{12}{72}$ (k) $\frac{3}{18}$ (l) $\frac{4}{25}$

7. निम्नलिखित के उत्तर दीजिए। लिखिए और दर्शाइए कि आपने इन्हें कैसे हल किया है?

(a) क्या $\frac{5}{9}$, $\frac{4}{5}$ के बराबर है? (b) क्या $\frac{9}{16}$, $\frac{5}{9}$ के बराबर है?

(c) क्या $\frac{4}{5}$, $\frac{16}{20}$ के बराबर है? (d) क्या $\frac{1}{15}$, $\frac{4}{30}$ के बराबर है?

8. इला 100 पृष्ठों वाली एक पुस्तक के 25 पृष्ठ पढ़ती है। ललिता इसी पुस्तक का $\frac{1}{2}$ भाग पढ़ती है। किसने कम पढ़ा?

9. रफीक ने एक घंटे के $\frac{3}{6}$ भाग तक व्यायाम किया, जबकि रोहित ने एक घंटे के $\frac{3}{4}$ भाग तक व्यायाम किया। किसने लंबे समय तक व्यायाम किया?

10. 25 विद्यार्थियों की एक कक्षा A में 20 विद्यार्थी 60% या अधिक अंक लेकर पास हुए और 30 विद्यार्थियों की एक कक्षा B में 24 विद्यार्थी 60% या अधिक अंक लेकर पास हुए। किस कक्षा में विद्यार्थियों का अधिक भाग 60% या अधिक अंक लेकर पास हुआ?

7.10 भिन्नों का योग और व्यवकलन (घटाना)

अभी तक हमने प्राकृत संख्याओं, पूर्ण संख्याओं और पूर्णांकों के बारे में अध्ययन किया है। इस अध्याय में, हम एक नई प्रकार की संख्याओं का अध्ययन कर रहे हैं जिन्हें भिन्न कहते हैं।

जब भी हमें नई संख्याएँ प्राप्त होती हैं, तो हम उन पर संक्रियाएँ करने की सोचते हैं। क्या हम इन्हें जोड़ सकते हैं? यदि हाँ, तो कैसे? क्या हम एक संख्या में से दूसरी संख्या निकाल सकते हैं? अर्थात् क्या हम एक संख्या में से दूसरी संख्या को घटा सकते हैं इत्यादि? संख्याओं के बारे में पहले पढ़े हुए गुण क्या इन नई संख्याओं पर लागू होते हैं। इनके नए गुण क्या हैं? हम यह भी देखते हैं कि ये संख्याएँ हमारे दैनिक जीवन में किस प्रकार उपयोगी हैं।

इस उदाहरण को देखिए : एक चाय की दुकान वाली अपनी दुकान पर सुबह $2\frac{1}{2}$ लीटर दूध और शाम को $1\frac{1}{2}$ लीटर दूध का प्रयोग चाय बनाने में करती है। अपनी दुकान पर वह एक दिन में कितना दूध प्रयोग करती है?

अथवा शेखर ने दोपहर के भोजन में 2 चपाती खाई और रात्रि के भोजन में $1\frac{1}{2}$ चपाती खाई। उसने कुल कितनी चपातियाँ खाई?

स्पष्ट है कि दोनों स्थितियों में भिन्नों को जोड़ने की आवश्यकता है। इनमें से कुछ योग मौखिक रूप से और सरलता से किए जा सकते हैं।

प्रयास कीजिए

1. मेरी माँ ने एक सेब को चार बराबर भागों में बाँटा। उन्होंने मुझे 2 भाग और मेरे भाई को एक भाग दिया। उन्होंने हम दोनों को कुल सेब का कितना भाग दिया?
2. माँ ने नीलू और उसके भाई से गेहूँ में से कंकड़ बीनने के लिए कहा। नीलू ने कुल कंकड़ों के $\frac{1}{4}$ कंकड़ बीने और उसके भाई ने भी कुल कंकड़ों के $\frac{1}{4}$ कंकड़ बीने। दोनों ने मिलकर कुल कंकड़ों की कितनी भिन्न बीनी?
3. सोहन अपनी अभ्यास पुस्तिका पर कवर चढ़ा रहा था। उसने सोमवार को $\frac{1}{4}$ भाग पर कवर चढ़ा लिया। मंगलवार को उसने अन्य $\frac{1}{4}$ भाग पर कवर चढ़ा लिया और शेष बुधवार को। बुधवार को उसने कवर का कौन सा भाग चढ़ाया?

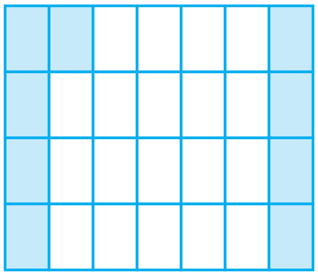
इन्हें कीजिए

अपने मित्रों के साथ ऐसे दस प्रश्न बनाइए और उन्हें हल कीजिए।

7.10.1 समान भिन्नों का जोड़ना या घटाना

सभी भिन्नों को मौखिक रूप से जोड़ा नहीं जा सकता। हमें यह जानने की आवश्यकता है कि विभिन्न स्थितियों में इन्हें कैसे जोड़ा जाता है और इस प्रक्रिया को सीखने की आवश्यकता है। हम समान भिन्नों के योग से प्रारंभ करते हैं।

एक 7×4 ग्रिड शीट (grid sheet) लीजिए (आकृति 7.13)। इस शीट की प्रत्येक पंक्ति में 7 खाने हैं और प्रत्येक स्तंभ में 4 खाने हैं।

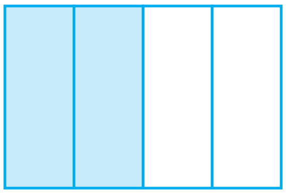


आकृति 7.13

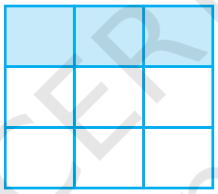
इसमें कुल कितने खाने हैं? इनमें से 5 खानों में हरा रंग भरिए। हरा क्षेत्र एक पूर्ण की कौन सी भिन्न है? अब शीट के 4 खानों में पीला रंग भरिए। पीला क्षेत्र एक पूर्ण की कौन-सी भिन्न है? एक पूर्ण की कुल कितनी भिन्न रंग दी गई है? क्या इससे स्पष्ट होता है कि $\frac{5}{28}+\frac{4}{28}=\frac{9}{28}$ है?

और उदाहरणों को देखिए :

आकृति 7.14 (i) में, आकृति का दो-चौथाई भाग छायांकित है। इसका अर्थ है कि 4 में से 2 भाग, अर्थात् आकृति का $\frac{1}{2}$ भाग छायांकित है।



आकृति 7.14 (i)



आकृति 7.14 (ii)

अर्थात् $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1+1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. है।

आकृति 7.14 (ii) को देखिए।

आकृति 7.14 (ii) $\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{1+1+1}{9}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ प्रदर्शित करती है।

आपने इन उदाहरणों से क्या सीखा है? हमने सीखा है कि दो या अधिक समान भिन्नों का योग इस प्रकार प्राप्त किया जा सकता है :

चरण 1 अंशों को जोड़िए

चरण 2 (उभयनिष्ठ या सार्व) हर को वही रखिए।

चरण 3 परिणाम को इस रूप में लिखिए : $\frac{\text{चरण 1 का परिणाम}}{\text{चरण 2 का परिणाम}}$

आइए, इस विधि से $\frac{3}{5}$ और $\frac{1}{5}$ को जोड़ें। हमें प्राप्त होता है : $\frac{3}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3+1}{5}=\frac{4}{5}$

अब बताओ $\frac{7}{12}$ और $\frac{3}{12}$ का क्या योग होगा।

प्रयास कीजिए

1. आकृतियों की सहायता से जोड़िए :

   (i) $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$ (ii) $\frac{2}{5}+\frac{3}{5}$ (iii) $\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}$

2. $\frac{1}{12}+\frac{1}{12}$ को जोड़ने पर हम क्या प्राप्त करते हैं?
   आप चित्र रूप में इसे कैसे दर्शा सकते हो? कागज़ मोड़ने की क्रिया द्वारा कैसे दर्शाया जा सकता है?

3. प्रश्न 1 और 2 जैसे पाँच और प्रश्न बनाइए।
   अपने मित्रों के साथ उन्हें हल कीजिए।

शेष ज्ञात करना

शर्मीला के पास एक केक का $\frac{5}{6}$ भाग था। उसने केक का $\frac{2}{6}$ भाग अपने छोटे भाई को दे दिया। उसके पास कितना केक बचा?

एक आकृति से इस स्थिति को सरलता से स्पष्ट किया जा सकता है। ध्यान दीजिए कि यहाँ समान भिन्न हैं (आकृति 7.15)।

आकृति 7.15

हम प्राप्त करते हैं $\frac{5}{6}-\frac{2}{6}=\frac{5-2}{6}=\frac{3}{6}$ अर्थात्, $\frac{1}{2}$।

(क्या यह समान भिन्नों को जोड़ने जैसी विधि नहीं है?)

इस प्रकार, हम दो समान भिन्नों का अंतर निम्न प्रकार से ज्ञात कर सकते हैं :

चरण 1 बड़े अंश में से छोटे अंश को घटाइए।

चरण 2 (उभयनिष्ठ) हर को वही रखिए।

चरण 3 भिन्न को इस रूप में लिखिए $\frac{\text{चरण 1 का परिणाम}}{\text{चरण 2 का परिणाम}}$

क्या अब हम $\frac{3}{10}$ में से $\frac{8}{10}$ को घटा सकते हैं?

प्रयास कीजिए

1. $\frac{7}{8}$ और $\frac{3}{8}$ का अंतर ज्ञात कीजिए।

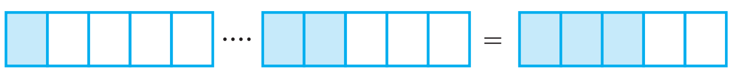
2. माँ ने एक गुड़ की पट्टी गोल आकृति में बनाई। उसने उसे 5 बराबर भागों में विभाजित किया। सीमा ने उसमें से एक टुकड़ा खा लिया। यदि मैं एक अन्य टुकड़ा खा लूँ, तो कितनी गुड़ की पट्टी शेष रहेगी?

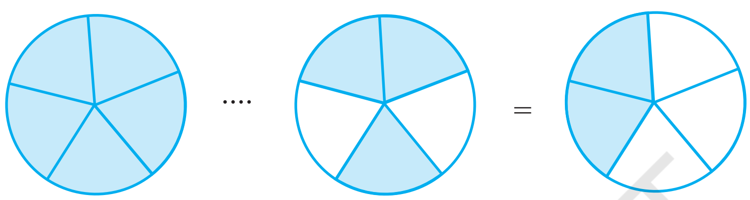
2020-21

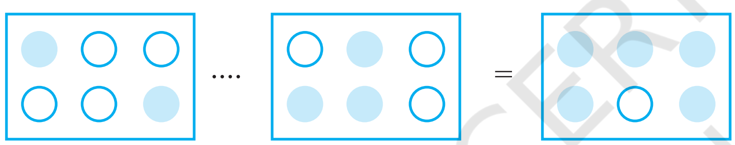
3. मेरी बड़ी बहन ने एक तरबूज को 16 बराबर भागों में विभाजित किया। मैंने इसके 7 टुकड़े खा लिए। मेरे मित्र ने 4 टुकड़े खाए। हमने मिलकर कुल कितना तरबूज खाया? मैंने अपने मित्र से कितना अधिक तरबूज खाया? कितना तरबूज शेष रह गया?
4. इसी प्रकार के पाँच प्रश्न और बनाइए और अपने मित्रों के साथ इन्हें कीजिए।

प्रश्नावली 7.5

1. निम्न भिन्नों को योग या घटाने के उचित रूप में लिखिए :

(a) 

(b) 

(c) 

2. हल कीजिए :

(a) $\frac{1}{18}+\frac{1}{18}$ (b) $\frac{8}{15}+\frac{3}{15}$ (c) $\frac{7}{7}-\frac{5}{7}$

(d) $\frac{1}{22}+\frac{21}{22}$ (e) $\frac{12}{15}-\frac{7}{15}$

(f) $\frac{5}{8}+\frac{3}{8}$ (g) $1-\frac{2}{3}$ $\left(1=\frac{3}{3}\right)$

(h) $\frac{1}{4}+\frac{0}{4}$ (i) $3-\frac{12}{5}$

3. शुभम ने अपने कमरे की दीवार के $\frac{2}{3}$ भाग पर पेंट किया। उसकी बहन माधवी ने उसकी सहायता की और उस दीवार के $\frac{1}{3}$ भाग पर पेंट किया। उन दोनों ने मिलकर कुल कितना पेंट किया?

4. रिक्त स्थानों को भरिए :

(a) $\frac{7}{10}-\square=\frac{3}{10}$ (b) $\square-\frac{3}{21}=\frac{5}{21}$

(c) $\square-\frac{3}{6}=\frac{3}{6}$ (d) $\square+\frac{5}{27}=\frac{12}{27}$

5. जावेद को संतरों की एक टोकरी का $\frac{5}{7}$ भाग मिला। टोकरी में संतरों का कितना भाग शेष रहा?

7.10.2 भिन्नों का जोड़ना और घटाना

हम समान भिन्नों को जोड़ना और घटाना सीख चुके हैं। जिन भिन्नों के हर समान नहीं हैं उन्हें जोड़ना और घटाना भी कठिन नहीं है। जब भिन्नों को जोड़ना और घटाना हो, तो हमें पहले दी हुई भिन्नों को समान हरों वाली भिन्नों में बदलना चाहिए और फिर आगे बढ़ना चाहिए।

$\frac{1}{5}$ में क्या जोड़ने पर $\frac{1}{2}$ प्राप्त होता है? इसका अर्थ है कि वांछित संख्या प्राप्त करने के लिए, $\frac{1}{2}$ में से $\frac{1}{5}$ को घटाया जाए।

चूँकि $\frac{1}{5}$ और $\frac{1}{2}$ असमान भिन्न हैं, इसलिए घटाने के लिए पहले हम इन्हें समान हरों वाली भिन्नों में बदलते हैं। $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{5}$ की समान हर वाली तुल्य भिन्न क्रमशः $\frac{5}{10}$ और $\frac{2}{10}$ हैं।

यह इसलिए है, क्योंकि $\frac{1}{2}=\frac{1\times5}{2\times5}=\frac{5}{10}$ और $\frac{1}{5}=\frac{1\times2}{5\times2}=\frac{2}{10}$ है।

अतः, $\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{5}{10}-\frac{2}{10}=\frac{5-2}{10}=\frac{3}{10}$

उदाहरण 8 : $\frac{5}{6}$ में से $\frac{3}{4}$ को घटाइए।

हल : हमें समान हर वाली $\frac{3}{4}$ और $\frac{5}{6}$ के तुल्य भिन्न बनाने की आवश्यकता है।

यह हर 4 और 6 का ल.स. है, जो 12 है।

अतः, $\frac{5}{6}-\frac{3}{4}=\frac{5\times2}{6\times2}-\frac{3\times3}{4\times3}=\frac{10}{12}-\frac{9}{12}=\frac{1}{12}$

उदाहरण 9 : $\frac{2}{5}$ और $\frac{1}{3}$ को जोड़िए।

हल : 5 और 3 का ल.स. 15 है।

अतः, $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=\frac{2\times3}{5\times3}+\frac{1\times5}{3\times5}=\frac{6}{15}+\frac{5}{15}=\frac{11}{15}$

उदाहरण 10 : सरल कीजिए : $\frac{3}{5}-\frac{7}{20}$

हल : 5 और 20 का ल.स. 20 है।

$$\text{अतः, } \frac{3}{5} - \frac{7}{20} = \frac{3 \times 4}{5 \times 4} - \frac{7}{20} = \frac{12}{20} - \frac{7}{20}$$

$$= \frac{12-7}{20} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

प्रयास कीजिए

1. $\frac{2}{5}$ और $\frac{3}{7}$ को जोड़िए।
2. $\frac{5}{7}$ में से $\frac{2}{5}$ को घटाइए।

हम मिश्रित भिन्नों को किस प्रकार जोड़ते या घटाते हैं?

मिश्रित भिन्नों को या तो एक पूर्ण भाग और एक उचित भिन्न के जोड़ के रूप में लिखा जा सकता है या पूर्ण रूप से एक अनुचित भिन्न (विषय भिन्न) के रूप में। मिश्रित भिन्नों को जोड़ने (या घटाने) की एक विधि यह है कि पूर्ण भागों और भिन्नीय भागों पर संक्रियाएँ अलग-अलग की जाएँ तथा दूसरी विधि यह है कि इन्हें पहले अनुचित भिन्नों में बदल लिया जाए और फिर इन्हें सीधे जोड़ा (या घटाया) जाए।

उदाहरण 11 : $2\frac{4}{5}$ और $3\frac{5}{6}$ को जोड़िए।

हल : $2\frac{4}{5} + 3\frac{5}{6} = 2 + \frac{4}{5} + 3 + \frac{5}{6} = 5 + \frac{4}{5} + \frac{5}{6}$.

अब, $\frac{4}{5} + \frac{5}{6} = \frac{4 \times 6}{5 \times 6} + \frac{5 \times 5}{6 \times 5}$ (चूँकि 5 और 6 का ल.स. $= 30$)।

$$= \frac{24}{30} + \frac{25}{30} = \frac{49}{30} = \frac{30+19}{30}$$

$$= 1 + \frac{19}{30}$$

इस प्रकार, $5 + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} = 5 + 1 + \frac{19}{30}$

$$= 6 + \frac{19}{30} = 6\frac{19}{30}$$

अतः, $2\frac{4}{5} + 3\frac{5}{6} = 6\frac{19}{30}$

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए :

क्या आप इस प्रश्न को हल करने की कोई अन्य प्रक्रिया ज्ञात कर सकते हैं?

उदाहरण 12 : $4\frac{2}{5} - 2\frac{1}{5}$ ज्ञात कीजिए।

हल : पूर्ण संख्या 4 और 2 तथा भिन्नात्मक संख्या $\frac{2}{5}$ और $\frac{1}{5}$ को अलग-अलग घटाया जा सकता है।

ध्यान दीजिए कि $4 > 2$ है और $\frac{2}{5} > \frac{1}{5}$ है।

अत:, $4\frac{2}{5} - 2\frac{1}{5} = (4-2) + \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}\right) = 2 + \frac{1}{5} = 2\frac{1}{5}$

उदाहरण 13 : सरल कीजिए : $8\frac{1}{4} - 2\frac{5}{6}$

हल : यहाँ $8 > 2$ है और $\frac{1}{4} < \frac{5}{6}$ है। इस प्रश्न को निम्न प्रकार हल कर सकते हैं।

$8\frac{1}{4} = \frac{(8\times4)+1}{4} = \frac{33}{4}$ and $2\frac{5}{6} = \frac{2\times6+5}{6} = \frac{17}{6}$

अब,

$$\frac{33}{4} - \frac{17}{6} = \frac{33\times3}{12} - \frac{17\times2}{12} \quad \text{(चूँकि 4 और 6 का ल. स. 12 है)}$$

$$= \frac{99-34}{12} = \frac{65}{12} = 5\frac{5}{12}$$

प्रश्नावली 7.6

1. हल कीजिए :

(a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{7}$ (b) $\frac{3}{10} + \frac{7}{15}$ (c) $\frac{4}{9} + \frac{2}{7}$ (d) $\frac{5}{7} + \frac{1}{3}$

(e) $\frac{2}{5} + \frac{1}{6}$ (f) $\frac{4}{5} + \frac{2}{3}$ (g) $\frac{3}{4} - \frac{1}{3}$ (h) $\frac{5}{6} - \frac{1}{3}$

(i) $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}$ (j) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ (k) $1\frac{1}{3} + 3\frac{2}{3}$ (l) $4\frac{2}{3} + 3\frac{1}{4}$

(m) $\frac{16}{5} - \frac{7}{5}$ (n) $\frac{4}{3} - \frac{1}{2}$

2. सरिता ने $\frac{2}{5}$ मी. रिबन खरीदा और ललिता ने $\frac{3}{4}$ मी. दोनों ने कुल कितना रिबन खरीदा?

3. नैना को केक का $1\frac{1}{2}$ भाग मिला और नजमा को $1\frac{1}{3}$ भाग। दोनों को केक का कितना भाग मिला?

4. रिक्त स्थान भरिए : (a) $\square - \frac{5}{8} = \frac{1}{4}$ (b) $\square - \frac{1}{5} = \frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{2} - \square = \frac{1}{6}$

5. योग – व्यवकलन तालिका को पूरा कीजिए :

(a) ($+$ →, $-$ ↓)

$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	

(b) ($+$ →, $-$ ↓)

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	

6. $\frac{7}{8}$ मीटर तार के दो टुकड़े हो जाते हैं। इनमें से एक टुकड़ा $\frac{1}{4}$ मीटर है। दूसरे टुकड़े की लंबाई क्या है?

7. नंदिनी का घर उसके स्कूल से $\frac{9}{10}$ किमी दूर है। वह कुछ दूरी पैदल चलती है और फिर $\frac{1}{2}$ किमी की दूरी बस द्वारा तय करके स्कूल पहुँचती है। वह कितनी दूरी पैदल चलती है?

8. आशा और सेमुअल के पास एक ही माप की पुस्तक रखने वाली दो अलमारियाँ हैं। आशा की अलमारी पुस्तकों से $\frac{5}{6}$ भाग भरी है और सेमुअल की अलमारी पुस्तकों से $\frac{2}{5}$ भाग भरी है। किसकी अलमारी अधिक भरी हुई है और कितनी अधिक?

9. जयदेव स्कूल के मैदान का $2\frac{1}{5}$ मिनट में चक्कर लगा लेता है। राहुल इसी कार्य को करने में $\frac{7}{4}$ मिनट का समय लेता है। इसमें कौन कम समय लेता है और कितना कम?

हमने क्या चर्चा की?

1. (a) एक भिन्न ऐसी संख्या है जो एक पूर्ण के एक भाग को निरूपित करती है या संख्या रेखा पर संक्रियाओं को निरूपित करती है। पूर्ण एक अकेली वस्तु भी हो सकती है और वस्तुओं का समूह भी।

(b) किसी स्थिति में गिने हुए भागों को भिन्न में व्यक्त करने के लिए यह आवश्यक है कि उसके सभी भाग बराबर हों।

2. भिन्न $\frac{5}{7}$ में, 5 अंश तथा 7 भिन्न का हर कहलाता है।
3. भिन्नों को संख्या रेखा पर भी दर्शाया जा सकता है। प्रत्येक भिन्न के लिए संख्या रेखा पर एक निश्चित बिंदु होता है।
4. एक उचित भिन्न में अंश, हर से छोटा होता है और विषम भिन्न में हर हमेशा अंश से बड़ा होता है। विषम भिन्न को एक पूर्ण और एक भाग के रूप में भी लिखा जा सकता है। इस स्थिति में यह भिन्न, मिश्रित कहलाती है।
5. दो भिन्न तुल्य भिन्न कहलाती हैं यदि वे समान मात्रा को निरूपित करती हों। प्रत्येक उचित या विषम भिन्न की अनेक तुल्य भिन्न होती हैं। एक दी हुई भिन्न की तुल्य भिन्न निकालने के लिए हम भिन्न के अंश तथा हर दोनों को समान शून्येतर संख्या से गुणा या भाग कर सकते हैं।
6. एक भिन्न अपने सरलतम रूप (न्यूनतम) में होगी यदि उसके अंश तथा हर में 1 के अलावा कोई दूसरा उभयनिष्ठ गुणनखंड न हो।