

दशमलव



0651CH08

अध्याय 8

8.1 भूमिका

सविता और शमा स्टेशनरी का कुछ सामान खरीदने बाज़ार जा रही थीं। सविता ने कहा, “मेरे पास ₹ 5.75 हैं।” शमा ने कहा, “मेरे पास ₹ 7.50 हैं।” वे दोनों रुपयों और पैसों को दशमलव-रूप में लिखना जानती थीं।

इसलिए सविता ने कहा, मेरे पास ₹ 5.75 हैं और शमा ने कहा, मेरे पास ₹ 7.50 हैं। क्या उन दोनों ने सही लिखा था?

हम जानते हैं कि बिंदु एक दशमलव को दर्शाता है। इस अध्याय में, हम दशमलव के विषय में और अधिक सीखेंगे।



8.2 दशांश

रवि तथा राजू ने अपनी-अपनी पेंसिलों की लंबाई मापी। रवि की पेंसिल 7 सेमी 5 मिमी लंबी थी और राजू की 8 सेमी 3 मिमी लंबी थी। क्या आप इन लंबाइयों को सेमी के साथ दशमलव रूप में लिख सकते हो?

हम जानते हैं कि 10 मिमी = 1 सेमी

अतः 1 मिमी = $\frac{1}{10}$ सेमी

अब रवि के पेंसिल की लंबाई = 7 सेमी 5 मिमी

= $7\frac{5}{10}$ सेमी

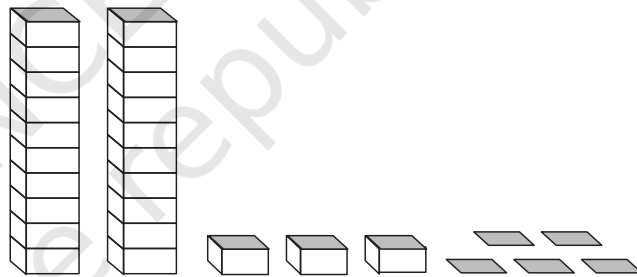
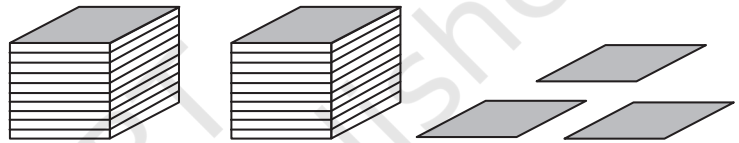
अर्थात् 7 सेमी और 1 सेमी का पाँच दशांश भाग
 राजू के पेंसिल की लंबाई = 8 सेमी 3 मिमी
 = $8\frac{3}{10}$ सेमी

अर्थात् 8 सेमी और 1 सेमी का तीन दशांश भाग
 आइए, पिछले सीखे हुए को पुनः याद करें :

यदि हम इकाइयों को खंडों द्वारा दर्शाएँ तो एक इकाई एक खंड, दो इकाई दो खंड और इसी नियमानुसार आगे भी।

एक खंड को यदि दस बराबर भागों में बाँटें तो प्रत्येक भाग एक इकाई का $\frac{1}{10}$ (एक दशांश) है, दो भाग, दो दशांश भाग को दर्शाते हैं और पाँच भाग, पाँच दशांश भाग को आगे और इसी प्रकार दो खंडों और तीन भागों (दशांश) के मेल को इस प्रकार लिखा जाएगा :

इकाई	दशांश
(1)	$(\frac{1}{10})$
2	3



इसे हम 2.3 भी लिख सकते हैं और जो दो दशमलव तीन पढ़ा जाएगा।
 आइए, एक अन्य उदाहरण लें जहाँ एक से अधिक इकाइयाँ हैं। प्रत्येक मीनार 10 इकाइयों को दर्शाती हैं। अतः यहाँ दर्शाई गई संख्या इस प्रकार है :

दहाई	इकाई	दशांश
(10)	(1)	$(\frac{1}{10})$
2	3	5

अतः $20 + 3 + \frac{5}{10} = 23.5$

इसे हम तेईस दशमलव पाँच पढ़ेंगे।

प्रयास कीजिए

1. क्या आप निम्न को दशमलव रूप में लिख सकते हैं?

सैकड़ा	दहाई	इकाई	दशांश
(100)	(10)	(1)	$(\frac{1}{10})$
5	3	8	1
2	7	3	4
3	5	4	6

2. रवि और राजू की पेंसिलों की लंबाइयों को दशमलव का प्रयोग कर सेमी में लिखें।

3. प्रश्न 1 के समरूप तीन अन्य उदाहरण बनाएँ और उन्हें हल करें।

संख्या रेखा पर निरूपण

हमने भिन्नो को संख्या रेखा पर निरूपित किया। आइए, अब दशमलवों को भी संख्या रेखा पर निरूपित करना सीखें। आइए 0.6 को संख्या रेखा पर निरूपित करें।

हम जानते हैं कि 0.6 शून्य से बड़ा है लेकिन एक से कम। इसमें 6-दशांश हैं। संख्या रेखा पर 0 और 1 के बीच की लंबाई को 10 बराबर भागों में विभाजित कीजिए और उनमें से छः भाग कीजिए जैसा कि नीचे दिखाया गया है।



0 और 1 के बीच पाँच संख्याएँ लिखो और उन्हें संख्या रेखा पर दर्शाओ।

क्या अब आप 2.3 को संख्या रेखा पर दर्शा सकते हैं? जाँचिए कि 2.3 में कितनी इकाइयाँ और कितने दशांश हैं। संख्या रेखा पर यह कहाँ स्थित होगी?

1.4 को संख्या रेखा पर दर्शाओ।

उदाहरण 1 : निम्न संख्याओं को स्थानीय मान सारणी में लिखिए :

(a) 20.5 (b) 4.2

हल : स्थानीय मान सारणी बनाकर संख्या के प्रत्येक अंक को उचित स्थानीय मान देकर उसमें निम्न प्रकार से लिखें :

	दहाई (10)	इकाई (1)	दशांश ($\frac{1}{10}$)
20.5	2	0	5
4.2	0	4	2

उदाहरण 2 : निम्न में से प्रत्येक को दशमलव रूप में लिखिए :

(a) दो इकाइयाँ और 5-दशांश

(b) तीस और 1-दशांश

हल : (a) दो इकाइयाँ और 5-दशांश

$$= 2 + \frac{5}{10} = 2.5$$

(b) तीस और 1-दशांश

$$= 30 + \frac{1}{10} = 30.1$$

उदाहरण 3 : प्रत्येक को दशमलव रूप में लिखिए :

(a) $30 + 6 + \frac{2}{10}$ (b) $600 + 2 + \frac{8}{10}$

हल : (a) $30 + 6 + \frac{2}{10}$

ज्ञात करें कि इस संख्या में कितनी दहाइयाँ, कितनी इकाइयाँ और कितने दशांश हैं।

इसमें 3 दहाइयाँ, 6 इकाइयाँ और 2 दशांश हैं।

अतः दशमलव रूप 36.2 होगा।

(b) $600 + 2 + \frac{8}{10}$

ध्यान से देखने पर पता चलता है कि इस संख्या में 6 सैकड़ा, कोई दहाई अंक नहीं, 2 इकाइयाँ और 8 दशांश हैं।

अतः दशमलव रूप 602.8 होगा।

भिन्न, दशमलव रूप में

हम देख चुके हैं कि एक भिन्न जिसका हर 10 हो, को किस प्रकार दशमलव रूप में लिखा जा सकता है।

आइए, निम्न को दशमलव रूप में लिखने का प्रयास करें (a) $\frac{22}{10}$ (b) $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \text{(a) हम जानते हैं, } \frac{11}{5} &= \frac{22}{10} = \frac{20+2}{10} \\ &= \frac{20}{10} + \frac{2}{10} = 2 + \frac{2}{10} = 2.2 \end{aligned}$$

$$\text{अतः, } \frac{11}{5} = 2.2 \text{ (दशमलव रूप में)}$$

(b) $\frac{1}{2}$ में हर 2 है। दशमलव रूप में लिखने के लिए हर का 10 होना आवश्यक

है। तुल्य भिन्न में बदलना हम पहले सीख चुके हैं। अतः, $\frac{1}{2} = \frac{1 \times 5}{2 \times 5} = \frac{5}{10} = 0.5$

इस प्रकार, $\frac{1}{2}$ का दशमलव रूप 0.5 है।

प्रयास कीजिए

$\frac{3}{2}, \frac{4}{5}, \frac{8}{5}$ को दशमलव रूप में लिखिए

दशमलव, भिन्न रूप में

अब तक हमने सीखा है कि किस प्रकार भिन्न जिनका हर 10, 2 या 5 हो, को किस प्रकार दशमलव रूप में लिख सकते हैं।

क्या हम 1.2 को भिन्न संख्या के रूप में लिख सकते हैं।

आइए देखें :

$$1.2 = 1 + \frac{2}{10} = \frac{10}{10} + \frac{2}{10} = \frac{12}{10}$$



प्रश्नावली 8.1

1. निम्न के लिए दी गई सारणी में संख्याएँ लिखिए :

(a)

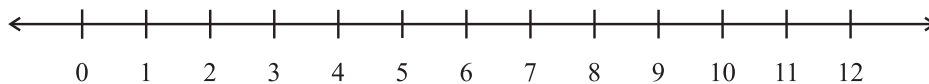
दहाई इकाई दशांश

(b)

सैकड़ दहाई दशांश

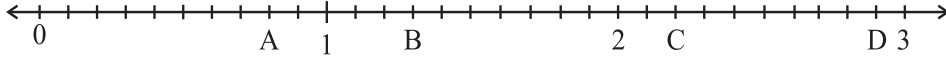
सैकड़ा	दहाई	इकाई	दशांश
(100)	(10)	(1)	$(\frac{1}{10})$

2. निम्न दशमलव संख्याओं को स्थानीय मान सारणी में लिखिए :
- (a) 19.4 (b) 0.3 (c) 10.6 (d) 205.9
3. निम्न में से प्रत्येक को दशमलव रूप में लिखिए :
- (a) 7 दशांश
 (b) 2 दहाई, 9 दशांश
 (c) चौदह दशमलव छः
 (d) एक सौ और 2 इकाई
 (e) छः सौ दशमलव आठ
4. निम्न को दशमलव रूप में व्यक्त कीजिए :
- (a) $\frac{5}{10}$ (b) $3 + \frac{7}{10}$ (c) $200 + 60 + 5 + \frac{1}{10}$
 (d) $70 + \frac{8}{10}$ (e) $\frac{88}{10}$ (f) $4\frac{2}{10}$ (g) $\frac{3}{2}$
 (h) $\frac{2}{5}$ (i) $\frac{12}{5}$ (j) $3\frac{3}{5}$ (k) $4\frac{1}{2}$
5. निम्न दशमलव संख्याओं को भिन्न के रूप में लिखकर न्यूनतम (सरलतम) रूप में बदलिए :
- (a) 0.6 (b) 2.5 (c) 1.0 (d) 3.8
 (e) 13.7 (f) 21.2 (g) 6.4
6. सेमी का प्रयोग कर निम्न को दशमलव रूप में बदलिए :
- (a) 2 मिमी (b) 30 मिमी (c) 116 मिमी (d) 4 सेमी 2 मिमी
 (e) 11 सेमी 52 मिमी (f) 83 मिमी
7. संख्या रेखा पर किन दो पूर्ण संख्याओं के बीच निम्न संख्याएँ स्थित हैं? इनमें से कौन सी पूर्ण संख्या दी हुई दशमलव संख्या के अधिक निकट है?
- (a) 0.8 (b) 5.1 (c) 2.6 (d) 6.4 (e) 9.0 (f) 4.9



8. निम्न को संख्या रेखा पर दर्शाओ :
- (a) 0.2 (b) 1.9 (c) 1.1 (d) 2.5

9. दी हुई संख्या रेखा पर स्थित A, B, C, D बिंदुओं के लिए दशमलव संख्या लिखिए :



10. (a) रमेश की कॉपी की लंबाई 9 सेमी 5 मिमी है। सेमी में इसकी लंबाई क्या होगी?
 (b) चने के एक छोटे पौधे की लंबाई 65 मिमी है। इसकी लंबाई सेमी में व्यक्त कीजिए?

8.3 शतांश

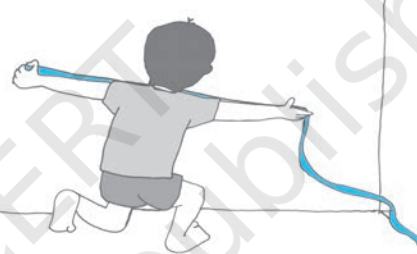
डेविड अपने कमरे की लंबाई माप रहा था। उसने देखा कि उसके कमरे की लंबाई 4 मी और 25 सेमी है।

वह इस लंबाई को मीटर में लिखना चाहता था। क्या आप उसकी मदद कर सकते हैं? एक सेमी एक मीटर का कौन-सा हिस्सा होगा?

$$1 \text{ सेमी} = \frac{1}{100} \text{ मी या एक मीटर का एक शतांश}$$

भाग।

इस प्रकार 25 सेमी = $\frac{25}{100}$ मी $\frac{1}{100}$ का अर्थ है एक पूरे के 100 हिस्से करने पर उसमें से एक हिस्सा। जैसा



हमने $\frac{1}{10}$ के लिए किया या आइए चित्र द्वारा इसे भी दिखाएँ।

एक वर्ग को दस बराबर भागों में बाँटिए।
 छायांकित आयत इस वर्ग का कौन-सा भाग है?

यह $\frac{1}{10}$ या एक दशांश या 0.1 (आकृति (i) देखिए)

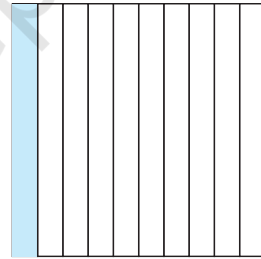
अब इसमें से प्रत्येक आयत को दस बराबर भागों में बाँटें।

इस प्रकार हमें 100 छोटे-छोटे वर्ग प्राप्त होते हैं (आकृति (ii) देखिए) इसमें प्रत्येक छोटा वर्ग बड़े वर्ग का कौन सा भाग है?

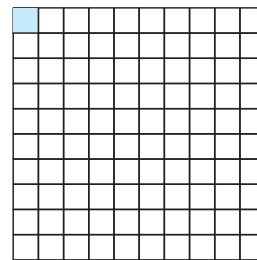
प्रत्येक छोटा वर्ग बड़े वर्ग का $\frac{1}{100}$ या एक शतांश भाग है।

दशमलव रूप में हम $\frac{1}{100} = 0.01$ लिखेंगे और इसे 'शून्य दशमलव शून्य एक' पढ़ेंगे।

यदि हम बड़े वर्ग के 8 वर्ग छायांकित करें, 15 वर्ग छायांकित करें, 50 वर्ग छायांकित करें, 92 वर्ग छायांकित करें तो वह पूरे वर्ग का कौन-सा भाग होगा?

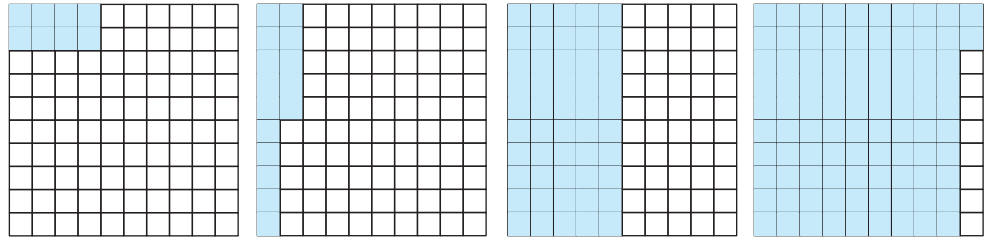


आकृति (i)



आकृति (ii)

उपरोक्त को हल करने के लिए निम्न चित्रों की सहायता लें :



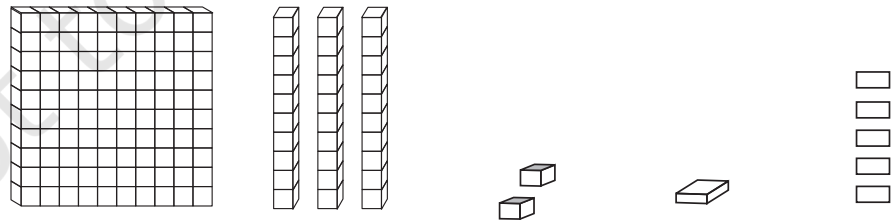
छायांकित भाग	साधारण भिन्न	दशमलव संख्या
8 वर्ग	$\frac{8}{100}$	0.08
15 वर्ग	$\frac{15}{100}$	0.15
50 वर्ग	_____	_____
92 वर्ग	_____	_____

आइए, कुछ और स्थानीय मान सारणियों को देखें।

इकाई (1)	दशांश ($\frac{1}{10}$)	शतांश ($\frac{1}{100}$)
2	4	3

उपरोक्त सारणी में दर्शाई गई संख्या $2 + \frac{4}{10} + \frac{3}{100}$ है। दशमलव रूप में इसे 2.43 लिखेंगे जिसे 'दो दशमलव चार तीन' पढ़ेंगे।

उदाहरण 4 : खंडों में दी गई सूचना के आधार पर तालिका में दिए गए खाली स्थानों में दशमलव रूप में संख्याएँ लिखें



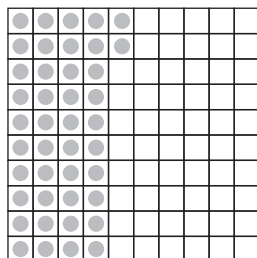
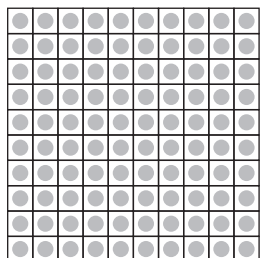
सौ का एक खंड दस के 3 खंड इकाई के 2 खंड दशांश का 1 खंड शतांश के 5 खंड

हल :

सैकड़ा	दहाई	इकाई	दशांश	शतांश
(100)	(10)	(1)	($\frac{1}{10}$)	($\frac{1}{100}$)
1	3	2	1	5

अतः संख्या होगी $100 + 30 + 2 + \frac{1}{10} + \frac{5}{100} = 132.15$

उदाहरण 5 : तालिका के रिक्त स्थानों में दशमलव रूप में संख्या लिखिए :



इकाई	दशांश	शतांश
(1)	$(\frac{1}{10})$	$(\frac{1}{100})$

हल

:

इकाई	दशांश	शतांश
(1)	$(\frac{1}{10})$	$(\frac{1}{100})$
1	4	2

अतः संख्या 1.42 है।

उदाहरण 6 : दी गई स्थानीय मान सारणी से संख्या को दशमलव रूप में लिखिए :

सैकड़ा	दहाई	इकाई	दशांश	शतांश
(100)	(10)	(1)	$(\frac{1}{10})$	$\frac{1}{100}$
2	4	3	2	5

हल

: संख्या होगी $2 \times 100 + 4 \times 10 + 3 \times 1 + 2 \times \frac{1}{10} + 5 \times \frac{1}{100}$
 $= 200 + 40 + 3 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100} = 243.25$

हम देख सकते हैं कि जैसे-जैसे हम बाईं से दाईं ओर जाते हैं, हर चरण पर गुणनखंड, पिछले गुणक का $\frac{1}{10}$ हो जाता है।

पहले अंक 2 को 100 से गुणा किया, अगले अंक 4 को 10 से

(100 का $\frac{1}{10}$); अगले अंक 3 को 1 से गुणा किया इसके बाद, अगला

गुणनखंड $\frac{1}{10}$ है और फिर $\frac{1}{100}$ (अर्थात् $\frac{1}{10}$ का $\frac{1}{10}$) है।

एक दशमलव संख्या में दशमलव बिंदु हमेशा इकाई और दसवें स्थानों के बीच लगाया जाता है।

अतः अब स्वाभाविक रूप से हम स्थानीय मान सारणी को शतांश से (सौवें का $\frac{1}{10}$) हजारवें स्थान तक बढ़ा सकते हैं।

आइए, कुछ उदाहरणों को हल करें।

उदाहरण 7 : दशमलव रूप में लिखिए :

(a) $\frac{4}{5}$ (b) $\frac{3}{4}$ (c) $\frac{7}{1000}$

हल : (a) हमें $\frac{4}{5}$ के तुल्य ऐसी भिन्न संख्या निकालनी है जिसका हर 10 हो।

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \times 2}{5 \times 2} = \frac{8}{10} = 0.8$$

(b) यहाँ, हमें $\frac{3}{4}$ के तुल्य एक ऐसी भिन्न संख्या निकालनी है जिसका हर 10 या 100 हो। परंतु ऐसी कोई पूर्ण संख्या नहीं जिसे 4 से गुणा करने पर 10 प्राप्त हो। अतः हमें हर को 100 में ही बदलना पड़ेगा।

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 25}{4 \times 25} = \frac{75}{100} = 0.75$$

(c) $\frac{7}{1000}$, यहाँ दशांश और शतांश स्थान शून्य है

अतः हम $\frac{7}{1000} = 0.007$ लिखते हैं

उदाहरण 8 : भिन्नों को लघुतम रूप में लिखिए :

(a) 0.04 (b) 2.34 (c) 0.342

हल : (a) $0.04 = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$

(b) $2.34 = 2 + \frac{34}{100} = 2 + \frac{34 \div 2}{100 \div 2} = 2 + \frac{17}{50} = 2\frac{17}{50}$

(c) $0.342 = \frac{342}{1000} = \frac{342 \div 2}{1000 \div 2} = \frac{171}{500}$

उदाहरण 9 : प्रत्येक को दशमलव रूप में लिखिए :

(a) $200 + 30 + 5 + \frac{2}{10} + \frac{9}{100}$ (b) $50 + \frac{1}{10} + \frac{6}{100}$

(c) $16 + \frac{3}{10} + \frac{5}{1000}$

हल : (a) $200 + 30 + 5 + \frac{2}{10} + \frac{9}{100}$
 $= 235 + 2 \times \frac{1}{10} + 9 \times \frac{1}{100}$
 $= 235.29$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad & 50 + \frac{1}{10} + \frac{6}{100} \\ & = 50 + 1 \times \frac{1}{10} + 6 \times \frac{1}{100} \\ & = 50.16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad & 16 + \frac{3}{10} + \frac{5}{1000} \\ & = 16 + 3 \times \frac{1}{10} + 0 \times \frac{1}{100} + 5 \times \frac{1}{1000} \\ & = 16.305 \end{aligned}$$

उदाहरण 10 : निम्न में से प्रत्येक को दशमलव रूप में लिखिए :

- (a) तीन सौ छः और सात शतांश
 (b) ग्यारह दशमलव दो तीन पाँच
 (c) नौ और पच्चीस हजारवें

हल

- : (a) तीन सौ छः और सात शतांश

$$= 306 + \frac{7}{100}$$

$$= 306 + 0 \times \frac{1}{10} + 7 \times \frac{1}{100} = 306.07$$

- (b) ग्यारह दशमलव दो तीन पाँच = 11.235

- (c) नौ और पच्चीस हजारवें

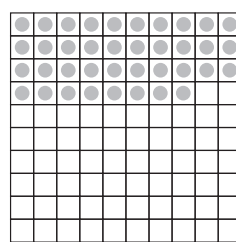
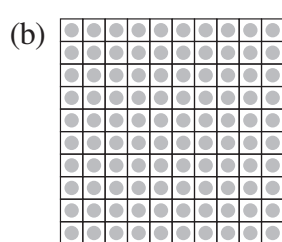
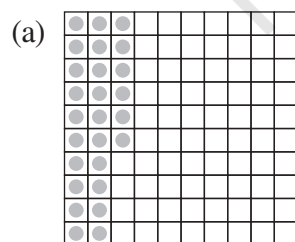
$$= 9 + \frac{25}{1000}$$

$$\left(\text{पच्चीस हजारवें} = \frac{25}{1000} = \frac{20}{1000} + \frac{5}{1000} = \frac{2}{100} + \frac{5}{1000} \right)$$

$$\text{अतः संख्या} = 9 + \frac{0}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000} = 9.025$$

प्रश्नावली 8.2

1. इन बक्सों की सहायता से सारणी को पूरा कर दशमलव रूप में लिखिए :



(c)

इकाई	दहाई	शतांश	अंक
(a)			
(b)			
(c)			

2. स्थानीय मान सारणी को देखकर दशमलव रूप में लिखिए :

	सैकड़ा	दहाई	इकाई	दशांश	शतांश	हजारवाँ
	100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$
(a)	0	0	3	2	5	0
(b)	1	0	2	6	3	0
(c)	0	3	0	0	2	5
(d)	2	1	1	9	0	2
(e)	0	1	2	2	4	1

3. निम्न दशमलवों को स्थानीय मान सारणी बनाकर लिखिए :

(a) 0.29 (b) 2.08 (c) 19.60 (d) 148.32 (e) 200.812

4. निम्न में से प्रत्येक को दशमलव रूप में लिखिए :

(a) $20 + 9 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100}$ (b) $137 + \frac{5}{100}$
 (c) $\frac{7}{10} + \frac{6}{100} + \frac{4}{1000}$ (d) $23 + \frac{2}{10} + \frac{6}{1000}$
 (e) $700 + 20 + 5 + \frac{9}{100}$

5. निम्न दशमलवों को शब्दों में लिखिए :

(a) 0.03 (b) 1.20 (c) 108.56 (d) 10.07
 (e) 0.032 (f) 5.008

6. संख्या रेखा के किन दो बिंदुओं के बीच निम्न संख्याएँ स्थित हैं?

(a) 0.06 (b) 0.45 (c) 0.19 (d) 0.66 (e) 0.92 (f) 0.57

7. न्यूनतम रूप में भिन्न बनाकर लिखिए :

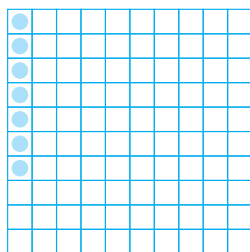
(a) 0.60 (b) 0.05 (c) 0.75 (d) 0.18 (e) 0.25
 (f) 0.125 (g) 0.066

8.4 दशमलवों की तुलना

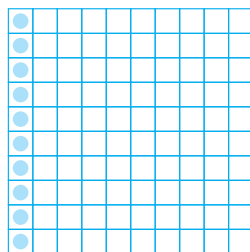
क्या आप बता सकते हैं कि कौन सी संख्या बड़ी है, 0.07 या 0.1?

दो समान आकार के वर्गाकार कागज़ लीजिए। उन्हें 100 बराबर भागों में बाँटिए। $0.07 = \frac{7}{100}$ दर्शाने के लिए हमें 100 में से 7 भाग छायांकित करने होंगे।

अब $0.1 = \frac{1}{10} = \frac{10}{100}$, अतः 0.1 को दर्शाने के लिए 100 में से 10 भाग छायांकित करने होंगे।



$$0.07 = \frac{7}{100}$$



$$0.1 = \frac{1}{10} = \frac{10}{100}$$

इस प्रकार $0.1 > 0.07$

आइए, अब 32.55 और 32.5 की तुलना करें। इस स्थिति में हम पहले पूर्ण भाग की तुलना करते हैं हम यह देखते हैं कि दोनों संख्याओं का पूर्ण भाग 32 है अर्थात् समान हैं। यद्यपि हम जानते हैं कि ये दो संख्याएँ समान नहीं हैं। इसलिए अब हम इनके दशांश भागों की तुलना करते हैं। हम पाते हैं कि 32.55 और 32.5 के दशांश भाग भी समान हैं। अब हम इनके शतांश भाग की तुलना करते हैं, हम पाते हैं,

$$32.55 = 32 + \frac{5}{10} + \frac{5}{100} \text{ और } 32.5 = 32 + \frac{5}{10} + \frac{0}{100}$$

इसलिए, $32.55 > 32.5$, क्योंकि 32.55 के शतांश स्थान का अंक 32.5 के शतांश स्थान के अंक से बड़ा है।

उदाहरण 11 : कौन सी संख्या बड़ी है?

- (a) 1 या 0.99 (b) 1.09 या 1.093

हल : (a) $1 = 1 + \frac{0}{10} + \frac{0}{100}$, $0.99 = 0 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100}$

संख्या 1 का पूर्ण भाग 1, 0.99 के पूर्ण भाग 0 से बड़ा है।

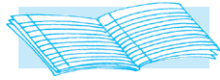
अतः $1 > 0.99$

(b) $1.09 = 1 + \frac{0}{10} + \frac{9}{100} + \frac{0}{1000}$

$$1.093 = 1 + \frac{0}{10} + \frac{9}{100} + \frac{3}{1000}$$

दोनों संख्याओं के शतांश स्थान तक के सभी अंक समान हैं परंतु 1.093 के हजारवें स्थान का अंक 1.09 के अंक से बड़ा है।

अतः $1.093 > 1.09$



प्रश्नावली 8.3

1. कौन सी बड़ी है? कारण भी लिखिए :

- (a) 0.3 या 0.4 (b) 0.07 या 0.02 (c) 3 या 0.8
 (d) 0.5 या 0.05 (e) 1.23 या 1.2 (f) 0.099 या 0.19
 (g) 1.5 या 1.50 (h) 1.431 या 1.490 (i) 3.3 या 3.300
 (j) 5.64 या 5.603
 (k) पाँच ऐसे ही उदाहरण लिखकर उनमें से बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए।

8.5 दशमलवों का प्रयोग

8.5.1 धन

हम जानते हैं कि 100 पैसे = ₹ 1

$$\text{अतः 1 पैसा} = ₹ \frac{1}{100} = ₹ 0.01$$

$$\text{इस प्रकार, 65 पैसे} = ₹ \frac{65}{100} = ₹ 0.65$$

$$\text{और 5 पैसे} = ₹ \frac{5}{100} = ₹ 0.05$$

105 पैसे कितने होंगे?

यह 1 रुपया 5 पैसे होगा = ₹ 1.05

प्रयास कीजिए

- (i) 2 रुपये 5 पैसे और 2 रुपये 50 पैसे को दशमलव में लिखिए।
 (ii) 20 रुपये 7 पैसे और 21 रुपये 75 पैसे को दशमलव में लिखिए।

8.5.2 लंबाई

महेश अपनी मेज़ की ऊपरी सतह को मीटर में मापना चाहता है। उसके पास 50 सेमी वाला फीता है। उसने पाया कि मेज़ की ऊपरी सतह की लंबाई 156 सेमी थी। इसकी लंबाई मीटर में कितनी होगी?

$$1 \text{ सेमी} = \frac{1}{100} \text{ मी या } 0.01 \text{ मी}$$

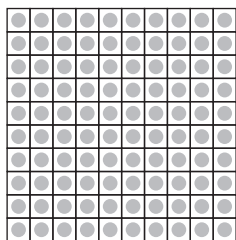
$$\text{अतः 56 सेमी} = \frac{56}{100} \text{ मी} = 0.56 \text{ मी}$$

इस प्रकार मेज़ की ऊपरी सतह की लंबाई
 156 सेमी = 100 सेमी + 56 सेमी

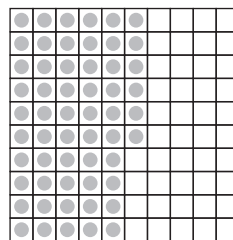
$$= 1 \text{ मी} + \frac{56}{100} \text{ मी} = 1.56 \text{ मी}$$



महेश इस लंबाई को चित्र द्वारा दर्शाना चाहता है। उसने समान आकार के वर्गाकार कागज़ों को 100 बराबर भागों में बाँटा और प्रत्येक छोटे वर्ग को एक सेमी माना।



100 सेमी



56 सेमी

प्रयास कीजिए

1. क्या 4 मिमी को दशमलव का प्रयोग कर सेमी में लिख सकते हैं?
2. 7 सेमी 5 मिमी को दशमलव का प्रयोग कर सेमी में कैसे लिखेंगे?
3. क्या अब आप 52 मी को दशमलव का प्रयोग करके किमी में लिख सकते हैं? दशमलव का प्रयोग कर 340 मी को किमी में कैसे लिखेंगे? 2008 मी को किमी में कैसे लिखेंगे?

8.5.3 वज़न (या भार)

नंदू ने 500 ग्राम आलू, 250 ग्राम शिमला मिर्च, 700 ग्राम प्याज़, 500 ग्राम टमाटर, 100 ग्राम अदरक और 300 ग्राम मूली खरीदी। सब्जियों का कुल वज़न कितना है? आइए, सभी सब्जियों के वज़न को जोड़ें :

$$500 \text{ ग्रा} + 250 \text{ ग्रा} + 700 \text{ ग्रा} + 500 \text{ ग्रा} + 100 \text{ ग्रा} + 300 \text{ ग्रा} = 2350 \text{ ग्रा}$$

हम जानते हैं कि 1000 ग्रा = 1 किग्रा

$$\text{अतः } 1 \text{ ग्रा} = \frac{1}{1000} \text{ किग्रा} = 0.001 \text{ किग्रा}$$

$$\text{इस प्रकार } 2350 \text{ ग्रा} = 2000 \text{ ग्रा} + 350 \text{ ग्रा} = \frac{2000}{1000} \text{ किग्रा} + \frac{350}{1000} \text{ किग्रा}$$

$$= 2 \text{ किग्रा} + 0.350 \text{ किग्रा} \text{ (क्योंकि } \frac{1}{1000} \text{ किग्रा} = 0.001 \text{ किग्रा)}$$

$$= 2.350 \text{ किग्रा}$$

$$\text{अर्थात् } 2350 \text{ ग्रा} = 2 \text{ किग्रा } 350 \text{ ग्रा} = 2.350 \text{ किग्रा}$$

अतः थैले में कुल 2.350 किग्रा सब्जी थी।

प्रयास कीजिए

1. क्या आप 456 ग्रा को दशमलव का प्रयोग कर किग्रा में लिख सकते हैं?
2. किग्रा 9 ग्रा को दशमलव का प्रयोग कर किग्रा में कैसे लिख सकते हैं?



प्रश्नावली 8.4

1. दशमलव का प्रयोग कर ₹ में बदलिए :
 - (a) 5 पैसे
 - (b) 75 पैसे
 - (c) 20 पैसे
 - (d) 50 रुपये 90 पैसे
 - (e) 725 पैसे

2. दशमलव का प्रयोग कर मीटर में व्यक्त करिए :
 - (a) 15 सेमी
 - (b) 6 सेमी
 - (c) 2 मी 45 सेमी
 - (d) 9 मी 7 सेमी
 - (e) 419 सेमी
3. दशमलव का प्रयोग कर सेमी में करिए :
 - (a) 5 मिमी
 - (b) 60 मिमी
 - (c) 164 मिमी
 - (d) 9 सेमी 8 मिमी
 - (e) 93 मिमी
4. दशमलव का प्रयोग कर किमी में लिखिए :
 - (a) 8 मी
 - (b) 88 मी
 - (c) 8888 मी
 - (d) 70 किमी 5 मी
5. दशमलव का प्रयोग कर किग्रा में लिखिए :
 - (a) 2 ग्रा
 - (b) 100 ग्रा
 - (c) 3750 ग्रा
 - (d) 5 किग्रा 8 ग्रा
 - (e) 26 किग्रा 50 ग्रा

8.6 दशमलव संख्याओं का जोड़

इन्हें कीजिए

0.35 और 0.42 को जोड़िए।

एक वर्ग लेकर उसे 100 समान भागों में बाँटिए।

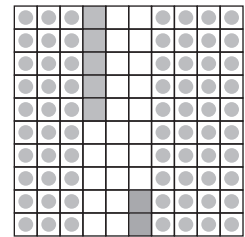
इस वर्ग में 0.35 को दर्शाने के लिए 3 दशांश को छायांकित करें और 5 शतांश में रंग भरें।

इसी वर्ग में 0.42 को दिखाने के लिए 4 दशांश को छायांकित करें और 2 शतांश में रंग भरें।

अब वर्ग में कुल दसवों और कुल सौवों की संख्या निकाल लें।

$$\begin{aligned} \text{अतः } & 0.35 + 0.42 \\ & = 0.77 \end{aligned}$$

इस प्रकार, जैसे हम पूर्ण संख्याओं को जोड़ते हैं ऐसे ही दशमलव संख्याओं को भी जोड़ सकते हैं। क्या अब आप 0.68 और 0.54 को जोड़ सकते हैं?



	इकाई	दशांश	शतांश
	0	3	5
+	0	4	2
	0	7	7

	इकाई	दशांश	शतांश
	0	6	8
+	0	5	4
	1	2	2

$$\text{अतः } 0.68 + 0.54 = 1.22$$

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए

- (i) $0.29 + 0.36$ (ii) $0.7 + 0.08$
 (iii) $1.54 + 1.80$ (iv) $2.66 + 1.85$

उदाहरण 12 : लता ने ₹ 9.50 का एक पैन् खरीदा और ₹ 2.50 की एक पेंसिल खरीदी।
 उसने कुल कितने रुपये खर्च किये?

हल : पैन् पर खर्च किया गया धन = ₹ 9.50
 पेंसिल पर खर्च किया गया धन = ₹ 2.50
 कुल खर्च किया = ₹ 9.50
 + ₹ 2.50
 = ₹ 12.00



उदाहरण 13 : सैमसन ने 5 किमी 52 मी की दूरी बस से, 2 किमी 265 मी कार से और
 शेष 1 किमी 30 मी पैदल चल कर तय की। उसने कुल कितनी दूरी तय की?

हल : बस द्वारा तय की गई दूरी = 5 किमी 52 मी = 5.052 किमी
 कार द्वारा तय की गई दूरी = 2 किमी 265 मी = 2.265 किमी
 पैदल तय की गई दूरी = 1 किमी 30 मी = 1.030 किमी
 इस प्रकार, तय की गई कुल दूरी है

$$\begin{array}{r} 5.052 \text{ किमी} \\ 2.265 \text{ किमी} \\ + 1.030 \text{ किमी} \\ \hline 8.347 \text{ किमी} \end{array}$$

अतः तय की गई कुल दूरी = 8.347 किमी

उदाहरण 14 : राहुल ने 4 किग्रा 90 ग्रा सेब, 2 किग्रा 60 ग्रा अंगूर और 5 किग्रा 300 ग्रा
 आम खरीदे। खरीदे गए सभी फलों का कुल वजन कितना था?

हल : सेबों का वजन = 4 किग्रा 90 ग्रा = 4.090 किग्रा
 अंगूरों का वजन = 2 किग्रा 60 ग्रा = 2.060 किग्रा
 आमों का वजन = 5 किग्रा 300 ग्रा = 5.300 किग्रा
 अतः खरीदे गए फलों का कुल वजन

$$\begin{array}{r} 4.090 \text{ किग्रा} \\ 2.060 \text{ किग्रा} \\ + 5.300 \text{ किग्रा} \\ \hline 11.450 \text{ किग्रा} \end{array}$$



खरीदे गए फलों का कुल वजन = 11.450 किग्रा



प्रश्नावली 8.5

- निम्न में से प्रत्येक का जोड़ ज्ञात करें :
 - $0.007 + 8.5 + 30.08$
 - $15 + 0.632 + 13.8$
 - $27.076 + 0.55 + 0.004$
 - $25.65 + 9.005 + 3.7$
 - $0.75 + 10.425 + 2$
 - $280.69 + 25.2 + 38$
- रशीद ने 35.75 रुपये में गणित की और 32.60 रुपये में विज्ञान की पुस्तक खरीदी। रशीद द्वारा खर्च किया गया कुल धन ज्ञात कीजिए।
- राधिका की माँ ने उसे 10.50 रुपये दिये और पिता ने 15.80 रुपये दिये। उसके माता-पिता द्वारा दिया गया कुल धन ज्ञात कीजिए।
- नसरीन ने अपनी कमीज़ के लिए 3 मी 20 सेमी कपड़ा खरीदा और 2 मी 5 सेमी पैंट के लिए खरीदा। उसके द्वारा खरीदे गए कपड़े की कुल लंबाई निकालिए।
- नरेश प्रातःकाल में 2 किमी 35 मी चला और सायंकाल में 1 किमी 7 मी चला। वह कुल कितनी दूरी चला?
- सुनीता अपने स्कूल पहुँचने के लिए, 15 किमी 268 मी की दूरी बस से, 7 किमी 7 मी की दूरी कार से और 500 मी की दूरी पैदल तय करती है। उसका स्कूल उसके घर से कितनी दूर है?
- रवि ने 5 किग्रा 400 ग्रा चावल, 2 किग्रा 20 ग्रा चीनी और 100 किग्रा 850 ग्रा आटा खरीदा। उसके द्वारा की गई खरीदारी का कुल भार (या वजन) ज्ञात कीजिए।

8.7 दशमलव संख्याओं का घटाना

2.58 में से 1.32 घटाइए

इसे हम एक सारणी द्वारा दिखा सकते हैं :

	इकाई	दशांश	शतांश
	2	5	8
-	1	3	2
	1	2	6

$$\text{अतः } 2.58 - 1.32 = 1.26$$

इस प्रकार दशमलव संख्याओं को घटाया जा सकता है यदि शतांश में से शतांश स्थान का अंक, दशांश में से दशांश स्थान का अंक और इकाई में से इकाई अंक और आगे इसी प्रकार घटाएँ, जैसे हमने जोड़ में किया।

कभी-कभी, दशमलवों को घटाने के लिए हमें संख्या के अंकों के समूह फिर से बनाने होते हैं जैसा, जोड़ में किया गया।

आइए, 3.5 में से 1.74 घटाएँ

	इकाई	दशांश	शतांश
	3	5	0
-	1	7	4

संख्या में सौवें स्थान के अंकों को घटाने पर जो कि यहाँ संभव नहीं है। अतः फिर से समूह बनाने पर हमें प्राप्त होगा।

$$\begin{array}{r}
 2 \quad 14 \quad 10 \\
 \cancel{3} . \cancel{5} \quad 0 \\
 - 1 . 7 \quad 4 \\
 \hline
 1 . 7 \quad 6
 \end{array}$$



अतः $3.5 - 1.74 = 1.76$

प्रयास कीजिए

- 5.46 में से 1.85 घटाएँ; 8.28 में से 5.25 घटाएँ;
 2.29 में से 0.95 घटाएँ; 5.68 में से 2.25 घटाएँ।

उदाहरण 15 : अभिषेक के पास ₹ 7.45 हैं। वह ₹ 5.30 की टॉफी खरीदता है। अभिषेक के पास अब कितने रुपये शेष बचते हैं?

- हल :** कुल धन = ₹ 7.45
 टॉफी पर किया गया खर्च = ₹ 5.30
 शेष धन = ₹ 7.45 - ₹ 5.30
 = ₹ 2.15

उदाहरण 16 : उर्मिला का घर उसके स्कूल से 5 किमी 350 मी की दूरी पर है। वह 1 किमी 70 मी पैदल चलती है और शेष दूरी बस से तय करती है। बस द्वारा तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए?

- हल :** स्कूल से घर की कुल दूरी = 5.350 किमी
 पैदल तय की गई दूरी = 1.070 किमी
 अतः बस द्वारा तय की गई दूरी = 5.350 किमी - 1.070 किमी
 = 4.280 किमी
 इस प्रकार बस द्वारा तय की दूरी = 4.280 किमी
 = 4 किमी 280 मी

उदाहरण 17 : कंचन 5 किग्रा 200 ग्रा वजन का एक तरबूज खरीदती है। इसमें से 2 किग्रा 750 ग्रा उसने अपने पड़ोसी को दे दिया। कंचन के पास कितना तरबूज बचा?

हल : तरबूज का कुल वजन = 5.200 किग्रा
 पड़ोसी को दिए गए तरबूज का वजन = 2.750 किग्रा
 अतः बचे हुए तरबूज का वजन = 5.200 किग्रा - 2.750 किग्रा
 = 2.450 किग्रा



प्रश्नावली 8.6

- निम्न को घटाओ :
 - ₹ 20.75 में से ₹ 18.25
 - 250 मी में से 202.54 मी
 - ₹ 8.4 में से ₹ 5.40
 - 5.206 किमी में से 2.051 किमी
 - 2.107 किग्रा में से ₹ 0.314
- मान ज्ञात कीजिए :
 - 9.756 - 6.28
 - 21.05 - 15.27
 - 18.5 - 6.79
 - 11.6 - 9.847
- राजू एक पुस्तक ₹ 35.65 की खरीदता है। उसने दुकानदार को ₹ 50 दिये। दुकानदार ने उसे कितने रुपये वापिस दिए?
- रानी के पास ₹ 18.50 हैं। उसने ₹ 11.75 की एक आइसक्रीम खरीदी। अब उसके पास कितने रुपये बचे?
- टीना के पास 20 मी 5 सेमी लंबा कपड़ा है। उसमें से उसने एक पर्दा बनाने के लिए 4 मी 50 सेमी कपड़ा काट लिया। टीना के पास अब कितना लंबा कपड़ा बचा?



- नमिता प्रतिदिन 20 किमी 50 मी की दूरी तय करती है। इसमें से 10 किमी 200 मी दूरी वह बस द्वारा तय करती है और शेष ऑटो-रिक्शा द्वारा। नमिता ऑटो-रिक्शा द्वारा कितनी दूरी तय करती है?



- आकाश 10 किग्रा सब्जी खरीदता है जिसमें से 3 किग्रा 500 ग्रा प्याज़, 2 किग्रा 75 ग्रा टमाटर और शेष आलू हैं। आलू का वजन ज्ञात कीजिए?

हमने क्या चर्चा की?

1. एक पूरी इकाई के भागों को जानने के लिए हम एक इकाई को खंड से दर्शाएँगे। एक खंड के 10 बराबर भाग करने पर प्रत्येक भाग उस इकाई का $\frac{1}{10}$ (एक दशांश) होगा। इसे हम 0.1 के रूप में लिख सकते हैं जो कि दशमलव निरूपण है। इस बिंदु को हम दशमलव कहते हैं जो कि इकाई और दशांश स्थान के अंकों के बीच लगाया जाता है।
2. प्रत्येक भिन्न जिसका हर 10 हो, को दशमलव रूप में लिखा जा सकता है और इसके विपरीत प्रत्येक दशमलव संख्या को भी भिन्न रूप में लिखा जा सकता है।
3. एक खंड को 100 समान भागों में बाँटने पर प्रत्येक भाग उस इकाई का $\frac{1}{100}$ (एक शतांश) भाग है। दशमलव रूप में इसे हम 0.01 लिख सकते हैं।
4. प्रत्येक भिन्न जिसका हर 100 हो, को दशमलव रूप में लिखा जा सकता है और उसके विपरीत प्रत्येक दशमलव संख्या को भी भिन्न रूप में लिखा जा सकता है।
5. स्थानीय मान सारणी में जैसे-जैसे हम बाएँ से दाएँ की ओर जाते हैं गुणनखंड पिछले गुणक का $\frac{1}{10}$ हो जाता है।
स्थानीय मान सारणी को हम आगे भी बढ़ा सकते हैं, शतांश स्थान से (शतांश का $\frac{1}{10}$) हजारवें $\frac{1}{1000}$ स्थान तक जिसे हम दशमलव रूप में 0.001 भी लिखते हैं।
6. दशमलव संख्याओं को संख्या रेखा पर भी दर्शाया जा सकता है।
7. प्रत्येक दशमलव को भिन्न रूप में लिखा जा सकता है।
8. दो दशमलव संख्याओं की आपस में तुलना की जा सकती है। तुलना संख्या के पूर्ण भाग (जो कि दशमलव बिंदु की बाईं ओर के अंक होते हैं) से शुरू की जाती है। यदि पूर्ण भाग समान हैं तो दशांश स्थान के अंकों की तुलना की जाती है और यदि ये भी समान हों तो अगले अंक को देखें यह क्रम आगे बढ़ता रहता है।
9. दशमलवों का प्रयोग धन, लंबाई और भार (वजन) की इकाइयों को दर्शाने के लिए किया जाता है।

आँकड़ों का प्रबंधन



अध्याय 9

9.1 भूमिका

आपने अपनी कक्षा में अपने शिक्षक को रजिस्टर पर प्रतिदिन विद्यार्थियों की उपस्थिति अंकित करते या प्रत्येक टेस्ट अथवा परीक्षा के बाद आपके द्वारा प्राप्त अंकों को अंकित करते हुए अवश्य ही देखा होगा। इसी प्रकार, आपने क्रिकेट के एक स्कोर बोर्ड को भी अवश्य देखा होगा। ऐसे दो-दो स्कोर बोर्ड नीचे दर्शाए जा रहे हैं :

गेंदबाज का नाम	ओवर	मेडन ओवर	दिए गए रन	लिए गए विकेट
A	10	2	40	3
B	10	1	30	2
C	10	2	20	1
D	10	1	50	4

बल्लेबाज का नाम	रन	खेली गई गेंदें	समय (मिनटों में)
E	45	62	75
F	55	70	81
G	37	53	67
H	22	41	55

आप जानते हैं कि खेल में कौन जीता या कौन हारा केवल यही सूचना अंकित नहीं की जाती है। स्कोर बोर्ड में आप खेल के बारे में कुछ और अति उपयोगी सूचनाएँ भी प्राप्त कर लेते हैं, जो उतनी ही महत्वपूर्ण होती है। उदाहरणार्थ, आप यह ज्ञात कर सकते

हैं कि सबसे अधिक रन बनाने वाले खिलाड़ी ने कितना समय लिया और कितनी गेंदों का सामना किया।

इसी प्रकार, अपने दैनिक जीवन में, आपने संख्याओं, आकृतियों, नामों इत्यादि से संबंधित अनेक प्रकार की सारणियाँ (Tables) देखी होंगी।

ये सारणियाँ हमें 'आँकड़े' (Data) उपलब्ध कराती हैं। **आँकड़े संख्याओं के वे संग्रह हैं जो कुछ सूचनाएँ देने के लिए एकत्रित किए जाते हैं।**

9.2 आँकड़ों का अभिलेखन

आइए, एक उदाहरण लें जिसमें किसी कक्षा के विद्यार्थी एक सैर (Picnic) पर जाने की तैयारी कर रहे हैं। शिक्षक ने विद्यार्थियों से चार फलों केला, सेब, संतरा या अमरूद में से एक फल चुनने को कहा। इसकी सूची बनाने का कार्य उमा को सौंपा गया। उसने सभी बच्चों की एक सूची बनाई और प्रत्येक नाम के सम्मुख उसके द्वारा चुना हुआ फल लिख दिया। यह सूची बच्चों की पसंद के अनुसार उन्हें फल देने में शिक्षक की सहायता करेगी।

राघव	—	केला	भावना	—	सेब
प्रीति	—	सेब	मनोज	—	केला
अमर	—	अमरूद	डोनाल्ड	—	सेब
फातिमा	—	संतरा	मारिया	—	केला
अमिता	—	सेब	उमा	—	संतरा
रमन	—	केला	अख़्तर	—	अमरूद
राधा	—	संतरा	रितु	—	सेब
फरीदा	—	अमरूद	सलमा	—	केला
अनुराधा	—	केला	कविता	—	अमरूद
रति	—	केला	जावेद	—	केला

यदि शिक्षक यह जानना चाहे कि कक्षा के लिए कितने केलों की आवश्यकता होगी, तो उसे सूची में दिए सभी नामों को एक-एक करके पढ़ कर केलों की संख्या की गिनती करनी पड़ेगी और इससे ज्ञात होगा कि कुल कितने केलों की आवश्यकता है। सेबों, अमरूदों और संतरों की अलग-अलग संख्याएँ ज्ञात करने के लिए भी उसे प्रत्येक फल के लिए, इसी प्रक्रिया को दोहराना होगा। यह प्रक्रिया कितनी जटिल और समय लेने वाली है। यह प्रक्रिया और भी अधिक जटिल हो सकती है, यदि सूची में विद्यार्थियों की संख्या 50 हो जाए।

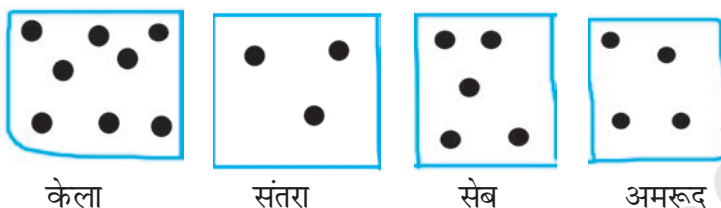


इसलिए, उमा एक-एक करके केवल इन फलों के नाम ऐसे लिखती है :

केला, सेब, अमरूद, संतरा, सेब, केला, संतरा, अमरूद, केला, केला, सेब, केला, संतरा, अमरूद, सेब, केला, अमरूद, केला।

क्या आप सोचते हैं कि इससे शिक्षक का कार्य सरल हो जाता है? उसे अब भी पहले की तरह फलों को एक-एक करके गिनना पड़ेगा।

सलमा के मस्तिष्क में एक नया विचार आता है। वह फ़र्श पर चार वर्ग बना देती है। प्रत्येक वर्ग को केवल एक प्रकार के फल के लिए ही रखा जाता है। वह बच्चों से कहती है कि वह अपने पसंद के फल वाले वर्ग में एक कंकड़ रख दें। अर्थात् वह विद्यार्थी जिसने केला चुना है केले से अंकित वर्ग में एक कंकड़ रख देगा इत्यादि।



प्रत्येक वर्ग के कंकड़ गिन कर, सलमा तुरंत यह बता सकती है कि प्रत्येक प्रकार के कितने फलों की आवश्यकता है। वह वांछित सूचना विभिन्न वर्गों में एक क्रमबद्ध तरीके से कंकड़ रख कर तुरंत प्राप्त कर सकती है।

इस क्रियाकलाप को 40 विद्यार्थियों के लिए किन्हीं भी चार फलों के साथ करने का प्रयत्न कीजिए। आप कंकड़ों के स्थान पर बोटलों के ढक्कन या किसी अन्य टोकन (Token) का भी प्रयोग करते हैं।

9.3 आँकड़ों का संगठन

सलमा ने जो सूचनाएँ प्राप्त कीं, वही सूचना रोनाल्ड एक पेन और कागज़ लेकर ज्ञात कर सकता है। उसे कंकड़ों की आवश्यकता नहीं है। वह बच्चों से यह भी नहीं कहता कि आओ और वर्ग में कंकड़ रखो। वह निम्न सारणी तैयार करता है :

केला	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	8
संतरा	✓	✓	✓					3
सेब	✓	✓	✓	✓	✓			5
अमरूद	✓	✓	✓	✓				4

क्या आप रोनाल्ड की सारणी को समझ रहे हैं?

एक (✓) चिह्न क्या सूचित करता है?

चार विद्यार्थियों के अमरूद को चुना। अमरूद के सम्मुख कितने (✓) चिह्न लगे हैं?

कक्षा में कुल कितने विद्यार्थी हैं? ये सभी सूचनाएँ ज्ञात कीजिए। इन विधियों के बारे में चर्चा कीजिए। कौन-सी विधि सबसे अच्छी है? क्यों?

यदि बहुत अधिक ज़्यादा आँकड़ों से सूचना प्राप्त करनी हो, तो कौन-सी विधि अधिक उपयोगी (लाभप्रद) है?

उदाहरण 1 : दोपहर के भोजन योजना के लिए एक शिक्षक प्रत्येक विद्यार्थी के भोजन की रुचि जानना चाहता है। शिक्षक इस सूचना को एकत्रित करने का कार्य मारिया को सौंपता है। मारिया इसे एक कागज़ और एक पेंसिल लेकर करती है। भोजन की रुचियों को एक स्तंभ में लिखकर, वह प्रत्येक विद्यार्थी की रुचि के लिए उस रुचि के सामने एक खड़ी लकीर (1) अंकित करती है।

भोजन-रुचि	विद्यार्थियों की संख्या
केवल चावल	
केवल रोटी	
चावल और रोटी दोनों	

उपरोक्त सारणी को देखकर, उमेश ने विद्यार्थियों को गिनने की एक बेहतर विधि का सुझाव दिया। उसने मारिया से चिहनों (1) को दस-दस के समूहों में निम्न प्रकार व्यवस्थित करने को कहा :

भोजन-रुचि	विद्यार्थियों की संख्या	
केवल चावल	()	17
केवल रोटी	()	13
चावल और रोटी दोनों	() ()	20

राजन ने इसको और अधिक सरल बनाने के लिए उससे कहा कि वह दस-दस के समूहों के स्थान पर पाँच-पाँच के समूह बनाए, जैसा नीचे दिखाया जा रहा है :

भोजन-रुचि	विद्यार्थियों की संख्या	
केवल चावल	() () ()	17
केवल रोटी	() ()	13
चावल और रोटी दोनों	() () () ()	20

शिक्षक ने सुझाव दिया कि पाँच-पाँच के प्रत्येक समूह में पाँचवाँ चिह्न एक तिरछी रेखा के रूप में प्रयोग किया जाए, जैसा कि '||||' में दर्शाया गया है। इन चिहनों को मिलान चिह्न (Tally Marks) कहते हैं। इस प्रकार, |||| || यह दर्शाता है कि गिनने पर यह पाँच जमा दो (अर्थात् सात) है। और |||| |||| यह दर्शाता है कि यह पाँच जमा पाँच (अर्थात् दस) है।

इसके साथ, सारणी निम्न प्रकार की दिखती है :

भोजन-रुचि	विद्यार्थियों की संख्या	
केवल चावल		17
केवल रोटी		13
चावल और रोटी दोनों		20

उदाहरण 2 : एकता से उसकी कक्षा VI के विद्यार्थियों के जूतों के माप के बारे में आँकड़े एकत्रित करने के लिए कहा गया। उसने नीचे दर्शाए अनुसार अपने आँकड़े लिखे :

5	4	7	5	6	7	6	5	6	6	5
4	5	6	8	7	4	6	5	6	4	6
5	7	6	7	5	7	6	4	8	7	

जावेद निम्नलिखित सूचना जानना चाहता था:

(i) अधिकतम विद्यार्थियों द्वारा पहने जाने वाले जूते का नाप (ii) न्यूनतम विद्यार्थियों द्वारा पहने जाने वाले जूते का नाप। क्या आप इस सूचना को ज्ञात कर सकते हैं?

एकता ने मिलान चिहनों का प्रयोग करके एक सारणी तैयार की :

जूतों का नाप	मिलान चिह्न	विद्यार्थियों की संख्या
4		5
5		8
6		10
7		7
8		2



अब पहले पूछे गए प्रश्नों का उत्तर सरलता से दिया जा सकता है। आप इसी प्रकार का क्रियाकलाप अपनी कक्षा में मिलान चिहनों के प्रयोग द्वारा कर सकते हैं।







इन्हें कीजिए

1. अपने सहपाठियों के परिवारों के सदस्यों की संख्या से संबंधित सूचनाएँ एकत्रित कीजिए और उन्हें एक सारणी के रूप में निरूपित कीजिए। ज्ञात कीजिए कि (a) कौन-सी संख्या न्यूनतम बार आती है। (b) कौन-सी संख्या अधिकतम बार आती है। (c) कौन-सी संख्याएँ बराबर बार आती हैं।

परिवार के सदस्यों की संख्या	मिलान चिह्न	उतने परिवार के सदस्यों वाले विद्यार्थियों की संख्या

9.4 चित्रालेख

एक अलमारी में पाँच खाने हैं। प्रत्येक खाने में, पुस्तकें एक पंक्तिबद्ध रूप से रखी हुई हैं। विस्तृत जानकारी निम्न प्रकार सूचित की गई है :

	 = 1 पुस्तक
पंक्ति 1	
पंक्ति 2	
पंक्ति 3	
पंक्ति 4	
पंक्ति 5	

किस पंक्ति में पुस्तकों की संख्या सबसे अधिक है? किस पंक्ति में पुस्तकों की संख्या सबसे कम है? क्या ऐसी पंक्ति है जिसमें एक भी पुस्तक नहीं है?

आप उपरोक्त आलेख को देखकर ही इन प्रश्नों के उत्तर दे सकते हैं। इसमें प्रयुक्त चित्र आँकड़ों को समझने में आपकी सहायता करते हैं। इसे एक **चित्रालेख (pictograph)** कहते हैं।

एक चित्रालेख आँकड़ों को चित्रों, वस्तुओं या वस्तुओं के भागों के रूप में निरूपित करता है। इसको केवल देखकर ही आँकड़ों से संबंधित प्रश्नों के उत्तर दिए जा सकते हैं।

इन्हें कीजिए

समाचार पत्र और पत्रिकाएँ प्रायः पाठकों को आकर्षित करने के लिए चित्रालेखों का प्रयोग करते हैं।







इस प्रकार प्रकाशित एक या दो चित्रालेखों को एकत्रित कीजिए और उन्हें अपनी कक्षा में प्रदर्शित कीजिए। यह समझने का प्रयत्न कीजिए कि ये चित्रालेख क्या दर्शाते हैं।



एक चित्रालेख द्वारा प्रदान की गई सूचनाओं को समझने के लिए कुछ अभ्यास करने की आवश्यकता है।

9.5 एक चित्रालेख की व्याख्या

उदाहरण 3 : पिछले सप्ताह में 30 विद्यार्थियों वाली एक विशिष्ट कक्षा में अनुपस्थित रहने वाले विद्यार्थियों की संख्या निम्न चित्रालेख द्वारा विस्तृत रूप से दर्शाई गई है:

	 = 1 अनुपस्थित
सोमवार	
मंगलवार	
बुधवार	
बृहस्पतिवार	
शुक्रवार	
शनिवार	






- किस दिन सबसे अधिक विद्यार्थी अनुपस्थित थे?
- किस दिन उपस्थिति पूर्ण रही?
- इस सप्ताह में कुल अनुपस्थिति कितनी रही?

हल : (a) सबसे अधिक विद्यार्थी शनिवार को अनुपस्थित रहे। (इन आँकड़ों को निरूपित करने वाली शनिवार की पंक्ति में 8 चित्र हैं, अन्य दिनों के लिए चित्रों की संख्या कम है।)

(b) बृहस्पतिवार की पंक्ति में कोई चित्र नहीं है। इसका अर्थ है कि इस दिन कोई विद्यार्थी अनुपस्थित नहीं था। अर्थात् उस दिन कक्षा में पूर्ण उपस्थिति रही।

(c) कुल मिलाकर यहाँ 20 चित्र हैं। इसलिए, इस सप्ताह में कुल अनुपस्थिति 20 रही।


उदाहरण 4 : किसी मोहल्ले के व्यक्तियों द्वारा पसंद किए गए फ्रिजों (Fridges) के रंगों की सूचना निम्न चित्रालेख द्वारा दर्शाई गई है :

	 = 10 व्यक्ति
नीला	
हरा	
लाल	
सफ़ेद	

- (a) नीले रंग को पसंद करने वाले व्यक्तियों की संख्या ज्ञात कीजिए।
 (b) कितने व्यक्ति लाल रंग पसंद करते हैं?

हल

- : (a) नीला रंग पसंद करने वाले 50 व्यक्ति हैं?

[ = 10 व्यक्ति। इसलिए ऐसे 5 चित्र 5×10 व्यक्ति दर्शाते हैं।]

- (b) लाल रंग पसंद करने वाले व्यक्तियों की संख्या ज्ञात करने के लिए, कुछ सोचना पड़ेगा।

5 पूरे चित्रों के लिए, हमें $5 \times 10 = 50$ व्यक्ति प्राप्त होते हैं।

अंतिम अधूरे चित्र के लिए हम इसे अनुमानित रूप से 5 व्यक्ति मान सकते हैं।



अतः लाल रंग पसंद करने वाले व्यक्तियों की संख्या 55 है।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

उपरोक्त उदाहरण में, लाल रंग पसंद करने वाले व्यक्तियों की संख्या $50 + 5 = 55$ ली है। यदि आपका मित्र इसे $50 + 8 = 58$ ले, तो क्या आप इसे स्वीकार करेंगे?

उदाहरण 5

- : किसी स्कूल में एक सर्वेक्षण द्वारा यह पता लगाया गया कि प्रतिदिन स्कूल आने के लिए विद्यार्थी यातायात के किस साधन का प्रयोग करते हैं। कक्षा VI के 30 विद्यार्थियों से साक्षात्कार किया गया और प्राप्त आँकड़ों को एक चित्रालेख के रूप में निम्न प्रकार प्रदर्शित किया गया :








यातायात का साधन	विद्यार्थियों की संख्या	 = 1 विद्यार्थी
निजी कार		
सार्वजनिक बस		
स्कूल बस		
साइकिल		
पैदल		

इस चित्रालेख से आप क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?

- (a) निजी कार से आने वाले विद्यार्थियों की संख्या 4 है।
 (b) अधिकतम विद्यार्थी (11) स्कूल बस से स्कूल आते हैं। यह यातायात का सर्वाधिक लोकप्रिय साधन है।
 (c) साइकिल का प्रयोग केवल तीन विद्यार्थी ही करते हैं।
 (d) अन्य साधनों का प्रयोग करने वाले विद्यार्थियों की संख्या भी इसी प्रकार ज्ञात की जा सकती है।

उदाहरण 6

- : किसी सप्ताह में, एक फैक्टरी द्वारा निर्मित कलाई घड़ियों की संख्या निम्न चित्रालेख द्वारा प्रदर्शित है :

दिन	 = 100 कलाई घड़ियाँ
सोमवार	
मंगलवार	
बुधवार	
बृहस्पतिवार	
शुक्रवार	
शनिवार	

- किस दिन न्यूनतम कलाई घड़ियाँ निर्मित की गईं?
- किस दिन निर्मित कलाई घड़ियों की संख्या अधिकतम थी?
- इस विशेष सप्ताह में निर्मित कलाई घड़ियों की सन्निकट संख्या ज्ञात कीजिए?

हल

: हम एक सारणी बनाकर गिनती कर सकते हैं।

दिन	निर्मित कलाई घड़ियों की संख्या
सोमवार	600
मंगलवार	700 से अधिक और 800 से कम
बुधवार
बृहस्पतिवार
शुक्रवार
शनिवार

उपरोक्त सारणी को पूरा कीजिए और उत्तर ज्ञात कीजिए।



प्रश्नावली 9.1

- गणित के एक टेस्ट में 40 विद्यार्थियों द्वारा निम्नलिखित अंक प्राप्त किए गए। इन अंकों को मिलान चिह्नों का प्रयोग करके, एक सारणी के रूप में व्यवस्थित कीजिए।

8	1	3	7	6	5	5	4	4	2
4	9	5	3	7	1	6	5	2	7
7	3	8	4	2	8	9	5	8	6
7	4	5	6	9	6	4	4	6	6

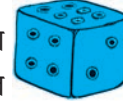
- ज्ञात कीजिए कि कितने विद्यार्थियों ने 7 या उससे अधिक अंक प्राप्त किए।
 - कितने विद्यार्थियों ने 4 से कम अंक प्राप्त किए?
- कक्षा VI के 30 विद्यार्थियों की मिठाइयों की पसंद निम्नलिखित है :
लड्डू, बरफ़ी, लड्डू, जलेबी, लड्डू, रसगुल्ला

जलेबी, लड्डू, बरफ़ी, रसगुल्ला, लड्डू, जलेबी, लड्डू
जलेबी, रसगुल्ला, लड्डू, रसगुल्ला, जलेबी, लड्डू
रसगुल्ला, लड्डू, लड्डू बरफ़ी, रसगुल्ला, रसगुल्ला
जलेबी, रसगुल्ला, लड्डू, रसगुल्ला, जलेबी, लड्डू।

(a) मिठाइयों के इन नामों को मिलान चिह्नों का प्रयोग करते हुए एक सारणी में व्यवस्थित कीजिए।

(b) कौन सी मिठाई विद्यार्थियों द्वारा अधिक पसंद की गई?

3. केथरिन ने एक पासा (dice) लिया और उसको 40 बार उछालने पर प्राप्त संख्या को लिख लिया। उसने इस कार्य को 40 बार किया और प्रत्येक बार प्राप्त संख्याओं को निम्न प्रकार लिखा :








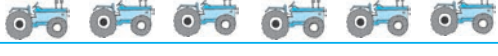
1	3	5	6	6	3	5	4	1	6
2	5	3	4	6	1	5	5	6	1
1	2	2	3	5	2	4	5	5	6
5	1	6	2	3	5	2	4	1	5

एक सारणी बनाइए और आँकड़ों को मिलान चिह्नों का प्रयोग करके लिखिए। अब, ज्ञात कीजिए :

- (a) न्यूनतम बार आने वाली संख्या।
(b) अधिकतम बार आने वाली संख्या।
(c) समान बार आने वाली संख्याएँ।

संख्या	मिलान चिह्न	कितनी बार
1		
2		
3		
4		
5		
6		










4. निम्नलिखित चित्रालेख पाँच गाँवों में ट्रैक्टरों की संख्या दर्शाता है :

	 = 1 ट्रैक्टर
गाँव A	
गाँव B	
गाँव C	
गाँव D	
गाँव E	

चित्रालेख को देखिए और निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

- (i) किस गाँव में ट्रैक्टरों की संख्या न्यूनतम है?
- (ii) किस गाँव में ट्रैक्टरों की संख्या अधिकतम है?
- (iii) गाँव C में गाँव B से कितने ट्रैक्टर अधिक हैं?
- (iv) पाँचों गाँवों में कुल मिलाकर कितने ट्रैक्टर हैं?

5. एक सह-शिक्षा माध्यमिक विद्यालय की प्रत्येक कक्षा में लड़कियों की संख्या निम्न चित्रालेख द्वारा प्रदर्शित है :









	 = 4 लड़कियाँ
I	
II	
III	
IV	
V	
VI	
VII	
VIII	

इस चित्रालेख को देखिए और निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

- (a) किस कक्षा में लड़कियों की संख्या न्यूनतम है?
- (b) क्या कक्षा VI में लड़कियों की संख्या कक्षा V की लड़कियों की संख्या से कम है?
- (c) कक्षा VII में कितनी लड़कियाँ हैं?










6. किसी सप्ताह के विभिन्न दिनों में बिजली के बल्बों की बिक्री नीचे दर्शाई गई है:-

	 = 2 बल्ब
सोमवार	
मंगलवार	
बुधवार	
बृहस्पतिवार	
शुक्रवार	
शनिवार	
रविवार	

चित्रालेख को देखिए और निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

- शुक्रवार को कितने बल्ब बेचे गए?
- किस दिन बेचे गए बल्बों की संख्या अधिकतम थी?
- किन दिनों में बेचे गए बल्बों की संख्या समान थी?
- किस दिन बेचे गए बल्बों की संख्या न्यूनतम थी?
- यदि एक बड़े डिब्बे में 9 बल्ब आ सकते हैं, तो इस सप्ताह कितने डिब्बों की आवश्यकता पड़ी?

7. एक विशेष मौसम में, एक गाँव में 6 फल विक्रेताओं द्वारा बेची गई फलों की टोकरियों की संख्या निम्न चित्रालेख द्वारा प्रदर्शित है :


	 = 100 फलों की टोकरियाँ
रहीम	
लखनपाल	
अनवर	
मार्टिन	
रंजीत सिंह	
जोसेफ	

इस चित्रालेख को देखिए और निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

- किस फल विक्रेता ने अधिकतम फलों की टोकरियाँ बेची?
- अनवर ने फलों की कितनी टोकरियाँ बेची?

- (c) वे विक्रेता जिन्होंने 600 या उससे अधिक टोकरियाँ बेचीं, अगले मौसम में गोदाम खरीदने की योजना बना रहे हैं। क्या आप इनके नाम बता सकते हैं?

9.6 चित्रालेखों को खींचना

चित्रालेखों को खींचना एक रोचक क्रिया है। परंतु कभी-कभी कोई संकेत जैसे कि  (जो पीछे दिए गए उदाहरणों में से एक उदाहरण में प्रयोग किया जा चुका है) इकाइयों के गुणज (Multiple) के रूप में भी प्रयोग हो सकता है तथा इसे खींचने में कठिनाई भी हो सकती है। इनके स्थान पर हम सरल संकेतों का प्रयोग कर सकते हैं।

यदि ♂ 5 विद्यार्थियों को निरूपित करता है, तो आप 4 या 3 विद्यार्थियों को किस प्रकार निरूपित करेंगे? हम ऐसी स्थिति की निम्न प्रकार से कल्पना करके हल कर सकते हैं :

♂ 5 विद्यार्थी निरूपित करता है, तो ♀ 4 विद्यार्थी निरूपित करता है,

♀ 3 विद्यार्थी निरूपित करता है, ♀ 2 विद्यार्थी निरूपित करता है,

♀ 1 विद्यार्थी निरूपित करता है। इसके बाद निरूपण का कार्य प्रारंभ करें।

उदाहरण 7 : किसी सप्ताह में, एक कक्षा के 30 विद्यार्थियों की उपस्थिति निम्नलिखित है। इसे एक चित्रालेख द्वारा निरूपित कीजिए।

दिन	उपस्थित विद्यार्थियों की संख्या
सोमवार	24
मंगलवार	26
बुधवार	28
बृहस्पतिवार	30
शुक्रवार	29
शनिवार	22







हल : पहली की गई कल्पना के अनुसार,

24 को ♂ ♂ ♂ ♂ ♀ से निरूपित किया जा सकता है,

26 को ♂ ♂ ♂ ♂ ♂ ♀ निरूपित किया जा सकता है।

इत्यादि

इस प्रकार, चित्रालेख निम्न होगा :

दिन	विद्यार्थियों की संख्या
सोमवार	
मंगलवार	
बुधवार	
बृहस्पतिवार	
शुक्रवार	
शनिवार	

यहाँ हमने एक प्रकार का समझौता किया है कि '5 से कम' को एक चित्र द्वारा कैसे निरूपित करें। इस प्रकार के चित्रों को तोड़ना सदैव संभव नहीं होता है। ऐसी स्थितियों में हम क्या करें?

निम्नलिखित उदाहरण का अध्ययन कीजिए :

उदाहरण 8 : किसी वर्ष के प्रथम चार महीनों में, किसी विश्राम गृह के लिए खरीदे गए बिजली के बल्बों की संख्या निम्नलिखित है :

महीना	बल्बों की संख्या
जनवरी	20
फ़रवरी	26
मार्च	30
अप्रैल	34

उपरोक्त को एक चित्रालेख द्वारा निरूपित कीजिए।

हल :

माना  10 बल्बों को निरूपित करता है
जनवरी 
फ़रवरी 
मार्च 
अप्रैल 

यहाँ जनवरी और मार्च के लिए चित्र बनाना कठिन नहीं है। परंतु 26 और 34 को चित्रों द्वारा निरूपित करना सरल नहीं है। हम निकटतम पाँच तक 26 को 25 और 34 को 35 ले सकते हैं। फिर हम फ़रवरी के लिए $2\frac{1}{2}$ बल्ब और अप्रैल के लिए $3\frac{1}{2}$ बल्ब दर्शा सकते हैं।



प्रश्नावली 9.2

1. पाँच गाँवों में पशुओं की कुल संख्या इस प्रकार है :

गाँव A	:	80
गाँव B	:	120
गाँव C	:	90
गाँव D	:	40
गाँव E	:	60

संकेत \otimes का प्रयोग करके जो 10 पशुओं को निरूपित करता है, इन पशुओं का एक चित्रालेख बनाइए और निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

- गाँव E के पशुओं को कितने संकेत निरूपित करते हैं?
- किस गाँव में पशुओं की संख्या अधिकतम है?
- किस गाँव में अधिक पशु हैं : गाँव A या गाँव C में?

2. विभिन्न वर्षों में एक स्कूल के विद्यार्थियों की कुल संख्या निम्न सारणी द्वारा प्रदर्शित है :

वर्ष	विद्यार्थियों की संख्या
1996	400
1998	535
2000	472
2002	600
2004	623

A. एक संकेत ⊗ का प्रयोग करके, जो 100 विद्यार्थियों को निरूपित करता है, एक चित्रालेख बनाइए और निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

- वर्ष-2002 में कुल विद्यार्थियों की संख्या को कितने संकेत निरूपित कर रहे हैं?
- वर्ष-1998 में कुल विद्यार्थियों की संख्या को कितने संकेत निरूपित कर रहे हैं?

B. कोई और संकेत लेकर, जो 50 विद्यार्थियों को निरूपित करता हो, एक अन्य चित्रालेख बनाइए। कौन-सा चित्रालेख अधिक सूचनाप्रद है?

9.7 दंड आलेख

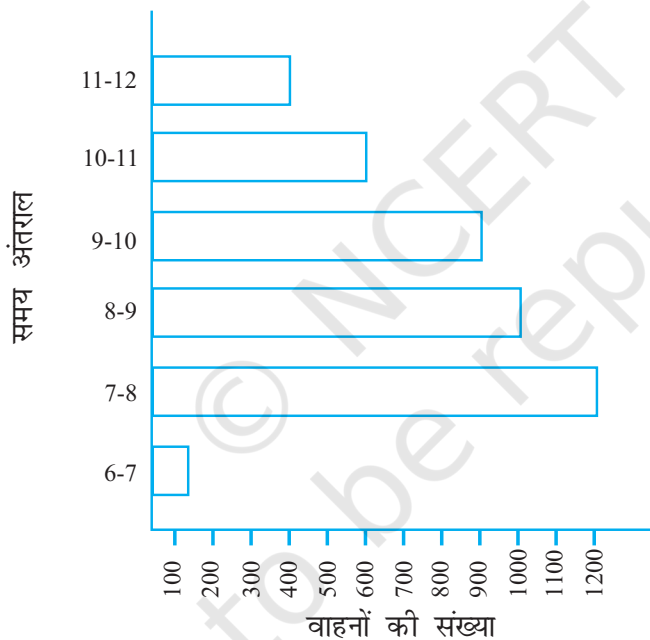
आँकड़ों को चित्रालेखों द्वारा निरूपित करने में न केवल समय अधिक लगता है बल्कि कभी-कभी यह कठिन भी होता है। आइए, आँकड़ों को निरूपित करने की कोई अन्य चित्रीय

विधि देखें। एक समान चौड़ाई (uniform width) के क्षैतिज या ऊर्ध्वाधर दंड (bars) खींचे जा सकते हैं, जिनके बीच में समान दूरी रखी जाती है। इस प्रकार खींचे गए प्रत्येक दंड की लंबाई दी हुई संख्या (मान) को निरूपित करती है। आँकड़ों को प्रस्तुत करने का यह चित्रिय निरूपण एक दंड आरेख (bar diagram) या दंड आलेख (bar graph) कहलाता है।

9.7.1 दंड आलेख की व्याख्या

आइए, किसी विशेष दिन यातायात पुलिस द्वारा दिल्ली के एक भीड़ वाले व्यस्त चौराहे से होकर जाने वाले वाहनों के बारे में किए गए अध्ययन के उदाहरण पर विचार करें। प्रातः 6 बजे से दोपहर 12 बजे तक प्रत्येक घंटे में उस चौराहे से होकर जाने वाले वाहनों की संख्या नीचे दिए दंड आलेख में दर्शाई गई है। एक इकाई (Unit) को सांकेतिक रूप से, एक खाने (Box) से निरूपित किया गया है। (एक इकाई = 1)

पैमाना है : “1 इकाई (मात्रक) लंबाई = 100 वाहन”, अर्थात् 1 इकाई लंबाई = 100 वाहन



हम देख सकते हैं कि अधिकतम यातायात सबसे लंबे दंड अर्थात् 1200 वाहनों से निरूपित है और यह प्रातः सात से आठ बजे के अंतराल में है। इससे ठीक छोटा दंड 8 से 9 बजे के बीच में है।

इसी प्रकार, न्यूनतम यातायात दर्शाने वाला सबसे छोटा दंड (अर्थात् 100 वाहनों) से है। यह प्रातः 6 से 7 बजे के अंतराल में है। इस छोटे दंड से ठीक अगला दंड 11 से 12 बजे के बीच के समय का है।

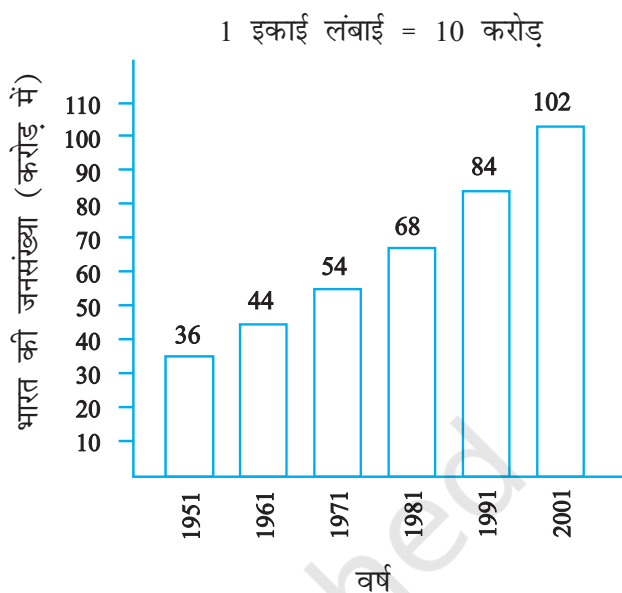
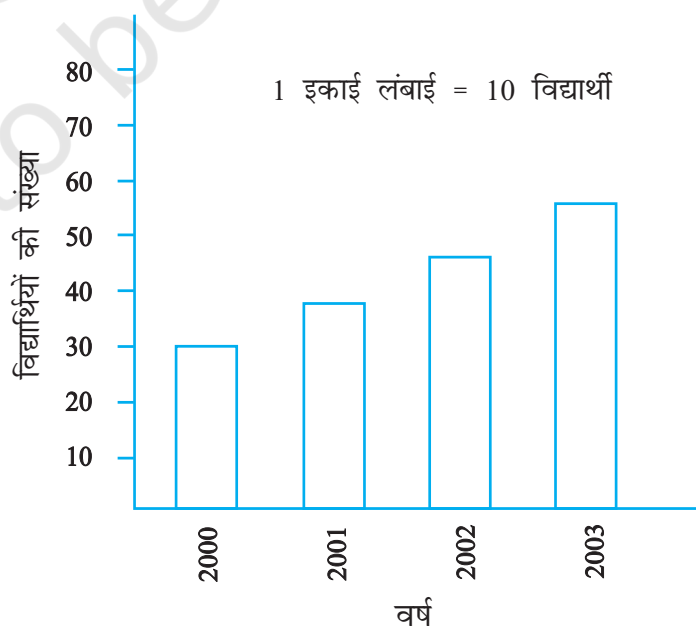
दो अति व्यस्त घंटों (8.00-10.00 बजे) में कुल यातायात (स्कूल, कार्यालय और व्यापारिक संस्थानों के लिए) $1000+900 = 1900$ वाहन हैं, जो दो लंबे दंडों द्वारा प्रदर्शित हैं।

यदि आँकड़ों में संख्याएँ बड़ी हों, तो आपको एक भिन्न पैमाने (scale) की आवश्यकता पड़ेगी। उदाहरणार्थ, भारत की जनसंख्या वृद्धि की स्थिति को लीजिए। ये संख्या करोड़ों में है। इसलिए, यदि आप 1 इकाई = 1 व्यक्ति लेंगे, तो दंड खींचना संभव नहीं हो पाएगा। अतः इस तरह का पैमाना चुनिए कि 1 इकाई 10 करोड़ निरूपित करती हो। इस स्थिति में, दंड आलेख निम्न आकृति में दर्शाया गया है :

इसलिए, 5 इकाई लंबाई का दंड 50 करोड़ निरूपित करता है और 8 इकाई लंबाई का दंड 80 करोड़ निरूपित करता है।

उदाहरण 9 : किसी स्कूल की एक विशेष कक्षा के निम्नलिखित दंड आलेख को पढ़िए और निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

- इस आलेख का पैमाना क्या है?
- प्रत्येक वर्ष स्कूल में कितने नए विद्यार्थी प्रवेश पाते हैं?
- क्या वर्ष 2003 में विद्यार्थियों की संख्या वर्ष 2000 के विद्यार्थियों की संख्या की दोगुनी है।

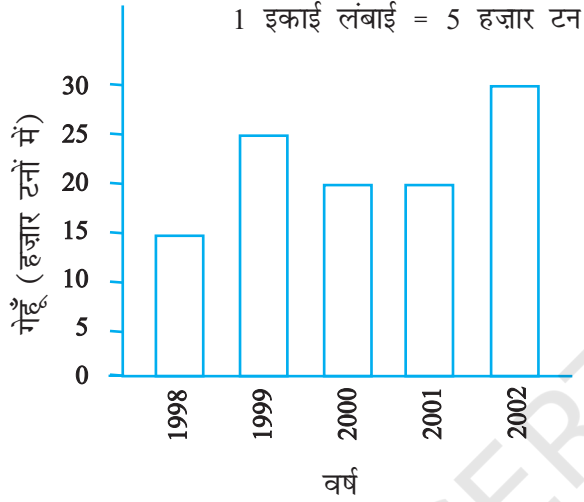


हल : (a) पैमाना है : 1 इकाई लंबाई = 10 विद्यार्थी
अब (b) और (c) स्वयं कीजिए।



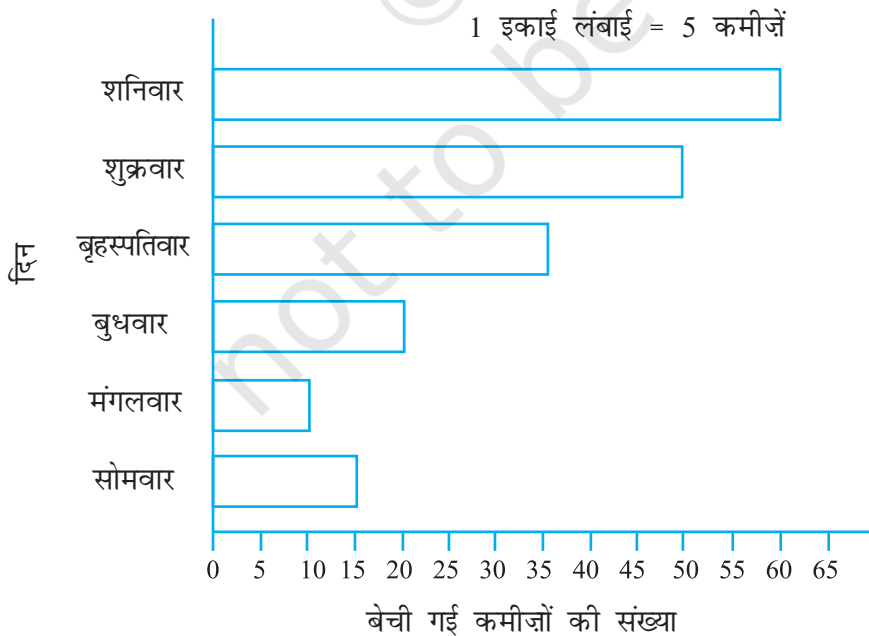
प्रश्नावली 9.3

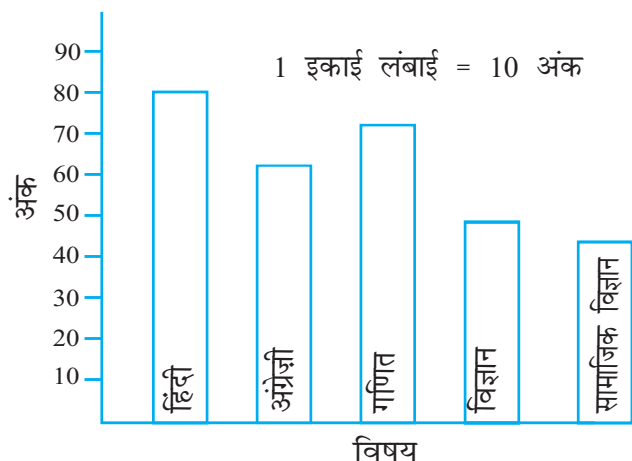
1. नीचे दिया हुआ दंड आलेख वर्ष 1998-2002 में सरकार द्वारा खरीदे गए गेहूँ की मात्रा दर्शाता है :



इस दंड आलेख को पढ़िए और अपने प्रेक्षणों को लिखिए।

- किस वर्ष में गेहूँ का अधिकतम उत्पादन हुआ?
 - किस वर्ष में गेहूँ का न्यूनतम उत्पादन हुआ?
2. इस दंड आलेख को देखिए जो एक रेडीमेड कपड़ों की दुकान में सोमवार से शनिवार तक हुई कमीजों की बिक्री को दर्शाता है।





अब निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

- उपरोक्त दंड आलेख में क्या सूचना दर्शाई गई है?
 - कमीजों की संख्या को निरूपित करने के लिए क्षैतिज रेखा पर क्या पैमाना लिया गया है?
 - किस दिन अधिकतम कमीजें बेची गईं और कितनी संख्या में कमीजें बेची गईं, लिखें?
 - किस दिन न्यूनतम संख्या में कमीजें बेची गईं?
 - बृहस्पतिवार को कितनी कमीजें बेची गईं?
3. इस दंड आलेख को देखिए जो अज्ञीज द्वारा अर्धवार्षिक परीक्षा में विभिन्न विषयों में प्राप्त किए गए अंकों को प्रदर्शित करता है।
निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :
- यह दंड आलेख क्या सूचना प्रदर्शित करता है?
 - किस विषय में अज्ञीज ने अधिकतम अंक प्राप्त किए?
 - किस विषय में उसने न्यूनतम अंक प्राप्त किए?
 - विषयों के नाम लिखिए और उनमें से प्रत्येक में प्राप्त किए गए अंक भी लिखिए।

9.7.2 दंड आलेख को खींचना

उस उदाहरण को याद कीजिए जिसमें रोनाल्ड ने अपने सहपाठियों द्वारा पसंद किए जाने वाले फलों के लिए सारणी बनाई थी।

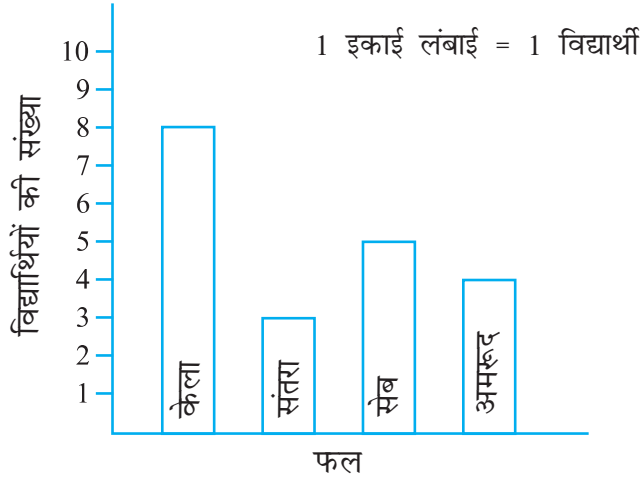
फल का नाम	केला	संतरा	सेब	अमरूद
विद्यार्थियों की संख्या	8	3	5	4

पहले एक क्षैतिज और एक ऊर्ध्वाधर रेखा खींचिए। क्षैतिज रेखा पर फलों को निरूपित करने वाले दंड खींचिए और ऊर्ध्वाधर रेखा पर संख्यांक लिखिए जो विद्यार्थियों की संख्या निरूपित करते हैं।

आइए, एक आसान-सा पैमाना चुनें। इसका अर्थ है कि हम यह चुनेंगे कि 1 इकाई लंबाई द्वारा कितने विद्यार्थी निरूपित होंगे।

यहाँ हम 1 इकाई लंबाई = 1 विद्यार्थी लेते हैं।

हमें नीचे दर्शाया गया दंड आलेख प्राप्त होता है :



उदाहरण 10 : निम्नलिखित सारणी इमरान के परिवार की विभिन्न मदों में होने वाले मासिक व्यय को निरूपित करती है :

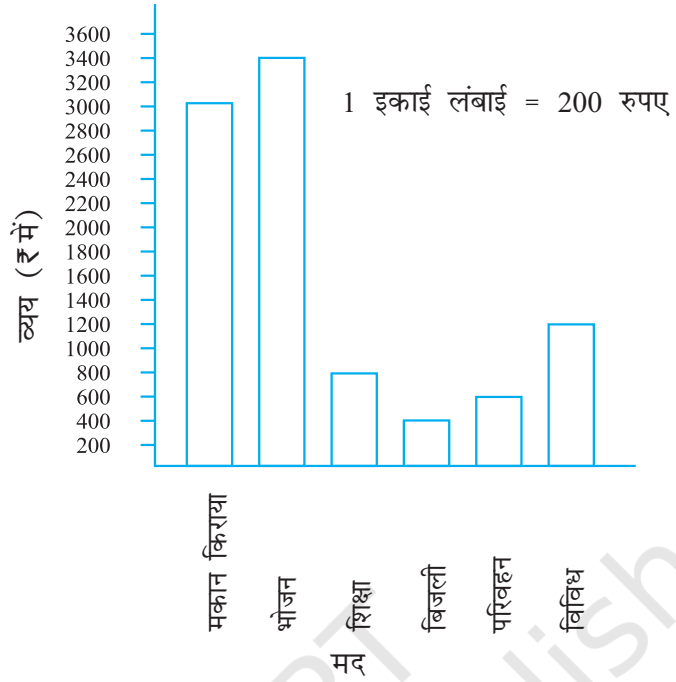
मद	व्यय (₹ में)
मकान किराया	3000
भोजन	3400
शिक्षा	800
बिजली	400
परिवहन	600
विविध	1200

इन आँकड़ों को एक दंड आलेख के रूप में निरूपित करने के चरण निम्न हैं :

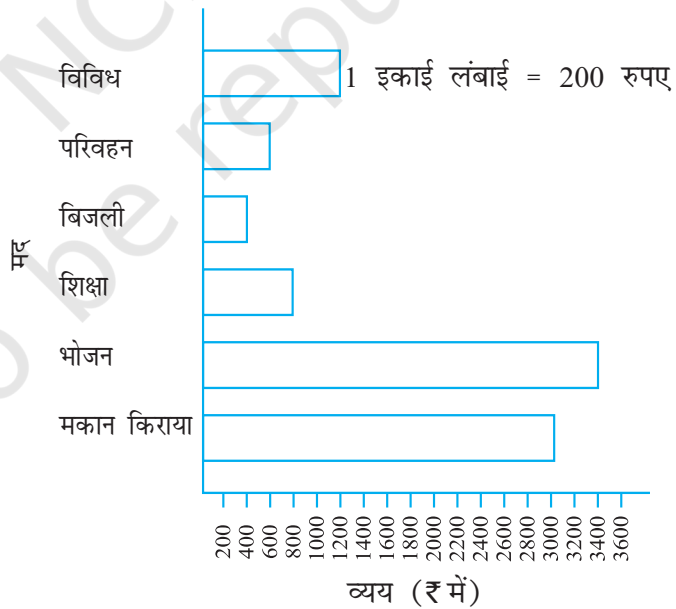
- परस्पर दो लंब रेखाएँ खींचिए, एक ऊर्ध्वाधर और एक क्षैतिज।
- क्षैतिज रेखा के अनुदिश 'मद' अंकित कीजिए और ऊर्ध्वाधर रेखा के अनुदिश संगत व्यय (₹ में) अंकित कीजिए।
- समान दूरी पर समान चौड़ाई के दंड बनाइए।
- ऊर्ध्वाधर रेखा के अनुदिश एक सुविधाजनक पैमाना लीजिए। मान लीजिए 1 इकाई लंबाई = 200 ₹ है और इसके अनुसार संगतमान अंकित कीजिए।

विभिन्न मदों के लिए, दंडों की लंबाई परिकल्पित कीजिए जैसा कि नीचे दर्शाया गया है :

मकान किराया	:	3000	÷	200	=	15 इकाई
भोजन	:	3400	÷	200	=	17 इकाई
शिक्षा	:	800	÷	200	=	4 इकाई
बिजली	:	400	÷	200	=	2 इकाई
परिवहन	:	600	÷	200	=	3 इकाई
विविध	:	1200	÷	200	=	6 इकाई

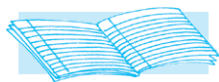


इन्हीं आँकड़ों को, 'मद' और 'व्यय' की स्थितियों को अक्षों पर परस्पर बदलकर, निम्न प्रकार भी दर्शाया जा सकता है :



इन्हें कीजिए

1. अपने मित्रों के साथ पाँच और ऐसी स्थितियों के बारे में सोचिए, जहाँ हम आँकड़े प्राप्त कर सकते हैं। संख्याओं का प्रयोग करके सारणियाँ बनाइए और उन्हें दंड आलेखों द्वारा प्रदर्शित कीजिए।



प्रश्नावली 9.4

1. एक स्कूल के 120 विद्यार्थियों का इस आशय से सर्वेक्षण किया गया कि वे अपने खाली समय में किस क्रियाकलाप को पसंद करते हैं। निम्न आँकड़े प्राप्त हुए :

पसंद का क्रियाकलाप	विद्यार्थियों की संख्या
खेलना	45
कहानी की पुस्तक पढ़ना	30
टी.वी. देखना	20
संगीत सुनना	10
पेंटिंग	15

- 1 इकाई लंबाई = 5 विद्यार्थी का पैमाना लेकर, एक दंड आलेख बनाइए। खेलने के अतिरिक्त कौन-सा क्रियाकलाप अधिकांश विद्यार्थियों द्वारा पसंद किया जाता है।
2. छह क्रमागत दिनों में किसी दुकानदार द्वारा बेची गई गणित की पुस्तकों की संख्या नीचे दी गई है :

दिन	बेची गई पुस्तकों की संख्या
रविवार	65
सोमवार	40
मंगलवार	30
बुधवार	50
बृहस्पतिवार	20
शुक्रवार	70
पेंटिंग	15

अपनी पसंद का पैमाना चुनते हुए, उपरोक्त सूचना के लिए एक दंड आलेख खींचिए।

3. वर्ष 1998 से 2002 के बीच एक फैक्टरी द्वारा निर्मित साइकिलों की संख्या निम्नलिखित सारणी द्वारा दर्शाई गई है :

वर्ष	निर्मित साइकिलों की संख्या
1998	800
1999	600
2000	900
2001	1100
2002	1200

इसे आँकड़ों को एक दंड आलेख द्वारा प्रदर्शित कीजिए। अपनी पसंद का पैमाना चुनिए।

(a) किस वर्ष में अधिकतम संख्या में साइकिलें निर्मित की गईं?

(b) किस वर्ष में न्यूनतम संख्या में साइकिलें निर्मित की गईं?

4. किसी शहर के व्यक्तियों की संख्या विभिन्न आयु समूहों के अनुसार नीचे सारणी में दी हुई है :


आयु समूह (वर्षों में)	1-14	15-29	30-44	45-59	60-74	75 और उससे ऊपर
व्यक्तियों की संख्या	2 लाख	1 लाख 60 हजार	1 लाख 20 हजार	1 लाख 20 हजार	80 हजार	40 हजार

इन आँकड़ों को एक दंड आलेख द्वारा निरूपित कीजिए। (1 इकाई लंबाई = 1 हजार लीजिए)

निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

- (a) किन दो आयु समूहों में जनसंख्या बराबर है?
 (b) 60 वर्ष और उससे अधिक आयु के सभी व्यक्ति वरिष्ठ नागरिक कहलाते हैं। इस शहर में कितने वरिष्ठ नागरिक हैं?

हमने क्या चर्चा की?

- हमने देखा कि आँकड़े कुछ सूचना देने के लिए एकत्रित की गई संख्याओं के संग्रह होते हैं।
- दिए हुए आँकड़ों से कोई विशेष सूचना तुरंत प्राप्त करने के लिए, उन्हें मिलान चिह्नों का प्रयोग करके सारणियों में प्रकट (प्रस्तुत) किया जा सकता है।
- हमने सीखा कि किस प्रकार चित्रालेख आँकड़ों को चित्रों, वस्तुओं या वस्तुओं के भागों के रूप में निरूपित करता है। हमने चित्रालेखों की व्याख्या करना भी सीखा और उनसे संबंधित प्रश्नों के उत्तर देना भी सीखा है। हमने कुछ वस्तुओं के संकेतों से निरूपित करके चित्रालेखों को खींचना भी सीखा है। उदाहरणार्थ  = 100 पुस्तकें लेकर।
- हमने चर्चा की है कि आँकड़ों को एक दंड आरेख या एक दंड आलेख द्वारा कैसे निरूपित किया जाता है। एक दंड आलेख में समान दूरी पर समान चौड़ाई के दंड क्षैतिज या ऊर्ध्वाधर रूप से खींचे जाते हैं। प्रत्येक दंड की लंबाई वांछित सूचना दर्शाती है।
- ऐसा करने के लिए, हमने आलेख के लिए एक पैमाना चुनने की प्रक्रिया की भी चर्चा की है। उदाहरणार्थ, 1 इकाई = 100 विद्यार्थी। हमने दंड आलेखों को पढ़ने का अभ्यास भी किया है। हमने इसकी व्याख्या करना भी सीखा है।

क्षेत्रमिति

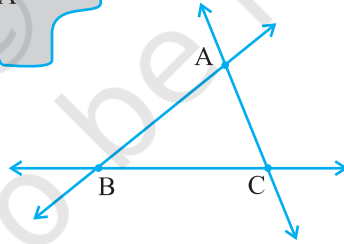
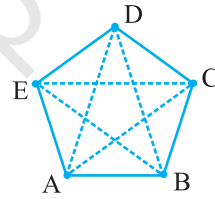
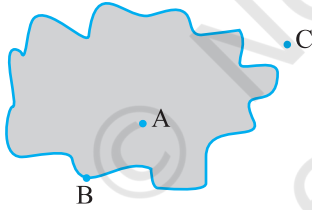
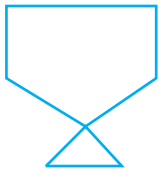


0651CH10

अध्याय 10

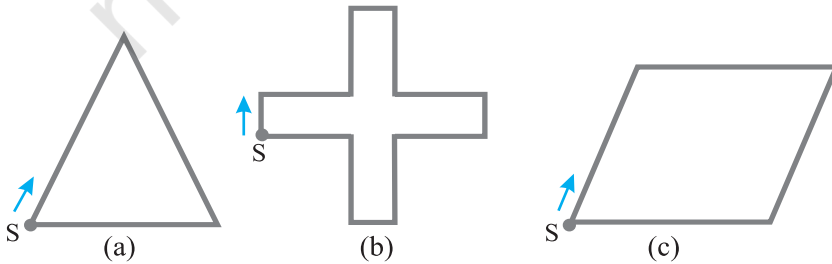
10.1 भूमिका

जब हम तल की ऐसी आकृतियों के बारे में बात करते हैं, जो नीचे दी हुई हैं, तो हम उन आकृतियों के क्षेत्र तथा परिसीमा के बारे में भी विचार करते हैं। हमें इन आकृतियों की तुलना के लिए कुछ मापों की आवश्यकता होती है। आइए, हम कुछ ऐसी ही आकृतियों को देखते हैं।



10.2 परिमाण

आइए, नीचे दी गई आकृति 10.1 को देखते हैं। आप इन आकृतियों को एक तार अथवा धागे की सहायता से भी बना सकते हैं।



आकृति 10.1

यदि आप बिंदु S से आरंभ करके रेखाखंडों के साथ-साथ (अनुदिश) चलते हैं तो आप पुनः बिंदु S पर पहुँच जाते हैं। इस प्रकार आपने आकार (आकृति) के चारों तरफ़ अथवा किनारे-किनारे का एक पूरा चक्कर लगाया। यह तय की गई दूरी इन आकृतियों को बनाने में लगे तार की लंबाई के बराबर है।

यह दूरी बंद आकृतियों का परिमाप कहलाती है। दूसरे शब्दों में, हम कह सकते हैं कि इन आकृतियों को बनाने में लगे तार की लंबाई ही परिमाप है।

हमारे दैनिक जीवन में परिमाप की संकल्पना का बहुतायत प्रयोग होता है, जैसे :

- एक किसान जो अपने खेत के चारों तरफ़ बाड़ लगाना चाहता है।
- एक इंजीनियर जो अपने घर के चारों तरफ़ एक चारदीवारी बनाने की योजना तैयार करता है।
- एक व्यक्ति जो खेल कराने के लिए एक पथ तैयार करता है।

ये सभी व्यक्ति 'परिमाप' की संकल्पना का प्रयोग करते हैं।

ऐसी पाँच स्थितियों का उदाहरण दीजिए जहाँ पर आपको परिमाप को जानने की आवश्यकता होती है।

अतः परिमाप एक ऐसी दूरी है जो रेखाखंडों के साथ-साथ (अर्थात् परिसीमा के अनुदिश) चलते हुए एक बंद आकृति बनाती है, जब आप उस आकृति के चारों तरफ़ एक पूरा चक्कर लगाते हैं।

प्रयास कीजिए

1. अपनी अध्ययन टेबल के ऊपरी चारों सिरों की लंबाइयों को मापिए तथा उन्हें लिखिए।

$$AB = \text{___ सेमी}$$

$$BC = \text{___ सेमी}$$

$$CD = \text{___ सेमी}$$

$$DA = \text{___ सेमी}$$

अब चारों भुजाओं की लंबाइयों का योगफल

$$= AB + BC + CD + DA$$

$$= \text{___ सेमी} + \text{___ सेमी} + \text{___ सेमी} + \text{___ सेमी}$$

$$= \text{___ सेमी}$$

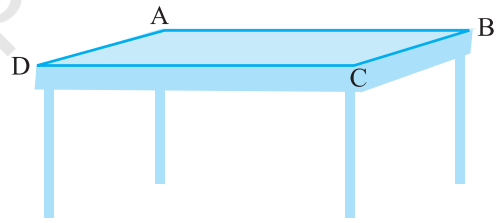
क्या आप बता सकते हैं कि परिमाप कितना है?

2. अपनी नोटबुक के एक पृष्ठ की चारों भुजाओं की लंबाइयों को मापिए और उन्हें लिखिए। चारों भुजाओं की लंबाइयों का योगफल

$$= AB + BC + CD + DA = \text{___ सेमी} + \text{___ सेमी} + \text{___ सेमी} + \text{___ सेमी}$$

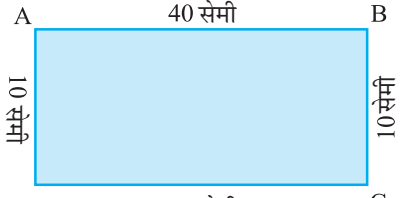
$$= \text{___ सेमी}$$

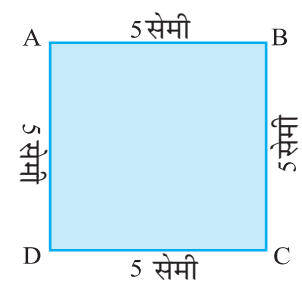
पृष्ठ का परिमाप कितना है?

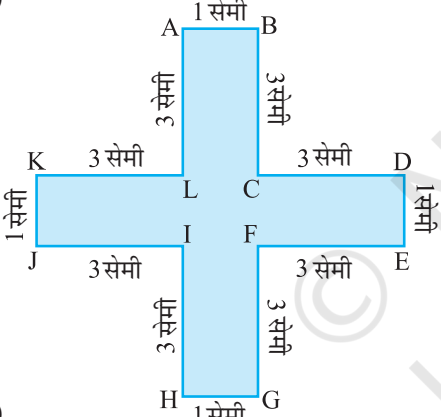


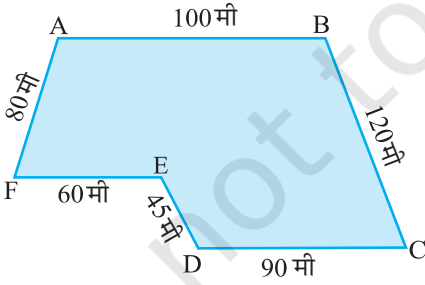
3. मीरा 150 मी लंबाई तथा 80 मी चौड़ाई वाले एक पार्क में जाती है। वह इस पार्क का पूरा एक चक्कर लगाती है। उसके द्वारा तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए।

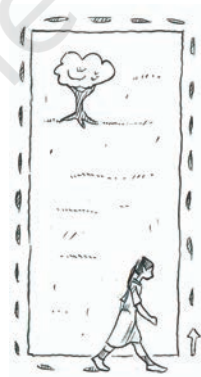
4. निम्न आकृतियों का परिमाण ज्ञात कीजिए :

(a)  परिमाण = $AB + BC + CD + DA$
 $= \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad}$
 $= \underline{\quad}$

(b)  परिमाण = $AB + BC + CD + DA$
 $= \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad}$
 $= \underline{\quad}$

(c)  परिमाण = $AB + BC + CD + DE$
 $+ EF + FG + GH$
 $+ HI + IJ + JK$
 $+ KL + LA$
 $= \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad}$
 $= \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad}$
 $= \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad}$
 $= \underline{\quad}$

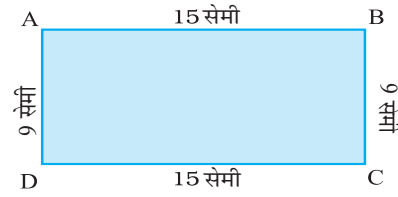
(d)  परिमाण = $AB + BC + CD + DE + EF$
 $+ FA$
 $= \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad}$
 $= \underline{\quad}$



इस प्रकार, आप रेखाखंडों के द्वारा निर्मित बंद आकृति का परिमाण कैसे निकालेंगे? साधारणतया, सभी भुजाओं की लंबाइयों का योगफल ज्ञात करके (जो कि रेखाखंड हैं)।

10.2.1 आयत का परिमाण

आइए, अब हम एक आयत ABCD (आकृति 10.2) पर विचार करते हैं जिसकी लंबाई तथा चौड़ाई क्रमशः 15 सेमी तथा 9 सेमी है। आयत का परिमाण कितना होगा?



आकृति 10.2

$$\begin{aligned}
 \text{आयत का परिमाण} &= \text{चारों भुजाओं की लंबाइयों का योगफल} \\
 &= AB + BC + CD + DA \\
 &= AB + BC + AB + BC \\
 &= 2 \times AB + 2 \times BC \\
 &= 2 \times (AB + BC) \\
 &= 2 \times (15 \text{सेमी} + 9 \text{सेमी}) \\
 &= 2 \times (24 \text{सेमी}) \\
 &= 48 \text{ सेमी}
 \end{aligned}$$

याद रखिए आयत की सम्मुख भुजाएँ बराबर लंबाई की होती हैं। इसीलिए
 $AB = CD,$
 $DA = BC$



अतः ऊपर दिए हुए उदाहरण में, हमने देखा कि आयत का परिमाण = लंबाई + चौड़ाई + लंबाई + चौड़ाई
 अर्थात् आयत का परिमाण = $2 \times (\text{लंबाई} + \text{चौड़ाई})$

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित आयतों के परिमाण ज्ञात कीजिए :

आयत की लंबाई	आयत की चौड़ाई	सभी भुजाओं की लंबाइयों के योग द्वारा परिमाण	परिमाण सूत्र द्वारा $2 \times (\text{लंबाई} + \text{चौड़ाई})$
25 सेमी	12 सेमी	$= 25 \text{ सेमी} + 12 \text{ सेमी} + 25 \text{ सेमी} + 12 \text{ सेमी}$ $= 74 \text{ सेमी}$	$= 2 \times (25 \text{ सेमी} + 12 \text{ सेमी})$ $= 2 \times (37 \text{ सेमी})$ $= 74 \text{ सेमी}$
0.5 मी	0.25 मी		
18 सेमी	15 सेमी		
10.5 सेमी	8.5 सेमी		

आइए, अब हम इस विषय या संकल्पना को प्रयोगात्मक रूप में देखते हैं।

उदाहरण 1 : शबाना 3 मी लंबाई और 2 मी चौड़ाई के एक आयताकार टेबल कवर (आकृति 10.3) के चारों ओर एक किनारी (गोटा) लगाना चाहती है। शबाना को कितनी लंबी किनारी की आवश्यकता है।

हल : आयताकार टेबल कवर की लंबाई = 3 मी
 आयताकार टेबल कवर की चौड़ाई = 2 मी
 शबाना टेबल कवर के चारों ओर किनारी लगाना चाहती है। इसीलिए आवश्यक किनारी की लंबाई, आयताकार टेबल कवर के परिमाण के बराबर होगी।

$$\begin{aligned} \text{अब आयताकार टेबल कवर का परिमाण} \\ &= 2 \times (\text{लंबाई} + \text{चौड़ाई}) \\ &= 2 \times (3 \text{ मी} + 2 \text{ मी}) \\ &= 2 \times 5 \text{ मी} = 10 \text{ मी} \end{aligned}$$



आकृति 10.3

अतः आवश्यक किनारी की लंबाई 10 मी है।

उदाहरण 2 : एक धावक 50 मी लंबाई तथा 25 मी चौड़ाई के एक आयताकार पार्क के चारों तरफ़ 10 चक्कर लगाता है। उसके द्वारा तय की गई कुल दूरी ज्ञात कीजिए।

हल : आयताकार पार्क की लंबाई = 50 मी
 आयताकार पार्क की चौड़ाई = 25 मी
 धावक द्वारा एक चक्कर में तय की गई कुल दूरी, पार्क के परिमाण के बराबर होगी।

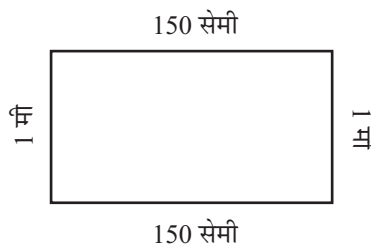
$$\begin{aligned} \text{अब, आयताकार पार्क का परिमाण} \\ &= 2 \times (\text{लंबाई} + \text{चौड़ाई}) \\ &= 2 \times (50 \text{ मी} + 25 \text{ मी}) \\ &= 2 \times 75 \text{ मी} = 150 \text{ मी} \end{aligned}$$

धावक द्वारा 1 चक्कर में तय की गई दूरी 150 मी है।
 इसलिए, 10 चक्कर में तय की गई दूरी = $10 \times 150 \text{ मी} = 1500 \text{ मी}$
 अतः धावक द्वारा तय की गई कुल दूरी 1500 मी है।

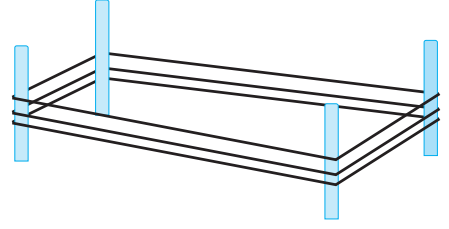
उदाहरण 3 : एक आयत का परिमाण ज्ञात कीजिए जिसकी लंबाई तथा चौड़ाई क्रमशः 150 सेमी तथा 1 मी है।

हल : आयत की लंबाई = 150 सेमी
 आयत की चौड़ाई = 1 मी
 = 100 सेमी

$$\begin{aligned} \text{आयत का परिमाण} \\ &= 2 \times (\text{लंबाई} + \text{चौड़ाई}) \\ &= 2 \times (150 \text{ सेमी} + 100 \text{ सेमी}) \\ &= 2 \times (250 \text{ सेमी}) = 500 \text{ सेमी} = 5 \text{ मी} \end{aligned}$$



उदाहरण 4 : एक किसान के आयताकार खेत की लंबाई तथा चौड़ाई क्रमशः 240 मी तथा 180 मी है। वह खेत के चारों तरफ रस्से के द्वारा 3 पूरे चक्कर की बाड़ बनाना चाहता है, जैसा आकृति 10.4 में दिखाया गया है।



आकृति 10.4

उसके द्वारा प्रयोग किए गए रस्से की कुल लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल : किसान को रस्से के द्वारा खेत के परिमाण को 3 गुना पूरा तय करना है। इसलिए, आवश्यक रस्से की लंबाई, खेत के परिमाण की तिगुनी होगी।

$$\begin{aligned} \text{खेत का परिमाण} &= 2 \times (\text{लंबाई} + \text{चौड़ाई}) \\ &= 2 \times (240 \text{ मी} + 180 \text{ मी}) \\ &= 2 \times 420 \text{ मी} = 840 \text{ मी} \\ \text{रस्से की कुल लंबाई की आवश्यकता हुई} &= 3 \times 840 \text{ मी} = 2520 \text{ मी} \end{aligned}$$

उदाहरण 5 : 250 मी लंबाई और 175 मी चौड़ाई वाले आयताकार बगीचे के चारों ओर बाड़ लगाने का व्यय ₹ 12 प्रति मीटर की दर से ज्ञात कीजिए।

हल : आयताकार बगीचे की लंबाई = 250 मी
आयताकार बगीचे की चौड़ाई = 175 मी
बाड़ लगाने पर व्यय ज्ञात करने के लिए हमें बगीचे के परिमाण की आवश्यकता होती है।

$$\begin{aligned} \text{आयताकार बगीचे का परिमाण} &= 2 \times (\text{लंबाई} + \text{चौड़ाई}) \\ &= 2 \times (250 \text{ मी} + 175 \text{ मी}) \\ &= 2 \times (425 \text{ मी}) = 850 \text{ मी} \end{aligned}$$

बगीचे के चारों ओर 1 मी लंबी बाड़ लगाने पर व्यय = ₹ 12

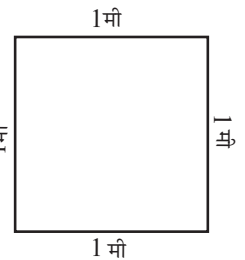
$$\begin{aligned} \text{अतः बगीचे के चारों ओर 850 मी लंबी बाड़ लगाने पर कुल व्यय} \\ &= ₹ 12 \times 850 = ₹ 10200 \end{aligned}$$

10.2.2 सम आकृतियों का परिमाण

आइए, इस उदाहरण को देखते हैं :

विश्वामित्र 1 मी भुजा वाले वर्गाकार चित्र के चारों ओर एक रंगीन टेप लगाना चाहता है, जैसा कि आकृति 10.5 में दिखाया गया है। उसे कितनी लंबी रंगीन टेप की आवश्यकता होगी?

चूँकि विश्वामित्र वर्गाकार चित्र के चारों ओर रंगीन टेप लगाना चाहता है, इसलिए उसे वर्गाकार चित्र के परिमाण को ज्ञात करने की आवश्यकता है।



आकृति 10.5

इसलिए, आवश्यक टेप की लंबाई =

वर्गाकार चित्र का परिमाण = 1 मी + 1 मी + 1 मी + 1 मी = 4 मी

हम जानते हैं कि वर्ग की चारों भुजाओं की लंबाई बराबर होती है। इसलिए, इसे चार बार जोड़ने के स्थान पर, हम वर्ग की एक भुजा की लंबाई को 4 से गुणा कर सकते हैं। इसलिए आवश्यक टेप की लंबाई = $4 \times 1 \text{ मी} = 4 \text{ मी}$

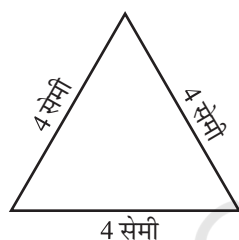
इस उदाहरण से हम देखते हैं कि

वर्ग का परिमाण = $4 \times$ एक भुजा की लंबाई

ऐसे ही कुछ और वर्गों को बनाइए और उनका परिमाण ज्ञात कीजिए।

अब हम 4 सेमी भुजा वाले एक समबाहु त्रिभुज (आकृति 10.6) को देखते हैं। क्या हम इसका परिमाण ज्ञात कर सकते हैं?

इस समबाहु त्रिभुज का परिमाण = $4 + 4 + 4$ सेमी



आकृति 10.6

इस समबाहु त्रिभुज का परिमाण = $(4 + 4 + 4)$ सेमी
 $= 3 \times 4$ सेमी
 $= 12$ सेमी

इस प्रकार, हम देखते हैं कि

समबाहु त्रिभुज का परिमाण = $3 \times$ एक भुजा की लंबाई

क्या आप बता सकते हैं कि एक वर्ग तथा एक समबाहु त्रिभुज में क्या समानता है? इन आकृतियों में प्रत्येक भुजा की लंबाई बराबर है तथा प्रत्येक कोण की माप बराबर है। ऐसी सभी आकृतियाँ, **बंद सम आकृतियाँ (regular closed figures)** कहलाती हैं।

इसलिए एक वर्ग तथा एक समबाहु त्रिभुज सम बंद आकृतियाँ हैं।

आपने देखा कि

एक वर्ग का परिमाण = $4 \times$ एक भुजा की लंबाई

एक समबाहु त्रिभुज का परिमाण = $3 \times$ एक भुजा की लंबाई

इसी प्रकार, एक सम पंचभुज का परिमाण कितना होगा?

एक सम पंचभुज में 5 बराबर भुजाएँ होती हैं।

इसलिए, एक सम पंचभुज का परिमाण = $5 \times$ एक भुजा की लंबाई और एक सम षट्भुज का परिमाण _____ होगा।

और एक सम अष्टभुज का परिमाण क्या होगा?

प्रयास कीजिए

अपने चारों ओर ऐसी वस्तुओं का पता लगाइए जो सम आकृतियाँ हों और उनका परिमाण भी ज्ञात कीजिए।

उदाहरण 6 : शायना 70 मी भुजा वाले वर्गाकार पार्क के किनारे-किनारे (चारों ओर) 3 चक्कर लगाती है। उनके द्वारा तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए।



हल : वर्गाकार पार्क का परिमाण
 $= 4 \times$ एक भुजा की लंबाई
 $= 4 \times 70$ मी $= 280$ मी

एक चक्कर में तय की गई दूरी $= 280$ मी
 इसलिए, 3×280 मी $= 840$ मी

उदाहरण 7 : पिंकी 75 मी भुजा वाले वर्गाकार मैदान के किनारे-किनारे चक्कर लगाती है। बॉब एक आयताकार मैदान, जिसकी लंबाई तथा चौड़ाई क्रमशः 160 मी और 105 मी है, के किनारे-किनारे चक्कर लगाता है। दोनों में से कौन अधिक और कितनी अधिक दूरी तय करता है।

हल : पिंकी द्वारा एक चक्कर में तय की गई दूरी $=$ वर्ग का परिमाण
 $= 4 \times$ एक भुजा की लंबाई
 $= 4 \times 75$ मी $= 300$ मी

बॉब द्वारा एक चक्कर में तय की गई दूरी $=$ आयत का परिमाण
 $= 2 \times$ (लंबाई + चौड़ाई)
 $= 2 \times (160$ मी $+ 105$ मी)
 $= 2 \times 265$ मी $= 530$ मी

तय की गई दूरियों में अंतर $= 530$ मी $- 300$ मी $= 230$ मी

अतः बॉब अधिक दूरी तय करता है और यह दूरी 230 मी अधिक है।

उदाहरण 8 : एक सम पंचभुज का परिमाण ज्ञात कीजिए जिसकी प्रत्येक भुजा की लंबाई 3 सेमी है।

हल : इस सम पंचभुज में 5 भुजाएँ हैं, जिसमें प्रत्येक भुजा की लंबाई 3 सेमी है, सम पंचभुज का परिमाण $= 5 \times 3$ सेमी $= 15$ सेमी

उदाहरण 9 : एक सम षट्भुज का परिमाण 18 सेमी है। इसकी एक भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल : परिमाण $= 18$ सेमी

एक सम षट्भुज में 6 बराबर भुजाएँ होती हैं। इसलिए, एक भुजा की लंबाई ज्ञात करने के लिए, हम परिमाण को 6 से भाग दे सकते हैं।

सम षट्भुज की एक भुजा की लंबाई $= 18$ सेमी $\div 6 = 3$ सेमी

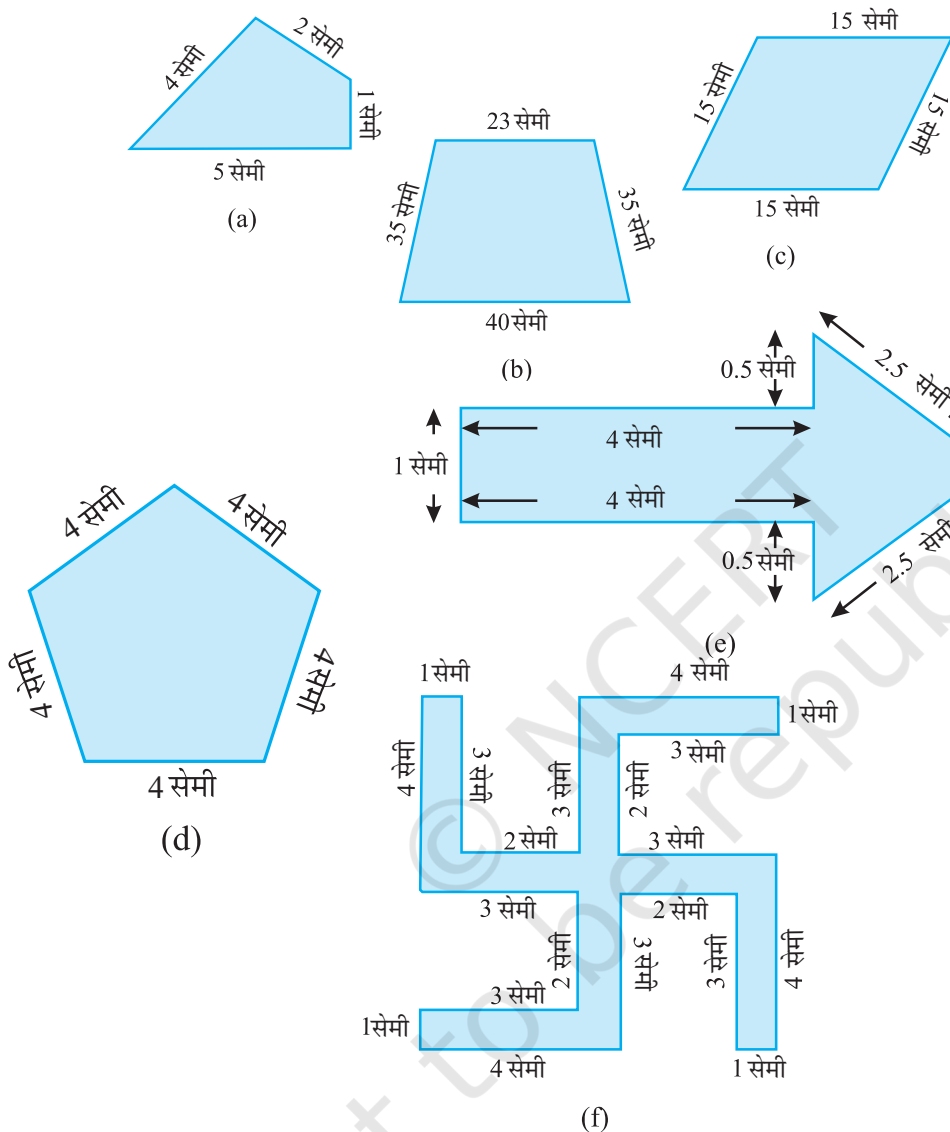
अतः सम षट्भुज की प्रत्येक भुजा की लंबाई 3 सेमी है।

अब हम कुछ ऐसे प्रश्नों को हल करेंगे जो कि अभी तक प्राप्त की गई जानकारी पर आधारित हैं।



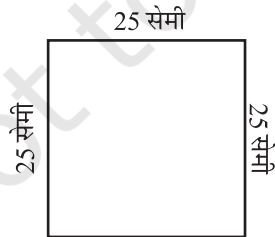
प्रश्नावली 10.1

1. नीचे दी हुई आकृतियों का परिमाण ज्ञात कीजिए :

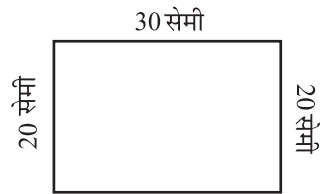


2. 40 सेमी लंबाई और 10 सेमी चौड़ाई वाले एक आयताकार बॉक्स के ढक्कन को चारों ओर से पूरी तरह एक टेप द्वारा बंद कर दिया जाता है। आवश्यक टेप की लंबाई ज्ञात कीजिए।
3. एक मेज़ की ऊपरी सतह की विमाएँ 2 मी 25 सेमी और 1 मी 50 सेमी हैं। मेज़ की ऊपरी सतह का परिमाण ज्ञात कीजिए।
4. 32 सेमी लंबाई और 21 सेमी चौड़ाई वाले एक फ़ोटो को लकड़ी की पट्टी से फ्रेम करना है। आवश्यक लकड़ी की पट्टी की लंबाई ज्ञात कीजिए।
5. एक आयताकार भूखंड की लंबाई और चौड़ाई क्रमशः 0.7 किमी और 0.5 किमी है। इसके चारों ओर एक तार से 4 पंक्तियों में बाड़ लगाई जानी है। आवश्यक तार की लंबाई ज्ञात कीजिए।

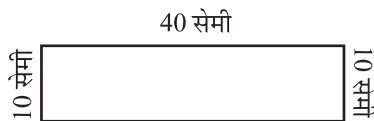
6. निम्न आकृतियों में प्रत्येक का परिमाण ज्ञात कीजिए :
 - (a) एक त्रिभुज जिसकी भुजाएँ 3 सेमी, 4 सेमी तथा 5 सेमी हैं।
 - (b) एक समबाहु त्रिभुज जिसकी एक भुजा की लंबाई 9 सेमी है।
 - (c) एक समद्विबाहु त्रिभुज जिसकी प्रत्येक समान भुजा 8 सेमी की हो तथा तीसरी भुजा 6 सेमी हो।
7. एक त्रिभुज का परिमाण ज्ञात कीजिए जिसकी भुजाएँ 10 सेमी, 14 सेमी तथा 15 सेमी हैं।
8. एक सम षट्भुज का परिमाण ज्ञात कीजिए, जिसकी प्रत्येक भुजा की माप 8 मी है।
9. एक वर्ग की भुजा ज्ञात कीजिए, जिसका परिमाण 20 मी है।
10. एक सम पंचभुज का परिमाण 100 सेमी है। प्रत्येक भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए।
11. एक धागे का टुकड़ा 30 सेमी लंबाई का है। प्रत्येक भुजा की लंबाई क्या होगी, यदि धागे से बनाया जाता है।
 - (a) एक वर्ग?
 - (b) एक समबाहु त्रिभुज?
 - (c) एक सम षट्भुज?
12. एक त्रिभुज की दो भुजाएँ 12 सेमी तथा 14 सेमी हैं। इस त्रिभुज का परिमाण 36 सेमी है। इसकी तीसरी भुजा की लंबाई क्या होगी?
13. 250 मी भुजा वाले वर्गाकार बगीचे के चारों ओर बाड़ लगाने का व्यय ₹20 प्रति मीटर की दर से ज्ञात कीजिए।
14. एक आयताकार बगीचा जिसकी लंबाई 175 मी तथा चौड़ाई 125 मी है, के चारों ओर ₹12 प्रति मीटर की दर से बाड़ लगाने का व्यय ज्ञात कीजिए।
15. स्वीटी 75 मी भुजा वाले वर्ग के चारों ओर दौड़ती है और बुलबुल 60 मी लंबाई और 45 मी चौड़ाई वाले आयत के चारों ओर दौड़ती है। कौन कम दूरी तय करती है?
16. निम्न प्रत्येक आकृति का परिमाण ज्ञात कीजिए। आप उत्तर से क्या निष्कर्ष निकालते हैं?



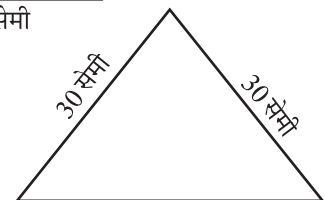
(a)



(c)

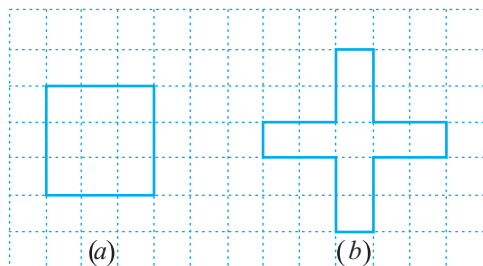


(b)



(d)

17. अवनीत 9 वर्गाकार टाइल खरीदता है, जिसकी प्रत्येक भुजा $\frac{1}{2}$ मी है और वह इन टाइलों को एक वर्ग के रूप में रखता है।

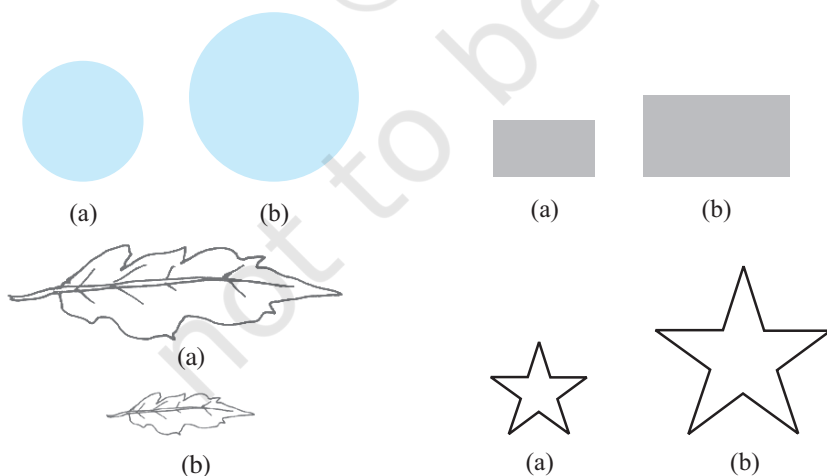


आकृति 10.7

- (a) नए वर्ग का परिमाण क्या है [(आकृति 10.7 (a))]?
 (b) शैरी को उसके द्वारा टाइलों को रखने की व्यवस्था पसंद नहीं आती है। वह इन टाइलों को एक क्रॉस के रूप में रखवाती है। इस व्यवस्था का परिमाण कितना होगा [(आकृति 10.7 (b))]?
 (c) किसका परिमाण अधिक है?
 (d) अवनीत सोचता है, क्या कोई ऐसा भी तरीका है जिससे इनसे भी बड़ा परिमाण प्राप्त किया जा सकता हो? क्या आप ऐसा करने का कोई सुझाव दे सकते हैं? (टाइलें किनारों से आपस में मिली हुई हों और वे टूटी न हों)।

10.3 क्षेत्रफल

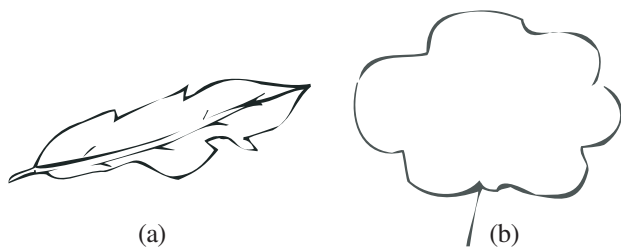
नीचे दी गई बंद आकृतियों को देखिए (आकृति 10.8)। ये सभी आकृतियाँ तल में कुछ क्षेत्र को घेरती हैं। क्या आप बता सकते हैं कि इनमें से कौन सी आकृति ज़्यादा क्षेत्र घेरती है?



आकृति 10.8

बंद आकृतियों द्वारा घेरे गए तल के परिमाण को उसका **क्षेत्रफल** कहते हैं। इसलिए, क्या आप बता सकते हैं कि ऊपर दी गई आकृतियों में किसका क्षेत्रफल अधिक है?

अब हम नीचे दी गई आकृतियों को देखते हैं (आकृति 10.9)। इनमें से किस आकृति का क्षेत्रफल अधिक है? इन आकृतियों को देखने मात्र से यह बता पाना बहुत ही मुश्किल है। इसलिए, आप क्या करते हैं?



आकृति 10.9

इन्हें एक वर्गीकृत पेपर या ग्राफ पेपर पर रखिए जहाँ पर प्रत्येक वर्ग की माप 1 सेमी × 1 सेमी हो।

इन आकृतियों की बाहरी सीमा अर्थात् बाहरी रूपरेखा खींचिए। इस आकृति के द्वारा घेरे गए वर्गों को देखिए। आप देखेंगे कि उनमें कुछ पूरे वर्ग, कुछ आधे वर्ग, कुछ आधे से कम तथा कुछ आधे से अधिक वर्ग घिरे हुए हैं।

आकृति द्वारा घेरे गए आवश्यक सेमी वर्ग की संख्या ही उसका क्षेत्रफल है।

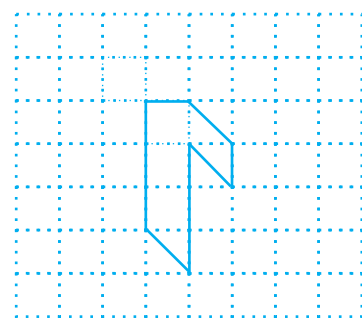
परंतु यहाँ एक समस्या है : आप जिस भी किसी आकृति का क्षेत्रफल मापना या जानना चाहते हैं, वर्ग हमेशा उसे पूर्णतया नहीं ढकते हैं। हम इस समस्या का समाधान एक परिपाटी को अपनाकर कर सकते हैं।

- एक पूरे वर्ग के क्षेत्रफल को हम 1 वर्ग इकाई (मात्रक) लेते हैं। यदि ये वर्ग एक वर्ग सेंटीमीटर के हैं तब एक पूरे वर्ग का क्षेत्रफल 1 वर्ग सेमी होगा।
- जिन वर्गों का आधे से कम भाग आकृति से घिरा है, उन पर ध्यान मत दीजिए अर्थात् उन्हें छोड़ दीजिए।
- यदि किसी वर्ग का आधे से अधिक भाग आकृति से घिरा है, तो ऐसे वर्ग को हम एक पूरा वर्ग ही गिनते हैं।
- यदि किसी वर्ग का ठीक-ठीक आधा भाग गिनती में आता है, तो ऐसे वर्ग के क्षेत्रफल को $\frac{1}{2}$ वर्ग इकाई लेते हैं।

इस परिपाटी से इच्छित क्षेत्रफल का अनुमान अच्छी तरह लगाया जा सकता है।

उदाहरण 10 : आकृति 10.10 में दिखाए आकार का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : यह आकार (आकृति) रेखाखंडों से मिलकर बना है। यह आकृति केवल पूरे वर्गों तथा आधे से घिरी हुई है। यह हमारे कार्य को और भी आसान बनाता है, कैसे?



आकृति 10.10

(i) पूरे घिरे हुए वर्गों की संख्या = 3

(ii) आधे घिरे हुए वर्गों की संख्या = 3

पूरे वर्गों द्वारा घिरा हुआ क्षेत्रफल = 3×1 वर्ग इकाई = 3 वर्ग इकाई

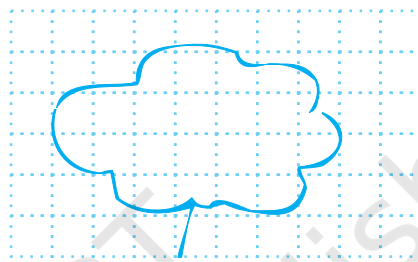
आधे वर्गों द्वारा घिरा (ढका) हुआ क्षेत्रफल

$$= 3 \times \frac{1}{2} \text{ वर्ग इकाई} = 1\frac{1}{2} \text{ वर्ग इकाई}$$

$$\text{अतः कुल क्षेत्रफल} = 4\frac{1}{2} \text{ वर्ग इकाई}$$

उदाहरण 11 : वर्गों को गिनकर, आकृति 10.9 (b) का अनुमानित क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

घिरे हुए वर्ग	संख्या	अनुमानित क्षेत्रफल (वर्ग इकाई)
(i) पूरे घिरे हुए वर्ग	11	11
(ii) आधे घिरे हुए वर्ग	3	$3 \times \frac{1}{2}$
(iii) आधे से अधिक घिरे हुए वर्ग	7	7
(iv) आधे से कम घिरे हुए वर्ग	5	0



आकृति 10.11

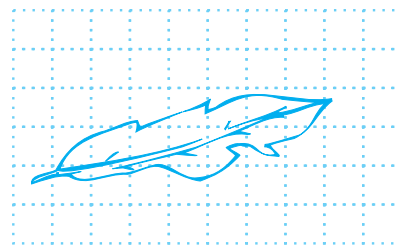
$$\text{कुल क्षेत्रफल} = 11 + 3 \times \frac{1}{2} + 7 = 19\frac{1}{2} \text{ वर्ग इकाई}$$

हल : ग्राफ पेपर पर इस आकृति की बाहरी रूपरेखा खींचिए। वर्ग इस आकृति को कैसे घेरते हैं (आकृति 10.11)?

उदाहरण 12 : वर्गों को गिनकर, आकृति 10.9 (a) का अनुमानित क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : एक ग्राफ पेपर पर इस आकृति की बाहरी रूपरेखा खींचिए। वर्ग इस आकृति को कैसे घेरते हैं। (आकृति 10.12)?

घिरे हुए वर्ग	संख्या	अनुमानित क्षेत्रफल (वर्ग इकाई)
(i) पूरे घिरे हुए वर्ग	1	1
(ii) आधे घिरे हुए वर्ग	—	—
(iii) आधे से अधिक घिरे हुए वर्ग	7	7
(iv) आधे से कम घिरे हुए वर्ग	9	0

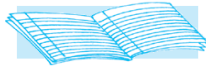


आकृति 10.12

$$\text{कुल क्षेत्रफल} = 1 + 7 = 8 \text{ वर्ग इकाई}$$

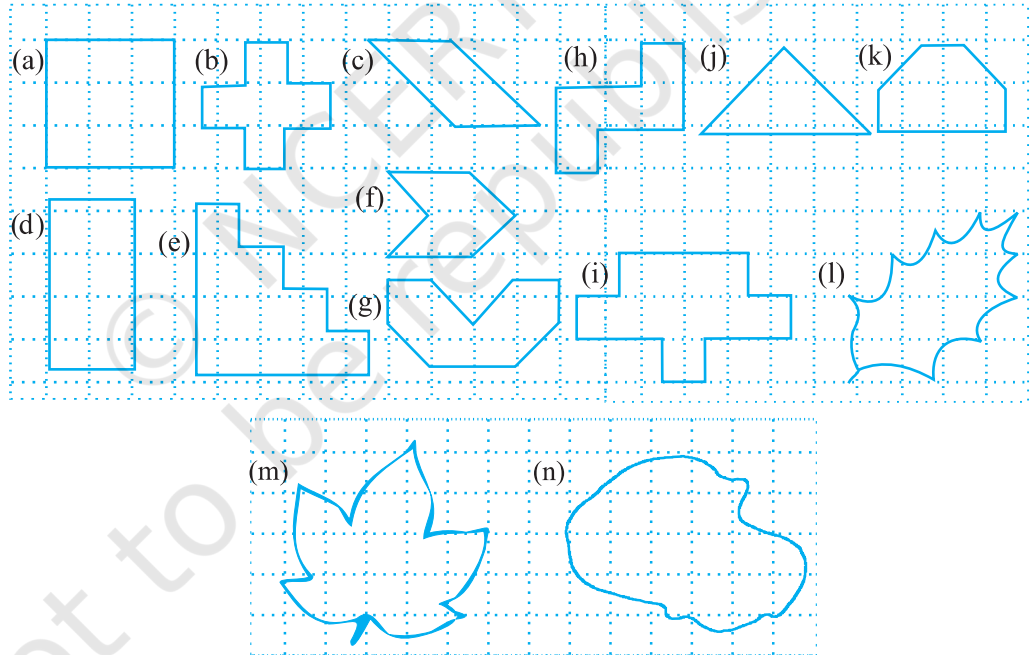
प्रयास कीजिए

1. ग्राफ पेपर पर कोई एक वृत्त खींचिए। इस वृत्त में उपस्थित वर्गों की संख्या को गिनकर वृत्ताकार क्षेत्र का अनुमानित क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
2. ग्राफ पेपर पर पत्तियों, फूल की पंखुड़ियों तथा ऐसे ही अन्य वस्तुओं को छायांकित कीजिए और उनका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



प्रश्नावली 10.2

1. निम्नलिखित आकृतियों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :

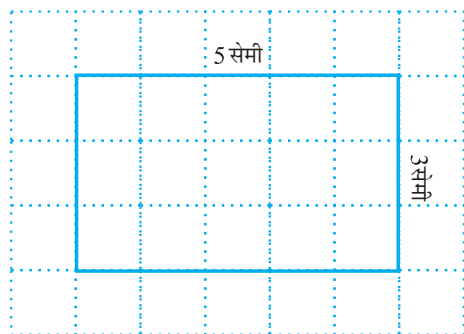


10.3.1 आयत का क्षेत्रफल

एक वर्गीकृत पेपर की सहायता से, क्या हम बता सकते हैं कि एक आयत का क्षेत्रफल कितना होगा, जिसकी लंबाई 5 सेमी तथा चौड़ाई 3 सेमी है?

ग्राफ पेपर पर एक आयत बनाइए जिस पर 1 सेमी \times 1 सेमी के वर्ग हों (आकृति 10.13)। यह आयत 15 वर्गों को पूर्णतया ढक लेता है।

आयत का क्षेत्रफल = 15 वर्ग सेमी है, जिसे हम 5×3 वर्ग सेमी (लंबाई \times चौड़ाई) के रूप में भी लिख सकते हैं।



आकृति 10.13

कुछ आयतों की भुजाओं की मापें दी गई हैं। इन्हें ग्राफ पेपर पर रखकर तथा वर्गों की संख्या को गिनकर, इनका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

लंबाई	चौड़ाई	क्षेत्रफल
3 सेमी	2 सेमी	-----
5 सेमी	4 सेमी	-----
6 सेमी	5 सेमी	-----

इससे हम क्या निष्कर्ष निकालते हैं?

हमने देखा कि

आयत का क्षेत्रफल = (लंबाई × चौड़ाई)

बिना ग्राफ पेपर की सहायता से, क्या हम एक आयत का क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं, जिसकी लंबाई 6 सेमी तथा चौड़ाई 4 सेमी है?

हाँ, यह संभव है।

आयत का क्षेत्रफल

= लंबाई × चौड़ाई

= 6 सेमी × 4 सेमी = 24 वर्ग सेमी

प्रयास कीजिए

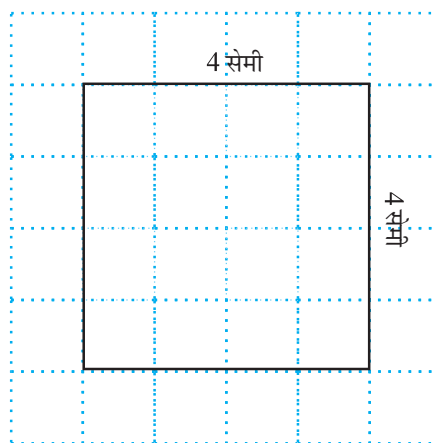
1. अपनी कक्षा के फर्श का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
2. अपने घर के किसी एक दरवाज़े का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

10.3.2 वर्ग का क्षेत्रफल

आइए, अब हम एक वर्ग पर विचार करते हैं

जिसकी भुजा की लंबाई 4 सेमी है (आकृति 10.14)।

इस वर्ग का क्षेत्रफल कितना होगा?



आकृति 10.14

यदि हम इसे सेंटीमीटर ग्राफ पेपर पर रखते हैं, तब हम क्या देखते हैं?

यह 16 वर्गों को पूर्णतया ढक लेता है।

$$\begin{aligned} \text{इसलिए, वर्ग का क्षेत्रफल} &= 16 \text{ वर्ग सेमी} \\ &= 4 \times 4 \text{ वर्ग सेमी} \end{aligned}$$

कुछ वर्गों की एक भुजा की लंबाई दी गई है :

ग्राफ पेपर की सहायता से उनके क्षेत्रफलों को ज्ञात कीजिए।

एक भुजा की लंबाई	वर्ग का क्षेत्रफल
3 सेमी	-----
7 सेमी	-----
5 सेमी	-----

इससे हम क्या निष्कर्ष निकालते हैं? हमने देखा कि प्रत्येक स्थिति में,

$$\text{वर्ग का क्षेत्रफल} = \text{भुजा} \times \text{भुजा}$$

आप प्रश्नों को हल करते समय इसका प्रयोग एक सूत्र के रूप में कर सकते हैं।

उदाहरण 13 : एक आयत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी लंबाई तथा चौड़ाई क्रमशः 12 सेमी तथा 4 सेमी है।

हल : आयत की लंबाई = 12 सेमी
 आयत की चौड़ाई = 4 सेमी
 आयत का क्षेत्रफल = लंबाई \times चौड़ाई
 = 12 सेमी \times 4 सेमी = 48 वर्ग सेमी

उदाहरण 14 : एक वर्गाकार भूखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी एक भुजा की लंबाई 8 मी है।

हल : वर्ग की भुजा = 8 मी
 वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा \times भुजा
 = 8 मी \times 8 मी = 64 वर्ग मी

उदाहरण 15 : एक आयताकार गत्ते का क्षेत्रफल 36 वर्ग सेमी तथा इसकी लंबाई 9 सेमी है। गत्ते की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

हल : आयताकार गत्ते का क्षेत्रफल = 36 वर्ग सेमी
 लंबाई = 9 सेमी
 चौड़ाई = ?
 आयत का क्षेत्रफल = लंबाई \times चौड़ाई

$$\text{इसलिए, चौड़ाई} = \frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{लंबाई}} = \frac{36}{9} \text{ सेमी} = 4 \text{ सेमी}$$

अतः, आयताकार गत्ते की चौड़ाई 4 सेमी है।

उदाहरण 16 : बॉब 3 मी चौड़ाई तथा 4 मी लंबाई वाले एक कमरे में वर्गाकार टाइलें लगाना चाहता है। यदि प्रत्येक वर्गाकार टाइल की भुजा 0.5 मी हो, तो कमरे के फर्श को ढकने के लिए कितनी टाइलों की आवश्यकता होगी?

हल : कमरे में लगने वाली सभी टाइलों का कुल क्षेत्रफल, फर्श के क्षेत्रफल के बराबर होगा।

$$\text{कमरे की लंबाई} = 4 \text{ मी}$$

$$\text{कमरे की चौड़ाई} = 3 \text{ मी}$$

$$\text{फर्श का क्षेत्रफल} = \text{लंबाई} \times \text{चौड़ाई}$$

$$= 4 \text{ मी} \times 3 \text{ मी}$$

$$= 12 \text{ वर्ग मी}$$

$$\text{एक वर्गाकार टाइल का क्षेत्रफल} = \text{भुजा} \times \text{भुजा}$$

$$= 0.5 \text{ मी} \times 0.5 \text{ मी}$$

$$= 0.25 \text{ वर्ग मी}$$



$$\begin{aligned} \text{आवश्यक कुल टाइलों की संख्या} &= \frac{\text{फर्श का क्षेत्रफल}}{\text{एक टाइल का क्षेत्रफल}} \\ &= \frac{12}{0.25} = \frac{1200}{25} = 48 \text{ टाइलें} \end{aligned}$$

उदाहरण 17 : 1 मी 25 सेमी चौड़ाई तथा 2 मी लंबाई वाले कपड़े के एक टुकड़े का क्षेत्रफल वर्ग मीटर में ज्ञात कीजिए।

हल : कपड़े की लंबाई = 2 मी

$$\text{कपड़े की चौड़ाई} = 1 \text{ मी } 25 \text{ सेमी} = 1 \text{ मी} + 0.25 \text{ मी} = 1.25 \text{ मी}$$

$$(\text{चूँकि } 25 \text{ सेमी} = 0.25 \text{ मी})$$

$$\text{कपड़े का क्षेत्रफल} = \text{कपड़े की लंबाई} \times \text{कपड़े की चौड़ाई}$$

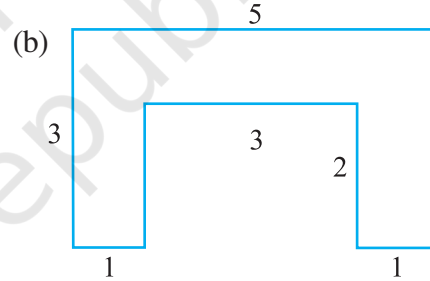
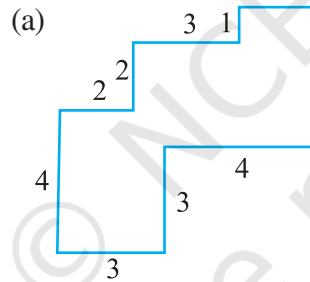
$$= 2 \text{ मी} \times 1.25 \text{ मी} = 2.50 \text{ वर्ग मी}$$



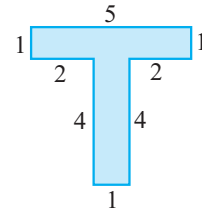
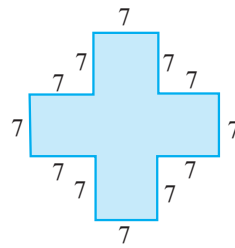
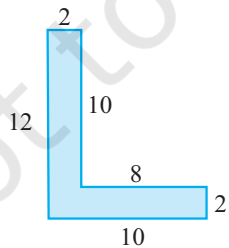
प्रश्नावली 10.3

- उन आयतों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिनकी भुजाएँ नीचे दी गई हैं :
 (a) 3 सेमी और 4 सेमी (b) 12 मी और 21 मी
 (c) 2 किमी और 3 किमी (d) 2 मी और 70 सेमी
- उन वर्गों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिनकी भुजाएँ निम्नलिखित हैं :
 (a) 10 सेमी (b) 14 सेमी (c) 5 मी
- तीन आयतों की विमाएँ निम्नलिखित हैं :
 (a) 9 मी और 6 मी (b) 3 मी और 17 मी (c) 4 मी और 14 मी
 इनमें से किसका क्षेत्रफल सबसे अधिक है और किसका सबसे कम?

4. 50 मी लंबाई वाले एक आयताकार बगीचे का क्षेत्रफल 300 वर्ग मीटर है। बगीचे की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।
5. 500 मी लंबाई तथा 200 मी चौड़ाई वाले एक आयताकार भूखंड पर ₹ 8 प्रति 100 वर्ग मीटर की दर से टाइल लगाने का व्यय ज्ञात कीजिए।
6. एक मेज़ के ऊपरी पृष्ठ की माप 2 मी × 1 मी 50 सेमी है। मेज़ का क्षेत्रफल वर्ग मीटर में ज्ञात कीजिए।
7. एक कमरे की लंबाई 4 मी तथा चौड़ाई 3 मी 50 सेमी है। कमरे के फर्श को ढकने के लिए कितने वर्ग मीटर गलीचे की आवश्यकता होगी?
8. एक फर्श की लंबाई 5 मी तथा चौड़ाई 4 मी है। 3 मी भुजा वाले एक वर्गाकार गलीचे को फर्श पर बिछाया गया है। फर्श के उस भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिस पर गलीचा नहीं बिछा है।
9. 5 मी लंबाई तथा 4 मी चौड़ाई वाले एक आयताकार भूखंड पर 1 मी भुजा वाली वर्गाकार फूलों की 5 क्यारियाँ बनाई जाती हैं। भूखंड के शेष भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
10. निम्नलिखित आकृतियों को आयतों में तोड़िए। इनका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए (भुजाओं की माप सेमी में दी गई है)।



11. निम्नलिखित आकृतियों को आयतों में तोड़िए और प्रत्येक का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। (भुजाओं की माप सेमी में दी गई है)।



12. एक टाइल की माप 5 सेमी × 12 सेमी है। एक क्षेत्र को पूर्णतया ढकने के लिए, ऐसी कितनी टाइलों की आवश्यकता होगी, जिसकी लंबाई और चौड़ाई क्रमशः
 - (a) 144 सेमी और 100 सेमी है।
 - (b) 70 सेमी और 36 सेमी है।

एक चुनौती!

एक सेंटीमीटर वर्गीकृत पेपर पर आप जितने भी आयत बना सकते हैं बनाइए, जिससे कि आयत का क्षेत्रफल 16 वर्ग सेमी हो जाए (केवल पूर्ण संख्या की लंबाई पर ही विचार करना है)।

(a) किस आयत का क्षेत्रफल सबसे अधिक है?

(b) किस आयत का क्षेत्रफल सबसे कम है?

यदि आप एक ऐसा आयत लें जिसका क्षेत्रफल 24 वर्ग सेमी हो, तो आपके उत्तर क्या होंगे? दिए हुए क्षेत्रफल के लिए, क्या अधिकतम परिमाण के आयत के आकार को बताना संभव है? क्या सबसे कम परिमाण के आयत के बारे में बता सकते हैं? उदाहरण दीजिए और कारण बताइए।

हमने क्या चर्चा की?

- परिमाण एक ऐसी दूरी है जो रेखाखंडों के साथ-साथ चलते हुए एक बंद आकृति के चारों ओर एक पूरा चक्कर लगाने में तय करती है।
- (a) आयत का परिमाण = $2 \times (\text{लंबाई} + \text{चौड़ाई})$
(b) वर्ग का परिमाण = $4 \times \text{भुजा की लंबाई}$
(c) समबाहु त्रिभुज का परिमाण = $3 \times \text{भुजा की लंबाई}$
- ऐसी आकृतियाँ, जिसकी सभी भुजाएँ और कोण बराबर हों, बंद सम आकृतियाँ कहलाती हैं।
- बंद आकृतियों द्वारा घिरे गए तल के परिमाण को उसका क्षेत्रफल कहते हैं।
- वर्गीकृत पेपर का प्रयोग करके किसी आकृति का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित परिपाटी को अपनाया जाता है :
(a) जिन वर्गों का आधे से कम भाग आकृति से घिरा है, उन्हें छोड़ दीजिए।
(b) यदि किसी वर्ग का आधे से अधिक भाग आकृति से घिरा है, तो ऐसे वर्गों को हम एक पूरा वर्ग ही गिनते हैं।
(c) यदि किसी वर्ग का आधा भाग आकृति से घिरा हो तो उसके क्षेत्रफल को $\frac{1}{2}$ वर्ग इकाई लेते हैं।
- (a) आयत का क्षेत्रफल = लंबाई \times चौड़ाई
(b) वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा \times भुजा

बीजगणित



अध्याय 11

11.1 भूमिका

अभी तक हमारा अध्ययन संख्याओं और आकारों के साथ रहा है। अब तक हम संख्याओं, संख्याओं पर संक्रियाओं और उनके गुणों के बारे में पढ़ चुके हैं। हमने संख्याओं को दैनिक जीवन की विभिन्न समस्याओं को हल करने में उपयोग किया है। गणित की वह शाखा जिसमें हमने संख्याओं का अध्ययन किया, **अंकगणित (arithmetic)** कहलाती है। हम दो और तीन विमाओं (dimensions) वाली आकृतियाँ तथा उनके गुणों के बारे में भी पढ़ चुके हैं। गणित की वह शाखा जिसमें हम इन आकृतियों अथवा आकारों (shapes) का अध्ययन करते हैं, **ज्यामिति (geometry)** कहलाती है। अब हम गणित की एक अन्य शाखा का अध्ययन प्रारंभ करने जा रहे हैं, जो **बीजगणित (algebra)** कहलाती है।

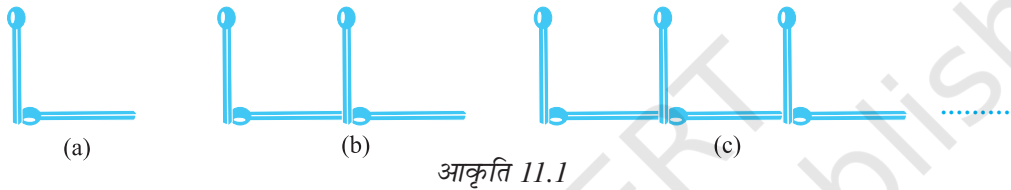
इस नयी शाखा, जिसका अध्ययन हम प्रारंभ करने जा रहे हैं, की मुख्य विशेषता यह है कि इसमें अक्षरों का प्रयोग किया जाता है। अक्षरों के प्रयोग से, हम नियमों और सूत्रों (formulas) को व्यापक रूप में लिख पाने में समर्थ हो जाएँगे। अक्षरों के इस प्रयोग से, हम केवल एक विशेष संख्या की ही बात न करके, किसी भी संख्या की बात कर सकते हैं। दूसरी बात यह है कि अक्षर अज्ञात राशियों के स्थान पर भी प्रयोग किए जा सकते हैं। इन अज्ञात राशियों (unknowns) को निर्धारित करने की विधियों को सीखकर हम पहलियाँ (puzzles) और दैनिक जीवन से संबंधित अनेक समस्याओं को हल करने के अनेक प्रभावशाली साधन विकसित कर सकते हैं। तीसरी बात यह है कि ये अक्षर संख्याओं के स्थान पर प्रयोग किए जाते हैं, इसलिए इन पर संख्याओं की तरह संक्रियाएँ भी की जा सकती हैं। इससे हम बीजीय व्यंजकों (algebraic expressions) और उनके गुणों के अध्ययन की ओर अग्रसर होते हैं।

आप बीजगणित को रोचक और उपयोगी पाएँगे। यह समस्याओं के हल करने में अति उपयोगी रहता है। आइए, अपने अध्ययन को सरल उदाहरणों द्वारा प्रारंभ करें।

11.2 माचिस की तीलियों से बने प्रतिरूप

अमीना और सरिता माचिस की तीलियों से प्रतिरूप (Pattern) बना रही हैं। उन्होंने अंग्रेजी वर्णमाला के अक्षरों के सरल प्रतिरूप बनाने का निर्णय किया। अमीना दो तीलियाँ लेकर अक्षर L बनाती है, जैसा कि आकृति 11.1 (a) में दिखाया गया है। फिर सरिता भी दो तीलियाँ लेती है और उनसे एक अन्य L बनाकर अमीना द्वारा बनाए गए L के आगे रख देती है, जैसा कि आकृति 11.1 (b) में दिखाया गया है।

फिर अमीना एक और L बनाकर आगे रख देती है और यह सिलसिला आगे जारी रहता है जैसा कि 11.1 (c) में बिंदुओं से दर्शाया गया है।



आकृति 11.1

तभी उनका मित्र अप्पू आ जाता है। वह इस प्रतिरूप को देखता है। अप्पू सदैव प्रश्न पूछता रहता है। वह इन लड़कियों से पूछता है, “सात L बनाने के लिए कितनी तीलियों की आवश्यकता पड़ेगी?” अमीना और सरिता सुचारु रूप से कार्य करती हैं। वे 1 L, 2 L, 3 L इत्यादि से प्रतिरूप बनाती रहती हैं और एक सारणी बनाती हैं :

सारणी-1

बनाए गए L की संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	-	-
आवश्यक तीलियों की संख्या	2	4	6	8	10	12	14	16	-	-

अप्पू को सारणी-1 से अपना उत्तर प्राप्त हो जाता है। 7 L बनाने के लिए 14 तीलियों की आवश्यकता होगी।

सारणी में लिखते समय, अमीना यह अनुभव करती है कि आवश्यक तीलियों की संख्या बनाए गए L की संख्या की दोगुनी है। अर्थात्

$$\text{आवश्यक तीलियों की संख्या} = 2 \times \text{L की संख्या}$$

आइए, सुविधा के लिए, L की संख्या के लिए अक्षर n लिखें।

यदि एक L बनाया जाता है, तो $n = 1$ है; यदि 2L बनाए जाते हैं तो $n = 2$ है; इत्यादि। इस प्रकार, n कोई भी प्राकृत संख्या 1, 2, 3, 4, 5, ... हो सकती है। फिर हम लिखते हैं : आवश्यक तीलियों की संख्या = $2 \times n$ है।

$2 \times n$ लिखने के स्थान पर, हम इसे $2n$ लिखते हैं। ध्यान दीजिए $2n$ वही है जो $2 \times n$ है।



अमीना अपने मित्रों से कहती है कि उसका यह नियम कितनी भी संख्या में L बनाने के लिए आवश्यक तीलियों की संख्या बता सकता है।

इस प्रकार, $n = 1$ के लिए, आवश्यक तीलियों की संख्या $= 2 \times 1 = 2$;

$n = 2$ के लिए, आवश्यक तीलियों की संख्या $= 2 \times 2 = 4$;

$n = 3$ के लिए, आवश्यक तीलियों की संख्या $= 2 \times 3 = 6$ इत्यादि।

ये संख्याएँ सारणी-1 में दी हुई संख्याओं जैसी ही हैं।

सरिता कहती है, “यह नियम बहुत प्रभावशाली है! इस नियम का प्रयोग करके मैं 100 L बनाने में आवश्यक तीलियों की संख्या भी बता सकती हूँ। एक बार नियम ज्ञात हो जाए, तो मुझे प्रतिरूप खींचने या सारणी बनाने की कोई आवश्यकता नहीं होगी।”

क्या आप सरिता से सहमत हैं?

11.3 एक चर की अवधारणा

उपरोक्त उदाहरण में, हमने L का एक प्रतिरूप बनाने में आवश्यक तीलियों की संख्या ज्ञात करने के लिए, एक नियम ज्ञात किया था। नियम यह था :

आवश्यक तीलियों की संख्या $= 2n$

यहाँ n , L के प्रतिरूपों की संख्या है और n के मान 1, 2, 3, 4, ... हो सकते हैं। आइए, सारणी-1 को पुनः देखें। सारणी में n का मान बदलता (बढ़ता) जाता है। इसके परिणामस्वरूप, आवश्यक तीलियों की संख्या भी बदलती (बढ़ती) जाती है।

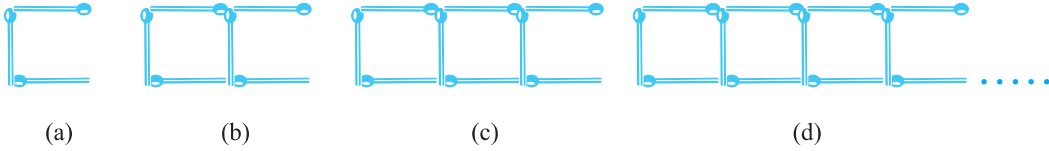
n चर (Variable) का एक उदाहरण है। इसका मान स्थिर (fixed) नहीं है; यह कोई भी मान 1, 2, 3, 4, ... ले सकता है। हमने आवश्यक तीलियों की संख्या के लिए, चर n का प्रयोग करके, नियम लिखा।

शब्द ‘चर’ का अर्थ है वह वस्तु जो विचरण (vary) करती है, अर्थात् बदलती है। चर का मान स्थिर नहीं है। यह विभिन्न मान ले (ग्रहण कर) सकता है।

हम चरों के बारे में और अधिक सीखने के लिए, माचिस की तीलियों से बनाए गए प्रतिरूपों में से एक अन्य उदाहरण को देखेंगे।

11.4 माचिस की तीलियों के और प्रतिरूप

अमीना और सरिता तीलियों के इन प्रतिरूपों में रुचि लेने लगी हैं। अब वे अक्षर C का एक प्रतिरूप बनाने का प्रयत्न करती हैं। एक C बनाने के लिए, वे तीन तीलियों का प्रयोग करती हैं, जैसा कि आकृति 11.2(a) में दर्शाया गया है।



आकृति 11.2

सारणी-2, C का एक प्रतिरूप बनाने के लिए आवश्यक तीलियों की संख्या प्रदान करती है :

सारणी-2

C की संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8
आवश्यक तीलियों की संख्या	3	6	9	12	15	18	21	24

क्या आप उपरोक्त सारणी में, छोड़ी गई रिक्त प्रविष्टियों को पूरा कर सकते हैं?

सरिता ने यह नियम दिया :

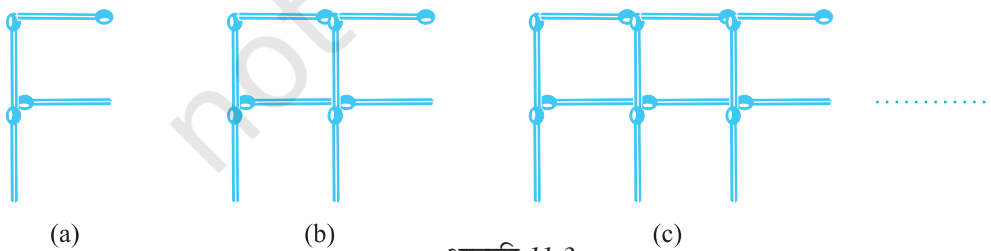
आवश्यक तीलियों की संख्या = $3n$

उसने C की संख्या के लिए अक्षर n का प्रयोग किया है; n एक चर है जो मान 1, 2, 3, 4, ... इत्यादि ले सकता है।

क्या आप सरिता से सहमत हैं?

याद रखिए कि $3n$ वही है जो $3 \times n$ है।

इसके आगे अब अमीना और सरिता F का एक प्रतिरूप बनाना चाहती हैं। वे चार तीलियों का प्रयोग करके एक F बनाती हैं, जैसा कि आकृति 11.3(a) में दर्शाया गया है।



आकृति 11.3

क्या आप F के प्रतिरूप बनाने के लिए अब कोई नियम लिख सकते हैं?

तीलियों से बनाए जाने वाले वर्णमाला के अन्य अक्षरों और आकारों के बारे में सोचिए। उदाहरणार्थ, U (U), V (V), त्रिभुज (Δ), वर्ग (\square) इत्यादि। इनमें से कोई पाँच अक्षर या

आकार चुनिए और इनके तीलियों के प्रतिरूप बनाने के लिए आवश्यक तीलियों की संख्या के लिए नियम लिखिए।

11.5 चरों के और उदाहरण

हमने एक चर को दर्शाने के लिए अक्षर n का प्रयोग किया है। राजू पूछता है, “ m क्यों नहीं?” n में कोई विशेष बात नहीं है, किसी भी अक्षर का प्रयोग किया जा सकता है।

एक चर को दर्शाने के लिए, किसी भी अक्षर m, l, p, x, y, z इत्यादि का प्रयोग किया जा सकता है। याद रखिए, एक चर वह संख्या है जिसका मान स्थिर नहीं होता। उदाहरणार्थ, संख्या 5 या संख्या 100 या कोई अन्य दी हुई संख्या एक चर नहीं है। इनके मान स्थिर (निश्चित) हैं। इसी प्रकार, त्रिभुज के कोणों की संख्या का मान स्थिर है, जो 3 है। यह एक चर नहीं है। एक चतुर्भुज के कोणों की संख्या (4) स्थिर है। यह भी एक चर नहीं है। परंतु उपरोक्त उदाहरणों, जो हमने देखे हैं, में n एक चर है। यह विभिन्न मान 1, 2, 3, 4, ... ले (ग्रहण कर) सकता है।

आइए, अब एक अधिक परिचित स्थिति में चरों पर विचार करें।

स्कूल के बुक स्टोर से विद्यार्थी अभ्यास-पुस्तिकाएँ खरीदने गए। एक अभ्यास-पुस्तिका का मूल्य 5 रु है। मुन्नु 5, अप्पू 7, सारा 4 अभ्यास-पुस्तिकाएँ खरीदना चाहती हैं। एक विद्यार्थी को बुक स्टोर से अभ्यास-पुस्तिका खरीदने के लिए कितनी धनराशि की आवश्यकता पड़ेगी?

यह इस पर निर्भर रहेगा कि वह विद्यार्थी कितनी अभ्यास-पुस्तिकाएँ खरीदना चाहता है। विद्यार्थी मिलकर एक सारणी बनाते हैं :



सारणी-3

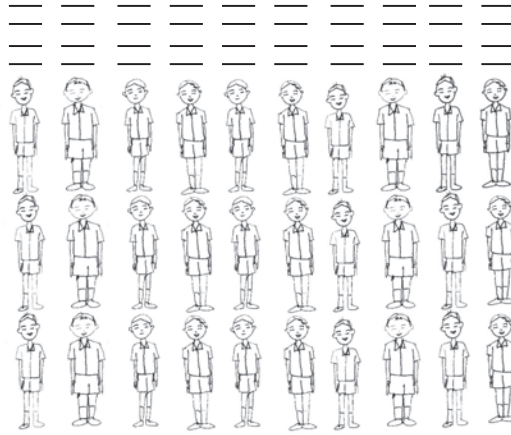
वांछित अभ्यास पुस्तिकाओं की संख्या	1	2	3	4	5	--	m	--
कुल मूल्य (रुपयों में)	5	10	15	20	25	--	$5m$	--

m अभ्यास-पुस्तिकाओं की उस संख्या के लिए प्रयोग किया गया है जो एक विद्यार्थी खरीदना चाहता है। यहाँ m एक चर है, जो कोई भी मान 1, 2, 3, 4, ... ले सकता है। m अभ्यास-पुस्तिकाओं का कुल मूल्य निम्न नियम द्वारा दिया जाता है :

$$\begin{aligned} \text{कुल मूल्य (रुपयों में)} &= 5 \times \text{वांछित अभ्यास-पुस्तिकाओं की संख्या} \\ &= 5m \end{aligned}$$

यदि मुन्नु 5 अभ्यास-पुस्तिकाएँ खरीदना चाहता है, तो $m = 5$ लेकर हम कहते हैं कि मुन्नु को ₹ 5×5 अर्थात् ₹ 25 अपने साथ ले जाने चाहिए, ताकि वह बुक स्टोर से खरीदारी कर सके।

आइए एक और उदाहरण लें। किसी स्कूल में गणतंत्र दिवस मनाने के अवसर पर, बच्चे मुख्य अतिथि के सम्मुख सामूहिक ड्रिल (Drill) का प्रदर्शन करने जा रहे हैं। वे इस प्रकार खड़े किए जाते हैं कि एक पंक्ति में 10 बच्चे रहें (आकृति 11.4)। इस ड्रिल में कितने बच्चे भाग ले सकते हैं?



आकृति 11.4

बच्चों की संख्या पंक्तियों की संख्या पर निर्भर करेगी। यदि 1 पंक्ति है, तो बच्चों की संख्या 10 होगी। यदि 2 पंक्तियाँ हों, तो बच्चों की संख्या 2×10 , अर्थात् 20 होगी। यदि r पंक्तियाँ हों, तो बच्चों की संख्या $10r$ होगी। यहाँ r एक चर है जो पंक्तियों की संख्या प्रदर्शित करता है और यह मान 1, 2, 3, 4, ... ले सकता है।

अभी तक हमने जितने उदाहरण देखे हैं उनमें एक चर को एक संख्या से गुणा किया गया है। परंतु विभिन्न स्थितियाँ ऐसी भी हो सकती हैं, जहाँ संख्याओं को चरों में जोड़ा जाता है या चरों में से घटाया जाता है, जैसा कि नीचे देखा जा सकता है।

सरिता का कहना कि उसके कंचों के संग्रह में अमीना के कंचों के संग्रह से 10 अधिक कंचे हैं। यदि अमीना के पास 20 कंचे हैं, तो सरिता के पास 30 कंचे होंगे। यदि अमीना के पास 30 कंचे हैं, तो सरिता के पास 40 कंचे होंगे। हमें यह ज्ञात नहीं है कि अमीना के पास कितने कंचे हैं। उसके पास कंचों की संख्या कुछ भी हो सकती है। परंतु हम जानते हैं कि सरिता के कंचों की संख्या = अमीना के कंचों की संख्या + 10 है।

हम अमीना के कंचों की संख्या को x से दर्शाएँगे। यहाँ x एक चर है, जो मान 1, 2, 3, 4, ..., 10, ..., 20, ..., 30, ... ले सकता है। x का प्रयोग करते हुए, हम लिख सकते हैं कि सरिता के कंचे = $x + 10$ हैं। व्यंजक $(x + 10)$ को, x धन (Plus) 10 पढ़ा जाता है। इसका अर्थ है कि x का मान 20 है, तो $(x + 10)$ का मान 30 होगा। यदि x का मान 30 है, तो $(x + 10)$ का मान 40 होगा इत्यादि।

व्यंजक $(x + 10)$ को और अधिक सरल नहीं किया जा सकता है। $x + 10$ को $10x$ से भ्रमित न हों। ये भिन्न-भिन्न हैं। $10x$ में, x को 10 से गुणा किया गया है। $(x + 10)$ में, 10 को x में जोड़ा गया है। हम इसकी जाँच x के कुछ मान लेकर कर सकते हैं। उदाहरणार्थ,

यदि $x = 2$, तो $10x = 10 \times 2 = 20$ है और $x + 10 = 2 + 10 = 12$ है।

यदि $x = 10$, तो $10x = 10 \times 10 = 100$ है और $x + 10 = 10 + 10 = 20$ है।

राजू और बालू दो भाई हैं। बालू राजू से 3 वर्ष छोटा है। अगर राजू 15 वर्ष का है, तो बालू 9 वर्ष का है। हमें राजू की वर्तमान आयु ज्ञात नहीं है। इसका मान कुछ भी हो सकता है। मान लीजिए, x राजू की वर्षों में आयु व्यक्त करता है। x एक चर है। यदि राजू की आयु वर्षों में x है, तो बालू की आयु वर्षों में $(x-3)$ है। व्यंजक $(x-3)$ को x ऋण (minus) 3 पढ़ा जाता है। जैसा कि आप आशा करेंगे, जब x का मान 12 है, तो $(x-3)$ का मान 9 है और जब x का मान 15 है, तो $(x-3)$ का मान 12 है।



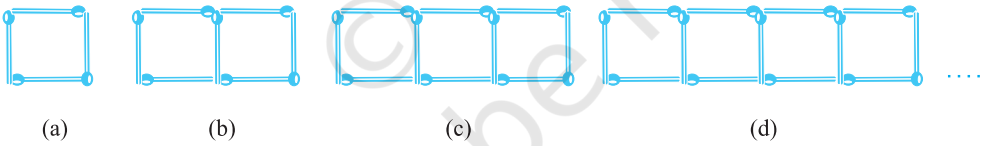
प्रश्नावली 11.1

- तीलियों से प्रतिरूप बनाने के लिए आवश्यक तीलियों की संख्या के लिए नियम ज्ञात कीजिए। नियम लिखने के लिए एक चर का प्रयोग कीजिए :
 - अक्षर T का \top के रूप में तीलियों से प्रतिरूप
 - अक्षर Z का Σ के रूप में तीलियों से प्रतिरूप
 - अक्षर U का \sqcup के रूप में तीलियों से प्रतिरूप
 - अक्षर V का \vee के रूप में तीलियों से प्रतिरूप
 - अक्षर E का \equiv के रूप में तीलियों से प्रतिरूप
 - अक्षर S का \S के रूप में तीलियों से प्रतिरूप
 - अक्षर A का F के रूप में तीलियों से प्रतिरूप
- हम अक्षर L, C और F के प्रतिरूपों के लिए नियमों को पहले से जानते हैं। ऊपर प्रश्न 1 में दिए कुछ अक्षरों से वही नियम प्राप्त होता है जो L द्वारा प्राप्त हुआ था। ये अक्षर कौन-कौन से हैं? ऐसा क्यों होता है?
- किसी परेड में कैडेट (Cadets) मार्च (March) कर रहे हैं। एक पंक्ति में 5 कैडेट हैं। यदि पंक्तियों की संख्या ज्ञात हो, तो कैडेटों की संख्या प्राप्त करने के लिए क्या नियम है? (पंक्तियों की संख्या के लिए n का प्रयोग कीजिए)।
- एक पेटी में 50 आम हैं। आप पेटियों की संख्या के पदों में आमों की कुल संख्या को किस प्रकार लिखेंगे? (पेटियों की संख्या के लिए b का प्रयोग कीजिए)।
- शिक्षक प्रत्येक विद्यार्थी को 5 पेंसिल देता है। विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात होने पर, क्या आप कुल वांछित पेंसिलों की संख्या बता सकते हैं? (विद्यार्थियों की संख्या के लिए s का प्रयोग कीजिए)।
- एक चिड़िया 1 मिनट में 1 किलोमीटर उड़ती है। क्या आप चिड़िया द्वारा तय की गई दूरी को (मिनटों में) उसके उड़ने के समय के पदों में व्यक्त कर सकते हैं? (मिनटों में उड़ने के समय के लिए t का प्रयोग कीजिए)।
- राधा बिंदुओं (Dots) से एक रंगोली बना रही है (खड़िया के पाउडर की सहायता से बिंदुओं को जोड़कर रेखाओं का एक सुंदर प्रतिरूप बनाना, जैसे आकृति 11.5 में है)। उसके पास एक पंक्ति में 8 बिंदु हैं। r पंक्तियों की रंगोली में कितने बिंदु होंगे? यदि 8 पंक्तियाँ हों, तो कितने बिंदु होंगे? यदि 10 पंक्तियाँ हों, तो कितने बिंदु होंगे?



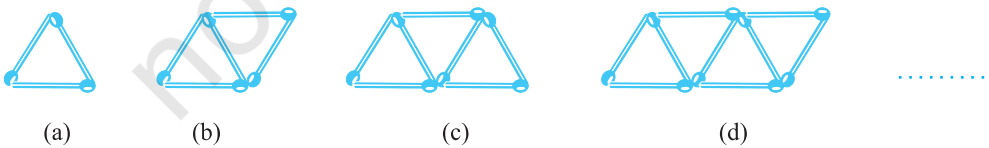
आकृति 11.5

8. लीला राधा की छोटी बहन है। लीला राधा से 4 वर्ष छोटी है। क्या आप लीला की आयु राधा की आयु के पदों में लिख सकते हैं? राधा की आयु x वर्ष है।
9. माँ ने लड्डू बनाए हैं। उन्होंने कुछ लड्डू मेहमानों और परिवार के सदस्यों को दिए। फिर भी 5 लड्डू शेष रह गए हैं। यदि माँ ने l लड्डू दे दिए हों, तो उसने कुल कितने लड्डू बनाए थे?
10. संतरों को बड़ी पेटियों में से छोटी पेटियों में रखा जाना है। जब एक बड़ी पेटि को खाली किया जाता है, तो उसके संतरों से दो छोटी पेटियाँ भर जाती हैं और फिर भी 10 संतरे शेष रह जाते हैं। यदि एक छोटी पेटि में संतरों की संख्या को x लिया जाए, तो बड़ी पेटि में संतरों की संख्या क्या है?
11. (a) तीलियों से बने हुए वर्गों के नीचे दिए प्रतिरूपों को देखिए (आकृति 11.6)। ये वर्ग अलग-अलग नहीं हैं। दो संलग्न वर्गों में एक तीली उभयनिष्ठ है। इस प्रतिरूप को देखिए और वह नियम ज्ञात कीजिए जो वर्गों की संख्या के पदों में आवश्यक तीलियों की संख्या देता है। (संकेत : यदि आप अंतिम ऊर्ध्वाधर तीली को हटा दें, तो आपको C का प्रतिरूप प्राप्त हो जाएगा)।



आकृति 11.6

- (b) आकृति 11.7 तीलियों से बना त्रिभुजों का एक प्रतिरूप दर्शा रही है। उपरोक्त प्रश्न 11 (a) की तरह, वह व्यापक नियम ज्ञात कीजिए जो त्रिभुजों की संख्या के पदों में आवश्यक तीलियों की संख्या देता है।



आकृति 11.7

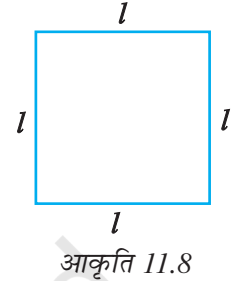
11.6 सामान्य नियमों में चरों का प्रयोग

आइए, अब देखें कि गणित के कुछ ऐसे सामान्य नियम, जिन्हें हम पहले ही पढ़ चुके हैं, किस प्रकार चरों का प्रयोग करते हुए व्यक्त किए जाते हैं।

ज्यामिति से नियम

हम क्षेत्रमिति (Mensuration) के अध्याय में, वर्ग के परिमाण और आयत के परिमाण के बारे में पहले ही पढ़ चुके हैं। अब हम आपको, उन्हें एक नियम के रूप में लिखने के लिए, वापस लिए चलते हैं।

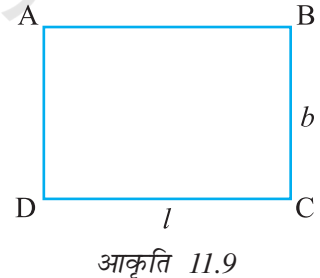
1. **वर्ग का परिमाण** : हम जानते हैं कि एक बहुभुज (3 या अधिक रेखाखंडों से बनी बंद आकृति) का परिमाण (perimeter) उसकी भुजाओं की लंबाइयों का योग होता है। वर्ग में चार भुजाएँ होती हैं और प्रत्येक की लंबाई बराबर होती है (आकृति 11.8)।



$$\begin{aligned} \text{अतः, वर्ग का परिमाण} &= \text{वर्ग की भुजाओं की लंबाइयों का योग} \\ &= l + l + l + l = 4 \times l = 4l \end{aligned}$$

इस प्रकार, हम वर्ग के परिमाण का एक नियम प्राप्त कर लेते हैं। चर l का प्रयोग, हमें एक ऐसा व्यापक नियम लिखने में समर्थ बनाता है, जो संक्षिप्त है और जिसे सरलता से याद रखा जा सकता है।

2. **आयत का परिमाण** : हम जानते हैं कि एक आयत की चार भुजाएँ होती हैं। उदाहरणार्थ, आयत ABCD की चार भुजाएँ AB, BC, CD और DA हैं (आकृति 11.9)। एक आयत की सम्मुख भुजाएँ सदैव बराबर होती हैं। इसलिए, आइए आयत ABCD की भुजाओं AB और CD की लंबाई को l से व्यक्त करें और भुजाओं AD और BC की लंबाई को b से व्यक्त करें।



$$\begin{aligned} \text{अतः, आयत का परिमाण} &= \text{AB की लंबाई} + \text{BC की लंबाई} + \text{CD की लंबाई} \\ &\quad + \text{AD की लंबाई} \\ &= l + b + l + b \\ &= (l + l) + (b + b) \\ &= 2l + 2b \end{aligned}$$

अतः, नियम यह है :

$$\text{आयत का परिमाण} = 2l + 2b$$

जहाँ l और b क्रमशः आयत की लंबाई और चौड़ाई हैं।

इसकी चर्चा कीजिए कि $l = b$ होने पर क्या होता है।

यदि हम आयत के परिमाण को चर p से व्यक्त करें, तो आयत के परिमाण का नियम निम्न हो जाता है :

$$p = 2l + 2b$$

टिप्पणी : यहाँ l और b दोनों चर हैं। ये एक दूसरे से स्वतंत्र मान ग्रहण करते हैं। अर्थात् एक चर द्वारा ग्रहण किए गए (लिए गए) मान पर दूसरे चर द्वारा ग्रहण किया हुआ मान निर्भर नहीं करता।

ज्यामिति के अपने अध्ययन में, आपके सम्मुख अनेक नियम और सूत्र आएँगे जो समतलीय आकृतियों के परिमाणों और क्षेत्रफलों तथा त्रिविमीय आकृतियों के पृष्ठीय क्षेत्रफलों और आयतनों से संबंधित होंगे। साथ ही, आप एक बहुभुज के अंतःकोणों के योग, एक बहुभुज के विकर्णों की संख्या इत्यादि के सूत्रों को प्राप्त कर सकते हैं। चरों की अवधारणा, जो आपने पढ़ी है, आपको ऐसे सभी व्यापक नियमों और सूत्रों के लिखने में अति उपयोगी सिद्ध होगी।

अंकगणित के नियम

3. दो संख्याओं के योग की क्रमविनिमेयता

हम जानते हैं कि

$$4 + 3 = 7 \text{ और } 3 + 4 = 7 \text{ है।}$$

अर्थात् $4 + 3 = 3 + 4$ है।

जैसा कि हम पूर्ण संख्याओं के अध्याय में देख चुके हैं, किसी भी दो पूर्ण संख्याओं के लिए यह सत्य है। संख्याओं का यह



गुण **संख्याओं के योग की क्रमविनिमेयता (commutativity)** कहलाता है। 'क्रमविनिमेय' का अर्थ है 'क्रम बदलना'। योग में संख्याओं के क्रम को बदलने से उनके योग में कोई परिवर्तन नहीं आता। चरों का प्रयोग, हमें इस गुण की व्यापकता को एक संक्षिप्त रूप में व्यक्त करने में समर्थ बनाता है। मान लीजिए a और b दो चर हैं जो कोई भी संख्या का मान ले सकते हैं।

तब, $a + b = b + a$ होता है।

एक बार जब हम नियम को इस रूप में लिख लेते हैं, तो इसमें सभी विशिष्ट स्थितियाँ सम्मिलित हो जाती हैं। यदि $a = 4$ और $b = 3$ है, तो हमें $4 + 3 = 3 + 4$ प्राप्त होता है। यदि $a = 37$ और $b = 73$ है, तो हमें $37 + 73 = 73 + 37$ प्राप्त होता है, इत्यादि।

4. दो संख्याओं के गुणन की क्रमविनिमेयता

हम पूर्ण संख्याओं के अध्याय में पढ़ चुके हैं कि दो संख्याओं के गुणन के लिए, जिन दो संख्याओं का गुणा किया जाता है तो उनके क्रम से गुणनफल पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है। उदाहरणार्थ,

$$4 \times 3 = 12 \text{ है और } 3 \times 4 = 12$$

$$\text{अतः, } 4 \times 3 = 3 \times 4 \text{ है।}$$

संख्याओं का यह गुण **संख्याओं के गुणन की क्रमविनिमेयता** कहलाता है। गुणन में संख्याओं के क्रम को बदलने पर गुणनफल में कोई परिवर्तन नहीं आता है। योग की तरह ही, चर a और b का प्रयोग करके, हम दो संख्याओं के गुणन की क्रमविनिमेयता को

$$a \times b = b \times a$$

के रूप में व्यक्त कर सकते हैं। ध्यान दीजिए कि यहाँ a और b कोई भी संख्या मान ले सकते हैं। इस व्यापक नियम से, सभी विशिष्ट स्थितियाँ जैसे $4 \times 3 = 3 \times 4$ या $37 \times 73 = 73 \times 37$; इत्यादि प्राप्त हो जाती हैं।

5. संख्याओं की वितरणता

मान लीजिए हमें 7×38 परिकल्पित करने को कहा जाता है। स्पष्टतः, हमें 38 की गुणन सारणी ज्ञात नहीं है। इसलिए, हम निम्न प्रकार से परिकलन करते हैं :

$$\begin{aligned} 7 \times 38 &= 7 \times (30 + 8) \\ &= 7 \times 30 + 7 \times 8 \\ &= 210 + 56 \\ &= 266 \end{aligned}$$

7, 30 और 8 जैसी सभी तीन संख्याओं के लिए सत्य है। यह गुण **संख्याओं के योग पर गुणन की वितरणता (distributivity of multiplication over addition of numbers)** कहलाती है।

चरों का प्रयोग करके, हम संख्याओं के इस गुण को भी एक व्यापक और संक्षिप्त रूप में लिख सकते हैं। मान लीजिए a, b और c कोई तीन चर हैं और इनमें से प्रत्येक कोई भी संख्या का मान ग्रहण कर सकता है। तब,

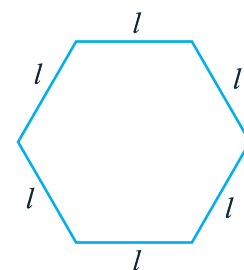
$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c \text{ होता है।}$$

संख्याओं के गुण अति आकर्षक होते हैं। आप इनमें कुछ का अध्ययन संख्याओं में इसी वर्ष में करेंगे और कुछ का बाद में अपने गणित के अध्ययन के साथ करेंगे। चरों का प्रयोग, हमें इन गुणों को एक अति व्यापक और संक्षिप्त रूप में व्यक्त करने में समर्थ बनाता है। संख्याओं का एक अन्य गुण प्रश्नावली 11.2 के प्रश्न 5 में दिया है। संख्याओं के ऐसे ही कुछ और गुणों को ज्ञात कीजिए और उन्हें चरों का प्रयोग करते हुए व्यापक रूप में व्यक्त कीजिए।



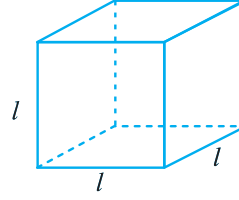
प्रश्नावली 11.2

1. एक समबाहु त्रिभुज की भुजा को l से दर्शाया जाता है। इस समबाहु त्रिभुज के परिमाप को l का प्रयोग करते हुए व्यक्त कीजिए।
2. एक सम षड्भुज (Regular hexagon) की एक भुजा को l से व्यक्त किया गया है (आकृति 11.10)। l का प्रयोग करते हुए, इस षड्भुज के परिमाप को व्यक्त कीजिए। (संकेत : एक समषड्भुज की सभी 6 भुजाएँ बराबर होती हैं और सभी कोण बराबर होते हैं)।



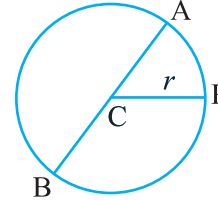
आकृति 11.10

3. घन (Cube) एक त्रिविमीय (three dimensional) आकृति होती है, जैसा कि आकृति 11.11 में दिखाया गया है। इसके 6 फलक होते हैं और ये सभी सर्वसम (identical) वर्ग होते हैं। घन के एक किनारे की लंबाई l से दी जाती है। घन के किनारों की कुल लंबाई के लिए एक सूत्र ज्ञात कीजिए।



आकृति 11.11

4. वृत्त का एक व्यास वह रेखाखंड है जो वृत्त पर स्थित दो बिंदुओं को जोड़ता है और उसके केंद्र से होकर जाता है। संलग्न आकृति 11.12 में, AB वृत्त का व्यास है और C उसका केंद्र है। वृत्त के व्यास (d) को उसकी त्रिज्या (r) के पदों में व्यक्त कीजिए।



आकृति 11.12

5. तीन संख्याओं 14, 27 और 13 के योग पर विचार कीजिए। हम यह योग दो प्रकार से ज्ञात कर सकते हैं :
- (a) हम पहले 14 और 27 को जोड़कर 41 प्राप्त कर सकते हैं और फिर 41 में 13 जोड़कर कुल योग 54 प्राप्त कर सकते हैं। या
- (b) हम पहले 27 और 13 को जोड़कर 40 प्राप्त कर सकते हैं और फिर इसे 14 में जोड़कर कुल योग 54 प्राप्त कर सकते हैं। इस प्रकार, $(14 + 27) + 13 = 14 + (27 + 13)$ हुआ।
- ऐसा किन्हीं भी तीन संख्याओं के लिए किया जा सकता है। यह गुण संख्याओं के योग का साहचर्य (associative) गुण कहलाता है। इस गुण को जिसे हम पूर्ण संख्याओं के अध्याय में पढ़ चुके हैं, चर a , b और c का प्रयोग करते हुए, एक व्यापक रूप में व्यक्त कीजिए।

11.7 चरों वाले व्यंजक

याद कीजिए कि अंकगणित में, हमें $2 \times 10 + 3$, $3 \times 100 + 2 \times 10 + 4$ इत्यादि जैसे व्यंजक (expressions) प्राप्त हुए थे। ये व्यंजक 2, 3, 4, 10, 100 इत्यादि जैसी संख्याओं से बनते हैं। ऐसे व्यंजकों को बनाने के लिए, चारों संक्रियाओं का योग, व्यवकलन, गुणन और विभाजन का प्रयोग किया जा सकता है। उदाहरणार्थ, $2 \times 10 + 3$ प्राप्त करने के लिए, हमने 2 और 10 का गुणा करके उसके गुणनफल में 3 जोड़ा है। अन्य अंकगणितीय व्यंजकों के उदाहरण निम्न हैं :

$$\begin{aligned} 3 + (4 \times 5), & \quad (-3 \times 4) + 5, \\ 8 - (7 \times 2), & \quad 14 - (5 - 2), \\ (6 \times 2) - 5, & \quad (5 \times 7) - (3 \times 4), \\ 7 + (8 \times 2) & \quad (5 \times 7) - (3 \times 4 - 7), \text{ इत्यादि।} \end{aligned}$$

व्यंजकों को चरों का प्रयोग करके भी प्राप्त किया जा सकता है। वस्तुतः, हम चरों वाले व्यंजकों को पहले ही देख चुके हैं। उदाहरणार्थ, $2n$, $5m$, $x + 10$, $x - 3$ इत्यादि। चरों वाले ये व्यंजक चरों पर योग, व्यवकलन, गुणन और विभाजन की संक्रियाएँ करने के बाद प्राप्त होते हैं। उदाहरणार्थ, व्यंजक $2n$ चर n को 2 से गुणा करने पर बनता है, व्यंजक $(x + 10)$ चर x में 10 जोड़ने पर बनता है इत्यादि।

हम जानते हैं कि चर विभिन्न मान ले सकते हैं, इनका कोई निश्चित मान नहीं होता है। परंतु ये संख्याएँ हैं। इसी कारण, संख्याओं की ही तरह इन पर योग, व्यवकलन, गुणन और विभाजन की संक्रियाएँ भी की जा सकती हैं।

चरों वाले व्यंजकों के संबंध में एक महत्वपूर्ण बात ध्यान देने योग्य है। एक संख्यात्मक व्यंजक जैसे $4 \times 3 + 5$ का सरलता से मान निकाला जा सकता है। उदाहरणार्थ,

$$4 \times 3 + 5 = 12 + 5 = 17$$

परंतु $(4x + 5)$ जैसे व्यंजक, जिसमें एक चर x आ रहा है, का मान निकालना संभव नहीं है। यदि चर x का मान दिया हो, केवल तभी व्यंजक का मान निकाला जा सकता है। उदाहरणार्थ, जब $x = 3$ है, तो

$$4x + 5 = 4 \times 3 + 5 = 17 \text{ है, जो ऊपर पहले भी प्राप्त हुआ था।}$$

नीचे आने वाली कुछ पंक्तियों में, हम देखेंगे कि कैसे कुछ व्यंजक बनाए जाते हैं।

व्यंजक	कैसे बनाया गया
(a) $y + 5$	y में 5 जोड़ने पर
(b) $t - 7$	t में से 7 घटाने पर
(c) $10a$	a को 10 से गुणा करने पर
(d) $\frac{x}{3}$	x को 3 से भाग देने पर
(e) $-5q$	q को -5 से गुणा करने पर
(f) $3x + 2$	पहले x को 3 से गुणा करके प्राप्त गुणनफल में 2 जोड़ने पर
(g) $2y - 5$	पहले y को 2 से गुणा करके प्राप्त गुणनफल में से 5 घटाने पर

इसी प्रकार के दस अन्य सरल व्यंजक लिखिए और बताइए कि वे किस प्रकार बनाए गए हैं। हमें किसी व्यंजक को उस स्थिति में बनाने में भी समर्थ हो जाना चाहिए, जब यह निर्देश दिए हों कि उसे किस प्रकार बनाना है। निम्नलिखित उदाहरण को देखिए :

निम्न के लिए व्यंजक दीजिए :

(a) z में से 12 घटाना	$z - 12$
(b) r में 25 जोड़ना	$r + 25$
(c) p में 16 से गुणा	$16p$
(d) y को 8 से भाग देना	$\frac{y}{8}$
(e) m का -9 से गुणा	$-9m$
(f) y में 10 से गुणा और फिर गुणनफल में 7 जोड़ना	$10y + 7$
(g) n में 2 से गुणा और फिर गुणनफल में से l घटाना	$2n - l$

सरिता और अमीना ने व्यंजकों का एक खेल खेलने का निर्णय लिया। उन्होंने एक चर x और एक संख्या 3 ली और देखा कि वे कितने व्यंजक बना सकते हैं। इसमें प्रतिबंध यह है कि वे चारों संख्या संक्रियाओं में से केवल एक संक्रिया ही प्रयोग कर सकते हैं और प्रत्येक व्यंजक में x अवश्य होना चाहिए। क्या आप इनकी सहायता कर सकते हैं?



सरिता $(x + 3)$ सोचती है।
फिर, अमीना $(x - 3)$ बनाती है।

क्या $(3x + 5)$ बनाया जा सकता है?
क्या $(3x + 3)$ बनाया जा सकता है?

उससे अगला वह $3x$ कहती है। तब सरिता तुरंत $\frac{x}{3}$ कहती है। दिए हुए प्रतिबंध के अंतर्गत क्या केवल ये चार व्यंजक ही बनाए जा सकते हैं?

अब इसके आगे, वे y , 3 और 5 के संयोजनों की सहायता से व्यंजक बनाने का प्रयत्न करती हैं। प्रतिबंध यह है कि वे योग और व्यवकलन में से एक तथा गुणन और विभाजन में से एक संक्रिया चुन सकते हैं। प्रत्येक व्यंजक में y अवश्य होना चाहिए। जाँच कीजिए कि क्या उनके उत्तर जो नीचे दिए गए हैं सही हैं :

$y + 5, y + 3, y - 5, y - 3,$

$3y, 5y, \frac{y}{3}, \frac{y}{5}, 3y + 5, 3y - 5, 5y + 3, 5y - 3$

क्या आप कुछ अन्य व्यंजक बना सकते हैं?

क्या $\left(\frac{y}{3} + 5\right)$ बनाया जा सकता है?
क्या $(y + 8)$ बनाया जा सकता है?
क्या $15y$ बनाया जा सकता है?



प्रश्नावली 11.3

- आप तीन संख्या 5, 7 और 8 से संख्याओं वाले (चर नहीं) जितने व्यंजक बना सकते हैं बनाइए। एक संख्या एक से अधिक बार प्रयोग नहीं की जानी चाहिए। केवल योग, व्यवकलन (घटाना) और गुणन का ही प्रयोग करें।



(संकेत : तीन संभावित व्यंजक $5 + (8 - 7)$, $5 - (8 - 7)$ और $5 \times 8 + 7$ हैं। अन्य व्यंजक बनाइए।)

- निम्नलिखित में से कौन-से व्यंजक केवल संख्याओं वाले व्यंजक ही हैं?
 - $y + 3$
 - $7 \times 20 - 8z$
 - $5(21 - 7) + 7 \times 2$
 - 5
 - $3x$
 - $5 - 5n$
 - $7 \times 20 - 5 \times 10 - 45 + p$
- निम्न व्यंजकों को बनाने में प्रयुक्त संक्रियाओं (योग, व्यवकलन, गुणन, विभाजन) को पहचानिए (छाँटिए) और बताइए कि ये व्यंजक किस प्रकार बनाए गए हैं :
 - $z + 1, z - 1, y + 17, y - 17,$
 - $17y, \frac{y}{17}, 5z,$
 - $2y + 17, 2y - 17,$
 - $7m, -7m + 3, -7m - 3$
- निम्नलिखित स्थितियों के लिए व्यंजक दीजिए :
 - p में 7 जोड़ना
 - p में से 7 घटाना

- (c) p को 7 से गुणा करना (d) p को 7 से भाग देना
 (e) $-m$ में से 7 घटाना (f) $-p$ को 5 से गुणा करना
 (g) $-p$ को 5 से भाग देना (h) p को -5 से गुणा करना

5. निम्नलिखित स्थितियों के लिए व्यंजक दीजिए :

- (a) $2m$ में 11 जोड़ना (b) $2m$ में से 11 घटाना
 (c) y के 5 गुने में 3 जोड़ना (d) y के 5 गुने में से 3 घटाना
 (e) y का -8 से गुणा
 (f) y को -8 से गुणा करके परिणाम में 5 जोड़ना
 (g) y को 5 से गुणा करके परिणाम को 16 में से घटाना
 (h) y को -5 से गुणा करके परिणाम को 16 में जोड़ना

6. (a) t और 4 का प्रयोग करके व्यंजक बनाइए। एक से अधिक संख्या संच्रिया का प्रयोग न करें। प्रत्येक व्यंजक में t अवश्य होना चाहिए।
 (b) y , 2 और 7 का प्रयोग करके व्यंजक बनाइए। प्रत्येक व्यंजक में y अवश्य होना चाहिए। केवल दो संख्या संच्रियाओं का प्रयोग करें। ये भिन्न-भिन्न होनी चाहिए।

11.8 व्यावहारिक रूप से व्यंजकों का प्रयोग

हमारे सम्मुख कई व्यावहारिक परिस्थितियाँ आ चुकी हैं, जहाँ व्यंजक उपयोगी होते हैं। आइए, कुछ को याद करने का प्रयत्न करें :

परिस्थिति (साधारण भाषा में वर्णित)	चर	व्यंजकों का प्रयोग करते हुए कथन
1. सरिता के पास अमीना से 10 कंचे अधिक हैं।	मान लीजिए अमीना के पास x कंचे हैं।	सरिता के पास $(x + 10)$ कंचे हैं।
2. बालू राजू से 3 वर्ष छोटा है।	मान लीजिए राजू की आयु x वर्ष है।	बालू की आयु $(x - 3)$ वर्ष है।
3. विकास की आयु राजू की आयु की दोगुनी है।	मान लीजिए राजू की आयु x वर्ष है।	विकास की आयु $2x$ वर्ष है।
4. राजू के पिता की आयु राजू की आयु के तिगुने से 2 वर्ष अधिक है।	मान लीजिए राजू की आयु x वर्ष है।	राजू के पिता की आयु $(3x + 2)$ वर्ष है।

आइए, ऐसी ही अन्य परिस्थितियों को देखें :

परिस्थिति (साधारण भाषा में वर्णित)	चर	व्यंजकों का प्रयोग करते हुए कथन
5. आज से 5 वर्ष बाद सुसान की आयु क्या होगी?	मान लीजिए सुसान की वर्तमान आयु वर्षों में y है।	आज से 5 वर्ष बाद सुसान की आयु $(y + 5)$ वर्ष होगी।

6. 4 वर्ष पहले सुसान की आयु क्या थी?	मान लीजिए सुसान की वर्तमान आयु वर्षों में y है।	4 वर्ष पहले सुसान की आयु $(y - 4)$ वर्ष थी।
7. गेहूँ का प्रति किग्रा मूल्य चावल के प्रति किग्रा मूल्य से 5 ₹ कम है।	मान लीजिए प्रति किग्रा चावल का मूल्य ₹ p है।	गेहूँ का प्रति किग्रा मूल्य ₹ $(p - 5)$ है।
8. प्रति लीटर तेल का मूल्य प्रति किग्रा चावल के मूल्य का 5 गुना है।	मान लीजिए चावल प्रति किग्रा मूल्य ₹ p है।	प्रति लीटर तेल का मूल्य ₹ $5p$ है।
9. एक बस की चाल उसी सड़क पर जाते हुए ट्रक की चाल से 10 किमी/घंटा अधिक है।	मान लीजिए ट्रक की चाल y किमी/घंटा है।	बस की चाल $(y + 10)$ किमी/घंटा है।

ऐसी ही कुछ अन्य परिस्थितियों को ज्ञात करने का प्रयत्न कीजिए। आप यह अनुभव करेंगे कि साधारण भाषा में ऐसे अनेक कथन हैं, जिन्हें आप चरों वाले व्यंजकों का प्रयोग होने वाले कथनों में बदल सकते हैं। अगले अनुच्छेद में, हम देखेंगे कि किस प्रकार हम इन व्यंजकों द्वारा बने कथनों का अपने कार्यों में प्रयोग करते हैं।



प्रश्नावली 11.4

1. निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

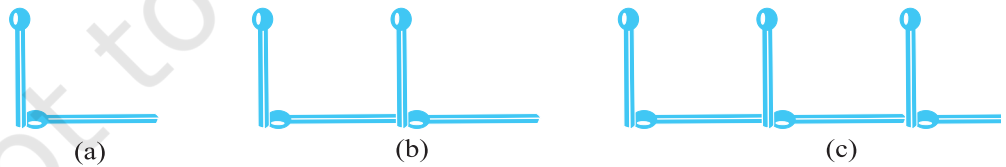
- सरिता की वर्तमान आयु y वर्ष लीजिए।
 - आज से 5 वर्ष बाद उसकी आयु क्या होगी?
 - 3 वर्ष पहले उसकी आयु क्या थी?
 - सरिता के दादाजी की आयु उसकी आयु की 6 गुनी है। उसके दादाजी की क्या आयु है?
 - उसकी दादीजी दादाजी से 2 वर्ष छोटी हैं। दादीजी की आयु क्या है?
 - सरिता के पिता की आयु सरिता की आयु के तीन गुने से 5 वर्ष अधिक है। उसके पिता की आयु क्या है?
- एक आयताकार हॉल की लंबाई उसकी चौड़ाई के तिगुने से 4 मीटर कम है। यदि चौड़ाई b मीटर है, तो लंबाई क्या है?
- एक आयताकार बक्स की ऊँचाई h सेमी है। इसकी लंबाई, ऊँचाई की 5 गुनी है और चौड़ाई, लंबाई से 10 सेमी कम है। बक्स की लंबाई और चौड़ाई को ऊँचाई के पदों में व्यक्त कीजिए।
- मीना, बीना और लीना पहाड़ी की चोटी पर पहुँचने के लिए सीढ़ियाँ चढ़ रही हैं। मीना सीढ़ी s पर है। बीना, मीना से 8 सीढ़ियाँ आगे है और लीना मीना से 7 सीढ़ियाँ पीछे है। बीना और लीना कहाँ पर हैं? चोटी पर पहुँचने के लिए कुल सीढ़ियाँ मीना द्वारा चढ़ी गई सीढ़ियों की संख्या के चार गुने से 10 कम है। सीढ़ियों की कुल संख्या को s के पदों में व्यक्त कीजिए।



- (e) एक बस v किमी प्रति घंटा की चाल से चल रही है। यह दासपुर से बीसपुर जा रही है। बस के 5 घंटे चलने के बाद भी बीसपुर 20 किमी दूर रह जाता है। दासपुर से बीसपुर की दूरी क्या है? इसे v का प्रयोग करते हुए व्यक्त कीजिए।
2. व्यंजकों के प्रयोग से बने निम्न कथनों को साधारण भाषा के कथनों में बदलिए :
(उदाहरणार्थ, एक क्रिकेट मैच में सलीम ने r रन बनाए और नलिन ने $(r + 15)$ रन बनाए। साधारण भाषा में, नलिन ने सलीम से 15 रन अधिक बनाए हैं)।
- (a) एक अभ्यास-पुस्तिका का मूल्य ₹ p है। एक पुस्तक का मूल्य ₹ $3p$ है।
(b) टोनी ने मेज़ पर q कंचे रखे। उसके पास डिब्बे में 8 q कंचे हैं।
(c) हमारी कक्षा में n विद्यार्थी हैं। स्कूल में 20 n विद्यार्थी हैं।
(d) जग्गू की आयु z वर्ष है। उसके चाचा की आयु $4z$ वर्ष है और उसकी चाची की आयु $(4z - 3)$ वर्ष है।
(e) बिंदुओं (dots) की एक व्यवस्था में r पंक्तियाँ हैं। प्रत्येक पंक्ति में 5 बिंदु हैं।
3. (a) मुन्नू की आयु x वर्ष दी हुई है। क्या आप अनुमान लगा सकते हैं कि $(x - 2)$ क्या दर्शाएगा? (संकेत : मुन्नू के छोटे भाई के बारे में सोचिए)। क्या आप अनुमान लगा सकते हैं कि $(x + 4)$ क्या दर्शाएगा और $(3x + 7)$ क्या दर्शाएगा?
(b) सारा की वर्तमान आयु y वर्ष दी हुई है। उसकी भविष्य की आयु और पिछली आयु के बारे में सोचिए। निम्नलिखित व्यंजक क्या सूचित करते हैं?
 $y + 7, y - 3, y + 4\frac{1}{2}, y - 2\frac{1}{2}$
(c) दिया हुआ है कि एक कक्षा के n विद्यार्थी फुटबाल खेलना पसंद करते हैं। $2n$ क्या दर्शाएगा? $\frac{n}{2}$ क्या दर्शा सकता है? (संकेत : फुटबाल के अतिरिक्त अन्य खेलों के बारे में सोचिए)।

11.9 एक समीकरण क्या है?

आइए, आकृति 11.1 में दी हुई तीलियों से बने अक्षर L के प्रतिरूप को याद करें। अपनी सुविधा के लिए, हमने यहाँ आकृति 11.1 को पुनः बनाया है :



विभिन्न संख्याओं के L बनाने के लिए आवश्यक तीलियों की संख्या सारणी-1 में दी गई थी। हम इस सारणी को पुनः यहाँ दे रहे हैं।

सारणी-1

बनाए गए L की संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	-----
आवश्यक तीलियों की संख्या	2	4	6	8	10	12	14	16	-----

हम जानते हैं कि आवश्यक तीलियों की संख्या निम्न नियम से दी जाती है :

$2n$, यदि n बनाए गए L की संख्या है।

अप्यु सदैव अलग तरीके से सोचता है। वह पूछता है, हम जानते हैं कि L की संख्या दी हुई रहने पर आवश्यक तीलियों की संख्या किस प्रकार ज्ञात की जा सकती है। इसकी विपरीत प्रक्रिया के बारे में क्या कहा जा सकता है? माचिस की तीलियों की संख्या दी हुई रहने पर, L की संख्या कैसे ज्ञात की जा सकती है?

हम अपने आपसे एक निश्चित प्रश्न पूछते हैं।

यदि 10 तीलियाँ दी हुई हों, तो कितने L बनेंगे?

इसका अर्थ है कि हम L की संख्या (अर्थात् n) ज्ञात करना चाहते हैं, यदि तीलियों की संख्या $2n = 10$ (1)

दी हुई है।

यहाँ हम एक प्रतिबंध प्राप्त करते हैं, जो चर n द्वारा संतुष्ट होना चाहिए। यह प्रतिबंध समीकरण (equation) का एक उदाहरण है।

हमारे प्रश्न का उत्तर सारणी-1 को देखकर प्राप्त किया जा सकता है। n के विभिन्न मानों को देखिए। यदि $n = 1$ है, तो तीलियों की संख्या 2 है। स्पष्टतः, प्रतिबंध संतुष्ट नहीं हुआ है, क्योंकि संख्या 2 संख्या 10 नहीं है। हम जाँच कर सकते हैं।

n	$2n$	क्या प्रतिबंध संतुष्ट है? हाँ/नहीं
2	4	नहीं
3	6	नहीं
4	8	नहीं
5	10	हाँ
6	12	नहीं
7	14	नहीं

हम पाते हैं कि केवल $n = 5$ के लिए उपरोक्त प्रतिबंध अर्थात् समीकरण $2n = 10$ संतुष्ट हो जाती है। 5 के अतिरिक्त n के किसी भी अन्य मान के लिए यह समीकरण संतुष्ट नहीं होती है।

आइए, एक अन्य समीकरण को देखें।

बालू राजू से 3 वर्ष छोटा है। राजू की आयु x वर्ष लेने पर, बालू की आयु $(x - 3)$ वर्ष होगी। मान लीजिए कि बालू की आयु 11 वर्ष है। तब, आइए देखें कि हमारी विधि किस प्रकार राजू की आयु ज्ञात करती है।

हमें बालू की आयु, $x - 3 = 11$ (2)

प्राप्त है।

यह चर x में एक समीकरण है। हम x के विभिन्न मानों के लिए, $(x - 3)$ के मानों की एक सारणी बनाते हैं।

x	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$x - 3$	0	1	-	-	-	-	-	-	-	9	10	11	12	13	-	-

जिन प्रविष्टियों को रिक्त छोड़ा गया है, उन्हें पूरा कीजिए। सारणी से हम ज्ञात करते हैं कि केवल $x = 14$ के लिए प्रतिबंध $x - 3 = 11$ संतुष्ट होता है। अन्य मानों जैसे $x = 16$ या $x = 12$ के लिए प्रतिबंध संतुष्ट नहीं होता है। अतः, राजू की आयु 14 वर्ष है।

उपरोक्त का सार यह है कि एक समीकरण चर पर एक प्रतिबंध होता है। यह चर के केवल एक निश्चित मान के लिए ही संतुष्ट होती है। उदाहरणार्थ, समीकरण $2n = 10$ चर n के केवल मान 5 से ही संतुष्ट होती है। इसी प्रकार, समीकरण $x - 3 = 11$ चर x के केवल मान 14 से ही संतुष्ट होती है।

ध्यान दीजिए कि एक समीकरण के दोनों पक्षों के बीच में समता (समिका) चिह्न (=) होता है। समीकरण बताती है कि बाएँ पक्ष (वाम पक्ष) (LHS) का मान दाएँ पक्ष (दक्षिण पक्ष) (RHS) के मान के बराबर है। यदि बायाँ पक्ष दाएँ पक्ष के बराबर न हो, तो हमें समीकरण प्राप्त नहीं होती।

उदाहरणार्थ, कथन $2n$ संख्या 10 से बड़ा है, अर्थात् $2n > 10$ एक समीकरण नहीं है। इसी प्रकार, कथन $2n$ संख्या 10 से छोटा है, अर्थात् $2n < 10$ भी एक समीकरण नहीं है। साथ ही, कथन $(x - 3) > 11$ और $(x - 3) < 11$ समीकरण नहीं हैं।

आइए, अब $8 - 3 = 5$ पर विचार करें।

यहाँ भी बाएँ पक्ष और दाएँ पक्ष के बीच में समता का चिह्न (=) है। दोनों पक्षों में चर संख्या नहीं है। यहाँ दोनों पक्षों में संख्याएँ हैं। हम इन्हें संख्यात्मक समीकरण कह सकते हैं। सामान्यतः शब्द समीकरण का प्रयोग केवल एक या अधिक चरों के होने पर ही किया जाता है।

आइए, एक प्रश्न हल करें।

बताइए, निम्नलिखित में से कौन-कौन से कथन समीकरण हैं। समीकरण की स्थिति में, समबद्ध चर भी बताइए।

- (a) $x + 20 = 70$ (हाँ, x)
 (b) $8 \times 3 = 24$ (नहीं, यह एक संख्यात्मक समीकरण है)
 (c) $2p > 30$ (नहीं)
 (d) $n - 4 = 100$ (हाँ, n)
 (e) $20b = 80$ (हाँ, b)
 (f) $\frac{y}{8} < 50$ (नहीं)

समीकरणों के कुछ उदाहरण नीचे दिए जा रहे हैं। (कुछ समीकरणों में समबद्ध चर भी दिए गए हैं)।

वांछित रिक्त स्थानों को भरिए :

$x + 10 = 30$ (चर x) (3)

$p - 3 = 7$ (चर p) (4)

$3n = 21$ (चर _____) (5)

$\frac{t}{5} = 4$ (चर _____) (6)

$2l + 3 = 7$ (चर _____) (7)

$2m - 3 = 5$ (चर _____) (8)

11.10 एक समीकरण का हल

हम पिछले अनुच्छेद में देख चुके हैं कि समीकरण

$$2n = 10 \quad (1)$$

$n = 5$ से संतुष्ट हो गई थी। n का कोई भी अन्य मान इस समीकरण को संतुष्ट नहीं करता है। समीकरण में चर का वह मान जो समीकरण को संतुष्ट करता है, उस समीकरण का एक हल (solution) कहलाता है। इस प्रकार, $n = 5$ समीकरण $2n = 10$ का एक हल है।

ध्यान दीजिए कि $n = 6$ समीकरण $2n = 10$ का हल नहीं है, क्योंकि $n = 6$ के लिए $2n = 2 \times 6 = 12$ है और यह 10 नहीं है।

साथ ही, $n = 4$ भी हल नहीं है। बताइए, क्यों नहीं है।

आइए, समीकरण

$$x - 3 = 11 \quad (2)$$

को लें। यह समीकरण $x = 14$ से संतुष्ट हो जाती है, क्योंकि $x = 14$ के लिए, समीकरण का बायाँ पक्ष $= 14 - 3 = 11 =$ दायाँ पक्ष है। यह समीकरण $x = 16$ से संतुष्ट नहीं होती है, क्योंकि $x = 16$ के लिए, समीकरण का बायाँ पक्ष $= 16 - 3 = 13$ है, जो दाएँ पक्ष के बराबर नहीं है।

इस प्रकार, $x = 14$ समीकरण $x - 3 = 11$ का एक हल है, परंतु $x = 16$ इस समीकरण का हल नहीं है। साथ ही, $x = 12$ भी इस समीकरण का हल नहीं है।

स्पष्ट कीजिए क्यों नहीं है। अब निम्नलिखित सारणी की प्रविष्टियों को पूरा कीजिए और स्पष्ट कीजिए कि आपके उत्तर हाँ/नहीं क्यों हैं।

समीकरण	चर का नाम	हल (हाँ/नहीं)
1. $x + 10 = 30$	$x = 10$	नहीं
2. $x + 10 = 30$	$x = 30$	नहीं
3. $x + 10 = 30$	$x = 20$	हाँ
4. $p - 3 = 7$	$p = 5$	नहीं
5. $p - 3 = 7$	$p = 15$	—
6. $p - 3 = 7$	$p = 10$	—
7. $3n = 21$	$n = 9$	—
8. $3n = 21$	$n = 7$	—
9. $\frac{t}{5} = 4$	$t = 25$	—
10. $\frac{t}{5} = 4$	$t = 20$	—
11. $2l + 3 = 7$	$l = 5$	—
12. $2l + 3 = 7$	$l = 1$	—
13. $2l + 3 = 7$	$l = 2$	—

समीकरण $2n = 10$ का हल ज्ञात करने के लिए, हमने n के विभिन्न मानों की एक सारणी तैयार की थी और फिर इस सारणी से n का वह मान चुन लिया जो समीकरण का हल था (अर्थात् समीकरण को संतुष्ट करता था)। हमने जो किया वह एक **प्रयत्न और भूल विधि (a trial and error method)** थी। यह हल ज्ञात करने की **सीधी (प्रत्यक्ष)** या **व्यावहारिक विधि** नहीं है। अब हम समीकरण को हल करने, अर्थात् उसको ज्ञात करने की एक सीधी विधि अपनाते हैं। हम केवल अगले वर्ष (अर्थात् अगली कक्षा में) ही समीकरण हल करने की एक क्रमबद्ध विधि का अध्ययन करेंगे।

बीजगणित का प्रारंभ

यह कहा जाता है कि गणित की एक शाखा के रूप में बीजगणित का प्रारंभ लगभग 1550 ई. पूर्व में अर्थात् आज से 3500 वर्ष पूर्व हुआ, जब मिस्रवासियों ने अज्ञात संख्याओं को व्यक्त करने के लिए संकेतों का प्रयोग करना प्रारंभ किया था।

300 ई. पूर्व के आस-पास भारत में अज्ञातों को अक्षरों से व्यक्त करना और व्यंजक बनाना एक बहुत सामान्य बात थी। अनेक महान भारतीय गणितज्ञों, जैसे **आर्यभट्ट** (जन्म 476 ई.), **ब्रह्मगुप्त** (जन्म 598 ई.), **महावीर** (जो लगभग 850 ई. में रहे) और **भास्कर-II** (जन्म 1114 ई) तथा कई अन्य ने बीजगणित के अध्ययन में बहुत योगदान दिया। उन्होंने अज्ञात राशियों के लिए **बीज, वर्ण** इत्यादि जैसे नाम दिए और उन्हें व्यक्त करने के लिए रंगों के नामों के प्रथम अक्षरों के रूप में प्रयोग किया (जैसे काला से 'का', नीला से 'नी' इत्यादि)। 'एल्जबरा' (Algebra) के लिए भारतीय नाम 'बीजगणित' इन्हीं प्राचीन भारतीय गणितज्ञों के समय काल का है।

शब्द 'एल्जबरा' लगभग 825 ई. में बगदाद के एक अरब गणितज्ञ मुहम्मद इबन अल खोवारिज्मी द्वारा लिखित एक पुस्तक 'अलजिबार वॉल अलमुगाबालाह' के शीर्षक से लिया गया है।



प्रश्नावली 11.5

1. बताइए कि निम्नलिखित में से कौन से कथन समीकरण (चर संख्याओं के) हैं? सकारण उत्तर दीजिए। समीकरणों में समबद्ध चर भी लिखिए।

(a) $17 = x + 17$

(b) $(t - 7) > 5$

(c) $\frac{4}{2} = 2$

(d) $7 \times 3 - 13 = 8$

(e) $5 \times 4 - 8 = 2x$

(f) $x - 2 = 0$

(g) $2m < 30$

(h) $2n + 1 = 11$

(i) $7 = 11 \times 5 - 12 \times 4$

(j) $7 = 11 \times 2 + p$

(k) $20 = 5y$

(l) $\frac{3q}{2} < 5$

(m) $z + 12 > 24$

(n) $20 - (10 - 5) = 3 \times 5$

(o) $7 - x = 5$

2. सारणी के तीसरे स्तंभ में प्रविष्टियों को पूरा कीजिए :

क्रम सं.	समीकरण	चर का मान	समीकरण संतुष्ट : हाँ/नहीं
(a)	$10y = 80$	$y =$	10
(b)	$10y = 80$	$y =$	8
(c)	$10y = 80$	$y =$	5
(d)	$4l = 20$	$l =$	20
(e)	$4l = 20$	$l =$	80
(f)	$4l = 20$	$l =$	5
(g)	$b + 5 = 9$	$b =$	5
(h)	$b + 5 = 9$	$b =$	9
(i)	$b + 5 = 9$	$b =$	4
(j)	$h - 8 = 5$	$h =$	8
(k)	$h - 8 = 5$	$h =$	0
(l)	$h - 8 = 5$	$h =$	3
(m)	$p + 3 = 1$	$p =$	3
(n)	$p + 3 = 1$	$p =$	1
(o)	$p + 3 = 1$	$p =$	0
(p)	$p + 3 = 1$	$p =$	-1
(q)	$p + 3 = 1$	$p =$	-2

3. प्रत्येक समीकरण के सम्मुख कोष्ठकों में दिए मानों में से समीकरण का हल चुनिए। दर्शाइए कि अन्य मान समीकरण को संतुष्ट नहीं करते हैं।

- (a) $5m = 60$ (10, 5, 12, 15)
 (b) $n + 12 = 20$ (12, 8, 20, 0)
 (c) $p - 5 = 5$ (0, 10, 5, -5)
 (d) $\frac{q}{2} = 7$ (7, 2, 10, 14)
 (e) $r - 4 = 0$ (4, -4, 8, 0)
 (f) $x + 4 = 2$ (-2, 0, 2, 4)

4. (a) नीचे दी हुई सारणी को पूरा कीजिए और इस सारणी को देखकर ही समीकरण $m + 10 = 16$ का हल ज्ञात कीजिए :

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	—	—	—
$m + 10$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

(b) नीचे दी हुई सारणी को पूरा कीजिए और इस सारणी को देखकर ही समीकरण $5t = 35$ का हल ज्ञात कीजिए :

t	3	4	5	6	7	8	9	10	11	—	—	—	—
$5t$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

(c) सारणी को पूरा कीजिए और समीकरण $\frac{z}{3} = 4$ का हल ज्ञात कीजिए :

z	8	9	10	11	12	13	14	15	16	—	—	—
$\frac{z}{3}$	$2\frac{2}{3}$	3	$3\frac{1}{3}$	—	—	—	—	—	—	—	—	—

(d) सारणी को पूरा कीजिए और समीकरण $m - 7 = 3$ का हल ज्ञात कीजिए :

m	5	6	7	8	9	10	11	12	13	—	—
$m - 7$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

5. निम्नलिखित पहेलियों को हल कीजिए। आप ऐसी पहेलियाँ स्वयं भी बना सकते हैं।
मैं कौन हूँ?

(i) एक वर्ग के अनुदिश जाइए।

प्रत्येक कोने को तीन बार
गिनकर और उससे अधिक नहीं,
मुझमें जोड़िए और
ठीक चौतीस प्राप्त कीजिए।

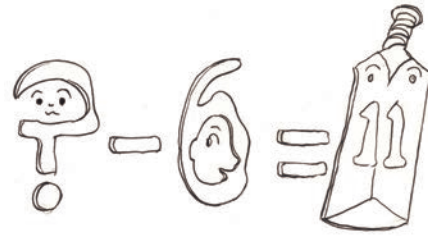


(ii) सप्ताह के प्रत्येक दिन के लिए,

मेरे से ऊपर गिनिए।
यदि आपने कोई गलती नहीं की है,
तो आप तेईस प्राप्त करेंगे।

(iii) मैं एक विशिष्ट संख्या हूँ।

मुझमें से एक छः निकालिए।
और क्रिकेट की एक टीम बनाइए।



(iv) बताइए, मैं कौन हूँ।

मैं एक सुंदर संकेत दे रही हूँ
आप मुझे वापिस पाएँगे,
यदि मुझे बाईस में से निकालेंगे।

हमने क्या चर्चा की?

- हमने तीलियों का प्रयोग करके अक्षरों और अन्य आकार बनाने के प्रतिरूप देखे। हमने किसी आकार को कई बार बनाने के लिए आवश्यक तीलियों की संख्या के लिए व्यापक नियम लिखना सीखा। वह आकार जिसे बनाया जा रहा है, जितनी बार बनाया जाता है वह संख्या बदलती रहती है। इसके मान 1, 2, 3, ... हो सकते हैं। यह एक चर है, जिसे किसी अक्षर जैसे n से व्यक्त किया जाता है।

2. एक चर विभिन्न मान लेता (ग्रहण करता) है। इसका मान स्थिर (निश्चित) नहीं होता। एक वर्ग की लंबाई का कुछ भी मान हो सकता है। यह एक चर है। परंतु किसी त्रिभुज के कोणों की संख्या तीन निश्चित है। यह एक चर नहीं है।
3. हम एक चर को दर्शाने के लिए कोई भी अक्षर n, l, m, p, x, y, z इत्यादि का प्रयोग कर सकते हैं।

4. व्यावहारिक स्थितियों में, हम चरों की सहायता से विभिन्न संबंधों को व्यक्त कर सकते हैं।

5. चर संख्याएँ ही हैं, यद्यपि इनके मान स्थिर या निश्चित नहीं हैं। हम संख्याओं की तरह इन पर योग, व्यवकलन, गुणन और विभाजन की सक्रियाएँ कर सकते हैं। विभिन्न सक्रियाओं का प्रयोग करके, हम चर वाले व्यंजक जैसे $x - 3, x + 3, 2n, 5m, \frac{p}{3}, 2y + 3, 3l - 5$ इत्यादि बना सकते हैं।



6. चर हमें ज्यामिति और अंकगणित दोनों के सामान्य नियमों को व्यापक रूप में व्यक्त करने में समर्थ बनाते हैं। उदाहरणार्थ, यह नियम कि दो संख्याओं को किसी भी क्रम में जोड़ने पर योग वही रहता है, हम $a + b = b + a$ के रूप में लिख सकते हैं। यहाँ चर a और b किसी भी संख्या 1, 32, 1000, $-7, -20$ इत्यादि के मान ले सकते हैं।

7. समीकरण, चर पर एक प्रतिबंध होता है। इसे एक चर वाला व्यंजक बराबर एक स्थिर संख्या के रूप में भी ले सकते हैं, जैसे $x - 3 = 10$ है।

8. एक समीकरण के दो पक्ष होते हैं—बायाँ पक्ष (LHS) और दायाँ पक्ष (RHS)। इन दोनों के बीच में समता (समिका) का चिह्न (=) होता है।

9. समीकरण का बायाँ पक्ष समीकरण के दाएँ पक्ष के बराबर उस समीकरण में समबद्ध चर के एक निश्चित मान के लिए ही होता है। हम कहते हैं कि चर का वह निश्चित मान समीकरण को संतुष्ट करता है। स्वयं यह मान समीकरण का हल कहलाता है।

10. हल ज्ञात करने की एक विधि प्रयत्न और भूल विधि है। इस विधि में, हम चर को कोई मान देकर यह जाँच करते हैं कि यह मान समीकरण को संतुष्ट करता है या नहीं। चर को हम ऐसे विभिन्न मान तब तक देते रहते हैं, जब तक हम चर का वह सही मान न प्राप्त कर लें, जो समीकरण को संतुष्ट करता है।



अनुपात और समानुपात



0651CH12

12
अध्याय

12.1 भूमिका

हमारे दैनिक जीवन में अनेक बार हमें दो-एक जैसी राशियों की तुलना करनी पड़ती है। उदाहरणतः अवनी और शैरी ने अपनी स्क्रेप फ़ाइल के लिए फूल इकट्ठे किए। अवनी ने 30 और शैरी ने 45 फूल इकट्ठे किए।

हम कह सकते हैं कि शैरी ने अवनी से $45 - 30 = 15$ फूल अधिक इकट्ठे किए।

यह अंतर द्वारा तुलना की एक विधि है। रहीम का कद 150 सेमी और अवनी का 140 सेमी है। इस प्रकार रहीम का कद अवनी से $150 \text{ सेमी} - 140 \text{ सेमी} = 10 \text{ सेमी}$ अधिक है।

यदि हम एक चींटी और एक टिड्डे की लंबाई की तुलना करना चाहें तो अंतर द्वारा इस तुलना को दिखाना उचित नहीं होगा। टिड्डे की लंबाई 4 सेमी से 5 सेमी होती है जोकि चींटी की लंबाई से बहुत लंबी है क्योंकि चींटी की लंबाई कुछ मिमी ही होती है। तुलना ज्यादा अच्छी होगी यदि हम टिड्डे की लंबाई के बराबर एक के पीछे एक, चींटियों की पंक्ति बना दें। इस प्रकार हम यह कह सकते हैं कि 20 से 30 चींटियों की कुल लंबाई एक टिड्डे की लंबाई के समान है।

अगला उदाहरण लेते हैं, एक कार का मूल्य ₹ 2,50,000 है और एक मोटरसाइकिल का मूल्य ₹ 50,000 है यदि हम उनके मूल्यों का अंतर लें तो यह ₹ 2,00,000 होगा। यदि हम तुलना भाग द्वारा करें तो वह इस प्रकार होगी :



$$\frac{2,50,000}{50,000} = \frac{5}{1}$$

हम कह सकते हैं कि कार का मूल्य मोटरसाइकिल के मूल्य का पाँच गुना है। इस प्रकार कुछ परिस्थितियों में भाग द्वारा तुलना, अंतर द्वारा तुलना से बेहतर सिद्ध होती है। भाग द्वारा तुलना को ही अनुपात कहा जाता है। आगे के खंड में हम अनुपात के विषय में और अधिक सीखेंगे।

12.2 अनुपात

निम्न को देखिए :

ईशा का वजन 25 किग्रा है और उसके पिता का 75 किग्रा। पिता का वजन, पुत्री के वजन का कितना गुना है? यह तीन गुना है।

एक पेन का मूल्य ₹ 10 है और एक पेंसिल का मूल्य ₹ 2 है। पेन का मूल्य पेंसिल के मूल्य का कितने गुना है? स्पष्ट है कि पाँच गुना।

उपरोक्त उदाहरण में हमने दो राशियों की 'कितने गुना' के रूप में तुलना की। यह तुलना अनुपात कहलाती है। हम अनुपात को ':' चिह्न द्वारा दर्शाएँगे।

पिछले उदाहरणों को दोबारा लेते हैं। हम कह सकते हैं :

$$\text{पिता के वजन का पुत्री के वजन के साथ अनुपात} = \frac{75}{25} = \frac{3}{1} = 3:1$$

$$\text{पेन के मूल्य का पेंसिल के मूल्य से अनुपात} = \frac{10}{2} = \frac{5}{1} = 5:1$$

प्रयास कीजिए

1. एक कक्षा में 20 लड़के और 40 लड़कियाँ हैं लड़कों की संख्या का, लड़कियों की संख्या से क्या अनुपात होगा?
2. रवि एक घंटे में 6 किमी चलता है जबकि रोशन एक घंटे में 4 किमी चलता है। रवि द्वारा तय की गई दूरी से रोशन द्वारा तय की गई दूरी का अनुपात ज्ञात कीजिए?

इस समस्या की ओर देखिए :

एक कक्षा में 20 लड़के तथा 40 लड़कियाँ हैं। अनुपात ज्ञात कीजिए :

(a) लड़कियों की संख्या का कुल विद्यार्थियों से

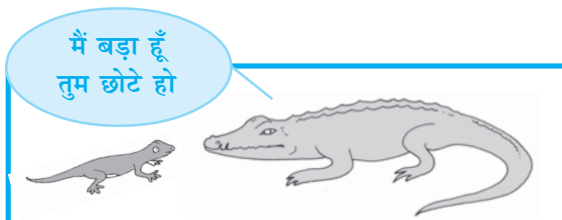
(b) लड़कों की संख्या का कुल विद्यार्थियों से

सर्वप्रथम हमें कुल विद्यार्थियों की संख्या की आवश्यकता है जो कि इस प्रकार है :

$$\text{लड़कियों की संख्या} + \text{लड़कों की संख्या} = 20 + 40 = 60$$

$$\text{तब, लड़कियों की संख्या का कुल विद्यार्थियों की संख्या से अनुपात} = \frac{40}{60} = \frac{2}{3} = 2:3$$

भाग (b) का हल इसी प्रकार निकालिए।



निम्न उदाहरण को लेते हैं :

घर में पाई जाने वाली छिपकली की लंबाई 20 सेमी है और मगरमच्छ की लंबाई 4 मीटर।

“मैं तुमसे पाँच गुनी लंबी हूँ” छिपकली ने कहा। जैसा कि हम देख सकते हैं कि यह बिल्कुल गलत है। एक छिपकली की लंबाई मगरमच्छ की लंबाई से पाँच गुना नहीं हो सकती। तो गलती कहाँ है? ध्यान से देखें छिपकली की लंबाई सेमी में है और मगरमच्छ की लंबाई मीटर में दी गई है। अतः हमें उनकी लंबाइयों को एक जैसी इकाइयों में बदलना होगा।

मगरमच्छ की लंबाई = 4 मी = $4 \times 100 = 400$ सेमी

अतः, मगरमच्छ की लंबाई का छिपकली की लंबाई से अनुपात इस प्रकार होगा

$$= \frac{400}{20} = \frac{20}{1} = 20:1.$$

दो राशियों की तुलना तभी की जा सकती है जब वे दोनों एक ही इकाई में हों। छिपकली की लंबाई का मगरमच्छ की लंबाई से अनुपात क्या होगा?

$$\text{यह होगा } \frac{20}{400} = \frac{1}{20} = 1:20$$

ध्यान दीजिए कि 1:20 और 20:1 दोनों एक दूसरे से भिन्न हैं। अनुपात 1:20 छिपकली की लंबाई का मगरमच्छ की लंबाई से है और 20:1 मगरमच्छ की लंबाई का छिपकली की लंबाई के साथ है।

एक और उदाहरण देखते हैं :

पेंसिल की लंबाई 18 सेमी है और इसका व्यास 8 मिमी है। पेंसिल के व्यास का उसकी लंबाई के साथ अनुपात क्या होगा? व्यास तथा लंबाई दोनों की इकाई अलग दी हुई है अतः उन्हें समान इकाई में बदलने की आवश्यकता है।

पेंसिल की लंबाई = 18 सेमी = 18×10 मिमी = 180 मिमी

पेंसिल के व्यास का उसकी लंबाई के साथ अनुपात

$$= \frac{8}{180} = \frac{2}{45} = 2:45$$

प्रयास कीजिए

1. सौरभ घर से स्कूल पहुँचने में 15 मिनट लेता है और सचिन एक घंटा लेता है। सौरभ द्वारा लिए गए समय और सचिन द्वारा लिए गए समय का अनुपात ज्ञात करो।
2. एक टॉफी का मूल्य 50 पैसे है और एक चॉकलेट का 10 रुपये। टॉफी के मूल्य का चॉकलेट के मूल्य से अनुपात ज्ञात कीजिए।
3. एक स्कूल में एक वर्ष में 73 छुट्टियाँ बनती हैं। छुट्टियों का वर्ष के कुल दिनों के साथ अनुपात ज्ञात कीजिए।

कुछ और ऐसी ही परिस्थितियों के विषय में सोचिए जहाँ आपको दो समान राशियों की तुलना करनी पड़े और दोनों राशियों की इकाइयाँ भिन्न हों।

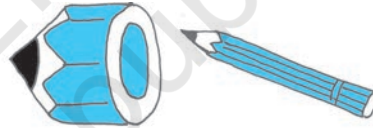


हम अनुपात की संकल्पना का प्रयोग दैनिक जीवन की बहुत सी परिस्थितियों में बिना जाने ही करते हैं।

आकृति A तथा B की तुलना करें। आकृति B, आकृति A से ज़्यादा वास्तविक लगती है। क्यों?

आकृति A में टाँगे बाकी शरीर की तुलना में लंबी हैं। ये इसलिए हैं कि हम टाँगों की शरीर के अन्य हिस्सों से तुलना में एक खास अनुपात की आशा रखते हैं।

चित्र में बनी दोनों पेंसिलों की तुलना कीजिए। क्या पहली पेंसिल देखने में पूरी पेंसिल लगती है? नहीं। क्यों नहीं? कारण यह है कि पेंसिल की मोटाई और लंबाई में सही अनुपात नहीं है।



हम अलग-अलग परिस्थितियों में एक जैसा अनुपात देख सकते हैं।

निम्न को देखें :

- एक कमरे की लंबाई 30 मी और इसकी चौड़ाई 20 मी है। अतः कमरे की लंबाई का चौड़ाई से अनुपात = $\frac{30}{20} = \frac{3}{2} = 3:2$
- एक पिकनिक में 24 लड़कियाँ और 16 लड़के जा रहे हैं। लड़कियों की संख्या का लड़कों की संख्या से अनुपात = $\frac{24}{16} = \frac{3}{2} = 3:2$
दोनों ही उदाहरणों में अनुपात 3 : 2 है।
- न्यूनतम रूप में 30 : 20 और 24 : 16 अनुपात समान हैं, और वे 3 : 2 के बराबर हैं। ये तुल्य अनुपात कहलाते हैं।
क्या आप कुछ और उदाहरण सोच सकते हैं जो न्यूनतम रूप में 3 : 2 के तुल्य हों? इस प्रकार की परिस्थितियाँ लिखना? जिनसे एक खास अनुपात मिले, रोचक होंगी।
उदाहरण के लिए एक ऐसी परिस्थिति लिखिए जिसमें अनुपात 2 : 3 है।
- मेज़ की चौड़ाई का लंबाई से अनुपात 2 : 3 है।
- शीना के पास 2 कंचे हैं और उसकी मित्र शबनम के पास 3 कंचे हैं, शीना और शबनम के कंचों का अनुपात 2 : 3 है।

क्या आप कुछ और ऐसे उदाहरण लिख सकते हैं जिसमें यही अनुपात आए? अपने मित्रों को कुछ अनुपात देकर उनसे उनपर आधारित कुछ उदाहरण बनवाएँ।

रवि और रानी ने एक व्यापार शुरू किया और 2 : 3 में धन निवेश किया, एक वर्ष बाद कुल लाभ ₹ 4,00,000 था।

रवि ने कहा कि हम यह लाभ बराबर बाँट लेते हैं। रानी ने उत्तर दिया, “मुझे ज़्यादा मिलना चाहिए क्योंकि मैंने ज़्यादा निवेश किया है।”

तब यह निर्णय लिया गया कि निवेश के अनुपात में ही लाभ बाँटा जाएगा।

यहाँ 2 : 3 के अनुपात में 2 और 3 दो ही राशियाँ हैं।

इन राशियों का योग = 2 + 3 = 5

इसका क्या अर्थ है?

इसका अर्थ है कि यदि ₹ 5 लाभ है तो रवि को ₹ 2 और रानी को ₹ 3 मिलेंगे।

और हम कह सकते हैं कि 5 हिस्सों में से 2 हिस्से रवि का और 3 हिस्से रानी को मिलेंगे।

इससे अभिप्राय होगा कि रवि को कुल लाभ

का $\frac{2}{5}$ मिलेगा और रानी को $\frac{3}{5}$ ।

यदि कुल लाभ ₹ 500 है

तो रवि को मिलेगा $\frac{2}{5} \times 500 = ₹ 200$

और रानी को $\frac{3}{5} \times 500 = ₹ 300$

अब, यदि कुल लाभ ₹ 40,000 हो तो प्रत्येक को कितना हिस्सा मिलेगा?

रवि का हिस्सा = $\frac{2}{5} \times ₹ 400000 = ₹ 1,60,000$

और रानी का हिस्सा = $\frac{3}{5} \times ₹ 400000 = ₹ 2,40,000$

क्या आप कुछ और उदाहरणों के विषय में सोच सकते हैं जहाँ आपको कुछ चीज़ों को एक अनुपात में बाँटना है? तीन ऐसी और समस्याओं को बनाइए और अपने मित्रों से हल करवाइए।



प्रयास कीजिए

1. अपने बैग में रखी कापियों की संख्या का पुस्तकों की संख्या से अनुपात ज्ञात कीजिए।
2. अपनी कक्षा की कुल डैस्कों की संख्या का कुल कुर्सियों की संख्या से अनुपात ज्ञात कीजिए।



3. अपनी कक्षा में उन छात्रों की संख्या ज्ञात कीजिए जिनकी आयु 12 वर्ष से ऊपर है। अब 12 वर्ष से ऊपर आयु वाले छात्रों की संख्या का कक्षा के बाकी छात्रों की संख्या के साथ अनुपात ज्ञात कीजिए।
4. अपनी कक्षा के दरवाज़ों की संख्या का खिड़कियों की संख्या से अनुपात निकालिए।
5. एक आयत बनाइए। उसकी लंबाई का चौड़ाई से अनुपात निकालिए।

अब तक जिस तरह की समस्याओं को हल करना हमने सीखा उन्हें देखें :

उदाहरण 1 : एक आयताकार मैदान की लंबाई और चौड़ाई क्रमशः 50 मी और 15 मी है। मैदान की लंबाई का चौड़ाई से अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : आयताकार मैदान की लंबाई = 50 मी
 आयताकार मैदान की चौड़ाई = 15 मी
 लंबाई का चौड़ाई से अनुपात = 50 : 15

अनुपात इस प्रकार लिखा जा सकता है $\frac{50}{15} = \frac{50 \div 5}{15 \div 5} = \frac{10}{3} = 10 : 3$

अतः अनुपात होगा 10 : 3

उदाहरण 2 : 90 सेमी और 1.5 मी का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : दोनों राशियाँ एक ही इकाई में नहीं हैं। अतः उन्हें समान इकाई में बदलने पर
 1.5 मी = 1.5 × 100 सेमी = 150 सेमी
 अतः वांछित अनुपात है

$$90 : 150 = \frac{90}{150} = \frac{90 \div 30}{150 \div 30} = \frac{3}{5}$$

अतः वांछित अनुपात है 3 : 5

उदाहरण 3 : एक दफ्तर में 45 लोग काम करते हैं, जहाँ महिलाओं की संख्या 25 है और शेष पुरुष हैं। निम्न में अनुपात ज्ञात कीजिए :

- (a) महिलाओं की संख्या का पुरुषों की संख्या से
- (b) पुरुषों की संख्या का महिलाओं की संख्या से

हल : महिलाओं की संख्या = 25
 कर्मियों की कुल संख्या = 45

पुरुषों की संख्या = 45 - 25 = 20

अतः महिलाओं की संख्या का पुरुषों की संख्या के साथ अनुपात
 = 25 : 20 = 5 : 4

और पुरुषों की संख्या का महिलाओं की संख्या के साथ अनुपात
 = 20 : 25 = 4 : 5

(ध्यान दें कि 5 : 4 और 4 : 5 में अंतर है)

उदाहरण 4 : 6 : 4 के दो तुल्य अनुपात लिखिए।

हल : अनुपात $6 : 4 = \frac{6}{4} = \frac{6 \times 2}{4 \times 2} = \frac{12}{8}$

अतः, 12 : 8 और 6 : 4 तुल्य अनुपात हैं।

$$\text{इसी प्रकार, } 6 : 4 = \frac{6}{4} = \frac{6 \div 2}{4 \div 2} = \frac{3}{2}$$

3:2 एक अन्य तुल्य अनुपात है।

इसी प्रकार, हम किसी भी अनुपात का तुल्य अनुपात अंश और हर में एक समान संख्या से गुणा या भाग द्वारा प्राप्त कर सकते हैं।

6 : 4 के दो और तुल्य अनुपात ज्ञात कीजिए।

उदाहरण 5 : रिक्त स्थानों को भरिए :

$$\frac{14}{21} = \frac{\square}{3} = \frac{6}{\square}$$

हल : पहला रिक्त स्थान भरने के लिए हम $21 = 3 \times 7$ तथ्य का प्रयोग करेंगे। अर्थात् 21 को 7 से भाग देने पर 3 प्राप्त होता है। यह दर्शाता है कि दूसरे अनुपात का रिक्त स्थान प्राप्त करने के लिए 14 को 7 से भाग करना पड़ेगा। भाग करने पर, $14 \div 7 = 2$

अतः दूसरा अनुपात $\frac{2}{3}$ है।

इसी तरह, तीसरे अनुपात के लिए, दूसरे अनुपात की दोनों राशियों को 3 से गुणा करना पड़ेगा। (क्यों?)

अतः, तीसरा अनुपात $\frac{6}{9}$ है।

इस प्रकार, $\frac{14}{21} = \frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ [ये सभी तुल्य अनुपात हैं।]

उदाहरण 6 : मैरी के घर से स्कूल की दूरी का जॉन के घर से स्कूल की दूरी का अनुपात 2 : 1 है।

(a) स्कूल के अधिक निकट कौन रहता है?

(b) निम्न सारणी को पूरा कीजिए जो कुछ संभव दूरियाँ दर्शाती हैं जहाँ मैरी और जॉन रह सकते हों।

मैरी के घर से स्कूल की दूरी (किमी)	10	<input type="text"/>	4	<input type="text"/>	<input type="text"/>
जॉन के घर से स्कूल की दूरी (किमी)	5	4	<input type="text"/>	3	1

(c) यदि मैरी के घर से स्कूल की दूरी का कलाम के घर से स्कूल की दूरी का अनुपात 1 : 2 हो तो स्कूल के ज़्यादा निकट कौन रहता है।

हल : (a) जॉन स्कूल के ज़्यादा निकट रहता है (क्योंकि अनुपात 2 : 1 है)
(b)

मैरी के घर से स्कूल की दूरी (किमी)	10	<input type="text"/>	4	<input type="text"/>	<input type="text"/>
कलाम के घर से स्कूल की दूरी (किमी)	5	4	<input type="text"/>	3	1

(c) क्योंकि अनुपात 1 : 2 है अतः मैरी स्कूल के ज़्यादा निकट रहती है।

उदाहरण 7 : कृति और किरन के बीच ₹ 60 को 1 : 2 में बाँटिए।

हल : अनुपात के दो हिस्से 1 और 2 हैं।

अतः, दोनों हिस्सों का योग = 1 + 2 = 3

इसका अर्थ है कि यदि ₹ 3 हैं तो कृति को ₹ 1 और किरन को ₹ 2 मिलेंगे।
यानी कि 3 में से कृति को एक हिस्सा और किरन को 2 हिस्से मिलेंगे।

अतः, कृति का हिस्सा = $\frac{1}{3} \times ₹ 60 = ₹ 20$

और किरन का हिस्सा = $\frac{2}{3} \times ₹ 60 = ₹ 40$



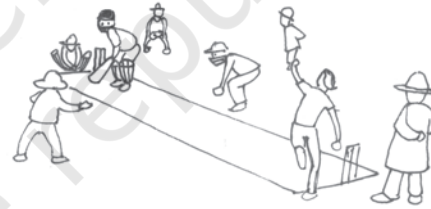
प्रश्नावली 12.1

1. एक कक्षा में 20 लड़कियाँ और 15 लड़के हैं। अनुपात ज्ञात कीजिए :

- लड़कियों की संख्या का लड़कों की संख्या से
- लड़कियों की संख्या का कुल विद्यार्थियों की संख्या से

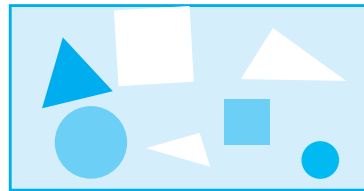
2. 30 विद्यार्थियों की कक्षा में 6 फुटबाल, 12 क्रिकेट और बाकी टेनिस पसंद करते हैं। अनुपात ज्ञात कीजिए।

- फुटबाल पसंद करने वालों की संख्या का टेनिस पसंद करने वालों की संख्या से
- क्रिकेट प्रेमियों का कुल विद्यार्थियों की संख्या से



3. आकृति को देखकर अनुपात निकालिए :

- आयत के अंदर के सभी त्रिभुजों की संख्या का वृत्तों की संख्या से।
- आयत के अंदर के सभी वर्गों की संख्या का सभी आकृतियों से
- आयत के अंदर के सभी वृत्तों का सभी आकृतियों से।



4. हामिद और अख्तर ने एक घंटे में क्रमशः 9 किमी और 12 किमी की दूरी तय की। हामिद और अख्तर की चालों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

5. रिक्त स्थानों को भरिए

$$\frac{15}{18} = \frac{\square}{6} = \frac{10}{\square} = \frac{\square}{30} \text{ [क्या ये तुल्य अनुपात हैं?]}$$

6. निम्न में से प्रत्येक का अनुपात ज्ञात कीजिए :

- 81 का 108 से
- 98 का 63 से

- (c) 33 किमी का 121 किमी से (d) 30 मिनट का 45 मिनट से
7. निम्न में से प्रत्येक का अनुपात ज्ञात कीजिए :
- (a) 30 मिनट का 1.5 घंटे (b) 40 सेमी का 1.5 मी
(c) 55 पैसे का ₹ 1 (d) 500 मिलि का 2 लीटर
8. एक वर्ष में सीमा ₹ 1,50,000 कमाती है और ₹ 50,000 की बचत करती है। प्रत्येक का अनुपात ज्ञात कीजिए।
- (a) सीमा द्वारा किया गया व्यय और उसकी बचत का
(b) सीमा द्वारा की गई बचत और उसके द्वारा किए गए व्यय का
9. एक विद्यालय में 3300 विद्यार्थी और 102 शिक्षक हैं। शिक्षकों की संख्या का विद्यार्थियों की संख्या से अनुपात ज्ञात कीजिए।
10. एक कॉलेज में 4320 विद्यार्थियों में से 2300 लड़कियाँ हैं। अनुपात निकालिए :
- (a) लड़कियों की संख्या और कुल विद्यार्थियों की संख्या का
(b) लड़कों की संख्या और लड़कियों की संख्या का
(c) लड़कों की संख्या और कुल विद्यार्थियों की संख्या का
11. एक विद्यालय के 1800 विद्यार्थियों में से 750 ने बास्केट बॉल, 800 ने क्रिकेट और शेष ने टेबल टेनिस खेलना पसंद किया है। यदि एक छात्र केवल एक खेल चुने तो अनुपात ज्ञात कीजिए :
- (a) बास्केट बॉल खेलने वालों और टेबल टेनिस खेलने वालों का।
(b) क्रिकेट खेलने वालों और बास्केट बॉल खेलने वालों का।
(c) बास्केट बॉल खेलने वालों और कुल विद्यार्थियों का।
12. एक दर्जन पेन का मूल्य ₹ 180 है और 8 बॉल पेन का मूल्य ₹ 56 है। पेन के मूल्य का बॉल पेन के मूल्य से अनुपात ज्ञात कीजिए।
13. कथन को देखें : एक हॉल की चौड़ाई और लंबाई का अनुपात 2 : 5 है। निम्न सारणी को पूरा कीजिए जो कि हॉल की कुछ संभव चौड़ाई व लंबाई दिखाती है :

हाल की चौड़ाई (मी में)	10	<input type="text"/>	40
हाल की लंबाई (मी में)	25	50	<input type="text"/>

14. शीला और संगीता के बीच 20 पेनों को 3 : 2 में बाँटिए।
15. एक माता अपनी बेटी श्रेया और भूमिका में ₹ 36 को उनकी आयु के अनुपात में बाँटना चाहती है। यदि श्रेया की आयु 15 वर्ष और भूमिका की आयु 12 वर्ष हो तो श्रेया और भूमिका को कितना-कितना मिलेगा?
16. पिता की वर्तमान आयु 42 वर्ष और उसके पुत्र की 14 वर्ष है। अनुपात ज्ञात कीजिए :
- (a) पिता की वर्तमान आयु का और पुत्र की वर्तमान आयु से
(b) पिता की आयु का पुत्र की आयु से, जब पुत्र 12 वर्ष का था
(c) 10 वर्ष बाद की पिता की आयु का 10 वर्ष बाद की पुत्र की आयु से



(d) पिता की आयु का पुत्र की आयु से जब पिता 30 वर्ष का था

12.3 समानुपात

इस स्थिति को देखिए :

राजू बाज़ार से टमाटर खरीदने जाता है। एक दुकानदार ने कहा कि 5 किग्रा टमाटर का मूल्य 40 रु है। दूसरे दुकानदार ने 6 किग्रा टमाटर का मूल्य 42 रु बताया। अब राजू को क्या करना चाहिए? उसे टमाटर पहले दुकानदार से खरीदने चाहिए या दूसरे दुकानदार से? निर्णय लेने में, क्या अंतर लेकर तुलना करना सहायता करेगा? नहीं। क्यों नहीं?



उसकी सहायता के लिए कोई तरीका सोचिए। अपने मित्रों के साथ विचार-विमर्श कीजिए। एक और उदाहरण लेते हैं :

भाविका के पास 28 कंचे हैं और विनि के पास 180 फूल हैं। वे दोनों इन्हें आपस में बाँटना चाहती हैं। भाविका ने 14 कंचे विनि को दिए और विनि ने 90 फूल भाविका को। लेकिन विनि संतुष्ट नहीं हुई। उसने सोचा कि उसने भाविका को ज्यादा फूल दिए जबकि भाविका ने उसे कम कंचे दिए।

आप क्या सोचते हैं? क्या विनि सही है? दोनों समस्या के समाधान के लिए विनि की माता पूजा के पास गये।

पूजा ने समझाया कि 28 कंचों में से भाविका ने 14 कंचे विनि को दिए

अतः, अनुपात होगा $14 : 28 = 1 : 2$

और 180 फूलों में से 90 फूल विनि ने भाविका को दिए

अतः, अनुपात $90 : 180 = 1 : 2$

क्योंकि दोनों अनुपात समान हैं अतः वितरण सही है।

दो सहेलियाँ आशमा और पंखुरी हेयर क्लिप खरीदने बाजार गईं। उन्होंने ₹ 30 में 20 हेयर क्लिप खरीदे। आशमा ने ₹ 12 दिए और पंखुरी ने ₹ 18 दिए। घर आने पर आशमा ने पंखुरी से 10 हेयर क्लिप देने को कहा। लेकिन पंखुरी ने कहा कि जब मैंने ज्यादा रुपये दिए हैं तो मुझे ज्यादा हेयर क्लिप मिलने चाहिए। उनके अनुसार, आशमा को 8 और उसे



12 हेयर क्लिप मिलने चाहिए।

क्या आप बता सकते हो कि आशमा या पंखुरी में से सही कौन है? क्यों?

आशमा द्वारा दिए गए धन और पंखुरी द्वारा दिए गए धन का अनुपात $= 12 : 18 = 2 : 3$ है। आशमा के सुझाव के अनुसार,

आशमा के हेयर क्लिपों की संख्या और पंखुरी के हेयर क्लिपों की संख्या का अनुपात $= 10 : 10 = 1 : 1$

पंखुरी के सुझाव के अनुसार,

आशमा के हेयर क्लिपों की संख्या और पंखुरी के हेयर क्लिपों की संख्या का अनुपात $= 8 : 12 = 2 : 3$ है।

आशमा द्वारा किए गए वितरण के अनुसार हेयर क्लिप की संख्या का अनुपात, दिए गए धन के अनुपात के समान नहीं है, जो कि होना चाहिए था। जबकि पंखुरी द्वारा किए गए वितरण में दोनों परिस्थितियों में अनुपात समान है।

अतः, पंखुरी ने सही वितरण किया।

एक अनुपात को बाँटने का कुछ अर्थ है!

निम्न उदाहरणों को लेते हैं :

- राज ने 15 रु में 3 पेन खरीदे और अनु ने 50 रु में 10 पेन खरीदे। किसके पेन महँगे थे? राज द्वारा खरीदे गए पेन की संख्या और अनु द्वारा खरीदे गए पेन की संख्या का अनुपात $= 3 : 10$.

उनके मूल्यों का अनुपात $= 15 : 50 = 3 : 10$

$3 : 10$ और $15 : 50$ समान है। इस प्रकार, दोनों ने समान मूल्य में पेन खरीदे।

- रहीम ने ₹180 में 2 किग्रा सेब बेचे और रोशन ने ₹360 में 4 किग्रा। किसने सेब महँगे बेचे?

सेब के भारों का अनुपात $= 2 \text{ किग्रा} : 4 \text{ किग्रा} = 1 : 2$

मूल्यों का अनुपात $= ₹180 : ₹360 = 6 : 12 = 1 : 2$

इस प्रकार सेब के भारों का अनुपात = मूल्यों का अनुपात

क्योंकि दोनों अनुपात समान हैं। अतः हम कह सकते हैं कि ये समानुपात में हैं। वे दोनों समान मूल्यों पर सेब बेच रहे हैं।

यदि दो अनुपात एक समान हैं तो वे समानुपात में हैं और इन्हें समान करने के लिए ‘ $::$ ’ या ‘ $=$ ’ चिह्न का प्रयोग किया जाता है।

पहले उदाहरण के लिए हम कह सकते हैं कि $3, 10, 15$ और 50 समानुपात में हैं जिसे हम $3 : 10 :: 15 : 50$ रूप में भी लिख सकते हैं और 3 अनुपात 10 बराबर 15 अनुपात 50 पढ़ेंगे।

दूसरे उदाहरण में $2, 4, 180$ और 360 समानुपात में है जिसे हम $2 : 4 :: 180 : 360$ लिखेंगे और 2 अनुपात 4 बराबर 180 अनुपात 360 पढ़ेंगे।

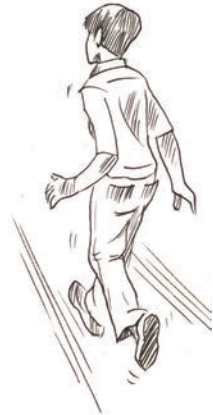
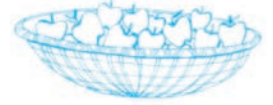
आइए, अन्य उदाहरण लें :

एक व्यक्ति 2 घंटे में 35 किमी चलता है। क्या इसी चाल से वह 4 घंटे में 70 किमी चल सकता है?

दोनों द्वारा चली गई दूरियों का अनुपात $= 35 : 70 = 1 : 2$

दोनों द्वारा लिए गए समय का अनुपात $2 : 4 = 1 : 2$.

इस प्रकार दोनों अनुपात समान हैं। अर्थात् $35 : 70 = 2 : 4$



अतः हम कह सकते हैं कि चारों संख्याएँ 35, 70, 2 और 4 समानुपात में हैं।

इस प्रकार हम लिख सकते हैं $35 : 70 :: 2 : 4$ और इसे पढ़ सकते हैं 35 अनुपात 70 बराबर 2 अनुपात 4। अतः वह 4 घंटे में 70 किमी उसी चाल से चल सकता है।

अब इस उदाहरण को लें :

2 किग्रा सेब का मूल्य ₹180 है और 5 किग्रा तरबूज का मूल्य ₹45 है।

दोनों के वजनों का अनुपात $2 : 5$ है।

दोनों के मूल्यों का अनुपात $= 180 : 45 = 4 : 1$

यहाँ $2 : 5$ और $180 : 45$ समान नहीं हैं।

अर्थात् $2 : 5 \neq 180 : 45$

इस प्रकार चारों राशियाँ 2, 5, 180 और 45 समानुपात में नहीं हैं।

यदि दो अनुपात समान नहीं होते हैं तो वे राशियाँ समानुपात में नहीं होती हैं।

प्रयास कीजिए

जाँच कीजिए कि दिए गए अनुपात समान हैं अर्थात् वे समानुपात में हैं। यदि हाँ, तो उन्हें सही ढंग से लिखिए।

1. $1 : 5$ और $3 : 15$
2. $2 : 9$ और $18 : 81$
3. $15 : 45$ और $5 : 25$
4. $4 : 12$ और $9 : 27$
5. 10 रु का 15 रु और 4 का 6 से

समानुपात के कथन में, क्रम में ली गई चारों राशियाँ पद कहलाती हैं। पहले और चौथे पद को चरम पद (या सिरो के पद) कहते हैं। दूसरे और तीसरे पद को मध्य पद कहते हैं।

उदाहरण के लिए $35 : 70 :: 2 : 4$

35, 70, 2 और 4 चार पद हैं। जिसमें से 35 तथा 4 चरम पद हैं और 70 तथा 2 मध्य पद हैं।

उदाहरण 8 : क्या अनुपात 25 ग्राम : 30 ग्राम और 40 किग्रा : 48 किग्रा समानुपात में हैं?

हल : $25 \text{ ग्रा} : 30 \text{ ग्रा} = \frac{25}{30} = 5 : 6$

$40 \text{ किग्रा} : 48 \text{ किग्रा} = \frac{40}{48} = 5 : 6$

इसलिए, $25 : 30 = 40 : 48$

अतः अनुपात 25 ग्रा : 30 ग्रा और 40 किग्रा : 48 किग्रा समानुपात में हैं अर्थात् $25 : 30 :: 40 : 48$

इसमें 25, 48 चरम पद हैं और 30, 40 मध्य पद हैं।

उदाहरण 9 : क्या 30, 40, 45 और 60 समानुपात में हैं?

हल : 30 और 40 का अनुपात = $\frac{30}{40} = 3 : 4$

45 और 60 अनुपात = $\frac{45}{60} = 3 : 4$

क्योंकि 30 : 40 = 45 : 60

अतः, 30, 40, 45, 60 समानुपात में हैं।

उदाहरण 10 : क्या 15 सेमी का 2 सेमी से और 10 सेकंड का 3 मिनट से अनुपात, एक समानुपात बनाते हैं?

हल : 15 सेमी का 2 मी से अनुपात

= 15 : 2 × 100 (1 मी = 100 सेमी)

= 3 : 40

10 सेकंड का 3 मिनट से अनुपात

= 10 : 3 × 60 (1 मिनट = 60 सेकंड)

= 1 : 18

क्योंकि 3 : 40 ≠ 1 : 18, अतः दिए हुए अनुपात, समानुपात नहीं बनाते हैं।



प्रश्नावली 12.2

- क्या निम्न राशियाँ समानुपात में हैं :
 - 15, 45, 40, 120
 - 33, 121, 9, 96
 - 24, 28, 36, 48
 - 32, 48, 70, 210
 - 4, 6, 8, 12
 - 33, 44, 75, 100
- निम्न में से प्रत्येक कथनों के आगे सत्य या असत्य लिखिए :
 - 16 : 24 :: 20 : 30
 - 21 : 6 :: 35 : 10
 - 12 : 18 :: 28 : 12
 - 8 : 9 :: 24 : 27
 - 5.2 : 3.9 :: 3 : 4
 - 0.9 : 0.36 :: 10 : 4
- क्या निम्न कथन सही हैं?
 - 40 व्यक्ति : 200 व्यक्ति = 15 रु : 75 रु
 - 7.5 लि : 15 लि = 5 किग्रा : 10 किग्रा
 - 99 किग्रा : 45 किग्रा = 44 रु : 20 रु
 - 32 मी : 64 मी = 6 सेकंड : 12 सेकंड
 - 45 किमी : 60 किमी = 12 घंटे : 15 घंटे
- जाँचिए कि क्या निम्न अनुपात, समानुपात बनाते हैं। यदि समानुपात बनता हो, तो मध्य पद और चरम पद भी लिखिए।
 - 25 सेमी : 1 मी और 40 रु : 160 रु
 - 39 ली : 65 ली और 6 बोतल : 10 बोतल
 - 2 किग्रा : 80 किग्रा और 25 ग्रा : 625 ग्रा
 - 200 मिली : 2.5 ली और 4 रु : 50 रु

12.4 ऐकिक विधि

निम्न परिस्थितियों को लें :

- दो सहेलियाँ रेशमा और सीमा बाज़ार से अभ्यास पुस्तिका खरीदने जाती हैं। रेशमा ने ₹24 में 2 अभ्यास पुस्तिका खरीदीं। एक अभ्यास पुस्तिका का मूल्य ज्ञात कीजिए।
- 80 किमी की दूरी तय करने में एक स्कूटर में 2 लीटर पेट्रोल लगता है। एक किमी तय करने के लिए कितना पेट्रोल लगेगा?
ये उदाहरण हमारी दैनिक जीवन की समस्याओं पर आधारित हैं।



आप इन्हें कैसे हल करेंगे?

पहले उदाहरण को पुनः लें।

2 अभ्यास पुस्तिकाओं का मूल्य = ₹ 24

अतः 1 अभ्यास पुस्तिका का मूल्य = ₹ 24 ÷ 2 = ₹ 12

यदि आपको 5 ऐसी अभ्यास पुस्तिकाओं का मूल्य ज्ञात करने के लिए कहा जाए तो यह इस प्रकार होगा ₹ 12 × 5 = ₹ 60 होगा।

दूसरे उदाहरण को भी पुनः लें :

हम जानना चाहते हैं कि एक किमी जाने में कितना पेट्रोल लगेगा?

80 किमी चलने के लिए पेट्रोल लगता है = 2 लीटर

1 किमी चलने के लिए पेट्रोल लगता है = $\frac{2}{80} = \frac{1}{40}$ लीटर

अब यदि आपसे पूछा जाए कि 120 किमी जाने में कितना पेट्रोल लगेगा,

तब आवश्यक पेट्रोल की मात्रा = $\frac{1}{40} \times 120$ लीटर = 3 लीटर

वह विधि जिसमें हम पहले एक इकाई का मान निकालते हैं और फिर जितनी इकाइयों का मान निकालने को कहा जाए, निकालते हैं, वह ऐकिक विधि कहलाती है।

प्रयास कीजिए

1. पाँच ऐसी ही समस्याएँ बनाएँ और अपने मित्रों से हल करवाएँ।
2. निम्न सारणी को पढ़कर पूरा करें।

समय	करन द्वारा तय की गई दूरी	कृति द्वारा तय की गई दूरी
2 घंटे	8 किमी	6 किमी
1 घंटा	4 किमी	<input type="text"/>
4 घंटे	<input type="text"/>	<input type="text"/>

करन द्वारा 1 घंटे में तय की गई दूरी = $\frac{8}{2}$ किमी = 4 किमी

अतः, करन द्वारा 4 घंटों में तय की गई दूरी = $4 \times 4 = 16$ किमी

इसी प्रकार कृति द्वारा 4 घंटों में तय की गई दूरी, एक घंटे में तय की गई दूरी निकालकर ज्ञात की जा सकती है।

उदाहरण 11 : यदि 6 जूस की केन का मूल्य ₹ 210 हो तो 4 केन का मूल्य ज्ञात कीजिए?

हल : जूस की 6 केन का मूल्य = ₹ 210

अतः, जूस की 1 केन का मूल्य = $\frac{210}{6} = ₹ 35$

अतः, जूस की 4 केन का मूल्य = ₹ 35 × 4 = ₹ 140

इस प्रकार जूस की 4 केन का मूल्य ₹ 140 होगा।

उदाहरण 12 : एक मोटरसाइकिल से 220 किमी दूरी तय करने पर 5 लीटर पेट्रोल लगता है तो 1.5 लीटर पेट्रोल में कितनी दूरी तय की जाएगी?

हल : 5 लीटर में मोटरसाइकिल द्वारा तय की गई दूरी = 220 किमी

1 लीटर में मोटरसाइकिल द्वारा तय की गई दूरी = $\frac{220}{5}$ किमी

1.5 लीटर में मोटरसाइकिल द्वारा तय की गई दूरी

$\frac{220}{5} \times 1.5$ किमी = $\frac{220}{5} \times \frac{15}{10}$ किमी = 66 किमी

अतः, 1.5 लीटर पेट्रोल में 66 किमी की दूरी तय की जा सकती है।



उदाहरण 13 : एक दर्जन साबुन की टिक्कियों का मूल्य ₹ 153.60 है। ऐसी ही 15 साबुन की टिक्कियों का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि 1 दर्जन = 12

क्योंकि 12 साबुन की टिक्कियों का मूल्य = ₹ 153.60

अतः, 1 साबुन की टिक्की का मूल्य = $\frac{153.60}{12} = ₹ 12.80$

अतः, 15 साबुन की टिक्कियों का मूल्य = ₹ 12.80 × 15 = ₹ 192

इस प्रकार, 15 साबुन की टिक्कियों का मूल्य ₹ 192

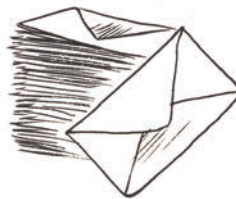
उदाहरण 14 : 105 लिफ़ाफ़ों का मूल्य ₹ 350 है। ₹ 100 में कितने लिफ़ाफ़े खरीदे जा सकते हैं?

हल : ₹ 350 में खरीदे जा सकने वाले लिफ़ाफ़ों की संख्या = 105

अतः, ₹ 1 में खरीदे जा सकने वाले लिफ़ाफ़ों की संख्या = $\frac{105}{350}$

अतः, ₹ 100 में खरीदे जा सकने वाले लिफ़ाफ़ों की संख्या = $\frac{105}{350} \times 100 = 30$

इस प्रकार ₹ 350 में 30 लिफ़ाफ़े खरीदे जा सकते हैं।



उदाहरण 15 :

एक कार $2\frac{1}{2}$ घंटों में 90 किमी चल सकती है।

(a) उसी चाल से 30 किमी दूरी तय करने में कितना समय लगेगा?

(b) उसी चाल से 2 घंटे में कितनी दूरी तय करेगी?

हल :

(a) पहली स्थिति में दूरी ज्ञात है और समय अज्ञात है। अतः हम इस तरह करेंगे :

$$2\frac{1}{2} \text{ घंटे} = \frac{5}{2} \text{ घंटे} = \frac{5}{2} \times 60 \text{ मिनट} = 150 \text{ मिनट}$$

90 किमी की दूरी तय करने में समय लगा = 150 मिनट

अतः, 1 किमी की दूरी तय करने में समय लगा $\frac{150}{90}$ मिनट

अतः, 30 किमी की दूरी तय करने में समय लगा $\frac{150}{90} \times 30$ मिनट
= 50 मिनट

इस प्रकार 30 किमी की दूरी तय करने में 50 मिनट लगेंगे।

(b) इस दूसरी स्थिति में दूरी अज्ञात है और समय ज्ञात है। अतः इस

प्रकार आगे बढ़ेंगे :

$$2\frac{1}{2} \text{ घंटे} = \frac{5}{2} \text{ घंटे}$$

$$\frac{5}{2} \text{ घंटों में तय की गई दूरी} = 90 \text{ किमी}$$

अतः 1 घंटे में तय की गई दूरी = $90 \div \frac{5}{2}$ किमी

$$= 90 \times \frac{2}{5} = 36 \text{ किमी}$$

अतः, 2 घंटों में तय की गई दूरी = $36 \times 2 = 72$ किमी

इस प्रकार 2 घंटे में 72 किमी की दूरी तय की गई।



प्रश्नावली 12.3

1. यदि 7 मी कपड़े का मूल्य ₹ 1470 हो तो 5 मी कपड़े का मूल्य ज्ञात कीजिए?
2. एकता 10 दिन में ₹ 3000 अर्जित करती है। 30 दिन में वह कितना अर्जित करेगी?
3. यदि पिछले 3 दिन में 276 मिमी वर्षा होती है, तो एक सप्ताह (7 दिन) में कितने सेमी वर्षा होगी? यह मानते हुए कि वर्षा उसी गति से हो रही है।

4. 5 किग्रा गेहूँ का मूल्य ₹ 91.50 है
 - (a) 8 किग्रा गेहूँ का मूल्य क्या होगा?
 - (b) ₹ 183 में कितना गेहूँ खरीदा जा सकता है?
5. पिछले 30 दिनों में तापमान 15° सेल्सियस गिरता है। यदि तापमान की गिरावट इसी गति से जारी रहे तो, अगले 10 दिनों में तापमान कितने डिग्री गिरेगा?
6. शाइना 3 महीने का किराया ₹ 15000 देती है। उसे पूरे वर्ष का किराया कितना देगा होगा यदि वर्ष भर किराया समान रहे?
7. 4 दर्जन केलों का मूल्य ₹ 180 है। ₹ 90 में कितने केले खरीदे जा सकते हैं?
8. 72 पुस्तकों का भार 9 किग्रा है। ऐसी 40 पुस्तकों का भार कितना होगा?
9. एक ट्रक में 594 किमी चलने पर 108 लीटर डीजल लगता है 1650 किमी की दूरी तय करने में कितने लीटर डीजल लगेगा।
10. राजू ने ₹ 150 में 10 पेन और मनीष ने ₹ 84 में 7 पेन खरीदे। ज्ञात कीजिए किसने पेन सस्ते खरीदे?
11. अनीश ने 6 ओवर में 42 रन बनाए और अनूप ने 7 ओवर में 63 रन बनाए। एक ओवर में किसने अधिक रन बनाए?

हमने क्या चर्चा की?

1. एक जैसी राशियों की तुलना करने के लिए हम साधारणतः राशियों के अंतर द्वारा तुलना विधि प्रयोग करते हैं।
2. बहुत सी परिस्थितियों में भाग द्वारा तुलना अधिक अच्छी होती है। अर्थात् एक राशि दूसरी राशि का कितना गुना है। इस विधि को भाग द्वारा तुलना कहते हैं।
उदाहरण के लिए ईशा का भार 25 किग्रा है और उसके पिता का भार 75 किग्रा है। हम कहेंगे कि ईशा के पिता के भार का ईशा के भार के साथ अनुपात 3 : 1 है।
3. अनुपात द्वारा तुलना में, दोनों राशियों की इकाइयाँ समान होनी चाहिए। यदि वे समान नहीं हैं, तो अनुपात लेने से पहले उन्हें समान बना लेना चाहिए।
4. अलग-अलग परिस्थितियों में अनुपात समान हो सकता है।
5. अनुपात 3 : 2 और 2 : 3 एक दूसरे से भिन्न हैं। इस प्रकार जिस क्रम में राशियाँ ली गई हैं वह महत्वपूर्ण है।
6. एक अनुपात को भिन्न भी माना जा सकता है, अतः $10 : 3 = \frac{10}{3}$ है।
7. दो अनुपात तुल्य होंगे, यदि उनकी संगत भिन्न भी तुल्य हों। अतः 3 : 2 तुल्य है 6 : 4 या 12 : 8 के।

8. एक अनुपात को न्यूनतम रूप में बदला जा सकता है। उदाहरण के लिए अनुपात 50 : 15 को $\frac{50}{15}$ भी लिख सकते हैं और न्यूनतम रूप में $\frac{50}{15} = \frac{10}{3}$ है। इस प्रकार न्यूनतम रूप में $50 : 15 = 10 : 3$ है।
9. चार राशियाँ समानुपात में कहलाएँगी, यदि पहली और दूसरी राशि का अनुपात, तीसरी और चौथी राशि के अनुपात के बराबर हो। इस प्रकार 3, 10, 15, 50 समानुपात में है क्योंकि $\frac{3}{10} = \frac{15}{50}$ है। हम समानुपात को $3 : 10 :: 15 : 50$ के रूप में दर्शाते हैं और 3 अनुपात 10 बराबर 15 अनुपात 50 के रूप में पढ़ते हैं। ऊपर लिखे समानुपात में 3 और 50 चरम पद हैं तथा 10 और 15 मध्य पद हैं।
10. समानुपात में क्रम महत्वपूर्ण है। 3, 10, 15 और 50 समानुपात में हैं लेकिन 3, 10, 50 और 15 नहीं हैं क्योंकि $\frac{3}{10} \neq \frac{50}{15}$ है।
11. वह विधि जिसमें हम पहले एक इकाई का मान निकालते हैं और फिर वांछित इकाइयों का मान निकालते हैं, इकाई विधि कहलाती है। माना कि 6 केन का मूल्य 210 रु है। 4 केन का मूल्य इकाई विधि से ज्ञात करने के लिए, हम पहले 1 केन का मूल्य ज्ञात करेंगे जो कि $\text{₹ } \frac{210}{6}$ या ₹ 35 होगा। इसी से हम 4 केन का मूल्य ₹ 35×4 या ₹ 140 निकालेंगे।

सममिति



0651CH13

अध्याय 13

13.1 भूमिका

सममिति हमारे दैनिक जीवन में प्रयोग होने वाला एक आम शब्द है। जब हम ऐसी आकृति या आकृतियों को देखते हैं जो बराबर संतुलित अनुपात में हों तब हम कहते हैं, “ये आकृतियाँ सममित आकृतियाँ हैं।”



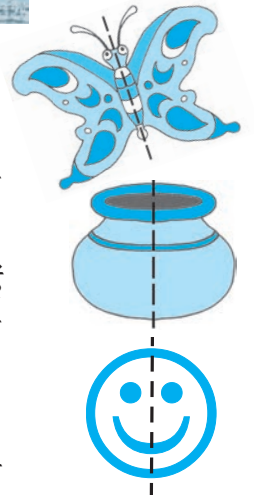
ताजमहल (उ.प्र.)



तिरुवन्नामलाई (तमिलनाडु)

अपनी सममित बनावट के कारण इन पुरातत्वीय आकृतियों ने अद्भुत स्थापत्य बना रखा है।

कल्पना कीजिए हम एक आकृति को आधे (अर्ध) से इस तरह मोड़ें कि उसका आधा बायाँ भाग तथा आधा दायाँ भाग एक-दूसरे से पूर्णतया मिलता-जुलता हो तब हम कहेंगे कि आकृति में सममित रेखा उपस्थित है। हम देख सकते हैं कि दोनों आधे भाग एक-दूसरे के (दर्पण) प्रतिबिंब हैं। यदि हम आकृति के मोड़ने वाले स्थान पर एक दर्पण को रख देते हैं, तो आकृति के एक भाग का प्रतिबिंब दूसरे भाग को पूर्णतया ढक लेगा।



आकृति 13.1

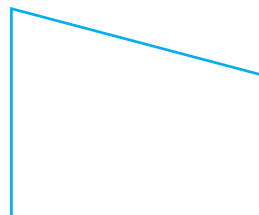
ऐसा जब भी घटित होता है, तो यह तह या मोड़ (वास्तविक या काल्पनिक), जो दर्पण रेखा है, आकृति की सममिति रेखा (या सममित अक्ष) कहलाती है।

यहाँ पर आप जो भी आकृतियाँ या आकार देख रहे हैं वे सभी आकृतियाँ सममित आकृतियाँ हैं। क्यों?

जब आप इन्हें बिंदुकित रेखा की तरफ से मोड़ते हैं तो आकृति का एक आधा भाग, दूसरे आधे भाग को पूर्णतया ढक लेता है। इस आकृति में आप बिंदु अंकित रेखा को क्या नाम देंगे? आप आकृति में दर्पण को किस जगह पर रखेंगे जिससे कि प्रतिबिंब आकृति के दूसरे भाग को पूर्णतया ढक ले?

आकृति 13.2 एक सममित आकृति नहीं है।

क्या बता सकते हैं, क्यों नहीं?



आकृति 13.2

13.2 सममित आकृतियाँ बनाना : इंक-ब्लॉट डेविल्स

इन्हें कीजिए

कागज़ का एक टुकड़ा लीजिए। इसे आधे भाग से मोड़िए। स्याही की कुछ बूँदों को आधे भाग पर डालिए।

अब दोनों आधे भागों को दबाइए।

आप क्या देखते हैं?

क्या प्राप्त आकृति सममित आकृति है? यदि हाँ, तो बताइए सममित रेखा कहाँ है। क्या ऐसी कोई अन्य रेखा भी है जहाँ से मोड़ने पर दो समान भाग प्राप्त हो सकते हों? ऐसे ही कुछ और प्रतिरूपों का प्रयास कीजिए।



स्याही धागा प्रतिरूप



एक कागज़ को आधे भाग से मोड़िए। उनमें से एक आधे भाग पर कम लंबाई के धागों को अलग-अलग स्याही या पेंट में डुबोकर व्यवस्थित कीजिए। अब दोनों आधे भागों को इकट्ठे दबाइए। प्राप्त आकृति का अध्ययन कीजिए। क्या यह एक सममित आकृति है? इसे और कितने तरीकों से मोड़ा जा सकता है जिससे दो समान भाग प्राप्त हो सकें?

प्रयास कीजिए

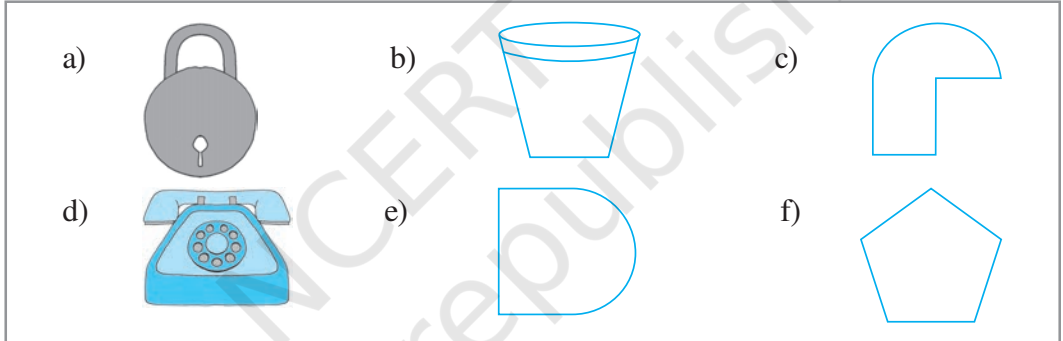
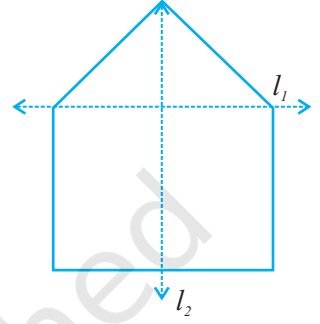
आपके ज्यामिति बॉक्स में दो सेट स्क्वेयर हैं। क्या ये सममित हैं?

अपनी कक्षा में उपलब्ध कुछ वस्तुओं की सूची बनाइए जैसे श्यामपट्ट (black board), मेज़, दीवार, पाठ्यपुस्तक इत्यादि। इनमें से कौन सी वस्तुएँ सममित हैं और कौन सी सममित नहीं हैं? क्या आप उनमें से सममित वस्तुओं की सममित रेखाएँ पहचान सकते हैं।

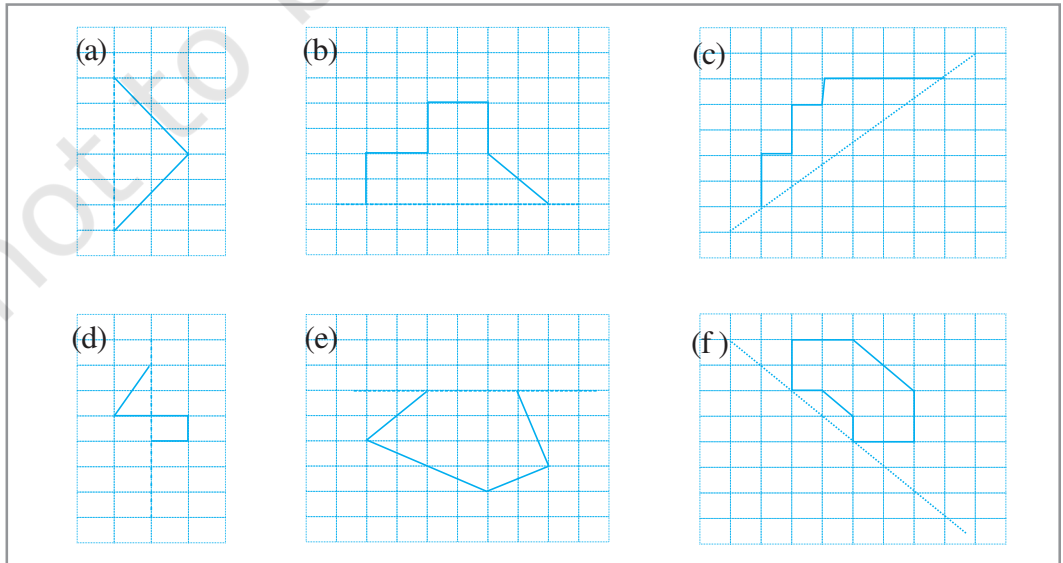


प्रश्नावली 13.1

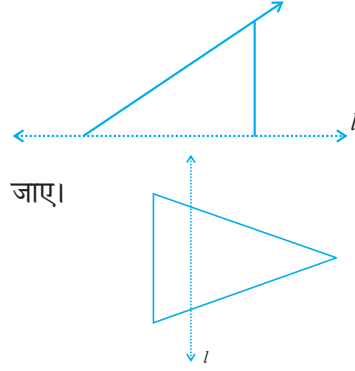
1. अपने घर अथवा विद्यालय की ऐसी चार वस्तुओं की सूची बनाइए जो सममित हों।
2. दी गई आकृति में कौन सी दर्पण रेखा, अर्थात् सममित रेखा है, l_1 या l_2 ?
3. नीचे दी गई आकृतियों की पहचान कीजिए। जाँच कीजिए कि क्या ये आकृतियाँ सममित हैं या नहीं। उनकी सममित रेखा भी खींचिए।



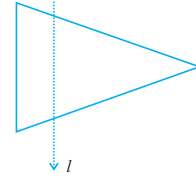
4. नीचे दी गई आकृतियों को वर्गीकृत पेपर पर बनाइए। आपने वर्गीकृत पेपर का प्रयोग अपनी पिछली कक्षाओं में अंकगणित नोट बुक में किया होगा। इन आकृतियों को इस तरह पूरा कीजिए कि बिंदुकित रेखा ही सममित रेखा हो।



5. नीचे दी गई आकृति में, l सममित रेखा है। इस आकृति को पूरा कीजिए जिससे यह सममित हो जाए।



6. आकृति में, l सममित रेखा है। त्रिभुज का प्रतिबिंब खींचिए और इस आकृति को पूरा कीजिए जिससे यह सममित हो जाए।



13.3 आकृतियाँ जिनमें दो सममित रेखाएँ हों

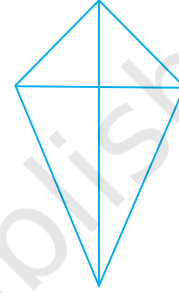
इन्हें कीजिए

एक पतंग

आपके ज्यामिति बॉक्स में दो सेट स्क्वेयर में से एक के कोणों की माप 30° , 60° और 90° है।

ऐसे ही दो समान सेट स्क्वेयर लीजिए। उन्हें आपस में मिलाकर रखिए और एक पतंग बनाइए जैसा आकृति में दिखाया गया है।

इस आकृति में कितनी सममित रेखाएँ हैं? क्या आप सोचते हैं कि कुछ आकृतियों में एक से अधिक सममित रेखाएँ होती हैं।



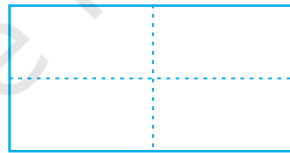
एक आयत

एक आयताकार कागज़ लीजिए (जैसे डाक-लिफ़ाफ़ा)। इसे एक बार लंबाई की ओर मोड़िए जिससे कि एक आधा भाग दूसरे आधे भाग को पूर्णतया ढक लें। क्या यह मोड़ एक सममित रेखा है। क्यों?

इसे खोलिए और पुनः एक बार चौड़ाई की ओर से समान तरीके से मोड़िए। क्या यह दूसरा मोड़ भी सममित रेखा है? क्यों?



पहला मोड़



दूसरा मोड़

क्या आपको लगता है कि ये दो रेखाएँ, सममित रेखाएँ हैं?

प्रयास कीजिए

दो या अधिक सेट स्क्वेयर को मिलाकर आप जितनी भी आकृतियाँ बना सकते हैं, बनाइए? इन्हें वर्गीकृत कागज़ पर बनाइए और इनकी सममित रेखाएँ बताइए।

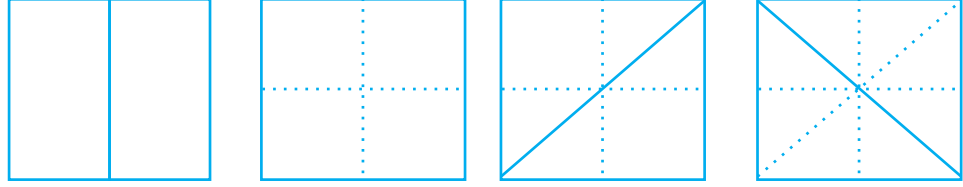
दो तहों वाले कागज़ से काटी गई आकृति

एक आयताकार कागज़ का टुकड़ा लीजिए। इसे एक बार मोड़िए और पुनः एक बार मोड़िए। कुछ डिज़ाइन बनाइए जैसा कि दिखाया गया है। जो आकृति बनाई गई है उसे काटिए और खोलिए (खोलने से पहले उस आकृति का अनुमान लगाइए जिसे आप प्राप्त करेंगे)।

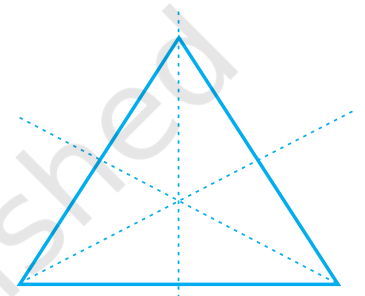


जिस आकृति को काटा गया है उसमें कितनी सममित रेखाएँ हैं? ऐसी कुछ और डिज़ाइनों को बनाइए।

13.4 अनेक सममित रेखाओं (दो से अधिक) वाली आकृतियाँ



एक वर्गाकार कागज़ का टुकड़ा लीजिए। इसे ऊर्ध्वाधर (vertically) में आधे से मोड़िए और पुनः क्षैतिज (horizontally) से आधे भाग से मोड़िए (अर्थात् आपने इसे दो बार मोड़ा)। इसे खोलिए और पुनः वर्ग को आधे भाग से मोड़िए (अर्थात् तीसरी बार), लेकिन इस बार विकर्ण के साथ-साथ जैसा कि आकृति में दिखाया गया है। इसे पुनः खोलिए और आधे भाग से मोड़िए (चौथी बार), लेकिन इस बार दूसरे विकर्ण के साथ-साथ जैसा कि आकृति में दिखाया गया है। इसे खोलिए।



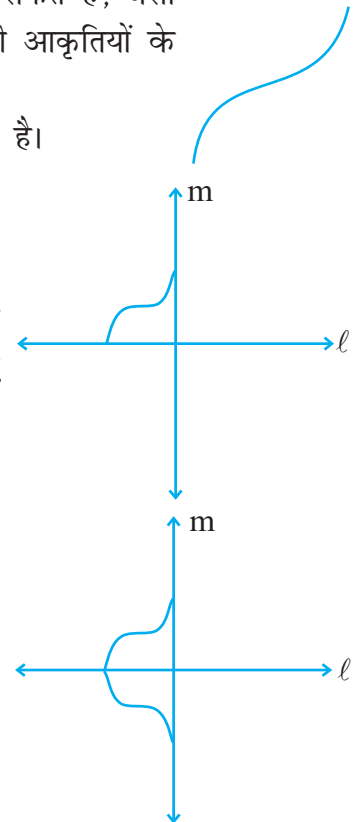
समबाहु त्रिभुज की 3 सममित रेखाएँ

इस आकृति में कितनी सममित रेखाएँ हैं? हम दो सममित रेखाओं वाली आकृतियों की रचना करना उसी प्रकार सीख सकते हैं, जैसी हमने प्रश्नावली 13.1 के प्रश्न 4 में एक सममित रेखा वाली आकृतियों के लिए, एक छोटे भाग को लेकर की थीं।

1. मान लीजिए हमारे पास दाईं ओर जैसी कोई आकृति है।

2. हम इसे इस प्रकार पूरा करना चाहते हैं कि दो सममित रेखाओं वाली आकृति प्राप्त हो जाए। मान लीजिए दोनों सममित रेखाएँ l और m हैं।

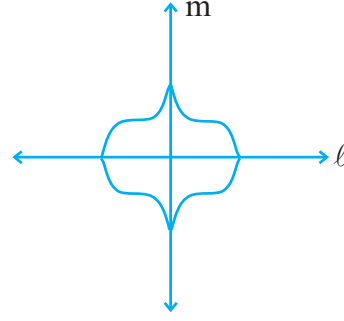
3. हम एक भाग आकृति में दर्शाए अनुसार बनाते हैं, जो रेखा l के परितः (about) सममित है, अर्थात् रेखा l सममित रेखा है।



4. आकृति पूरा करने के लिए, हमें रेखा l के परितः सममित भाग भी बनाना होगा। आकृति में दर्शाए अनुसार आकृति का शेष भाग बनाइए।

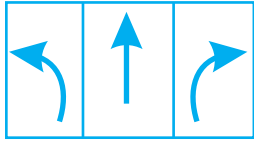
इस आकृति की दो सममित रेखाएँ l और m हैं।

कुछ आकृतियों में केवल एक ही सममित रेखा होती है, कुछ में दो, और कुछ में तीन या अधिक सममित रेखाएँ होती हैं। क्या आप एक ऐसी आकृति को सोच सकते हैं जिसमें 6 सममित रेखाएँ हों?



सममिति, सममिति प्रत्येक स्थान पर

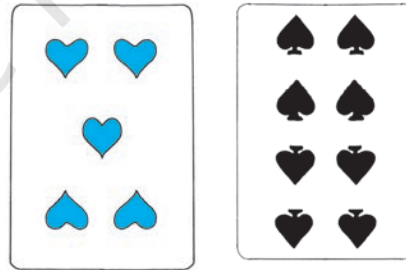
- आप प्रतिदिन ऐसे बहुत से मार्गसूचक संकेत या चिह्न देखते हैं जिनमें सममिति की रेखाएँ होती हैं। यहाँ पर ऐसे ही कुछ चिह्न (संकेत) दिए गए हैं : ऐसे ही कुछ और मार्गसूचक संकेतों को पहचानो और उन्हें बनाओ। सममित रेखाओं को इंगित करना मत भूलिए।



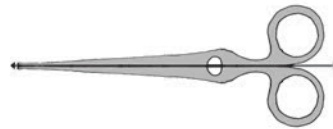
- प्रकृति में बहुत सी वस्तुएँ ऐसी हैं जिनकी आकृतियाँ सममित हैं। इन्हें देखिए :



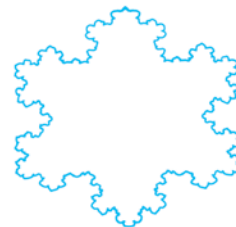
- ताश के कुछ पत्तों के डिजाइन में सममित रेखाएँ होती हैं। दिए गए ताश के पत्तों में उन्हें पहचानिए।



- यहाँ एक कैंची का युग्म है! इसमें कितनी सममित रेखाएँ हैं?



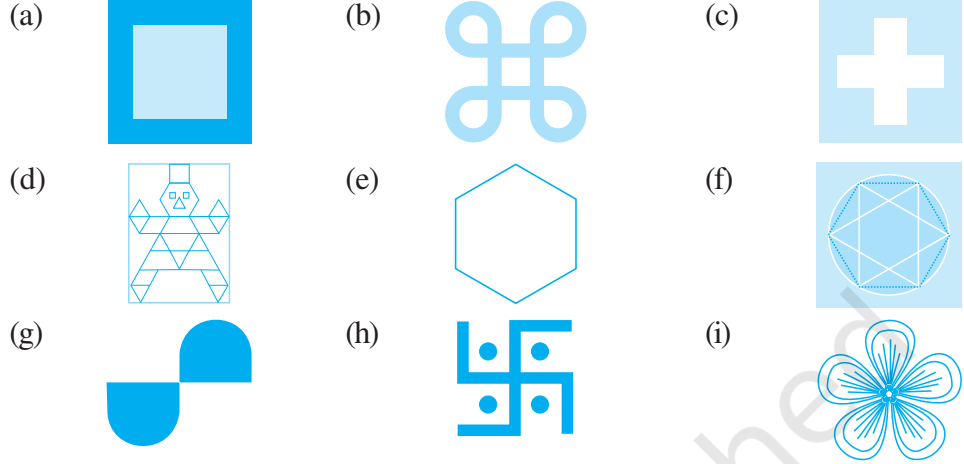
- इस सुंदर आकृति का निरीक्षण कीजिए। यह एक सममित पैटर्न है जो कि कोच स्नोफ्लेक (Koch's Snowflake) के नाम से जाना जाता है। (यदि आपके पास कंप्यूटर है, तो आप फ्रैक्टल (Fractals) विषय पर ब्राउस कीजिए और आपको ऐसी बहुत सुंदर आकृतियाँ देखने को मिलेंगी।) इन आकृतियों में सममित रेखाएँ ज्ञात कीजिए।



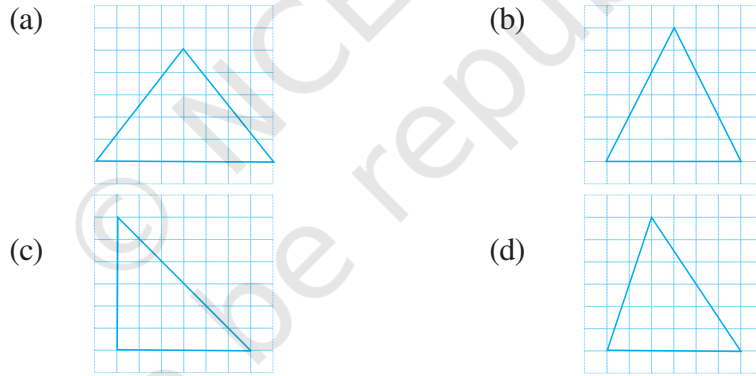


प्रश्नावली 13.2

1. नीचे दी गई आकृतियों में प्रत्येक की सममित रेखाओं की संख्या ज्ञात कीजिए।



2. नीचे दी गई प्रत्येक आकृति में त्रिभुज को एक वर्गीकृत पेपर पर बनाइए। प्रत्येक में सममित रेखा (रेखाओं) को, यदि है तो, उन्हें खींचिए और त्रिभुज के प्रकार को पहचानिए। (आप उनमें से कुछ आकृतियों का अनुरेख (trace) करना पसंद कर सकते हैं। पहले पेपर को मोड़ने वाली विधि द्वारा प्रयास करें)



3. निम्न तालिका को पूरा कीजिए :

आकार	आकृति खाका या रूपरेखा	सममित रेखाओं की संख्या
समबाहु त्रिभुज		3
वर्ग		
आयत		
समद्विबाहु त्रिभुज		
समचतुर्भुज		
वृत्त		

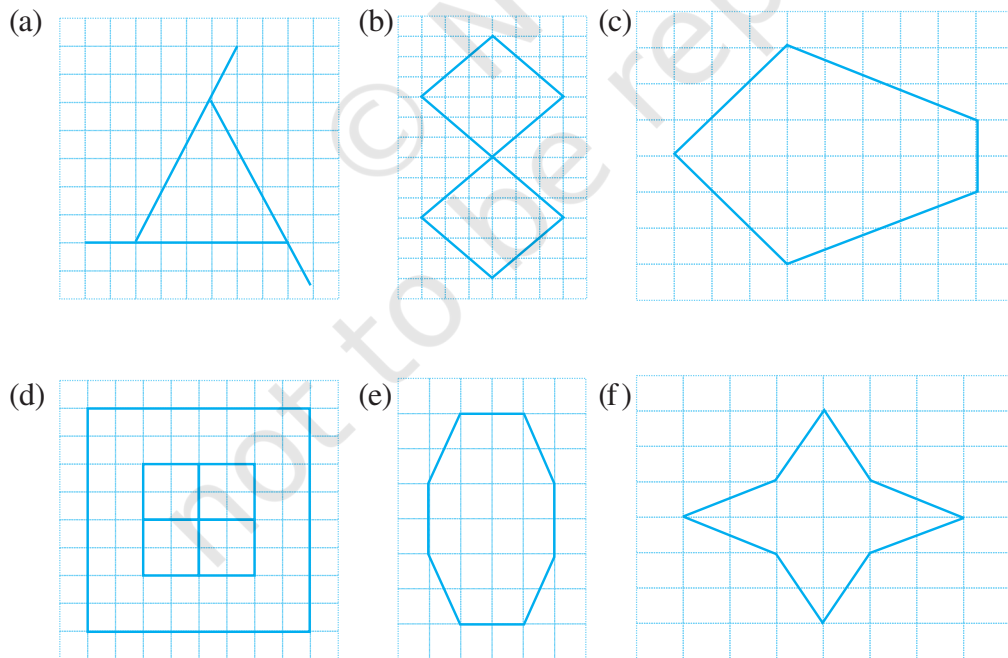
4. क्या आप एक ऐसा त्रिभुज बना सकते हो जिसमें
- केवल एक ही सममित रेखा हो?
 - केवल दो ही सममित रेखाएँ हों?
 - केवल तीन ही सममित रेखाएँ हों?
 - कोई सममित रेखा न हो?

प्रत्येक में आकृति की रूपरेखा (खाका) बनाइए।

5. एक वर्गीकृत पेपर पर निम्न की रूपरेखा बनाइए :

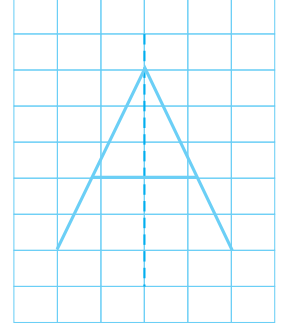
(संकेत : आपके लिए सहायक होगा यदि आप पहले सममित रेखा खींचें और उसके बाद आकृति को पूरा करें)

- एक त्रिभुज जिसमें क्षैतिज सममित रेखा तो हो परंतु ऊर्ध्वाधर सममित रेखा न हो।
 - एक चतुर्भुज जिसमें क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर दोनों ही सममित रेखाएँ हों।
 - एक चतुर्भुज जिसमें क्षैतिज सममित रेखा तो हो, परंतु ऊर्ध्वाधर सममित रेखा न हो।
 - एक षट्भुज जिसमें केवल दो ही सममित रेखाएँ हों।
 - एक षट्भुज जिसमें 6 सममित रेखाएँ हों।
6. प्रत्येक आकृति का अनुरेखण (ट्रेस) कीजिए और सममित रेखाओं को खींचिए।

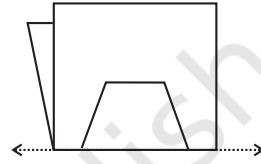
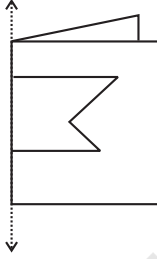


7. अंग्रेजी वर्णमाला के A से Z तक के सभी अक्षरों पर विचार कीजिए। इनमें से उन अक्षरों की सूची बनाइए जिनमें

- (a) उर्ध्वाधर सममित रेखाएँ हों (जैसा कि A)
 (b) क्षैतिज सममित रेखाएँ हों (जैसा कि B)
 (c) सममित रेखाएँ न हों (जैसा कि Q)



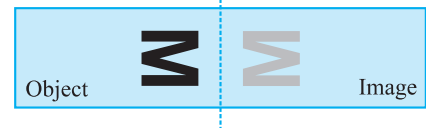
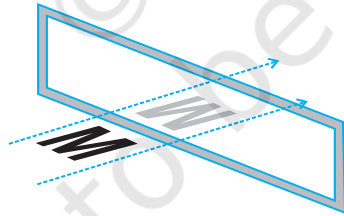
8. यहाँ पर कुछ मुड़ी हुई शीट की आकृतियाँ दी गई हैं जिनकी तह पर आकृतियाँ बनाई गई हैं। प्रत्येक में पूर्ण आकृति की रूपरेखा खींचिए जो डिज़ाइन के काटने के बाद दिखाई देगी।



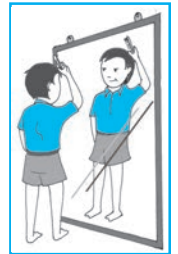
13.5 प्रतिबिंब और सममिति

सममित रेखा और दर्पण प्रतिबिंब एक दूसरे से प्राकृतिक तौर पर संबंधित हैं।

यहाँ एक आकृति दी गई है जिसमें अंग्रेजी अक्षर M का प्रतिबिंब दिखाया गया है। आप कल्पना कीजिए कि दर्पण अदृश्य है और आप केवल अक्षर M तथा इसकी छाया या प्रतिबिंब को देख सकते हैं।



वस्तु और उसका प्रतिबिंब दर्पण रेखा के संदर्भ में सममित है। जब एक पेपर को मोड़ा जाता है तो दर्पण रेखा, सममित रेखा बन जाती है। तब हम कहते हैं कि छाया, दर्पण रेखा में वस्तु का प्रतिबिंब है। आप यह भी देख सकते हैं कि जब वस्तु परावर्तित होती है, तो उसकी लंबाई और कोणों में बिल्कुल भी परिवर्तन नहीं होता है, अर्थात् वस्तु की लंबाई और कोण तथा छाया की संगत लंबाई और कोण समान होते हैं। यद्यपि एक तरह से परिवर्तन भी होता है अर्थात् एक वस्तु तथा उसकी छाया में अंतर होता है। क्या आप कल्पना कर सकते हैं कि यह अंतर क्या है?



(संकेत : अपने आपको दर्पण में देखिए)

इन्हें कीजिए

एक वर्गीकृत कागज़ पर एक आकृति ABC बनाइए और इसका दर्पण रेखा l में प्रतिबिंब $A'B'C'$ ज्ञात कीजिए।

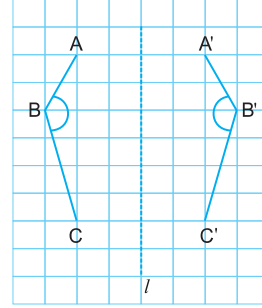
AB और $A'B'$; BC और $B'C'$; AC और $A'C'$ की लंबाइयों की तुलना कीजिए।

क्या ये अलग हैं?

क्या प्रतिबिंब एक रेखाखंड की लंबाई में परिवर्तन करता है? ABC और $A'B'C'$ कोणों की माप की तुलना कीजिए (कोण मापक की सहायता से मापिए) क्या प्रतिबिंब, कोण के आकार को बदल देता है।

AA' , BB' और CC' को मिलाइए। कोण मापक की सहायता से l और AA' , l और BB' , l और CC' के बीच बने कोणों को मापिए।

दर्पण रेखा l और किसी बिंदु और इसके प्रतिबिंब को मिलाने से बने रेखाखंड के बीच बने कोण के बारे में आप क्या निष्कर्ष निकालते हैं?

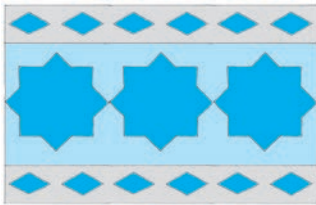


प्रयास कीजिए

यदि आप दर्पण के सामने 100 सेमी की दूरी पर हैं। आपका प्रतिबिंब कहाँ होगा? यदि आप दर्पण की ओर चलते हैं, तो आपका प्रतिबिंब किस प्रकार चलता है?

इन्हें कीजिए

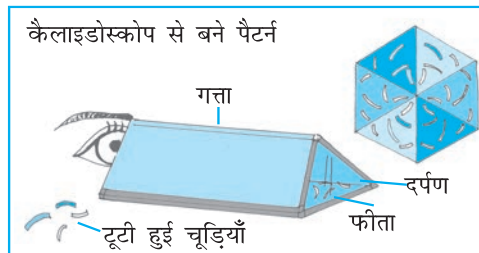
कागज़ों द्वारा सजावट



एक पतला आयताकार रंगीन कागज़ लीजिए। इसे कई बार मोड़िए और कागज़ में कुछ जटिल प्रतिरूप बनाइए जैसा कि आकृति में दिखाया गया है। बार-बार आने वाले डिज़ाइनों में सममित रेखाओं की पहचान कीजिए। ऐसे सजावटी कर्तित कागज़ों का प्रयोग त्यौहारों के अवसरों पर कीजिए।

कैलाइडोस्कोप

अनेक दर्पणों वाले एक कैलाइडोस्कोप में कई प्रतिबिंब बनते हैं जिनमें अनेक सममिति की रेखाएँ होती हैं (जैसा यहाँ उदाहरण में दिखाया गया है)। प्रायः दो दर्पण पट्टियों को V आकार में रखकर प्रयोग किया जाता है। दर्पणों के बीच बने कोण सममित रेखाओं या सममित रेखाओं की संख्या को बताते हैं।

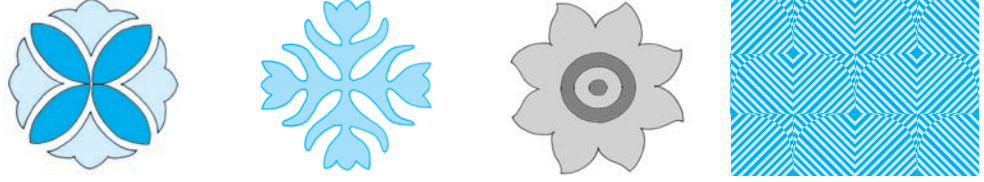


आकृति 13.1

एक कैलाइडोस्कोप बनाइए और इसके द्वारा बनाई गई सममित आकृतियों की कुछ और जानकारी प्राप्त करने का प्रयास कीजिए।

एलबम

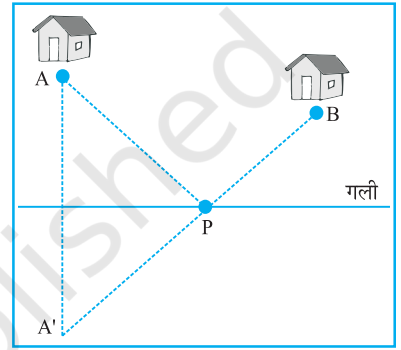
सममित डिज़ाइनों को एकत्रित करके एक एलबम तैयार कीजिए। यहाँ पर कुछ नमूने दिए गए हैं।



परावर्तीय सममिति का उपयोग

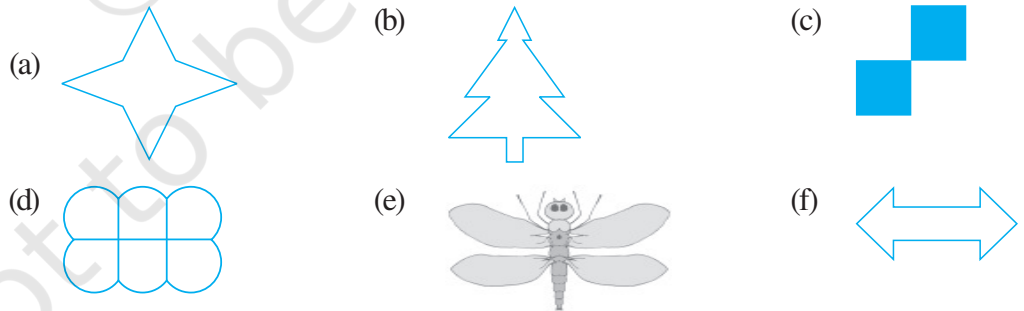
एक अखबार बाँटने वाला लड़का अपनी साइकिल को गली में किसी बिंदु 'P' पर खड़ा करता है और अखबार A और B घरों में बाँटता है। उसे अपनी साइकिल को कहाँ पर खड़ा करना चाहिए, जिससे $AP + BP$ दूरी सबसे कम हो।

आप यहाँ पर परावर्तीय सममिति का प्रयोग कर सकते हैं। मार्ग को दर्पण रेखा लेने पर, माना A का प्रतिबिंब A' प्राप्त होता है। तब हम कहेंगे कि बिंदु P साइकिल को खड़ा करने के लिए उपयुक्त स्थान है (जहाँ दर्पण रेखा A'B को काटती है)। क्या आप कह सकते हैं क्यों?

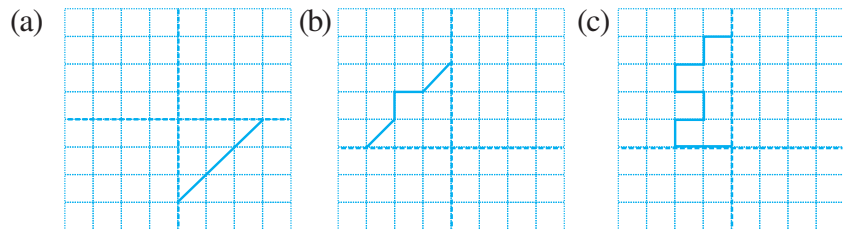


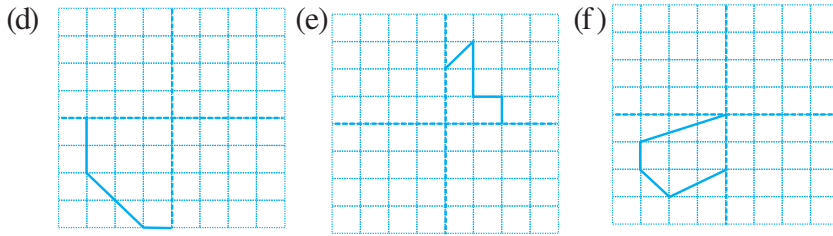
प्रश्नावली 13.3

1. नीचे दी गई आकृतियों में सममित रेखाओं की संख्या ज्ञात कीजिए। आप अपने उत्तर की जाँच कैसे करेंगे?



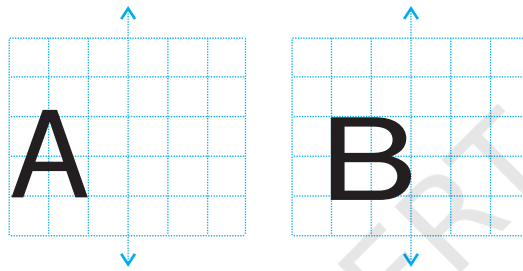
2. नीचे दिए गए आरेखण को वर्गीकृत पेपर पर बनाइए। प्रत्येक को पूरा कीजिए जिससे प्राप्त आकृति में दो बिंदुविकृत रेखाएँ दो सममित रेखाओं के रूप में हों :





आपने इस आकृति को कैसे पूरा किया?

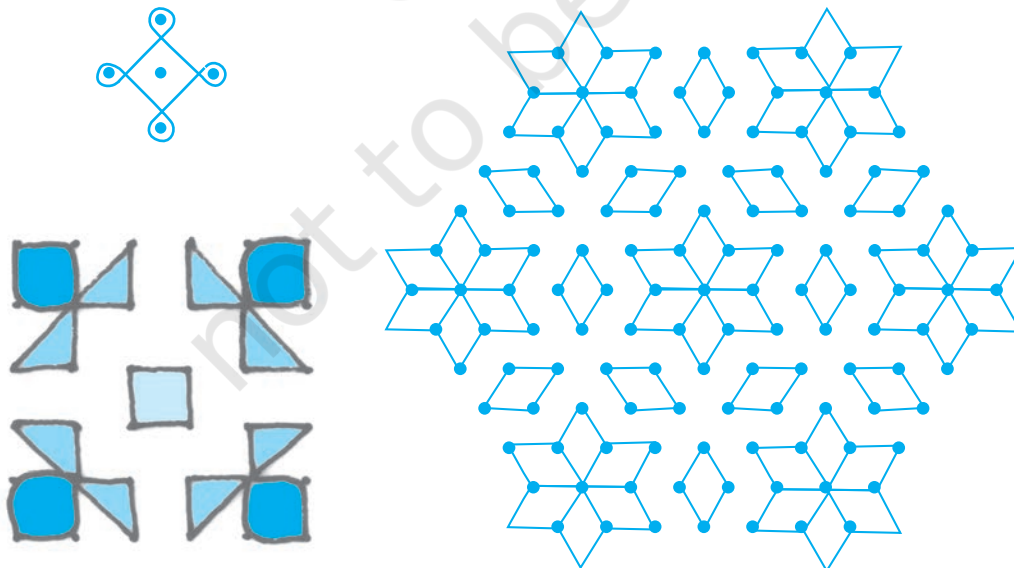
3. नीचे दी गई प्रत्येक आकृति में, अंग्रेज़ी वर्णमाला के एक अक्षर को ऊर्ध्वाधर रेखा के साथ दिखाया गया है। इस अक्षर का दी हुई दर्पण रेखा में प्रतिबिंब लीजिए। बताइए कौन सा अक्षर परावर्तन के बाद समान रहता है (जैसे कौन सा अक्षर प्रतिबिंब में समान दिखाई देता है) और कौन सा नहीं। क्या आप कल्पना कर सकते हैं क्यों?



O E M N P H L T S V X के लिए प्रयास कीजिए।

रँगोली प्रतिरूप

कोलम और रँगोली हमारे देश में बहुत प्रसिद्ध हैं। कुछ नमूने यहाँ दिए गए हैं। उनमें सममिति के प्रयोग पर ध्यान दीजिए। इन प्रतिरूपों को जितना भी संभव हो सके इकट्ठा कीजिए और एक एलबम तैयार कीजिए।



इन प्रतिरूपों में सममित रेखाओं के साथ सममित भागों को ढूँढने का प्रयास कीजिए।

हमने क्या चर्चा की?

1. एक आकृति में सममित रेखा होती है, यदि एक खींची गई रेखा आकृति को दो बराबर या समान भागों में बाँटती हो। यह रेखा सममित रेखा कहलाती है।
2. एक आकृति में कोई भी सममित रेखा नहीं हो सकती, केवल एक सममित रेखा, दो सममित की रेखाएँ या अनेक सममित की रेखाएँ हो सकती हैं। यहाँ पर कुछ उदाहरण दिए गए हैं।

सममिति की रेखाओं की संख्या	उदाहरण
कोई सममित रेखा नहीं	एक विषमबाहु त्रिभुज
केवल एक सममित रेखा	एक समद्विबाहु त्रिभुज
दो सममित रेखाएँ	एक आयत
तीन सममित रेखाएँ	एक समबाहु त्रिभुज
अनेक सममित रेखाएँ	एक वृत्त

3. रैखिक सममिति परावर्तन से संबंधित होती है। जब हम परावर्तन के बारे में बात करते हैं, तो हमें बायें \leftrightarrow दायें अभिमुख होने का ध्यान रखना चाहिए। सममिति का हमारे दैनिक जीवन में बहुत उपयोग होता है, जैसे कला में, शिल्प विद्या में, वस्त्र प्रौद्योगिकी, डिज़ाइन बनाना, ज्यामितीय तर्क, कोलम, रँगोली इत्यादि।

प्रायोगिक ज्यामिति



0651CH14

अध्याय 14

14.1 भूमिका

हम अनेक प्रकार के आकार (Shapes) देखते हैं, जिनसे हम परिचित हैं। हम बहुत से चित्र बनाते हैं। इन चित्रों में विभिन्न आकार निहित होते हैं। हम इन आकारों में से कुछ के बारे में पिछले अध्यायों में पढ़ भी चुके हैं। आप इन आकारों की एक सूची बना लें कि ये किस प्रकार प्रकट होते हैं?

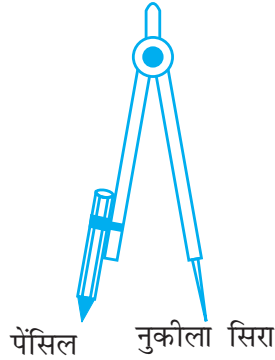
इस अध्याय में, हम इन आकारों को बनाना सीखेंगे। इनको बनाने के लिए, हमें यंत्रों के बारे में जानने की आवश्यकता है। आइए, उन्हें देखें तथा उनके नाम और प्रयोग के बारे में जानकारी प्राप्त करें।



क्र.सं.	नाम	आकृति	विवरण	प्रयोग
1.	रूलर अथवा सीधा किनारा		सैद्धांतिक रूप में एक रूलर में कोई चिह्न नहीं होते हैं। परंतु आपके ज्यामिति बक्स की रूलर में एक किनारे के अनुदिश सेंटीमीटर में चिह्न होते हैं (और कभी-कभी दूसरे किनारे पर इंचों में चिह्न होते हैं)	रेखाखंडों को खींचना और उनकी लंबाइयाँ मापना



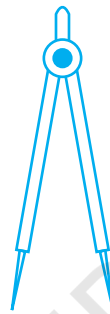
2. परकार



इसके दो सिरे होते हैं। एक सिरा नुकीला होता और दूसरे सिरे पर पेंसिल रखने का स्थान होता है।

बराबर लंबाईयाँ अंकित करने के लिए, परंतु उन्हें मापने के लिए नहीं। चाप और वृत्त खींचने के लिए।

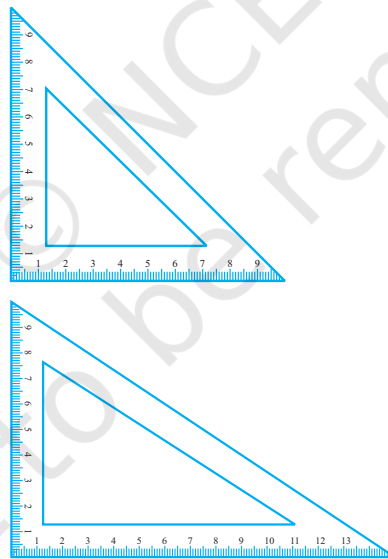
3. डिवाइडर



इसके दो नुकीले सिरे होते हैं।

लंबाईयों की तुलना करने के लिए

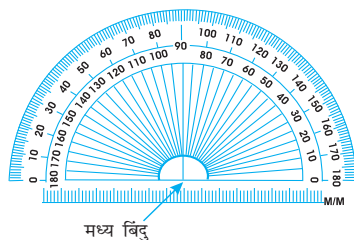
4. सेट स्क्वेयर



दो त्रिभुजाकार यंत्र हैं – एक में शीर्षों पर कोण $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ हैं और दूसरे में यह कोण $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ होते हैं।

लंब रेखाओं और समांतर रेखाओं को खींचना

5. चाँदा (कोण मापक)



एक अर्धवृत्ताकार यंत्र जिस पर 180 (degree) भाग चिह्नित होते हैं। यह मापन दाईं ओर से 0° से प्रारंभ होकर बाईं ओर 180° पर समाप्त होता है और ऐसा ही बाईं ओर से 0° प्रारंभ होकर दाईं ओर 180° पर समाप्त होता है।

कोणों को खींचना और मापना

हम 'रूलर और परकार की रचनाओं' पर विचार करने जा रहे हैं। इनमें रूलर (ruler) का केवल रेखाएँ खींचने और परकार (compass) का केवल चाप खींचने में प्रयोग किया जाएगा। इन रचनाओं को बनाते समय पूर्ण सावधानी बरतिए। यहाँ आपकी सहायता के लिए कुछ सुझाव दिए जा रहे हैं :

- पतली रेखाएँ खींचिए और हल्के बिंदु अंकित कीजिए।
- अपने यंत्रों को नुकीले सिरे और पतले किनारे वाला बनाकर रखिए।
- अपने बक्स में दो पेंसिल रखिए। एक परकार में रखने के लिए और दूसरी रेखा या वक्र खींचने और बिंदुओं को अंकित करने के लिए।

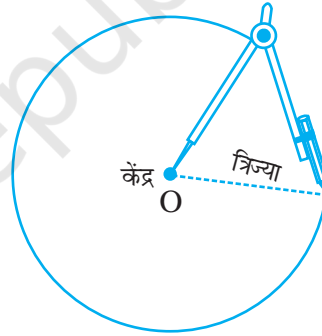
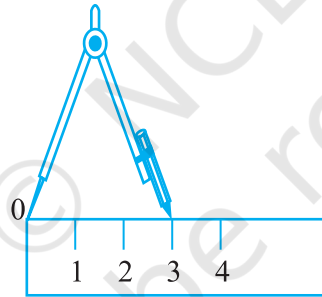
14.2 वृत्त

सामने दर्शाए गए पहिए को देखिए। इसकी परिसीमा (Boundary) पर स्थित प्रत्येक बिंदु इसके केंद्र से बराबर दूरी पर है। क्या आप ऐसी कुछ और वस्तुएँ बता सकते हैं और उन्हें खींच सकते हैं? ऐसी पाँच वस्तुओं के बारे में सोचिए जो इसी आकार की हों।



14.2.1 एक वृत्त खींचना जब उसकी त्रिज्या ज्ञात हो

मान लीजिए हम 3 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त खींचना चाहते हैं। हमें अपने परकार का प्रयोग करने की आवश्यकता है। यह निम्न चरणों में किया जा सकता है :



चरण 1 परकार को वांछित त्रिज्या 3 सेमी के लिए खोलिए।

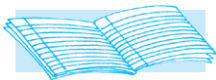
चरण 2 एक नुकीली पेंसिल से वह बिंदु अंकित कीजिए जिसे हम वृत्त का केंद्र बनाना चाहते हैं। इसे बिंदु O से नामांकित कीजिए।

चरण 3 परकार के नुकीले सिरे को O पर रखिए।

चरण 4 वृत्त खींचने के लिए, परकार को धीरे-धीरे घुमाइए। ध्यान रखिए कि चक्कर एक ही बार में पूरा हो जाए।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

क्या आप केंद्र O लेकर एक बिंदु, मान लीजिए P से होकर वृत्त खींच सकते हैं?



प्रश्नावली 14.1

- 3.2 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए।

2. एक ही केंद्र O लेकर 4 सेमी और 2.5 सेमी त्रिज्या वाले दो वृत्त खींचिए।
3. एक वृत्त और उसके कोई दो व्यास खींचिए। यदि आप इन व्यासों के सिरों को जोड़ दें, तो कौन सी आकृति प्राप्त होती है? यदि व्यास परस्पर लंब हों, तो कौन सी आकृति प्राप्त होगी? आप अपने उत्तर की जाँच किस प्रकार करेंगे?
4. एक वृत्त खींचिए और बिंदु A, B और C इस प्रकार अंकित कीजिए कि
 - (a) A वृत्त पर स्थित हो।
 - (b) B वृत्त के अभ्यंतर में स्थित हो।
 - (c) C वृत्त के बहिर्भाग में स्थित हो।
5. मान लीजिए A और B समान त्रिज्याओं वाले दो वृत्तों के केंद्र हैं। इन्हें इस प्रकार खींचिए ताकि एक वृत्त दूसरे के केंद्र से होकर जाए। इन्हें C और D पर प्रतिच्छेद करने दीजिए। जाँच कीजिए कि \overline{AB} और \overline{CD} परस्पर समकोण पर हैं।

14.3 एक रेखाखंड

याद कीजिए कि एक रेखाखंड के दो अंत बिंदु होते हैं। इसी कारण हम इसकी लंबाई रूलर से माप सकते हैं। यदि हमें किसी रेखाखंड की लंबाई ज्ञात हो, तो इसे एक आकृति द्वारा निरूपित करना संभव हो जाता है। आइए, देखें कि हम ऐसा कैसे करते हैं।

14.3.1 एक दी हुई लंबाई के रेखाखंड की रचना करना

मान लीजिए हम 4.7 सेमी लंबाई के एक रेखाखंड की रचना करना चाहते हैं। हम रूलर का प्रयोग करके 4.7 सेमी की दूरी पर दो बिंदु A और B अंकित करते हैं। A और B को मिलाने पर हमें रेखाखंड \overline{AB} प्राप्त होता है। बिंदु A और B को अंकित करते समय, हमें रूलर पर सीधे नीचे की ओर देखना चाहिए, अन्यथा हमें सही उत्तर प्राप्त नहीं होगा।

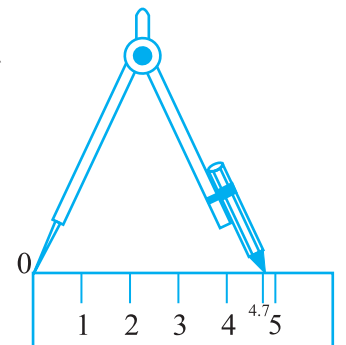
रूलर और परकार का प्रयोग

एक अच्छी विधि यह होगी कि दी हुई लंबाई के एक रेखाखंड की रचना करने के लिए, परकार का प्रयोग किया जाए

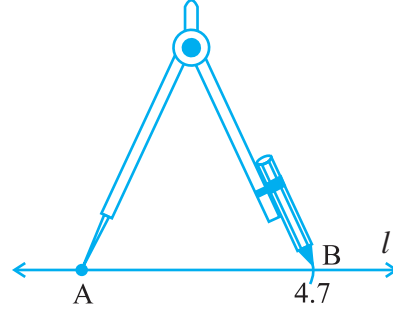
चरण 1 एक रेखा l खींचिए और उस पर एक बिंदु A अंकित कीजिए।



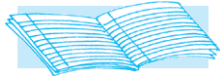
चरण 2 परकार के नुकीले सिरे को रूलर के शून्य पर रखिए। इसे इस प्रकार खोलिए कि पेंसिल वाला सिरा 4.7 सेमी चिह्न पर आ जाए।



चरण 3 यह सावधानी लेते हुए कि परकार के फैलाव में कोई परिवर्तन न हो, उसके नुकीले सिरे को बिंदु A पर रखें और l को B पर काटता हुआ एक चाप लगा दीजिए।



चरण 4 \overline{AB} वांछित लंबाई 4.7 सेमी का एक रेखाखंड है।



प्रश्नावली 14.2

1. रूलर का प्रयोग करके 7.3 सेमी लंबाई का एक रेखाखंड खींचिए।
2. रूलर और परकार का प्रयोग करते हुए 5.6 सेमी लंबाई का एक रेखाखंड खींचिए।
3. 7.8 सेमी लंबाई का रेखाखंड \overline{AB} खींचिए। इसमें से \overline{AC} काटिए जिसकी लंबाई 4.7 सेमी हो। \overline{BC} को मापिए।
4. 3.9 सेमी लंबाई का एक रेखाखंड \overline{AB} दिया है। एक रेखाखंड \overline{PQ} खींचिए जो रेखाखंड \overline{AB} का दोगुना हो। मापन से अपनी रचना की जाँच कीजिए।



(संकेत : \overline{PX} खींचिए ताकि \overline{PX} लंबाई \overline{AB} की लंबाई के बराबर हो। फिर \overline{XQ} काटिए ताकि \overline{XQ} की लंबाई भी \overline{AB} की लंबाई के बराबर हो। इस प्रकार, \overline{PX} और \overline{XQ} की लंबाइयाँ मिलकर \overline{AB} की लंबाई का दोगुना हो जाएँगी।)



5. 7.3 सेमी लंबाई का रेखाखंड \overline{AB} और 3.4 सेमी लंबाई का रेखाखंड \overline{CD} दिया है। एक रेखाखंड \overline{XY} खींचिए ताकि \overline{XY} की लंबाई \overline{AB} और \overline{CD} की लंबाइयों के अंतर के बराबर हो।

14.3.2 एक दिए हुए रेखाखंड के बराबर रेखाखंड की रचना करना

मान लीजिए आप एक ऐसे रेखाखंड की रचना करना चाहते हैं, जिसकी लंबाई एक दिए हुए रेखाखंड \overline{AB} की लंबाई के बराबर हो।

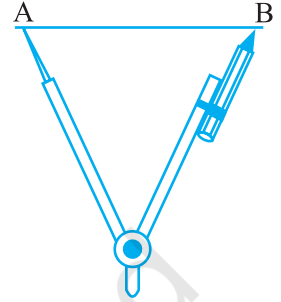
एक तुरंत और स्वाभाविक विधि यह होगी कि आप रूलर का प्रयोग करें। (जिस पर सेंटीमीटर और मिलीमीटर के चिह्न अंकित हों) उससे \overline{AB} को माप लिया जाए और फिर उसी लंबाई का प्रयोग करके एक रेखाखंड \overline{CD} खींच लिया जाए। एक दूसरी विधि यह होगी कि एक पारदर्शक कागज का प्रयोग करके \overline{AB} को कागज के अन्य भाग पर अक्स (trace) कर लिया जाए। परंतु इन विधियों से सदैव सही परिणाम प्राप्त नहीं हो सकते हैं।

एक और अच्छी विधि होगी कि रचना के लिए, रूलर और परकार का प्रयोग किया जाए। यह रचना \overline{AB} के लिए निम्न प्रकार की जाती है :

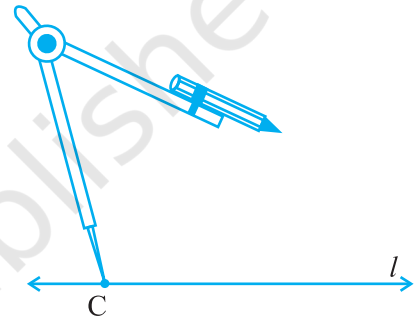
चरण 1 रेखाखंड \overline{AB} दिया है, जिसकी लंबाई ज्ञात नहीं है।



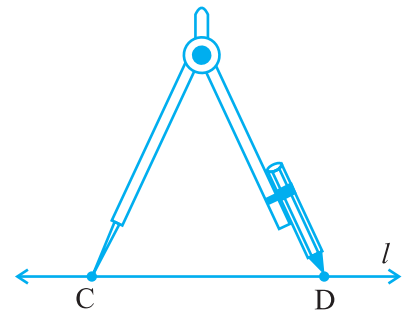
चरण 2 परकार के नुकीले सिरे को A पर रखिए और पेंसिल को B पर रखिए। परकार का फैलाव \overline{AB} की लंबाई बताता है।



चरण 3 कोई रेखा l खींचिए। l पर कोई बिंदु C लीजिए। परकार के फैलाव में बिना कुछ परिवर्तन किए, उसके नुकीले सिरे को C पर रखिए।



चरण 4 एक चाप लगाइए जो l को D पर (मान लीजिए) काटे। अब \overline{CD} ही \overline{AB} की लंबाई के बराबर का रेखाखंड है।

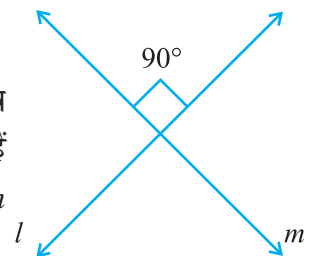


प्रश्नावली 14.3

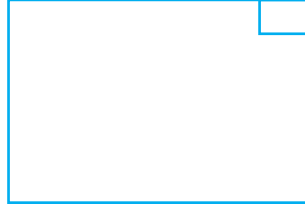
1. कोई रेखाखंड \overline{PQ} खींचिए। बिना मापे हुए, \overline{PQ} के बराबर एक रेखाखंड की रचना कीजिए।
2. एक रेखाखंड \overline{AB} दिया हुआ है, जिसकी लंबाई ज्ञात नहीं है। एक रेखाखंड \overline{PQ} की रचना कीजिए जिसकी लंबाई \overline{AB} की लंबाई की दोगुनी हो।

14.4 लंब रेखाएँ

आप जानते हैं कि दो रेखाएँ (या किरणें या रेखाखंड) परस्पर लंब (perpendicular) कही जाती हैं, जब वे इस प्रकार प्रतिच्छेद करती हैं कि उनके बीच के कोण समकोण हों। संलग्न आकृति में l और m परस्पर लंब हैं। एक फुलस्केप (foolscap) कागज़ या आपकी



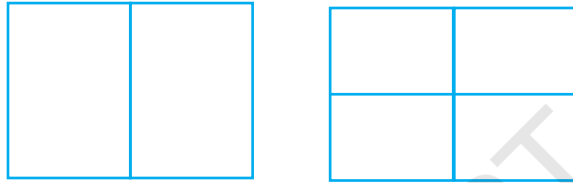
अभ्यास पुस्तिका के कोने दर्शाते हैं कि दो रेखाएँ परस्पर समकोणों पर हैं।



इन्हें कीजिए

आप अपने आसपास और कहाँ लंब रेखाएँ देखते हैं?

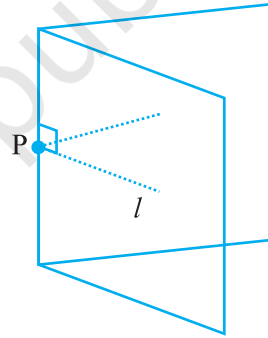
एक कागज़ का पृष्ठ लीजिए और उसे बीच में से मोड़िए तथा मोड़ का निशान (crease) बनाइए। इसी कागज़ को बीच में से अन्य दिशा में मोड़िए। मोड़ का निशान बनाइए और कागज़ को खोल लीजिए। दोनों मोड़ के निशान एक दूसरे पर (परस्पर) लंब हैं।



14.4.1 एक दी हुई रेखा पर स्थित एक बिंदु से होकर लंब खींचना

एक रेखा l कागज़ पर खिंची हुई है और P उस पर स्थित एक बिंदु है। P से होकर गुजरता हुआ l पर लंब खींचना सरल है।

हम कागज़ को केवल इस प्रकार मोड़ सकते हैं कि मोड़ के निशान के दोनों ओर वाले l के भाग एक दूसरे को आच्छादित करें। अक्स कागज़ या कोई पारदर्शक कागज़ क्रियाकलाप के लिए अच्छा रहेगा। आइए, एक कागज़ लें और उस पर कोई रेखा l खींचें। अब l पर कोई बिंदु P अंकित कर लें।



अब कागज़ को इस प्रकार मोड़िए कि l स्वयं पर परावर्तित हो जाए। अर्थात् स्वयं पर गिरे। मोड़ के निशान को इस प्रकार समायोजित कीजिए कि वह P से होकर जाए। कागज़ को खोल लीजिए। मोड़ का निशान P से होकर जाता हुआ रेखा l पर लंब है।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

आप इसकी जाँच कैसे करेंगे कि यह l पर लंब है? ध्यान दीजिए कि यह P से होकर जाता है।

एक चुनौती : रूलर और सेट स्क्वेयर की सहायता से लंब खींचना (एक ऐच्छक क्रियाकलाप) :

चरण 1 एक रेखा l और एक बिंदु P दिए हुए हैं। ध्यान दीजिए कि P रेखा l पर स्थित है।



चरण 2 रूलर के एक किनारे को रेखा l के अनुदिश रखिए। इसे कस कर पकड़े रहिए।



चरण 3 एक सेट स्क्वेयर को इस प्रकार रेखा l पर रखिए कि उसका समकोण बनाने वाला एक किनारा रूलर के उस किनारे के अनुदिश रहे जो रेखा l के साथ लगा हुआ है तथा सेट स्क्वेयर का समकोण वाला कोना भी रूलर के स्पर्श में रहे।



चरण 4 सेट स्क्वेयर को रूलर के अनुदिश तब तक सरकाइए जब तक कि उसका समकोण वाला कोना बिंदु P पर न आ जाए।



चरण 5 इस स्थिति में, सेट स्क्वेयर को कस कर पकड़े रहिए। सेट स्क्वेयर के समकोण के दूसरे किनारे के अनुदिश \overline{PQ} खींचिए \overline{PQ} रेखा l पर लंब है (आप इसको दर्शाने के लिए संकेत \perp का किस प्रकार प्रयोग करते हैं?)।



बिंदु P पर बने कोण को माप कर इस रचना की जाँच कीजिए। क्या हम 'रूलर' के स्थान पर इस रचना में दूसरे सेट स्क्वेयर का प्रयोग कर सकते हैं? इसके बारे में सोचिए।

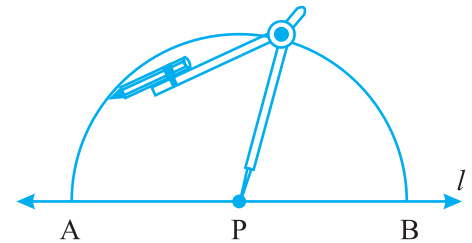
रूलर और परकार की विधि

ज्यामिति में लंब डालने की जिस विधि को प्राथमिकता दी जाती है वह 'रूलर-परकार' की विधि है। इस रचना को नीचे दिया जा रहा है :

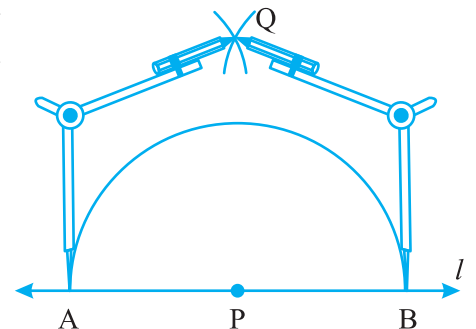
चरण 1 एक रेखा l पर बिंदु P दिया हुआ है।



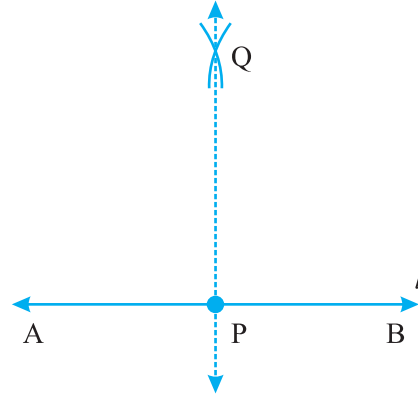
चरण 2 P को केंद्र मानकर और एक सुविधाजनक त्रिज्या लेकर एक चाप लगाइए जो रेखा l को दो बिंदुओं A और B पर प्रतिच्छेद करें।



चरण 3 A और B को केंद्र मानकर और AP से अधिक की त्रिज्या लेकर दो चापों की रचना कीजिए जो परस्पर Q पर काटें।



चरण 4 PQ को जोड़िए (या मिलाइए) तब \overline{PQ} ही l पर लंब है। हम इसे $\overline{PQ} \perp l$ लिखते हैं।



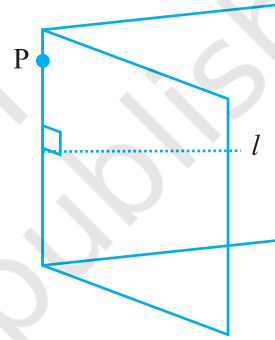
14.4.2 एक रेखा पर उस बिंदु से होकर लंब जो उस पर स्थित नहीं है।

इन्हें कीजिए

(कागज़ मोड़ना)

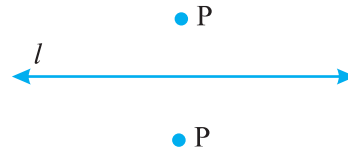
यदि हमें एक रेखा l दी हुई है और एक ऐसा बिंदु P दिया है, जो रेखा l पर स्थित नहीं है, तो P से होकर जाते हुए रेखा l पर लंब खींचने के लिए हम पहले जैसा कागज़ मोड़ने का सरल क्रियाकलाप पुनः कर सकते हैं।

एक कागज़ का पृष्ठ लीजिए (पारदर्शक हो तो अच्छा रहेगा)। उस पर एक रेखा l खींचिए और कोई बिंदु P अंकित कीजिए जो l पर स्थित न हो। कागज़ को इस प्रकार मोड़िए कि मोड़ का निशान P से होकर जाए तथा रेखा l का एक भाग उसके दूसरे भाग पर पड़े। कागज़ को खोल लीजिए। मोड़ का निशान l पर लंब है और P से होकर जाता है।

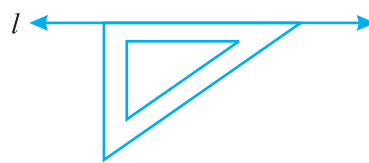


रूलर और सेट स्क्वेयर की विधि (एक ऐच्छिक क्रियाकलाप)

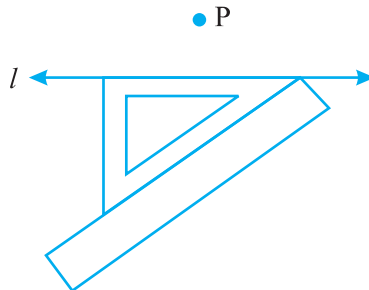
चरण 1 मान लीजिए l एक रेखा है और P उसके बाहर एक बिंदु है।



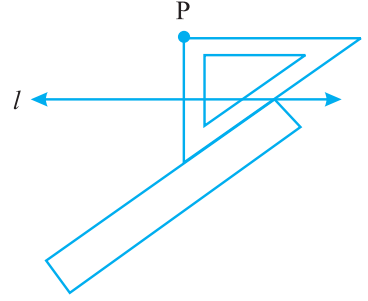
चरण 2 एक सेट स्क्वेयर को l पर इस प्रकार रखिए कि उसके समकोण का एक किनारा l के अनुदिश रहे।



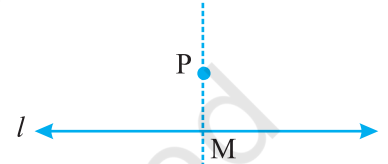
चरण 3 सेट स्क्वेयर के समकोण के सम्मुख किनारे के अनुदिश एक रूलर को रखिए।



चरण 4 रूलर को कसकर पकड़े रहिए और सेट स्क्वेयर को रूलर के अनुदिश तब तक सरकाइए जब तक कि P समकोण बनाने वाले दूसरे किनारे को स्पर्श न करने लगे।



चरण 5 सेट स्क्वेयर के इस किनारे को अनुदिश P से होती हुई रेखा खींचिए जो l को M पर काटती है। अब रेखा $\overline{PM} \perp l$ है।



रूलर और परकार की विधि

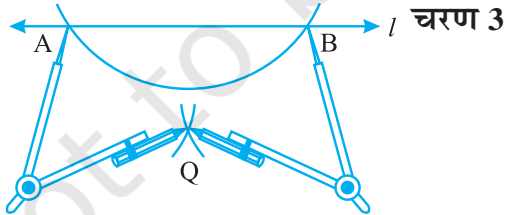
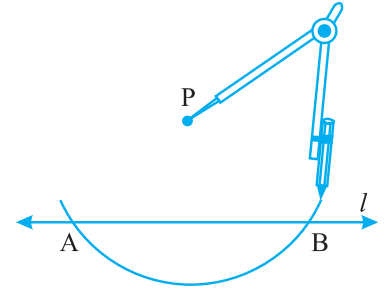
निस्संदेह, रूलर और परकार प्रयोग करने की विधि ही एक अच्छी विधि है।

P

चरण 1 रेखा l और एक बिंदु P दिया है जो l पर स्थित नहीं है।

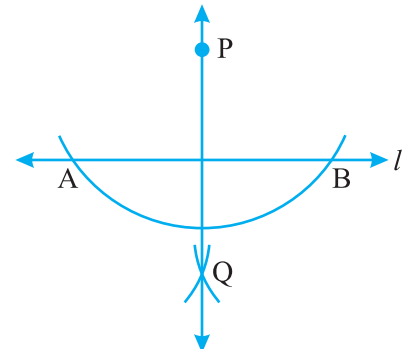


चरण 2 P को केंद्र मान कर और एक सुविधाजनक त्रिज्या लेकर एक चाप लगाइए जो रेखा l को दो बिंदुओं A और B पर प्रतिच्छेद करे।



चरण 3 समान त्रिज्या का प्रयोग करके A और B को केंद्र मानकर दो चाप खींचिए जो एक दूसरे को बिंदु P के दूसरी तरफ Q पर प्रतिच्छेद करे।

चरण 4 PQ को जोड़िए। तब \overline{PQ} ही रेखा l पर वांछित लंब है।





प्रश्नावली 14.4

1. एक रेखाखंड \overline{AB} खींचिए। इस पर कोई बिंदु M अंकित कीजिए। M से होकर \overline{AB} पर एक लंब, रूलर और परकार द्वारा खींचिए।
2. एक रेखाखंड \overline{PQ} खींचिए। कोई बिंदु R लीजिए जो \overline{PQ} पर न हो। R से होकर \overline{PQ} पर एक लंब खींचिए। (रूलर और सेट स्क्वेयर द्वारा)
3. एक रेखा l खींचिए और उस पर स्थित एक बिंदु X से होकर, रेखा l पर एक लंब रेखाखंड \overline{XY} खींचिए।

अब Y से होकर \overline{XY} पर एक लंब, रूलर और परकार द्वारा खींचिए।

14.4.3 एक रेखाखंड का लंब समद्विभाजक

इन्हें कीजिए

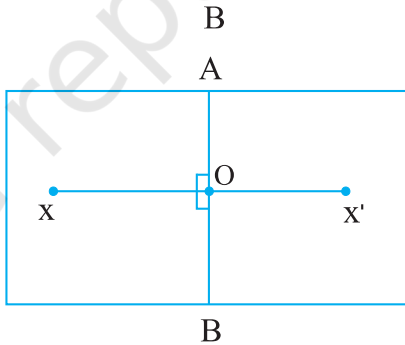
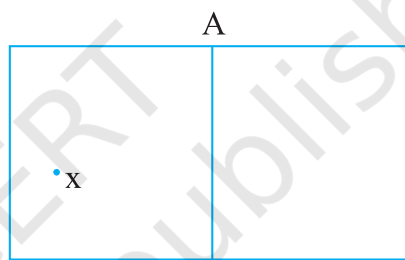
एक कागज़ को मोड़िए। मान लीजिए \overline{AB} मोड़ का निशान है। कहीं पर स्याही से एक बिंदु X अंकित कीजिए।

\overline{AB} को दर्पण रेखा (mirror line) मानते हुए X का प्रतिबिंब X' ज्ञात कीजिए।

मान लीजिए \overline{AB} और $\overline{XX'}$ परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं। क्या $OX = OX'$ है? क्यों?

इसका अर्थ है कि \overline{AB} रेखाखंड $\overline{XX'}$ को दो बराबर लंबाइयों के भागों में विभाजित करता है। अर्थात् \overline{AB} रेखाखंड $\overline{XX'}$ का समद्विभाजक है। यह भी ध्यान दीजिए कि $\angle AOX$ और $\angle BOX$ समकोण हैं (क्यों?) अतः

रेखा \overline{AB} रेखाखंड $\overline{XX'}$ का लंब समद्विभाजक है। आकृति में हम \overline{AB} का केवल एक हिस्सा ही देखते हैं। दो बिंदुओं को जोड़ने वाले रेखाखंड का लंब समद्विभाजक उनकी सममित अक्ष (line of symmetry) भी है?

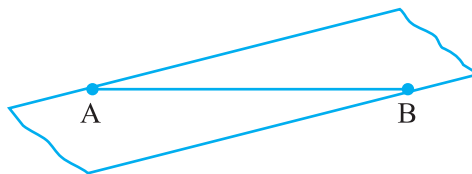


इन्हें कीजिए

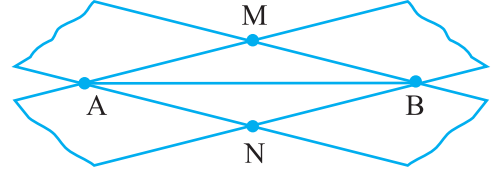
(पारदर्शक फीता)

चरण 1 एक रेखाखंड \overline{AB} खींचिए।

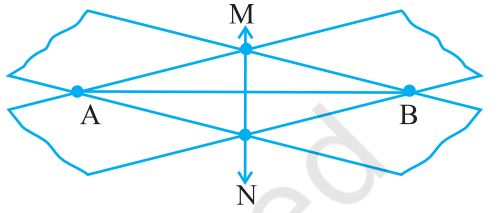
चरण 2 एक आयताकार पारदर्शक फीते की एक पट्टी को \overline{AB} के विकर्णतः इस प्रकार रखें कि इसके किनारे बिंदुओं A और B पर रहें, जैसा कि सामने आकृति में दिखाया गया है।



चरण 3 इसी प्रक्रिया को एक अन्य पट्टी लेकर इस प्रकार दोहराइए कि दूसरी पट्टी विकर्णतः पहली पट्टी को A और B पर काटे। मान लीजिए ये दोनों पट्टियाँ M और N पर भी काटती हैं।



चरण 4 M और N को जोड़िए। क्या \overline{MN} रेखाखंड \overline{AB} का समद्विभाजक है? मापकर जाँच कीजिए। क्या यह \overline{AB} का लंब समद्विभाजक भी है? \overline{AB} का मध्य बिंदु कहाँ है।

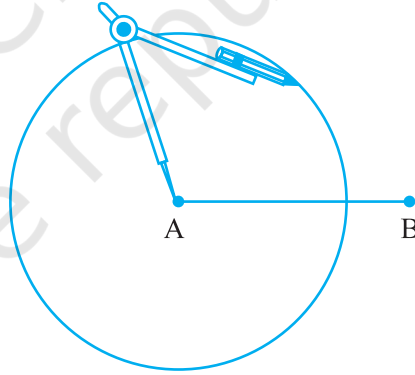


रूलर और परकार द्वारा रचना

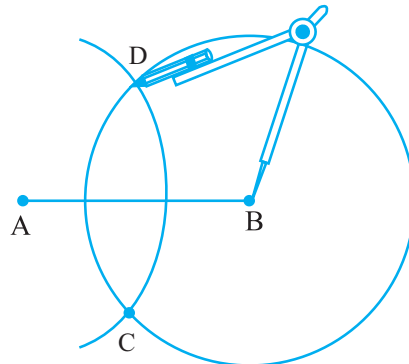
चरण 1 किसी भी लंबाई का एक रेखाखंड \overline{AB} खींचिए।



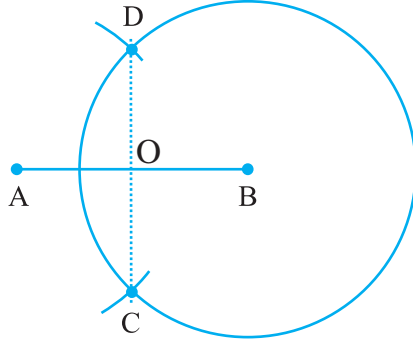
चरण 2 A को केंद्र मानकर, परकार की सहायता से एक वृत्त खींचिए। आपके वृत्त की त्रिज्या \overline{AB} के आधे से अधिक होनी चाहिए।



चरण 3 B को केंद्र मानकर और चरण 2 वाली त्रिज्या लेकर एक अन्य वृत्त परकार की सहायता से खींचिए। मान लीजिए वह वृत्त पहले वृत्त को बिंदुओं C और D पर प्रतिच्छेद करता है।



चरण 4 \overline{CD} को मिलाइए। यह \overline{AB} को O पर प्रतिच्छेद करता है। अपने डिवाइडर का प्रयोग करके जाँच कीजिए कि O रेखाखंड \overline{AB} का मध्य बिंदु है। साथ ही, यह भी जाँच कीजिए कि $\angle COA$ और $\angle COB$ समकोण हैं। अतः, रेखाखंड \overline{CD} रेखाखंड \overline{AB} का लंब समद्विभाजक है।



उपरोक्त रचना में, हमें \overline{CD} को निर्धारित करने के लिए दो बिंदुओं C और D की आवश्यकता थी। क्या इनको ज्ञात करने के लिए पूरे वृत्तों को खींचने की आवश्यकता है? क्या यह पर्याप्त नहीं है कि इन बिंदुओं को ज्ञात करने के लिए इन वृत्तों के दो छोटे चाप ही खींच लिए जाएँ? वास्तव में, व्यावहारिक रूप में हम यही करते हैं।

प्रयास कीजिए

रूलर और परकार की रचना के चरण 2 में, यदि हम त्रिज्या \overline{AB} के आधे से कम लें, तो क्या होगा?



प्रश्नावली 14.5

- 7.3 सेमी लंबाई का एक रेखाखंड \overline{AB} खींचिए और उसकी सममित अक्ष ज्ञात कीजिए।
- 9.5 सेमी लंबा एक रेखाखंड खींचिए और उसका लंब समद्विभाजक खींचिए।
- एक रेखाखंड \overline{XY} का लंब समद्विभाजक खींचिए जिसकी लंबाई 10.3 सेमी है।
 - इस लंब समद्विभाजक पर कोई बिंदु P लीजिए। जाँच कीजिए कि $PX = PY$ है।
 - यदि M रेखाखंड \overline{XY} का मध्य बिंदु है, तो MX और XY के विषय में आप क्या कह सकते हैं?
- लंबाई 12.8 सेमी वाला एक रेखाखंड खींचिए। रूलर और परकार की सहायता से इसके चार बराबर भाग कीजिए। मापन द्वारा अपनी रचना की जाँच कीजिए।
- 6.1 सेमी लंबाई का एक रेखाखंड \overline{PQ} खींचिए और फिर \overline{PQ} को व्यास मानकर एक वृत्त खींचिए।

6. केंद्र C और त्रिज्या 3.4 सेमी लेकर एक वृत्त खींचिए। इसकी कोई जीवा \overline{AB} खींचिए। इस जीवा \overline{AB} का लंब समद्विभाजक खींचिए। जाँच कीजिए कि क्या यह वृत्त के केंद्र C से होकर जाता है।
7. प्रश्न 6 को उस स्थिति के लिए दोबारा कीजिए जब \overline{AB} एक व्यास है।
8. 4 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए। इसकी कोई दो जीवाएँ खींचिए। इन दोनों जीवाओं के लंब समद्विभाजक खींचिए। ये कहाँ मिलते हैं?
9. शीर्ष O वाला कोई कोण खींचिए। इसकी एक भुजा पर एक बिंदु A और दूसरी भुजा पर एक अन्य बिंदु B इस प्रकार लीजिए कि $OA = OB$ है। \overline{OA} और \overline{OB} के लंब समद्विभाजक खींचिए। मान लीजिए ये P पर प्रतिच्छेद करते हैं क्या $PA = PB$ है?

14.5 कोण



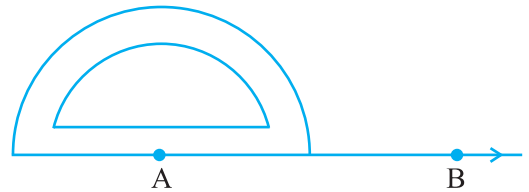
14.5.1 दिए हुए माप का कोण बनाना

मान लीजिए हम 40° का कोण बनाना चाहते हैं। इसके लिए वांछित चरण निम्न हैं:

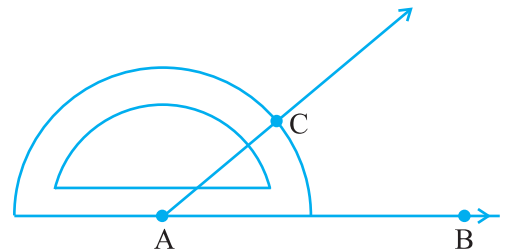
चरण 1 एक किरण \overline{AB} खींचिए।



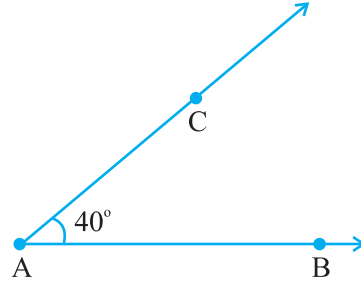
चरण 2 चाँदे के केंद्र को A पर इस प्रकार रखिए कि इसका शून्य किनारा (0° – 0°) किरण \overline{AB} के अनुदिश रहे।



चरण 3 B के पास के शून्य (0) से प्रारंभ करते हुए, 40° के सम्मुख, बिंदु C अंकित कीजिए।



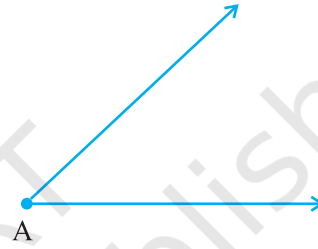
चरण 4 AC मिलाकर किरण AC बनाइए। $\angle BAC$ ही वांछित कोण है।



14.5.2 एक दिए हुए कोण के बराबर कोण बनाना

मान लीजिए हमें एक कोण दिया है जिसका माप हमें ज्ञात नहीं है। हम इस कोण के बराबर एक कोण बनाना चाहते हैं। देखिए कि ऐसा किस प्रकार किया जाता है।

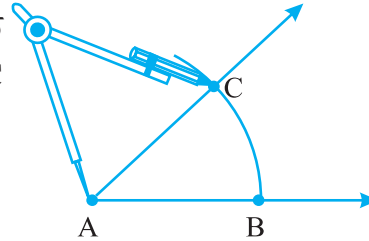
$\angle A$ दिया है जिसका माप ज्ञात नहीं है।



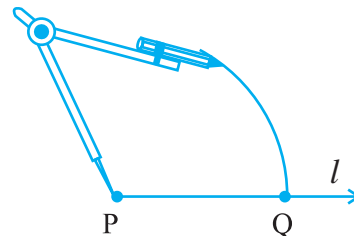
चरण 1 एक रेखा l खींचिए और उस पर एक बिंदु P अंकित कीजिए।



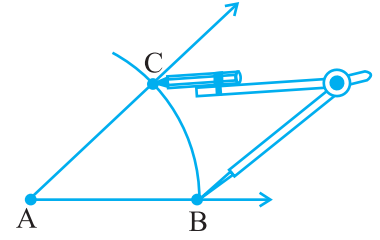
चरण 2 परकार के नुकीले सिरे को A पर रखकर, एक चाप खींचिए जो $\angle A$ की भुजाओं को B और C पर काटता है।



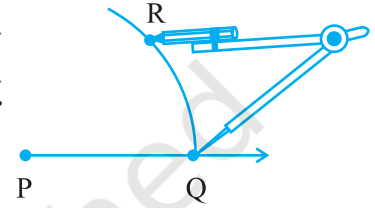
चरण 3 परकार के फैलाव में बिना कोई परिवर्तन किए, उसके नुकीले सिरे को P पर रखकर एक चाप लगाइए जो l को Q पर काटता है।



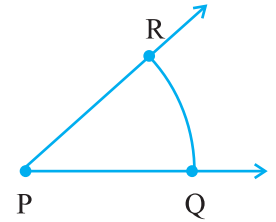
चरण 4 परकार को लंबाई BC के बराबर खोलिए।



चरण 5 परकार के फैलाव में बिना परिवर्तन किए, उसके नुकीले सिरे को Q पर रखिए और एक चाप लगाइए जो पिछले चाप को R पर काटता है।



चरण 6 PR को मिलाकर किरण PR बनाइए। इससे $\angle P$ प्राप्त होता है। $\angle P$ ही वांछित कोण है जिसका माप $\angle A$ के बराबर है। इसका अर्थ है कि $\angle QPR$ और $\angle BAC$ के माप बराबर हैं।



14.5.3 एक कोण का समद्विभाजक

इन्हें कीजिए

एक कागज़ पर एक बिंदु O अंकित कीजिए।

O को प्रारंभिक बिंदु लेकर दो किरणें \overline{OA}

और \overline{OB} खींचिए। आपको $\angle AOB$ प्राप्त

हो जाता है। इस कागज़ को इस प्रकार

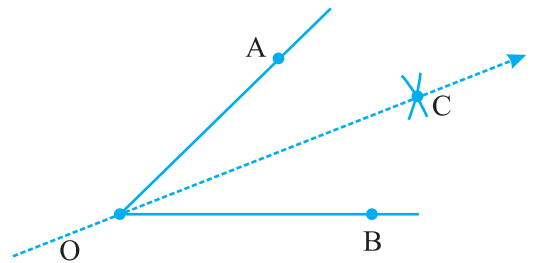
मोड़िए कि मोड़ का निशान O से होकर

जाए तथा किरणें \overline{OA} और \overline{OB} परस्पर संपाती

हो जाएँ। मान लीजिए OC मोड़ का निशान है जो हमें कागज़ को खोलने पर प्राप्त होगा।

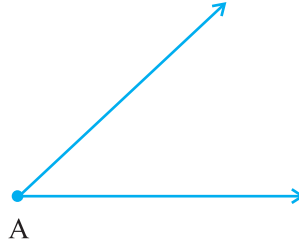
स्पष्टतः किरण OC कोण $\angle AOB$ की सममित अक्ष है।

$\angle AOC$ और $\angle COB$ को मापिए। क्या ये बराबर हैं? अतः, OC कोण $\angle AOB$ की सममित अक्ष है और $\angle AOB$ की समद्विभाजक है।

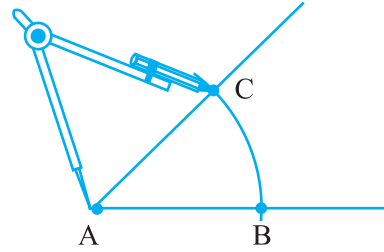


रूलर और परकार द्वारा रचना

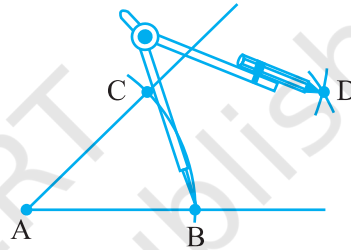
मान लीजिए एक कोण $\angle A$ दिया है।



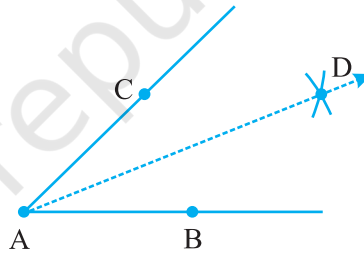
चरण 1 A को केंद्र मानकर परकार की सहायता से एक चाप लगाइए जो $\angle A$ की किरणों (भुजाओं) को B और C पर काटता है।



चरण 2 B को केंद्र मानकर और BC के आधे से अधिक की त्रिज्या लेकर एक चाप $\angle A$ के अभ्यंतर में खींचिए।



चरण 3 C को केंद्र मानकर एक चरण 2 वाली त्रिज्या लेकर, $\angle A$ के अभ्यंतर में एक और चाप लगाइए। मान लीजिए ये दोनों चाप बिंदु D पर प्रतिच्छेद करते हैं तब \overline{AD} ही $\angle A$ का वांछित समद्विभाजक है।



प्रयास कीजिए

उपरोक्त चरण 2 में, यदि हम त्रिज्या BC के आधे से कम लें, तो क्या कोण होगा?

14.5.4 विशेष मापों के कोण

कुछ विशेष मापों के कोणों की रचना करने की कुछ सुंदर और परिशुद्ध विधियाँ हैं, जिनमें चाँदे का प्रयोग नहीं किया जाता है। इनमें से कुछ की चर्चा हम यहाँ करेंगे।

60° के कोण की रचना

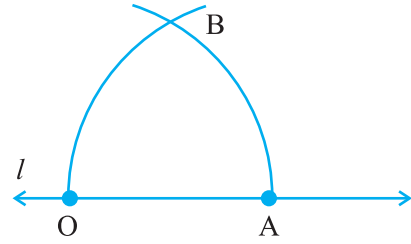
चरण 1 एक रेखा l खींचिए और उस पर एक बिंदु O अंकित कीजिए।



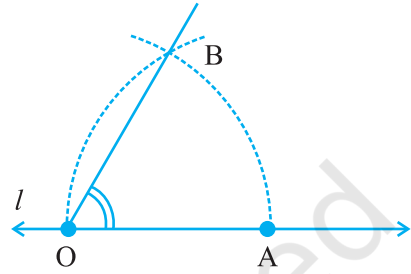
चरण 2 परकार के नुकीले सिरे को O पर रखिए और एक सुविधाजनक त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए, जो रेखा l को, मान लीजिए बिंदु A पर काटता है।



चरण 3 अब A को केंद्र मानकर, O से होकर जाता एक चाप खींचिए।



चरण 4 मान लीजिए ये दोनों चाप परस्पर बिंदु B पर काटते हैं। OB को जोड़कर किरण OB बनाइए। तब $\angle BOA$ ही 60° माप का वांछित कोण है।



30° माप के कोण की रचना

ऊपर दर्शाए अनुसार 60° के कोण की रचना कीजिए। अब इस कोण को समद्विभाजित कीजिए। प्रत्येक कोण 30° का है। मापन द्वारा अपनी रचना की जाँच कीजिए।

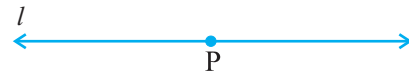
प्रयास कीजिए

15° के कोण की रचना आप किस प्रकार करेंगे?

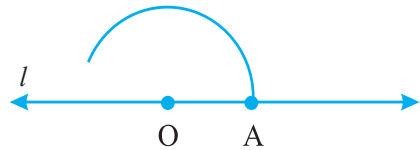
120° के कोण की रचना

120° का कोण 60° के कोण के दोगुने के अतिरिक्त कुछ नहीं है। अतः, इसकी रचना निम्न प्रकार की जा सकती है :

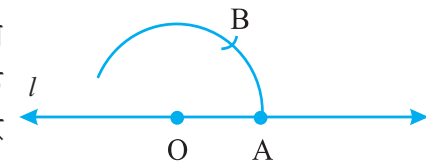
चरण 1 एक रेखा l खींचकर उस पर एक बिंदु O अंकित कीजिए।



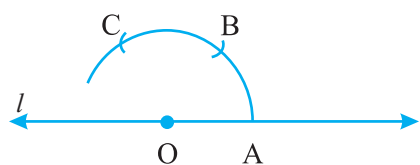
चरण 2 परकार का नुकीला सिरा O पर रखकर और एक सुविधाजनक त्रिज्या लेकर एक चाप लगाइए जो रेखा l को A पर प्रतिच्छेद करे।



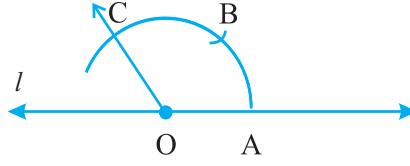
चरण 3 परकार के फैलाव में बिना कोई परिवर्तन किए और A को केंद्र मान कर एक चाप लगाइए जो पिछले चाप को B पर काटता है।



चरण 4 पुनः, परकार के फैलाव में बिना कोई परिवर्तन किए और B को केंद्र मानकर एक चाप लगाइए जो पहले चाप को C पर काटता है।



चरण 5 OC को जोड़कर किरण OC बनाइए। तब, $\angle COA$ ही वह कोण है जिसका माप 120° है।



प्रयास कीजिए

150° के कोण की रचना आप किस प्रकार करेंगे?

90° के कोण की रचना

एक रेखा पर उस पर दिए हुए एक बिंदु से होकर एक लंब खींचिए, जो पहले कर चुके हैं। यह वांछित 90° का कोण है।

प्रयास कीजिए

45° के कोण की रचना आप किस प्रकार करेंगे?



प्रश्नावली 14.6

- 75° माप वाले कोण $\angle POQ$ की रचना कीजिए और इसकी सममित अक्ष खींचिए।
- 147° माप वाले एक कोण की रचना कीजिए और उसका समद्विभाजक खींचिए।
- एक समकोण खींचिए और उसके समद्विभाजक की रचना कीजिए।
- 153° का एक कोण खींचिए और इसके चार बराबर भाग कीजिए।
- रूलर और परकार की सहायता से निम्न मापों के कोणों की रचना कीजिए :
(a) 60° (b) 30° (c) 90° (d) 120° (e) 45° (f) 135°
- 45° का एक कोण खींचिए और उसके समद्विभाजक कीजिए।
- 135° का एक कोण खींचिए और उसे समद्विभाजित कीजिए।
- 70° का एक कोण खींचिए। इस कोण के बराबर रूलर और परकार की सहायता से एक कोण बनाइए।
- 40° का एक कोण खींचिए। इसके संपूरक के बराबर एक कोण बनाइए।

हमने क्या चर्चा की?

इस अध्याय में, ज्यामितीय आकारों को खींचने की विभिन्न विधियाँ बताई गई हैं।

- आकारों की रचना करने के लिए, हम ज्यामिति बक्स में दिए निम्न यंत्रों का प्रयोग करते हैं:
 - रूलर
 - परकार
 - डिवाइडर
 - सेट स्क्वेयर
 - चाँदा

2. रूलर और परकार की सहायता से निम्न रचनाएँ की जा सकती हैं :

- (i) एक वृत्त जब उसकी त्रिज्या की लंबाई दी हो?
- (ii) एक रेखाखंड जब उसकी लंबाई दी हो।
- (iii) एक रेखाखंड के बराबर रेखाखंड बनाना।
- (iv) एक रेखा पर एक बिंदु से लंब खींचना जब वह बिंदु :
 - (a) रेखा पर स्थित हो। (b) रेखा पर स्थित न हो।
- (v) दी हुई लंबाई के रेखाखंड का लंब समद्विभाजक।
- (vi) दिए हुए माप का एक कोण।
- (vii) दिए हुए कोण के बराबर कोण बनाना।
- (viii) दिए हुए कोण का समद्विभाजक।
- (ix) कुछ विशेष मापों के कोण, जैसे :
 - (a) 90° (b) 45° (c) 60° (d) 30° (e) 120° (f) 135°

