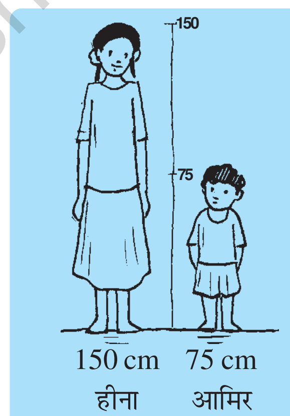
अध्याय 8

राशियों की तुलना

8.1 भूमिका



हमारे दैनिक जीवन में, अनेक ऐसे अवसर आते हैं जब हम दो राशियों की तुलना करते हैं। मान लीजिए हम हीना और आमिर की ऊँचाइयों की तुलना कर रहे हैं। हम पाते हैं कि

1. हीना, आमिर से दो गुनी ऊँची है।

अथवा

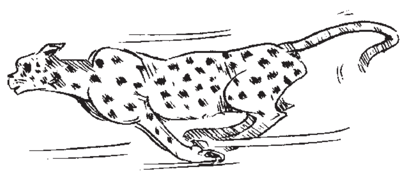
2. आमिर की ऊँचाई हीना की ऊँचाई की आधी है।

एक और उदाहरण पर विचार कीजिए, जब हम 20 कँचे, रीटा और अमित में इस प्रकार बाँटते हैं कि रीटा को 12 कँचे तथा अमित को 8 कँचे मिलते हैं। हम कह सकते हैं:

1. रीटा के पास, अमित से $\frac{3}{2}$ गुने कँचे हैं।

अथवा

2. अमित के पास रीटा के कंचों का $\frac{2}{3}$ भाग है।



चीते की चाल
120 km प्रति घंटा

आदमी की चाल
20 km प्रति घंटा

ऐसे ही एक और उदाहरण में हम चीते और एक आदमी की चालों की तुलना करते हैं।

यहाँ चीते की चाल आदमी की चाल की 6 गुनी है।

अथवा

आदमी की चाल, चीते की चाल का $\frac{1}{6}$ वाँ भाग है।

© NCERT not to be republished

क्या आपको भी ऐसी कुछ अन्य तुलनाएँ याद हैं? कक्षा 6 में हम दो राशियों की तुलना करना सीख चुके हैं, जब हमने बताया कि एक राशि, दूसरी राशि की कितने गुनी है। अब हम यह देखते हैं कि किसी तुलना को भी उल्टा करके यह बताया जा सकता है कि दूसरी राशि पहली राशि का कौन-सा भाग है।

ऊपर के उदाहरणों में, हम राशियों को, जैसे ऊँचाइयों को, अनुपात के रूप में भी दर्शा सकते हैं। जैसे, हीना की ऊँचाई : आमिर की ऊँचाई = 150:75 अथवा 2:1 है।

क्या, अब आप अन्य तुलनाओं को भी अनुपातों के रूप में व्यक्त कर सकते हैं?

ये परस्पर तुलनाएँ हैं, जो दो विभिन्न स्थितियों में भी समान हो सकती हैं।

यदि हीना की ऊँचाई 150 cm तथा आमिर की ऊँचाई 100 cm होती, तब उनकी ऊँचाइयों में अनुपात होता :

हीना की ऊँचाई : आमिर की ऊँचाई = $150:100 = \frac{150}{100} = \frac{3}{2}$ या 3:2 है।

यह वही अनुपात है जो रीता ओर अमित के कंचों में था।

इस प्रकार, हम देखते हैं कि दो विभिन्न स्थितियों में तुलना करने पर, एक ही अनुपात मिल सकता है।

ध्यान रखिए कि तुलना करने में दोनों राशियों की इकाइयाँ समान होनी चाहिए। अनुपात की कोई इकाई नहीं होती।

उदाहरण 1 3 km का 300 m के साथ अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल पहले दोनों दूरियों को एक ही इकाई में लिखते हैं।

अतः, $3 \text{ km} = 3 \times 1000 \text{ m} = 3000 \text{ m}$

इस प्रकार, अभीष्ट अनुपात 3 km:300 m, अर्थात् 3000 m:300 m या 10:1 है।

8.2 तुल्य अनुपात

विभिन्न अनुपातों की भी आपस में तुलना की जा सकती है, जिससे पता चल सके कि वे तुल्य हैं अथवा नहीं। ऐसा करने के लिए, हमें अनुपातों को पहले भिन्नों के रूप में लिखना पड़ता है और फिर उन्हें समान हर वाली भिन्नों में बदलकर उनकी तुलना करते हैं। यदि ये भिन्नें समान हैं तब हम कहते हैं कि दिए हुए अनुपात तुल्य हैं।

उदाहरण 2 क्या अनुपात 1:2 अनुपात 2:3 के तुल्य है?

हल जाँच करने के लिए, हमें देखना होगा कि क्या $\frac{1}{2} = \frac{2}{3}$ है?

हम पाते हैं $\frac{1}{2} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{3}{6}$ तथा $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 2}{3 \times 2} = \frac{4}{6}$

हम देखते हैं कि $\frac{3}{6} < \frac{4}{6}$ है। अर्थात् $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$ है।

अतः, अनुपात 1 : 2, अनुपात 2 : 3 के तुल्य नहीं है।

ऐसी तुलनाओं का उपयोग निम्न उदाहरण में देखा जा सकता है :

© NCERT not to be republished

उदाहरण 3 एक क्रिकेट टीम द्वारा खेले गए कुछ मैचों में प्रदर्शन निम्न प्रकार हैं :

	जीत	हार
पिछले वर्ष	8	2
इस वर्ष	4	2

किस वर्ष में प्रदर्शन बेहतर था?
ऐसा आप किस आधार पर कह सकते हैं?

हल पिछले वर्ष, जीत : हार $= 8:2 = 4:1$

इस वर्ष, जीत : हार $= 4:2 = 2:1$

स्पष्ट है कि $4:1 > 2:1$ (भिन्न रूप में $\frac{4}{1} > \frac{2}{1}$)

अत:, हम कह सकते हैं कि पिछले वर्ष टीम का प्रदर्शन बेहतर अर्थात् अधिक अच्छा था।

कक्षा VI में, हमनें देखा था कि तुल्य अनुपात किस प्रकार महत्वपूर्ण हैं। दो अनुपात यदि तुल्य हों, तो वे एक समानुपात बनाते हैं। आइए समानुपात के बारे में स्मरण करें।

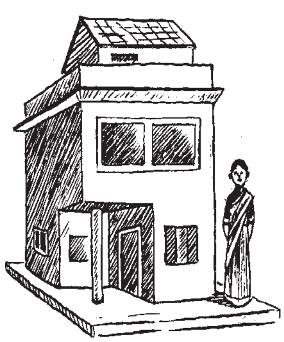
राशियों को समानुपात में रखना और हल प्राप्त करना

अरुणा ने अपने मकान की रूपरेखा देखकर उसका एक प्रतिरूप कागज़ पर बनाया और मकान के साथ ही अपनी माँ को भी खड़ा दिखाया।

देखकर मोना बोली "इस चित्रांकन में कुछ गलती नज़र आती है।"

क्या आप बता सकते हैं कि इसमें क्या गलती है ?

आप ऐसा कैसे कह सकते हैं ?



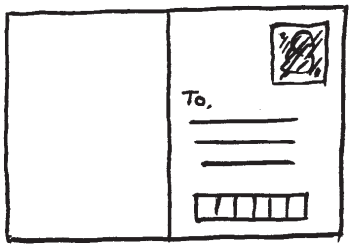
यहाँ चित्र में दर्शाई गई ऊँचाइयों का अनुपात और वास्तव ऊँचाइयों का अनुपात समान होने चाहिए।

$$\frac{\text{मकान की सही ऊँचाई}}{\text{माँ की सही ऊँचाई}} = \frac{\text{चित्र में मकान की ऊँचाई}}{\text{चित्र में माँ की ऊँचाई}}$$

ऐसा होने पर ही सही समानुपात बनेगा। प्राय: जब सही समानुपात में कोई चित्र बनाया जाता है, तब ही वह देखने में मोहक एवं आकर्षक लगता है।

एक अन्य उदाहरण राष्ट्रीय ध्वज का है, जहाँ ध्वज को बनाने में सही समानुपात का ध्यान रखा जाता है।

क्या आपको पता है कि राष्ट्रीय ध्वज सदैव, लंबाई व चौड़ाई के एक निश्चित अनुपात में ही बनाए जाते हैं, जो विभिन्न देशों के लिए विभिन्न हो सकते हैं? लेकिन प्राय: यह अनुपात 1.5:1 अथवा 1.7:1 होता है।



हम इस अनुपात का मान 3:2 के लगभग ले सकते हैं। लगभग यही मान भारत में प्रयोग में लाए जाने वाले पोस्ट कार्ड में भी होता है।

अब, क्या आप कह सकते हैं कि 4.5 cm लंबे तथा 3.0 cm चौड़े कार्ड में यही अनुपात है? इसके लिए आपको अनुपातों 4.5:3.0 तथा 3:2 की तुल्यता देखनी होगी।

हम देखते हैं कि $4.5:3.0 = \frac{4.5}{3.0} = \frac{45}{30} = \frac{3}{2}$

अत:, हम पाते हैं कि 4.5 : 3.0 तथा 3 : 2 तुल्य अनुपात हैं।

© NCERT not to be republished

वास्तविक जीवन में समानुपातों के व्यापक उपयोग मिलते हैं। क्या आप ऐसी कुछ परिस्थितियों के बारे में सोच सकते हैं ?

हमने पिछली कक्षाओं में *ऐकिक विधि* से भी प्रश्न हल करना सीखा है । इस विधि में पहले हम अनेक से एक और फिर वांछित संख्या के लिए मान ज्ञात करते हैं ।

आइए, अब देखें कि इन दोनों विधियों से एक ही समस्या को कैसे हल किया जाता है।

उदाहरण 4 एक मानचित्र 1000 km को 2 cm से दर्शाते हुए बनाया गया है। यदि दो स्थानों के बीच की दूरी मानचित्र में 2.5 cm है, तब उनके बीच की वास्तविक दूरी कितनी होगी ?

हल

अरुण ने हल ऐसे किया :

माना की दूरी $= x$ km

तब $1000 : x = 2 : 2.5$

या $\frac{1000}{x} = \frac{2}{2.5}$

या $\frac{1000 \times x \times 2.5}{x} = \frac{2}{2.5} \times x \times 2.5$

या $1000 \times 2.5 = x \times 2$

या $x = 1250$

वास्तविक दूरी = 1250 km

मीरा ने हल ऐसे किया :

2 cm दर्शाता है 1000 km को

अतः, 1 cm दर्शाता है $\frac{1000}{2}$ km को

अतः, 2.5 cm दर्शाता है $\frac{1000}{2} \times 2.5$ km को

अर्थात् 1250 km को

अरुण ने पहले समानुपात बनाकर फिर एक समीकरण प्राप्त किया और हल निकाला । मीरा ने पहले 1 cm से प्रदर्शित दूरी ज्ञात की और फिर उससे 2.5 km से प्रदर्शित वास्तविक दूरी ज्ञात की । इस प्रकार, उसने ऐकिक विधि का प्रयोग किया ।

अब आइए ऐकिक विधि को उपयोग में लाते हुए कुछ और समस्याएँ हल करें ।

उदाहरण 5 यदि 6 कटोरियों का मूल्य ₹ 90 है, तब ऐसी ही 10 कटोरियों का मूल्य क्या होगा?

हल 6 कटोरियों का मूल्य = ₹ 90

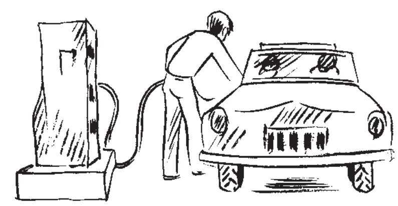
अतः, 1 कटोरी का मूल्य = ₹ $\frac{90}{6}$

अतः, 10 कटोरियों का मूल्य = ₹ $\frac{90}{6} \times 10$ = ₹ 150

उदाहरण 6 मेरी कार 25 लीटर पैट्रोल में 150 km की दूरी तय कर लेती है । 30 लीटर पैट्रोल में यह कितनी दूरी तय करेगी ?

हल 25 लीटर पैट्रोल में तय की गई दूरी = 150 km

© NCERT not to be republished



अत:, 1 लीटर पैट्रोल में दूरी चलेगी = $\frac{150}{25}$ km

अत:, 30 लीटर पैट्रोल में दूरी चलेगी = $\frac{150}{25} \times 30$ km = 180 km

इस विधि में, पहले हम एक वस्तु के लिए मान निकालते हैं, अर्थात् ऐकिक दर निकालते हैं। यह दो विभिन्न गुणों की तुलना करके किया जाता है। उदाहरण के लिए, वस्तुओं के मूल्य से तुलना करके एक वस्तु का मूल्य ज्ञात किया जाता है।
अथवा दूरी तथा समय दिए होने पर इकाई समय में तय होने वाली दूरी ज्ञात कर लेते हैं।
इस प्रकार आप देख सकते हैं कि प्रत्येक को दर्शाने के लिए हम प्राय: प्रति का प्रयोग करते हैं।

उदाहरण के लिए, किलोमीटर प्रति घंटा (km/h), विद्यार्थी प्रति अध्यापक, आदि, इकाई दर प्रदर्शित करते हैं।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

एक चींटी अपने भार से 50 गुना भार ढो सकती है। यदि यही तथ्य मानव पर भी लागू हो, तब ज्ञात कीजिए कि आप कितना भार ढो पाएँगे ?

प्रश्नावली 8.1

1. अनुपात ज्ञात कीजिए :
   (a) ₹ 5 का 50 पैसे से (b) 15 kg का 210 g से
   (c) 9 m का 27 cm से (d) 30 दिनों का 36 घंटों से

2. एक कंप्यूटर प्रयोगशाला में 6 विद्यार्थियों के लिए 3 कंप्यूटर होने चाहिए। ज्ञात कीजिए कि 24 विद्यार्थियों के लिए कितने कंप्यूटरों की आवश्यकता होगी ?
3. राजस्थान की जनसंख्या = 570 लाख और उत्तर प्रदेश की जनसंख्या = 1660 लाख राजस्थाान का क्षेत्रफल = 3 लाख km^2 और उत्तर प्रदेश का क्षेत्रफल = 2 लाख km^2, ज्ञात कीजिए
   (i) इन दोनों राज्यों में प्रति km^2 कितने व्यक्ति हैं ?
   (ii) किस राज्य की जनसंख्या कम घनी है ?

8.3 प्रतिशतता-राशियों के तुलना करने की एक और विधि

अनीता की रिपोर्ट
प्राप्तांक : 320/400
प्रतिशत : 80

रीता की रिपोर्ट
प्राप्तांक : 300/360
प्रतिशत : 83.3

अनीता कहती है कि उसका परीक्षाफल अधिक अच्छा है, क्योंकि उसने 320 अंक प्राप्त किए है जबकि रीता ने केवल 300 अंक। क्या आप उससे सहमत हैं ? आपके विचार में किसका परीक्षाफल अधिक अच्छा है ?

© NCERT not to be republished

मानसी कहती है कि केवल प्राप्तांकों की तुलना कर यह नहीं कहा जा सकता है कि किसका परीक्षाफल अधिक अच्छा है क्योंकि अधिकतम अंक जिनमें से दोनों को अंक प्राप्त हुए हैं वे समान नहीं हैं।

वह कहती है कि रिपोर्ट कार्डों में दिए गए प्रतिशत अंकों पर आप ध्यान क्यों नहीं देती। अनीता के प्रतिशत अंक 80 हैं जबकि रीता के प्रतिशत अंक 83.3 हैं। इससे पता चलता है कि रीता का परीक्षाफल अधिक अच्छा है।

क्या आप इससे सहमत हैं ?

प्रतिशत उन भिन्नों का अंश होता है जिनका हर 100 होता है, और यहाँ पर परीक्षाफलों की तुलना करने में इसे किया गया है।

इस प्रकार की भिन्नों को आइए अब विस्तार से समझने का प्रयत्न करें।

8.3.1 प्रतिशतता के अर्थ

प्रतिशत (percent) शब्द, लेटिन भाषा के एक शब्द 'percentum' से लिया गया है जिसका अर्थ है 'प्रति एक सौ'।

प्रतिशत को चिह्न % से प्रदर्शित किया जाता है जिसका अर्थ हैं सौवाँ। यानी एक सौवाँ अर्थात् 1% का अर्थ है सौ में से एक अथवा एक सौवाँ। इसे इस प्रकार लिखते हैं:

$1\% = \frac{1}{100} = 0.01$। इसे समझने के लिए निम्न उदाहरण पर विचार करते हैं।

रीना एक मेज़ के ऊपरी भाग (टॉप) को बनाने के लिए 100 भिन्न-भिन्न रंगों वाली टाइलें प्रयोग करती है। उसने पीले, हरे, लाल और नीले रंग वाली टाइलें अलग-अलग गिनी और एक तालिका में निम्न प्रकार लिखा। क्या आप इस तालिका को पूरी करने में उसकी सहायता करेंगे ?

रंग	टाइलों की संख्या	प्रतिशत दर	भिन्न	ऐसे लिखा जाता है	ऐसे पढ़ा जाता है
पीली	14	14	$\frac{14}{100}$	14%	14 प्रतिशत
हरी	26	26	$\frac{26}{100}$	26%	26 प्रतिशत
लाल	35	35	----	----	----
नीली	25	--------	----	----	----
योग	**100**				

प्रयास कीजिए

1. निम्न आँकड़ों के लिए विभिन्न ऊँचाई वाले बच्चों का प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

ऊँचाई	**बच्चों की संख्या**	**भिन्न रूप में**	**प्रतिशत में**
110 cm	22		
120 cm	25		
128 cm	32		
130 cm	21		
योग	**100**		

2. एक दुकान में विभिन्न मापों वाले जूतों की जोड़ियों की संख्या निम्न प्रकार है।
माप 2 : 20; माप 3 : 30; माप 4 : 28; माप 5 : 14; माप 6 : 8
इस सूचना को ऊपर की भाँति एक तालिका के रूप में लिखिए और दुकान में उपलब्ध जूते की हर माप को प्रतिशतता में भी ज्ञात कर लिखिए।

© NCERT not to be republished

प्रतिशतता ज्ञात करना जब योग सौ न हो।

उक्त सभी उदाहरणों में वस्तुओं की संख्याओं का योग 100 हो जाता है। उदाहरण के लिए रीना के पास कुल 100 टाइलें थी; बच्चों की संख्या भी 100 तथा जूतों की संख्या भी 100 ही थी। यदि वस्तुओं की कुल संख्या 100 न हो तो प्रत्येक वस्तु का प्रतिशत रूप में कैसे आकलन किया जाता है ? ऐसी स्थिति में हमें प्रत्येक भिन्न को उसकी ऐसी तुल्य भिन्न में बदलना पड़ेगा जिसका हर 100 हो। निम्न उदाहरण पर विचार कीजिए। आपके पास गले की ऐसी माला है जिसमें दो रंगों के बीस मनके (beads) पिरोए गए हैं।

रंग	**मनकों की संख्या**	**भिन्न**	**100 हर वाली तुल्य भिन्न**	**प्रतिशत**
लाल	8	$\frac{8}{20}$	$\frac{8}{20}\times\frac{100}{100}=\frac{40}{100}$	40%
नीले	12	$\frac{12}{20}$	$\frac{12}{20}\times\frac{100}{100}=\frac{60}{100}$	60%
योग	**20**			

हम देखते है कि जब वस्तुओं का कुल योग 100 नहीं हो तब प्रतिशत ज्ञात करने के लिए इन तीन विधियों को उपयोग किया जा सकता है। तालिका में दिखाई गई विधि में, हम भिन्न को $\frac{100}{100}$ से गुणा करते हैं। इस प्रकार भिन्न का मान भी नहीं बदलता और हमें ऐसी भिन्न प्राप्त हो जाती है जिसका हर 100 होता है।

अनवर, लाल मनकों का प्रतिशत इस प्रकार ज्ञात करता है:
20 मनकों में लाल की संख्या 8 है, अत: 100 मनकों में लाल की संख्या $= \frac{8}{20} \times 100$

$= 40$ (एक सौ में) $= 40\%$

आशा, लाल मनकों का प्रतिशत इस प्रकार ज्ञात करती है:

$$\frac{8}{20} = \frac{8 \times 5}{20 \times 5}$$

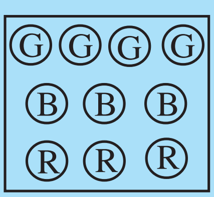
$$= \frac{40}{100} = 40\%$$

अनवर ने ऐकिक विधि प्रयोग की है। आशा ने हर में 100 प्राप्त करने के लिए उसे $\frac{5}{5}$ से गुणा किया। आपको जो विधि उपयुक्त लगे, उसे उपयोग में ला सकते हैं। हो सकता है आप अपनी कोई विधि भी सोच सकें।

अनवर ने जिस विधि का उपयोग किया वह सभी अनुपातों के लिए प्रयोग की जा सकती है। क्या, आशा ने जिस विधि का उपयोग किया; वह भी सब अनुपातों के लिए उपयुक्त है ? अनवर का कहना है कि आशा की विधि उन भिन्नों में ही उपयोग में लाई जा सकती है, जिनके हर में ऐसी संख्या हो जिसे किसी प्राकृत संख्या से गुणा करने पर 100 प्राप्त हो जाए। क्योंकि उसकी विधि में, हर में संख्या 20 थी जिसे उसने 5 से गुणा कर 100 प्राप्त कर लिया। यदि हर में संख्या 6 होती तब वह इस विधि को उपयोग नहीं कर सकती थी। क्या आप इससे सहमत हैं ?

© NCERT not to be republished

प्रयास कीजिए



1. विभिन्न रंगों वाली 10 टुकड़ों (chips) का संग्रह इस प्रकार से है:

रंग	संख्या	भिन्न	हर सौ	प्रतिशत में
हरा (G)				
नीला (B)				
लाल (R)				
योग				

तालिका पूर्ण कीजिए तथा प्रत्येक रंग वाले टुकड़ों का प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

2. माला के पास चूड़ियों का एक संग्रह है जिनमें 20 सोने तथा 10 चाँदी की चूड़ियाँ हैं। प्रत्येक प्रकार की चूड़ियों का प्रतिशत क्या है ? क्या आप इसके लिए भी ऊपर की तरह तालिका बना सकते हैं ?

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

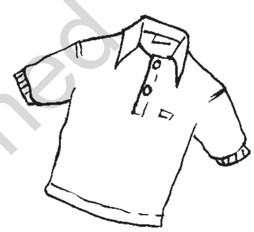
निम्न उदाहरणों को ध्यान से देखिए और चर्चा कीजिए कि उनमें प्रत्येक के लिए कौन-सी विधि अधिक उपयुक्त है।

1. वातावरण में, 1 gm वायु में उपस्थित हैं:

.78 ग्राम नाइट्रोजन .21 ग्राम ऑक्सीजन .01 ग्राम अन्य गैस	अथवा	78% नाइट्रोजन 21% ऑक्सीजन 1% अन्य गैस

2. एक कमीज़ के कपड़े में होते हैं:

$\frac{3}{5}$ सूती $\frac{2}{5}$ पॉलिस्टर	60% सूती 40% पॉलिस्टर



© NCERT not to be republished

8.3.2 भिन्न संख्याओं को प्रतिशत में बदलना

भिन्न संख्याओं में, हर विभिन्न संख्याएँ हो सकती हैं। उनकी तुलना करने के लिए हमें उनके हरों को समान करना पड़ता है और हम देख चुके हैं कि तब उनकी तुलना करना बहुत आसान हो जाता है यदि उनमें प्रत्येक का हर 100 हो। यानी हम भिन्नों को प्रतिशत में बदल रहे हैं। आइए अब कुछ भिन्नों को प्रतिशत में बदलने का प्रयत्न करें।

उदाहरण 7 $\frac{1}{3}$ को प्रतिशत रूप में लिखिए।

हल संख्या है, $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{100}{100} = \frac{1}{3} \times 100\%$

$$= \frac{100}{3}\% = 33\frac{1}{3}\%$$

उदाहरण 8 25 बच्चों की कक्षा में 15 लड़कियाँ हैं। लड़कियों का प्रतिशत क्या है ?

हल 25 बच्चों में 15 लड़कियाँ हैं

अत: लड़कियों का प्रतिशत $= \frac{15}{25} \times 100 = 60$। अर्थात् कक्षा में 60% लड़कियाँ हैं।

उदाहरण 9 $\frac{5}{4}$ को प्रतिशत में बदलिए।

हल संख्या में, $\frac{5}{4} = \frac{5}{4} \times 100\% = 125\%$

इन उदाहरणों में हम देखते हैं कि एक उचित भिन्न को प्रतिशत में बदलने पर 100 से कम प्रतिशत तथा मिश्र भिन्न को प्रतिशत में बदलने पर 100 से अधिक प्रतिशत प्राप्त होता है।

सोचिए और चर्चा कीजिए

(i) क्या आप किसी 'केक' (cake) का 50% खा सकते हैं ?

क्या आप किसी 'केक' (cake) का 100% खा सकते हैं ?

क्या आप किसी 'केक' (cake) का 150% खा सकते हैं ?

(ii) क्या किसी वस्तु का मूल्य 50% बढ़ सकता है ?

क्या किसी वस्तु का मूल्य 100% बढ़ सकता है ?

क्या किसी वस्तु का मूल्य 150% बढ़ सकता है ?

8.3.3 दशमलव भिन्न को प्रतिशत में बदलना

हमने देखा कि साधारण भिन्नों को प्रतिशत में किस प्रकार बदला जाता है। अब आइए देखें दशमलव भिन्नों को भी प्रतिशत में कैसे बदला जाता है।

उदाहरण 10 दिए गए दशमलवों को प्रतिशत में बदलिए :

(a) 0.75 (b) 0.09 (c) 0.2

हल

(a) $0.75 = 0.75 \times 100\ \%$

$= \frac{75}{100} \times 100\ \% = 75\%$

(b) $0.09 = \frac{9}{100} = 9\ \%$

(c) $0.2 = \frac{2}{10} \times 100\% = 20\ \%$

© NCERT not to be republished

प्रयास कीजिए

1. निम्नलिखित भिन्नों को प्रतिशत में बदलिए।

(a) $\frac{12}{16}$ (b) 3.5 (c) $\frac{49}{50}$

(d) $\frac{2}{2}$ (e) 0.05

2. (i) 32 विद्यार्थियों में 8 अनुपस्थित हैं। विद्यार्थियों का क्या प्रतिशत अनुपस्थित है?

(ii) 25 रेडियो सैट में 16 खराब हैं। खराब रेडियो सैटों का प्रतिशत क्या है ?

(iii) एक दुकान में 500 पुर्जे हैं जिनमें 5 बेकार हैं। बेकार पुर्जों का प्रतिशत क्या है ?

(iv) 120 मतदाताओं में से 90 ने 'हाँ' में मत दिया। कितने प्रतिशत ने 'हाँ' में मत दिया?

8.3.4 प्रतिशत को साधारण भिन्न या दशमलव में बदलना

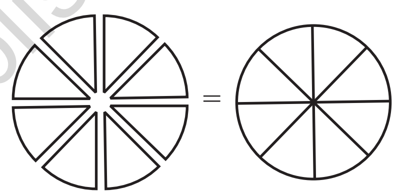
अभी तक हमने साधारण भिन्न या दशमलव भिन्न को प्रतिशत में बदला। हम इसका विपरीत भी कर सकते हैं। यानी, प्रतिशत दिए होने पर उसे साधारण या दशमलव भिन्न में भी बदल सकते हैं। निम्न तालिका को ध्यान से देखकर पूरा कीजिए:

प्रतिशत	1%	10%	25%	50%	90%	125%	250%
साधारण भिन्न	$\frac{1}{100}$	$\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$					
दशमलव भिन्न	0.01	0.10					

ऐसे कुछ अन्य उदाहरण बनाइए और उन्हें हल भी कीजिए।

किसी वस्तु के सभी भाग मिलकर सदैव एक संपूर्ण वस्तु बनाते हैं।

रंगीन टाइलों, बच्चों की ऊँचाइयों तथा वातावरण में गैसों के उदाहरणों में हमने देखा कि जब हम उनके प्रतिशतों को जोड़ते हैं तब 100 ही प्राप्त होता है। वे सभी भाग मिलकर जो एक पूर्ण वस्तु बनाते हैं, जोड़ने पर एक या 100% देते हैं। अत: यदि दो भागों में एक भाग दिया हो तब हम दूसरा भाग ज्ञात कर सकते हैं। निम्न उदाहरण पर विचार कीजिए:



विद्यार्थियों की दी गई संख्या में 30% लड़के हैं।

इसका अर्थ यह हुआ कि यदि 100 विद्यार्थी हैं तो उनमें 30 लड़के हैं तथा शेष लड़कियाँ होंगी।

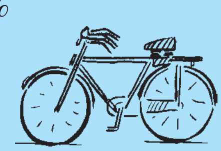
स्पष्ट है कि लड़कियाँ होंगी (100–30)% = 70%.

© NCERT not to be republished

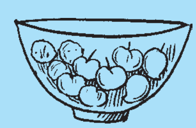
प्रयास कीजिए

1. 35% + _______% = 100%, 64% + 20% +________ % = 100%

   45% = 100% – _________%, 70% = ______% – 30%

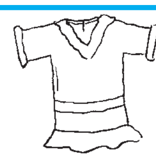


2. किसी कक्षा के विद्यार्थियों में 65% के पास साइकिलें हैं। कितने प्रतिशत विद्यार्थियों के पास साइकिलें नहीं हैं?



3. हमारे पास, सेब, संतरों तथा आमों से भरी एक टोकरी है। यदि उसमें 50% सेब तथा 30% संतरे हैं तब आमों का प्रतिशत कितना है ?

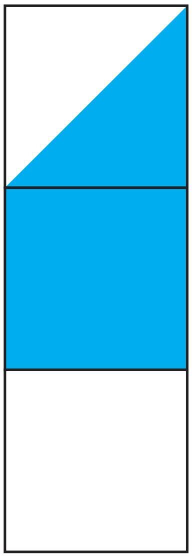
सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए



एक परिधान के बनाने पर हुए व्यय को देखिए। कढ़ाई पर 20%, कपड़े पर 50%, सिलाई पर 30% । क्या आप कुछ अन्य ऐसे ही उदाहरण दे सकते हैं।

8.3.5 अनुमान के साथ मनोरंजन

प्रतिशतता, एक दिए क्षेत्रफल के किसी भाग का अनुमान लगाने में सहायता करती है।



उदाहरण 11 निम्न आकृति में छायांकित भाग पूर्ण का कितने प्रतिशत है ?

हल पहले हम देखते हैं कि पूर्ण आकृति का कितना भाग छायांकित है। इस प्रकार प्राप्त भिन्न से छायांकित भाग की प्रतिशतता ज्ञात की जा सकती है।

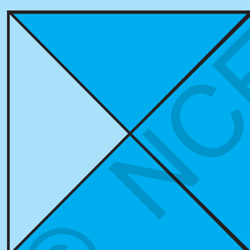
आप देख सकते हैं कि पूर्ण आकृति का आधा भाग छायांकित है।

तथा $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 100\,\% = 50\,\%$

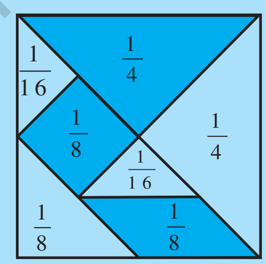
इस प्रकार, 50 % छायांकित है।

निम्न आकृतियों का कितने प्रतिशत छायांकित है ?

(i)



(ii)



टेनग्राम

आप इसी प्रकार कुछ अन्य आकृतियाँ बना सकते हैं और अपने साथियों से छायांकित भाग अनुमान करने को कहिए।

8.4 प्रतिशतता के उपयोग

8.4.1 प्रतिशतता की व्याख्या

आपने देखा कि तुलना करने के लिए प्रतिशतता कितनी उपयोगी है। हमने साधारण व दशमलव भिन्नों को प्रतिशत में बदलना भी सीखा। अब हम देखेंगे कि प्रतिशतता दैनिक जीवन में किस प्रकार प्रयोग में लाई जा सकती है। इसके लिए हम निम्नलिखित कथनों की व्याख्या से आरंभ करते हैं।

– रवि अपनी आय का 5% बचत करता है।
– रेखा को प्रत्येक पुस्तक बेचने पर 10% लाभ मिलता हैं।
– मीरा के 20% वस्त्र नीले रंग के हैं।

इन कथनों में प्रत्येक से आप क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं ?

5% से हमारा तात्पर्य है 100 में से 5 भाग तथा इसे हम लिखते हैं $\frac{5}{100}$। इसका अर्थ हैं कि रवि, अर्जित किए गए प्रत्येक ₹ 100 में से ₹ 5 बचाता है। इस प्रकार आप भी ऊपर दिए गए अन्य कथनों के अर्थ लगाइए।

© NCERT not to be republished

8.4.2 प्रतिशतता से संख्या ज्ञात करना

निम्नलिखित उदाहरणों पर ध्यान दीजिए

उदाहरण 12 40 बच्चों के सर्वेक्षण से पता चला कि 25% फुटबॉल खेलना पसंद करते हैं। ज्ञात कीजिए कि इनमें कितने बच्चों को फुटबॉल खेलना पसंद था ।

हल यहाँ पर बच्चों की कुल संख्या 40 है। इनमें से 25% फुटबॉल खेलना पसंद करते हैं। मीना और अरुण ने ऐसे बच्चों की संख्या ज्ञात करने के लिए निम्न विधियाँ प्रयुक्त की। आप ऐसे प्रश्नों के हल करने के लिए इनमें से कोई भी विधि प्रयोग कर सकते हैं।

अरूण ने इस प्रकार हल किया

100 में से फुटबॉल खेलना पंसद करने वाले = 25

अत:, 40 में से फुटबॉल खेलना पसंद करने वाले

$= \frac{25}{100} \times 40 = 10$

मीना ने इस प्रकार हल किया

40 का 25% $= \frac{25}{100} \times 40$

$= 10$

इस प्रकार 40 बच्चों में 10 फुटबॉल खेलना पसंद करते हैं।

© NCERT not to be republished

प्रयास कीजिए

1. ज्ञात कीजिए :

(a) 164 का 50% (b) 12 का 75% (c) 64 का $12\frac{1}{2}$%

2. 25 बच्चों की कक्षा में 8% बच्चे वर्षा में भीगना पसंद करते हैं। वर्षा में भीगने वाले बच्चों की संख्या ज्ञात कीजिए।

उदाहरण 13 जब 25% छूट दी जा रही थी तब राहुल ने एक स्वेटर खरीदा और ₹ 200 बचाए। छूट से पहले स्वेटर का क्या मूल्य था ?

हल राहुल ने ₹ 200 बचाए जब 25% छूट मिली। यानी मूल्य में 25% कम होने के कारण राहुल को ₹ 200 की बचत हुई। आइए देखें कि मोहन और अब्दुल ने स्वेटर का प्रारंभिक मूल्य कैसे ज्ञात किया ?

मोहन का हल

वास्तविक मूल्य का 25% = ₹ 200

माना मूल्य है ₹ P

अत: P का 25% = 200

अर्थात् $\frac{25}{100} \times P = 200$

अर्थात् $\frac{P}{4} = 200$ या $P = 200 \times 4$

अत: $P =$ ₹ 800

अब्दुल का हल

प्रत्येक ₹ 100 पर ₹ 25 की बचत होती है ।

तब ₹ 200 की बचत इस राशि पर होगी

$= \frac{100}{25} \times 200 =$ ₹ 800

दोनों ने ही स्वेटर का वास्तविक मूल्य ₹ 800 ज्ञात किया।

प्रयास कीजिए

1. 9 किस संख्या का 25% है ?   **2.** 15 किस संख्या का 75% है ?

प्रश्नमाला 8.2

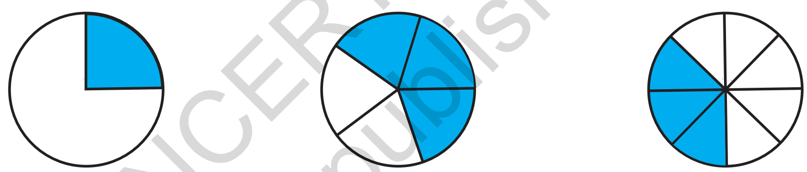
1. दी गई भिन्न संख्याओं को प्रतिशत में बदलो।

(a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{5}{4}$ (c) $\frac{3}{40}$ (d) $\frac{2}{7}$

2. दी गई दशमलव भिन्नों को प्रतिशत में बदलो।

(a) 0.65 (b) 2.1 (c) 0.02 (d) 12.35

3. अनुमान लगाइए कि आकृति का कितना भाग रंग दिया गया है और इस प्रकार ज्ञात कीजिए कि कितने प्रतिशत रंगीन है।



(i) (ii) (iii)

4. ज्ञात कीजिए :

(a) 250 का 15% (b) 1 घंटे का 1%

(c) 2500 का 20% (d) 1 किग्रा का 75%

5. संपूर्ण राशि ज्ञात कीजिए यदि

(a) इसका 5%, 600 है। (b) इसका 12%, 1080 है। (c) इसका 40%, 500 km है।

(d) इसका 70% 14 मिनट है। (e) इसका 8%, 40 लीटर है।

6. दिए गए प्रतिशतों को साधारण व दशमलव भिन्नों में बदलो और अपने उत्तर को सरलतम रूप में लिखो।

(a) 25% (b) 150% (c) 20% (d) 5%

7. एक नगर में 30% महिलाएँ, 40% पुरुष तथा शेष बच्चे हैं। बच्चों का प्रतिशत कितना है ?

8. किसी क्षेत्र के 15,000 मतदाताओं में से 60% ने मतदान में भाग लिया। ज्ञात कीजिए कि कितने प्रतिशत ने मतदान में भाग नहीं लिया। क्या अब ज्ञात कर सकते हैं कि वास्तव में कितने मतदाताओं ने मतदान नहीं किया ?

9. मीता अपने वेतन में से ₹ 4000 बचाती है। यदि यह उसके वेतन का 10% है, तब उसका वेतन कितना है ?

10. एक स्थानीय क्रिकेट टीम ने, एक सत्र (season) में 20 मैच खेले । इनमें से उस टीम ने 25% मैच जीते । जीते गए मैचों की संख्या कितनी थी ?

© NCERT not to be republished

8.4.3 अनुपातों से प्रतिशत

कभी–कभी किसी वस्तु या राशि के भाग अनुपात के रूप में दिए होते हैं और हमें उन्हें प्रतिशत में बदलना पड़ता है। निम्न उदाहरणों पर ध्यान दीजिए।

उदाहरण 14 रीना की माता जी ने बताया कि इडली बनाने के लिए 1 भाग उड़द की दाल तथा 2 भाग चावल की आवश्यकता होती है। इडली के ऐसे मिश्रण में, उड़द की दाल व चावल का प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

हल मिश्रण को अनुपात रूप में इस प्रकार लिखा जाएगा।

चावल : उड़द की दाल = 2 : 1

अब, कुल भाग है 2 + 1= 3। अर्थात् मिश्रण में $\frac{2}{3}$ भाग चावल तथा $\frac{1}{3}$ भाग उड़द की दाल है।

अत:, चावल का प्रतिशत होगा $\frac{2}{3} \times 100\,\% = \frac{200}{3} = 66\frac{2}{3}\,\%$

तथा उड़द की दाल का प्रतिशत होगा $\frac{1}{3} \times 100\,\% = \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}\,\%$

उदाहरण 15 रवि, राजू तथा राय में ₹ 250 इस प्रकार बाँटे गए कि रवि को दो भाग, राजू को तीन भाग तथा राय को पाँच भाग मिले। इस बँटवारे में प्रत्येक को कितना धन मिला तथा उनका प्रतिशत कितना था ?

हल प्रत्येक के भाग को अनुपात रूप में इस प्रकार लिखा जाएगा 2 : 3 : 5
सभी भागों का योग हुआ 2 + 3 + 5 = 10.

कुल राशि में प्रत्येक का प्रतिशत

रवि को मिला $\frac{2}{10} \times 100\,\% = 20\,\%$

राजू को मिला $\frac{3}{10} \times 100\,\% = 30\,\%$

राय को मिला $\frac{5}{10} \times 100\,\% = 50\,\%$

प्रत्येक को मिली राशि

$\frac{2}{10} \times$ ₹ 250 = ₹50

$\frac{3}{10} \times$ ₹ 250 = ₹75

$\frac{5}{10} \times$ ₹ 250 = ₹125

प्रयास कीजिए

1. 15 मिठाइयों को मनु तथा सोनू में इस प्रकार बाँटिए कि उन्हें कुल का क्रमश: 20 % तथा 80 % मिले।
2. यदि किसी त्रिभुज के कोणों में अनुपात 2 : 3 : 4 है तब उसके प्रत्येक कोण की माप क्या होगी ?

© NCERT not to be republished

8.4.4 बढ़त या घटत, प्रतिशत रूप में

अनेक अवसरों पर हमें किसी राशि में हुई बढ़त या घटत को प्रतिशत रूप में ज्ञात करने की आवश्यकता होती है। उदाहरण के लिए, यदि किसी प्रदेश की जनसंख्या 5,50,000 से बढ़कर 6,05,000 हो गई तब ऐसी स्थिति में जनसंख्या की वृद्धि को प्रतिशत के रूप में समझना अधिक आसान होता है, जैसे कहें कि प्रदेश की जनसंख्या 10 % बढ़ गई।

हम किसी राशि के बढ़ने या घटने को, कुल राशि के प्रतिशत के रूप में किस प्रकार प्रकट कर सकते हैं? आइए निम्न उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 16 एक विद्यालय की टीम ने इस वर्ष 6 खेलों में जीत प्राप्त की जबकि पिछले वर्ष 4 में ही की थी। पिछले वर्ष की तुलना में जीत कितने प्रतिशत बढ़ी ?

हल जीत की संख्या में वृद्धि $= 6 - 4 = 2$.

$$\text{प्रतिशत वृद्धि} = \frac{\text{वृद्धि}}{\text{आधार वर्ष में जीत}} \times 100$$

$$= \frac{\text{जीत की संख्या में वृद्धि}}{\text{पिछले वर्ष में जीत की संख्या}} \times 100 = \frac{2}{4} \times 100 = 50$$

अर्थात् जीत में 50 प्रतिशत की वृद्धि हुई।

उदाहरण 17 किसी देश में, पिछले 10 वर्षों में अशिक्षितों की संख्या 150 लाख से घटकर 100 लाख रह गई। घटने का प्रतिशत कितना रहा ?

हल प्रारंभिक राशि = प्रारंभ में अशिक्षितों की संख्या = 150 लाख

प्रारंभिक राशि में परिवर्तन = अशिक्षितों की संख्या में घटत = 150 – 100 = 50 लाख

अतः प्रतिशत घटत

$$= \frac{\text{राशि में परिवर्तन}}{\text{प्रारंभिक राशि}} \times 100 = \frac{50}{150} \times 100 = 33\frac{1}{3}\%$$

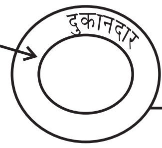
अतः घटने का प्रतिशत $33\frac{1}{3}\%$ है।

प्रयास कीजिए

1. बढ़ने या घटने का प्रतिशत ज्ञात कीजिए।
   – कमीज़ का मूल्य ₹280 से घटकर ₹210 हो गया।
   – किसी परीक्षा में प्राप्तांक बढ़कर 20 से 30 हो गए।
2. मेरी माता जी कहती हैं कि उनके बचपन के समय पैट्रोल की दर ₹ 1 प्रति लीटर थी और आजकल यह ₹ 52 प्रति लीटर है। पैट्रोल की दर में कितने प्रतिशत की वृद्धि हुई ?

8.5 किसी वस्तु से संबंधित मूल्य, अर्थात् क्रय तथा विक्रय

मैंने इसे ₹ 600 में खरीदा



और मैं इसे ₹ 610 में बेचूँगा।

जिस मूल्य पर कोई वस्तु खरीदी जाती है वह उसका **क्रय मूल्य (cost price)** कहलाता है इसे संक्षिप्त में क्र.मू. (C.P.) लिखा जाता है। जिस मूल्य पर कोई वस्तु बेची जाती है वह उसका **विक्रय मूल्य (selling price)** कहलाता है और इसे संक्षिप्त में वि. मू. (S.P.) लिखा जाता है।

आप किसे अधिक अच्छा कहेंगे, यदि किसी वस्तु को क्रय मूल्य पर ही या उससे कम मूल्य पर या उससे अधिक मूल्य पर बेचा जाए?

क्रय मूल्य तथा विक्रय मूल्य के आधार पर आप तय कर सकते है कि कोई वस्तु बेचकर आपको लाभ हुआ या नहीं।

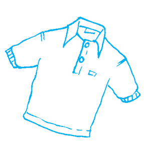
यदि क्रय मूल्य (CP) < विक्रय मूल्य (SP)। तब लाभ = SP – CP.

यदि क्रय मूल्य (CP) = विक्रय मूल्य (SP)। तब ना लाभ तथा ना हानि

यदि क्रय मूल्य (CP) > विक्रय मूल्य (SP)। तब हानि = CP – SP (क्रय मूल्य-विक्रय मूल्य)।

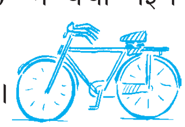
आइए कुछ वस्तुओं के क्रय तथा विक्रय मूल्य देखकर, कथनों को समझने का प्रयत्न करें।

- एक खिलौना ₹ 72 में खरीदा गया और ₹ 80 में बेचा गया।



- एक टी-शर्ट ₹ 120 में खरीदी गई और ₹ 100 में बेची गई।

- एक साइकिल ₹ 800 में खरीदी गई और ₹ 940 में बेची गई।



अब पहले कथन पर विचार करते हैं। यहाँ क्रय मूल्य ₹ 72 है तथा विक्रय मूल्य ₹ 80 है।
अत: विक्रय मूल्य अधिक है, क्रय मूल्य से।
अत: लाभ = SP – CP = ₹ 80 – ₹ 72 = ₹ 8
अब आप अन्य दो कथनों की इसी प्रकार सोचकर व्याख्या करें।

8.5.1 लाभ या हानि, प्रतिशत में

लाभ या हानि को प्रतिशत रूप में ज्ञात किया जा सकता है। ध्यान में रखिए कि इसे सदैव क्रय मूल्य पर ही परिकलित करते हैं। उपरोक्त उदाहरणों में हम प्रतिशत लाभ या प्रतिशत हानि भी ज्ञात कर सकते हैं।

आइए खिलौने वाला उदाहरण ही लेते हैं। यहाँ है: CP = ₹ 72, SP = ₹ 80, तथा लाभ = ₹ 8। लाभ प्रतिशत ज्ञात करने के लिए नेहा तथा शेखर ने निम्न विधियाँ प्रयुक्त कीं।

© NCERT not to be republished

नेहा ने हल इस प्रकार किया

लाभ प्रतिशत $= \dfrac{\text{लाभ}}{\text{क्र. मू.}} \times 100 = \dfrac{8}{72} \times 100$

$= \dfrac{1}{9} \times 100 = 11\dfrac{1}{9}$

अत: लाभ % $= 11\dfrac{1}{9}$

शेखर ने इस प्रकार किया

₹ 72 पर ₹ 8 लाभ प्राप्त होता है

अत: ₹ 100 पर लाभ $= \dfrac{8}{72} \times 100$

अत: लाभ % $= 11\dfrac{1}{9}$

इसी प्रकार आप दूसरे प्रश्न में भी हानि प्रतिशत ज्ञात कर सकते हैं।

यहाँ CP = ₹ 120, SP = ₹ 100 है।

अत: हानि = ₹ 120 – ₹ 100 = ₹ 20

हानि प्रतिशत $= \dfrac{\text{हानि}}{\text{क्र. मू.}} \times 100$

$= \dfrac{20}{120} \times 100$

$= \dfrac{50}{3} = 16\dfrac{2}{3}$ प्रतिशत

अत: हानि $= 16\dfrac{2}{3}\%$

120 पर हानि = ₹ 20

अत: ₹ 100 पर हानि

$= \dfrac{20}{120} \times 100 = \dfrac{50}{3} = 16\dfrac{2}{3}$

अत: हानि प्रतिशत $16\dfrac{2}{3}$ है

अब आप साईकिल वाला उदाहरण हल करके देखिए।

हम यहाँ यह भी देखते हैं कि किसी वस्तु से संबंधित क्रय मूल्य, विक्रय मूल्य तथा लाभ या हानि में तीन राशियों में से कोई भी दो राशियाँ ज्ञात हों तो तीसरी राशि ज्ञात की जा सकती है।

उदाहरण 18 एक फूलदान का लागत मूल्य ₹ 120 है। यदि दुकानदार इसे 10% हानि पर बेचता है तब उसका विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल पहले, दी हुई राशियों को पहचानते हैं। दिया है, क्रय मूल्य = ₹ 120 तथा हानि प्रतिशत = 10, हमें ज्ञात करना है विक्रय मूल्य।

सोहन ने इस प्रकार हल निकाला

10% हानि का अर्थ है यदि क्र.मू. = ₹ 100 तब हानि = ₹ 10

अत: विक्रय मूल्य = ₹ (100 – 10) = ₹ 90

आनंदी ने इस प्रकार हल किया

हानि = क्रय मूल्य का 10 %

= ₹ 120 का 10 %

$= \dfrac{10}{100} \times 120 =$ ₹ 12

© NCERT not to be republished

जब क्र.मू. = ₹ 100, तब विक्रय मूल्य
= ₹ 90
अत: जब क्र.मू. = ₹ 120 है, तब
विक्रय मूल्य = $\frac{90}{100} \times 120$ = ₹ 108

अत:
विक्रय मूल्य = क्रय मूल्य – हानि
= ₹ 120 – ₹ 12 = ₹ 108

दोनों ही विधियों से विक्रय मूल्य ₹ 108 प्राप्त होता है।

उदाहरण 19 एक खिलौना कार का विक्रय मूल्य ₹ 540 था। एक दुकानदार ने उसे 20% लाभ पर बेचा। खिलौने का क्रय मूल्य क्या था?

हल हमें पता है कि विक्रय मूल्य = ₹ 540 तथा लाभ = 20%, हमें ज्ञात करना है क्रय मूल्य

अमीना ने इस प्रकार हल किया :
20% लाभ का अर्थ है कि यदि क्रय मूल्य ₹ 100 हो तो लाभ ₹ 20 तथा विक्रय मूल्य 100 + 20 = ₹ 120 होगा।
अर्थात् ₹ 120 विक्रय मूल्य होने पर क्रय मूल्य = ₹ 100
अत: ₹ 540 विक्रय मूल्य होने पर क्रय मूल्य = $\frac{100}{120} \times$ ₹ 540 = ₹ 450

अरुण ने प्रश्न इस प्रकार हल किया:
लाभ = क्रय मूल्य का 20% तथा विक्रय मूल्य = क्रय मूल्य + लाभ
अत: 540 = क्रय मूल्य + क्रय मूल्य का 20%
या 540 = क्रय मूल्य + $\frac{20}{100}$ × क्रय मूल्य = $\left[1+\frac{1}{5}\right]$ क्रय मूल्य
= $\frac{6}{5}$ क्रय मूल्य   इसलिए, $540 \times \frac{5}{6}$ = क्रय मूल्य
या ₹ 450 = क्रय मूल्य।

इस प्रकार दोनों विधियों से क्रय मूल्य ₹ 450 है।

प्रयास कीजिए

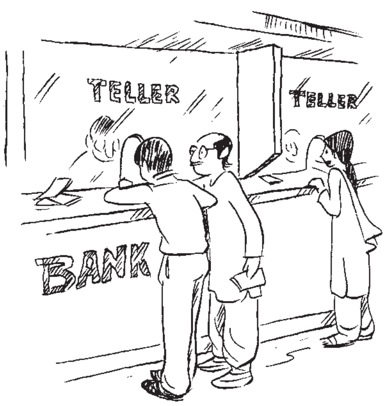
1. एक दुकानदार ने एक कुर्सी 375 में खरीदी तथा ₹ 400 में बेच दी। उसका लाभ प्रतिशत ज्ञात कीजिए।
2. एक वस्तु ₹ 50 में क्रय की गई तथा 12 प्रतिशत लाभ पर बेच दी गई। उसका विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।
3. एक वस्तु ₹ 250 में बेचने पर 5 प्रतिशत लाभ प्राप्त हुआ। उसका क्रय मूल्य क्या था?
4. एक वस्तु 5 प्रतिशत हानि उठा कर ₹ 540 में बेची गई। उसका क्रय मूल्य क्या था?

© NCERT not to be republished

8.6 उधार लिए गए धन पर शुल्क अर्थात् साधारण ब्याज

सोहनी ने बताया कि वे एक नया स्कूटर खरीदने जा रहे हैं। मोहन ने पूछा कि क्या उनके पास इसके लिए पर्याप्त धन है? सोहनी ने उत्तर दिया कि उसके पिताजी इसके लिए बैंक से उधार धन (ऋण) लेंगे। उधार लिए गए धन को **मूलधन** कहते है।

यह धन, वापस करने से पहले, ऋण प्राप्त करने वाले व्यक्ति द्वारा कुछ समय तक इसका उपयोग किया जाता है; अत: उसे उतने समय का, धन उपयोग में लाने के बदले, कुछ अतिरिक्त धन बैंक को देना होता है। यह अतिरिक्त धन **ब्याज** कहलाता है।



एक निश्चित अवधि के बाद आपको मूलधन तथा ब्याज, दोनों को मिलाकर पूरा धन वापस करना होता है जिसे **मिश्रधन** कहते हैं।

अर्थात्, **मिश्रधन** = **मूलधन** + **ब्याज**

ब्याज एक निश्चित दर पर परिकलित किया जाता है जो प्राय: प्रत्येक ₹ 100 के लिए एक वर्ष के लिए निर्धारित होता है।

इसे इस प्रकार लिखा जा सकता है, 10 प्रतिशत प्रति वर्ष या 10 प्रतिशत वार्षिक।

10 प्रतिशत वार्षिक का अर्थ है कि उधार लिए गए प्रत्येक ₹ 100 के लिए, प्रत्येक वर्ष के बाद ₹ 10 ब्याज के रूप में अतिरिक्त देने होंगे।

एक उदाहरण लेकर देखें कि ब्याज कैसे परिकलित किया जाता है।

उदाहरण 20 अनीता ₹ 5000 का एक ऋण 15 प्रतिशत वार्षिक की दर से ब्याज पर लेती है। ज्ञात कीजिए कि एक वर्ष के बाद उसे कुल कितना धन वापस करना होगा।

हल उधार ली गई राशि = ₹ 5000

ब्याज की दर = 15 प्रतिशत प्रति वर्ष

इसका अर्थ है कि यदि वह ₹ 100 उधार लेती है तब उसे एक वर्ष बाद ₹ 15 ब्याज के रूप में भी देने होंगे।

अत: ₹ 5000 के उधार पर उसे 1 वर्ष बाद देने होंगे : $\frac{15}{100} \times$ ₹ 5000 = ₹ 750

अर्थात् एक वर्ष बाद उसे ब्याज मिलाकर मिश्रधन देना होगा ₹ 5000 + ₹ 750 = ₹ 5750

एक वर्ष का ब्याज ज्ञात करने के लिए हम एक संबंध या सूत्र भी प्राप्त कर सकते हैं।

हम मूलधन को P से तथा दर $R\,\%$ वार्षिक को R से प्रदर्शित करते हैं।

तो हमें प्रत्येक ₹ 100 के लिए एक वर्ष का ₹ R ब्याज देना होगा।

अत: ₹ P उधार लेने पर एक वर्ष का ब्याज I होगा।

$$I = \frac{R \times P}{100} = \frac{P \times R}{100}$$

© NCERT not to be republished

8.6.1 अनेक वर्षों के लिए ब्याज

अगर धन एक वर्ष से अधिक समय के लिए उधार लिया जाता है तब ब्याज भी उस पूरे समय के लिए परिकलित किया जाता है जितने समय के लिए धन रखा गया है। उदाहरण के लिए यदि अनीता वही धन उसी दर पर दो वर्ष बाद वापस करती तब उसे ब्याज भी दुगना देना पड़ता; अर्थात् ₹ 750 पहले वर्ष के लिए तथा ₹ 750 दूसरे वर्ष के लिए। मूलधन वही रहता है, बदलता नहीं और ब्याज भी प्रत्येक वर्ष के लिए समान ही रहता है। इस प्रकार के ब्याज को **साधारण ब्याज** कहते हैं। जिस प्रकार वर्षों की संख्या बढ़ती जाती है उसी प्रकार ब्याज की राशि भी। 3 वर्ष के लिए ₹100, 18% वार्षिक दर से उधार लेने पर 3 वर्षों बाद ब्याज देना होगा, $18 + 18 + 18 = 3 \times 18 =$ ₹ 54

हम एक वर्ष से अधिक समय के लिए भी साधारण ब्याज ज्ञात करने के लिए सूत्र प्राप्त कर सकते हैं।

हम देख चुके हैं कि ₹ P के लिए R % वार्षिक की दर से 1 वर्ष बाद ब्याज देना होता है $\frac{R \times P}{100}$। अत: T वर्षों के लिए दिया गया ब्याज (I) होगा:

$$I = \frac{T \times R \times P}{100} = \frac{P \times R \times T}{100} \text{ या } \frac{PRT}{100}$$

और T वर्षों बाद मिश्रधन A होगा : $A = P + I$

© NCERT not to be republished

प्रयास कीजिए

1. ₹ 10,000, 5 प्रतिशत वार्षिक दर से जमा किए जाते हैं। एक वर्ष बाद कितना ब्याज प्राप्त होगा ?
2. ₹ 3500, 7 प्रतिशत वार्षिक दर से उधार दिए जाते हैं। दो वर्ष बाद कितना साधारण ब्याज देय होगा ?
3. ₹ 6050, 6.5 प्रतिशत वार्षिक दर से उधार लिए जाते हैं। 3 वर्ष बाद कितना ब्याज तथा कितना मिश्रधन देय होगा ?
4. ₹ 7000, 3.5 प्रतिशत वार्षिक दर से दो वर्ष के लिए उधार लिए जाते हैं। दो वर्ष बाद कितना मिश्रधन देय होगा ?

जैसा आपने क्रय-विक्रय मूल्यों की समस्याओं में देखा था उसी प्रकार सूत्र

$I = \frac{P \times T \times R}{100}$ द्वारा, चार राशियों में से कोई भी तीन ज्ञात होने पर चौथी ज्ञात की जा सकती है।

उदाहरण 21 ₹ 4500 के ऋण पर 2 वर्ष बाद, मनोहर ₹ 750 साधारण ब्याज देता है। ब्याज की दर प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

हल 1

$$I = \frac{P \times T \times R}{100}$$

अत: $750 = \frac{4500 \times 2 \times R}{100}$

या $\frac{750}{45 \times 2} = R$

अत: ब्याज की दर

$= 8\frac{1}{3}\%$ वार्षिक

हल 2

2 वर्ष का ब्याज है = ₹ 750

अत: 1वर्ष का ब्याज होगा = $\frac{750}{2}$ = ₹ 375

अब ₹ 4500 पर ब्याज = ₹ 375

अत: ₹ 100 पर ब्याज

$= \frac{375 \times 100}{4500} = 8\frac{1}{3}\%$

अत: ब्याज की दर = $8\frac{1}{3}\%$ वार्षिक

© NCERT not to be republished

प्रयास कीजिए

1. आपके बैंक खाते में ₹ 2400 जमा हैं तथा ब्याज की दर 5 प्रतिशत वार्षिक है। कितने वर्षों बाद ब्याज की राशि ₹ 240 होगी ?
2. किसी धन का 5 प्रतिशत वार्षिक दर से 3 वर्ष का ब्याज ₹ 450 होता है। वह धन ज्ञात कीजिए।

प्रश्नवली 8.3

1. क्रय-विक्रय के निम्न सौदों में हानि या लाभ ज्ञात कीजिए। प्रत्येक दशा में प्रतिशत हानि या प्रतिशत लाभ भी ज्ञात कीजिए।
   (a) बग़ीचे में काम आने वाली कैंची ₹ 250 में खरीदी गई तथा ₹ 325 में बेची गई।
   (b) एक रेफ्रीज़रेटर ₹12000 में खरीदा गया और ₹13500 में बेचा गया।
   (c) एक अलमारी ₹2500 में खरीदी गई और ₹3000 में बेची गई।
   (d) एक स्कर्ट ₹250 में खरीद कर ₹150 में बेची गई।
2. दिए गए प्रत्येक अनुपात के दोनों पदों को प्रतिशत में बदलिए।
   (a) 3:1 (b) 2 : 3 : 5 (c) 1:4 (d) 1 : 2 : 5

3. एक नगर की जनसंख्या 25000 से घटकर 24500 रह गई। घटने का प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

4. अरुण ने एक कार ₹ 3,50,000 में खरीदी। अगले वर्ष उसका मूल्य बढ़कर ₹ 3,70,000 हो गया। कार के मूल्य की प्रतिशत वृद्धि ज्ञात कीजिए।

5. मैने एक टी.वी. ₹ 10,000 में खरीद कर 20 प्रतिशत लाभ पर बेच दिया। मुझे बेचने पर कितना धन प्राप्त हुआ ?

6. जूही एक वाशिंग मशीन ₹ 13,500 में बेचने पर 20 प्रतिशत की हानि उठाती है। उसने वह मशीन कितने में खरीदी थी ?

7. (i) चाक-पाउडर में कैल्शियम, कार्बन तथा ऑक्सीजन का अनुपात 10:3:12 होता है। इसमे कार्बन की प्रतिशत मात्रा ज्ञात कीजिए।

(ii) चाक की एक छड़ी में यदि कार्बन की मात्रा 3 gm है तब उसका कुल भार कितना होगा ?

8. अमीना एक पुस्तक ₹ 275 में खरीद कर उसे 15 प्रतिशत हानि पर बेचती है। पुस्तक का विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

9. प्रत्येक दशा में 3 वर्ष बाद कितना मिश्रधन देय होगा ?

(a) मूलधन = ₹ 1200 दर 12% वार्षिक (b) मूलधन = ₹ 7500 दर 5% वार्षिक

10. ₹ 56000 पर, 2 वर्ष पश्चात किस दर से ₹ 280 साधारण ब्याज देय होगा ?

11. मीना ने 9 प्रतिशत वार्षिक दर से, 1 वर्ष पश्चात् ₹ 45 ब्याज के रूप में दिए। उसने कितना धन उधार लिया था ?

हमने क्या चर्चा की ?

1. अपने दैनिक जीवन में हमें प्राय: दो राशियों के बीच तुलना करनी पड़ती है। ये राशियाँ ऊँचाई, भार, वेतन, प्राप्तांक आदि हो सकती हैं

2. 150 cm तथा 75 cm ऊँचाई वाले दो व्यक्तियों की तुलना करने पर हम इसे अनुपात रूप में 150:75 या 2:1 लिखते हैं।

3. दो अनुपातों की तुलना, उन्हें समान हर वाली भिन्नों में बदल कर की जा सकती है। यदि दोनों समान हर वाली भिन्ने समान हैं तब हम कहते हैं कि दोनों अनुपात भी तुल्य अनुपात हैं।

4. यदि दो अनुपात तुल्य हैं तब उनके चारों पद एक समानुपात बनाते हैं। उदाहरण के लिए दो अनुपात 8:2 तथा 16:4 तुल्य हैं; अत: 8, 2, 16 तथा 4 समानुपात में हैं।

5. तुलना करने की एक विधि प्रतिशत भी है। भिन्न, जिनके हर 100 होते हैं, उनके अंश, प्रतिशत प्रकट करते हैं। प्रतिशत का अर्थ होता है प्रत्येक सौ पर।

© NCERT not to be republished

6. भिन्नों को प्रतिशत में बदला जा सकता है तथा प्रतिशत को भिन्नों में।

उदाहरण के लिए $\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times 100\,\% = 25\%$ तथा, $75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$

7. दशमलव भिन्न को भी प्रतिशत में बदला जा सकता है तथा प्रतिशत को दशमलव में।

उदाहरण के लिए, $0.25 = 0.25 \times 100\% = 25\%$

8. प्रतिशत के हमारे दैनिक जीवन में व्यापक उपयोग हैं:

(a) जब हमें किसी राशि का प्रतिशत ज्ञात हो तब हम वह संपूर्ण राशि ज्ञात कर सकते हैं।

(b) यदि हमें किसी राशि के भागों में अनुपात दिया हो तब हम उन्हें प्रतिशत में भी बदल सकते हैं।

(c) किसी राशि का घटना या बढ़ना भी प्रतिशत में दर्शाया जा सकता है।

(d) किसी वस्तु के क्रय-विक्रय में हुए लाभ या हानि को भी प्रतिशत में दर्शाया जा सकता है।

(e) उधार लिए गए धन पर ब्याज परिकलन के लिए उसकी दर प्रतिशत में ही दी जाती है। उदाहरण के लिए ₹ 800, 3 वर्ष के लिए 12 प्रतिशत ब्याज की दर पर उधार लिया गया।

© NCERT not to be republished

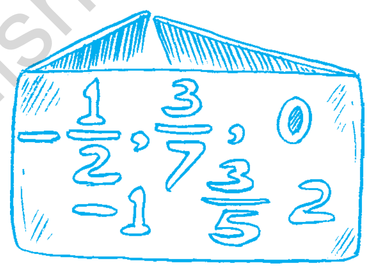
अध्याय 9

परिमेय संख्याएँ

0757CH09

© NCERT not to be republished

9.1 भूमिका



आपने संख्याओं का अध्ययन अपने परिवेश की वस्तुओं के गिनने से प्रारंभ किया। इस कार्य में प्रयोग की गई संख्याओं को गणन संख्याएँ (counting numbers) या प्राकृत संख्याएँ (natural numbers) कहा गया था। ये हैं 1, 2, 3, 4, ...। प्राकृत संख्याओं में 0 को सम्मिलित करने पर हमें पूर्ण संख्याएँ (whole numbers), अर्थात् 0, 1, 2, 3, ... प्राप्त हुईं। इसके बाद, पूर्णांक (integers) प्राप्त करने के लिए, पूर्ण संख्याओं में प्राकृत संख्याओं के ऋणात्मकों (negatives) को सम्मिलित किया गया। ... –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3 ... पूर्णांक हैं। इस प्रकार, हमने संख्या पद्धति (number system) को प्राकृत संख्याओं से पूर्ण संख्याओं तक और पूर्ण संख्याओं से पूर्णांकों तक विस्तृत किया।

आपका भिन्नों (fractions) से भी परिचय कराया गया था। ये $\frac{\text{अंश}}{\text{हर}}\left(\frac{\text{numerator}}{\text{denominator}}\right)$, के प्रकार की संख्याएँ होती हैं, जहाँ अंश या तो 0 या एक धनात्मक पूर्णांक होता है तथा हर, एक धनात्मक पूर्णांक होता है। आपने दो भिन्नों की तुलना की, उनके समतुल्य (equivalent) रूप (भिन्नें) ज्ञात किए तथा उन पर सभी चारों आधारभूत संक्रियाओं योग, व्यवकलन (घटाना), गुणन और विभाजन का अध्ययन किया।

इस अध्याय में, हम संख्या पद्धति का और आगे विस्तार करेंगे। हम परिमेय संख्याओं (rational numbers) की अवधारणा का परिचय देकर उन पर योग, व्यवकलन, गुणन और विभाजन (भाग) की संक्रियाएँ करना सीखेंगे।

9.2 परिमेय संख्याओं की आवश्यकता

पहले हम देख चुके हैं कि किस प्रकार संख्याओं से संबद्ध विपरीत (opposite) स्थितियों को व्यक्त करने के लिए पूर्णांकों का प्रयोग किया जा सकता है। उदाहरणार्थ, यदि एक स्थान के दाईं ओर 3 km दूरी को 3 से व्यक्त किया जाए, तो उसी स्थान से बाईं ओर की 5 km दूरी को –5

से व्यक्त किया जा सकता है। यदि 150 रु के लाभ को 150 से व्यक्त किया जाए, तो 100 रु की हानि को –100 से व्यक्त किया जा सकता है।

इसी प्रकार की अनेक स्थितियाँ होती हैं, जिनमें भिन्नात्मक संख्याएँ (भिन्न) संबद्ध होती हैं। हम समुद्र तल से ऊपर 750 m की ऊँचाई को $\frac{3}{4}$ km से व्यक्त कर सकते हैं। क्या हम समुद्र तल से नीचे 750 m की गहराई को km में व्यक्त कर सकते हैं? क्या हम समुद्र तल से नीचे $\frac{3}{4}$ km की गहराई को $\frac{-3}{4}$ से व्यक्त कर सकते हैं? हम देख सकते हैं कि $\frac{-3}{4}$ न तो एक पूर्णांक है और न ही एक भिन्न। ऐसी संख्याओं को सम्मिलित करने के लिए, हमें संख्या पद्धति को विस्तृत करने की आवश्यकता है।

9.3 परिमेय संख्याएँ क्या हैं ?

शब्द 'परिमेय' (rational) की उत्पत्ति, पद 'अनुपात' (ratio) से हुई है। आप जानते हैं कि अनुपात 3 : 2 को $\frac{3}{2}$ भी लिखा जा सकता है। यहाँ 3 और 2 प्राकृत संख्याएँ हैं।

इसी प्रकार, दो पूर्णांकों p और q $(q \neq 0)$ के अनुपात $p:q$ को $\frac{p}{q}$ लिखा जा सकता है। यही वह रूप है जिसमें परिमेय संख्याएँ व्यक्त की जाती हैं।

एक परिमेय संख्या को ऐसी संख्या के रूप में परिभाषित किया जाता है, जिसे $\frac{p}{q}$, के रूप में व्यक्त किया जा सके, जहाँ p और q पूर्णांक हैं तथा $q \neq 0$ है।

इस प्रकार, $\frac{4}{5}$ एक परिमेय संख्या है। यहाँ $p = 4$ है और $q = 5$ है।

क्या $\frac{-3}{4}$ भी एक परिमेय संख्या है? हाँ, क्योंकि $p = -3$ और $q = 4$ पूर्णांक हैं।

- आपने $\frac{3}{8}, \frac{4}{8}, 1\frac{2}{3}$, इत्यादि जैसी अनेक भिन्न देखी हैं। सभी भिन्न परिमेय संख्याएँ होती हैं। क्या आप इसका कारण बता सकते हैं? दशमलव संख्याओं 0.5, 2.3, 0.333 इत्यादि के बारे में क्या कहा जा सकता है? इस प्रकार की प्रत्येक संख्या को एक सामान्य भिन्न के रूप में लिखा जा सकता है और इसीलिए ये परिमेय संख्याएँ हैं। उदाहरणार्थ, $0.5 = \frac{5}{10}$, $2.3 = \frac{23}{10}$, $0.333 = \frac{333}{1000}$ इत्यादि।

© NCERT not to be republished

प्रयास कीजिए

1. क्या संख्या $\frac{2}{-3}$ परिमेय संख्या है? इसके बारे में सोचिए।

2. दस परिमेय संख्याओं की एक सूची बनाइए।

अंश और हर

$\frac{p}{q}$ में, पूर्णांक p अंश है तथा पूर्णांक $q\ (\neq 0)$ हर है।

इस प्रकार, $\frac{-3}{7}$ में, -3 अंश है और 7 हर है।

ऐसी पाँच परिमेय संख्याएँ लिखिए, जिनमें से प्रत्येक का

(a) अंश एक ऋणात्मक पूर्णांक हो और हर एक धनात्मक पूर्णांक हो।

(b) अंश एक धनात्मक पूर्णांक हो और हर एक ऋणात्मक पूर्णांक हो।

(c) अंश और हर दोनों ऋणात्मक पूर्णांक हों।

(d) अंश और हर दोनों धनात्मक पूर्णांक हों।

- क्या पूर्णांक भी परिमेय संख्याएँ हैं?

किसी भी पूर्णांक को एक परिमेय संख्या माना जा सकता है। उदाहरणार्थ, पूर्णांक –5 एक परिमेय संख्या है, क्योंकि आप इसे $\frac{-5}{1}$ के रूप में लिख सकते हैं। पूर्णांक 0 को भी $0 = \frac{0}{2}$ या $\frac{0}{7}$ इत्यादि के रूप में लिखा जा सकता है। अतः यह भी एक परिमेय संख्या है।

इस प्रकार, परिमेय संख्याओं में पूर्णांक और भिन्न सम्मिलित होते हैं।

समतुल्य परिमेय संख्याएँ

एक परिमेय संख्या को अलग-अलग अंशों और हरों का प्रयोग करते हुए लिखा जा सकता है।

उदाहरणार्थ, परिमेय संख्या $\frac{-2}{3}$ पर विचार कीजिए।

$\frac{-2}{3} = \frac{-2\times 2}{3\times 2} = \frac{-4}{6}$। हम देखते हैं कि $\frac{-2}{3}$ वही है जो $\frac{-4}{6}$ है।

साथ ही, $\frac{-2}{3} = \frac{(-2)\times(-5)}{3\times(-5)} = \frac{10}{-15}$ है। अतः, $\frac{-2}{3}$ वही है जो $\frac{10}{-15}$ है।

इस प्रकार, $\frac{-2}{3} = \frac{-4}{6} = \frac{10}{-15}$ है। ऐसी परिमेय संख्याएँ जो परस्पर बराबर हों एक दूसरे के **समतुल्य (equivalent)** या **तुल्य** कही जाती हैं।

© NCERT not to be republished

पुनः, $\frac{10}{-15} = \frac{-10}{15}$ (कैसे?)

प्रयास कीजिए

रिक्त स्थानों को भरिए :

(i) $\frac{5}{4} = \frac{\square}{16} = \frac{25}{\square} = \frac{-15}{\square}$

(ii) $\frac{-3}{7} = \frac{\square}{14} = \frac{9}{\square} = \frac{-6}{\square}$

एक परिमेय संख्या के अंश और हर को एक ही शून्येतर (non-zero) पूर्णांक से गुणा करने पर, हमें दी हुई परिमेय संख्या के समतुल्य (या तुल्य) एक अन्य परिमेय संख्या प्राप्त होती है। यह ठीक समतुल्य भिन्न प्राप्त करने जैसा ही है।

गुणा की तरह, एक ही शून्येतर पूर्णांक से अंश और हर को भाग देने पर भी समतुल्य परिमेय संख्याएँ प्राप्त होती हैं। उदाहरणार्थ,

$$\frac{10}{-15} = \frac{10 \div (-5)}{-15 \div (-5)} = \frac{-2}{3} \quad , \quad \frac{-12}{24} = \frac{-12 \div 12}{24 \div 12} = \frac{-1}{2}$$

हम $\frac{-2}{3}$ को $-\frac{2}{3}$, $\frac{-10}{15}$ को $-\frac{10}{15}$ इत्यादि, लिखते हैं।

9.4 धनात्मक और ऋणात्मक परिमेय संख्याएँ

परिमेय संख्या $\frac{2}{3}$ पर विचार कीजिए। इस संख्या के अंश और हर दोनों ही धनात्मक पूर्णांक हैं। ऐसी परिमेय संख्या को एक **धनात्मक परिमेय संख्या** कहते हैं। अतः, $\frac{3}{8}, \frac{5}{7}, \frac{2}{9}$ इत्यादि धनात्मक परिमेय संख्याएँ हैं।

प्रयास कीजिए

1. क्या 5 एक धनात्मक परिमेय संख्या है?
2. पाँच और धनात्मक परिमेय संख्याएँ लिखिए।

$\frac{-3}{5}$ का अंश एक ऋणात्मक पूर्णांक है, जबकि इसका हर एक धनात्मक पूर्णांक है। ऐसी परिमेय संख्या को **ऋणात्मक परिमेय संख्या** कहते हैं। अतः $\frac{-5}{7}, \frac{-3}{8}, \frac{-9}{5}$ इत्यादि ऋणात्मक परिमेय संख्याएँ हैं।

प्रयास कीजिए

1. क्या –8 एक ऋणात्मक परिमेय संख्या है।
2. पाँच और ऋणात्मक परिमेय संख्याएँ लिखिए।

- क्या $\frac{8}{-3}$ एक ऋणात्मक संख्या है? हम जानते हैं कि $\frac{8}{-3} = \frac{8 \times (-1)}{-3 \times (-1)} = \frac{-8}{3}$ है, तथा $\frac{-8}{3}$ एक ऋणात्मक परिमेय संख्या है। अतः, $\frac{8}{-3}$ एक ऋणात्मक परिमेय संख्या है।

  इसी प्रकार, $\frac{5}{-7}, \frac{6}{-5}, \frac{2}{-9}$ इत्यादि सभी ऋणात्मक परिमेय संख्याएँ हैं। ध्यान दीजिए कि इनके अंश धनात्मक हैं तथा हर ऋणात्मक हैं।
- संख्या 0 न तो एक धनात्मक परिमेय संख्या है और न ही एक ऋणात्मक परिमेय संख्या।
- $\frac{-3}{-5}$ के बारे में क्या कहा जा सकता है?

© NCERT not to be republished

आप देखेंगे कि $\frac{-3}{-5} = \frac{-3 \times (-1)}{-5 \times (-1)} = \frac{3}{5}$ है। अत:, $\frac{-3}{-5}$ एक धनात्मक परिमेय संख्या है। इस प्रकार, $\frac{-2}{-5}, \frac{-5}{-3}$, इत्यादि धनात्मक परिमेय संख्याएँ हैं।

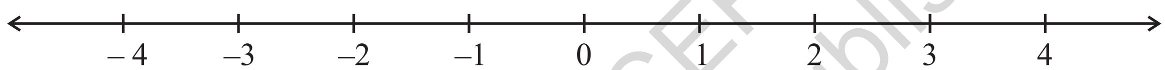
प्रयास कीजिए

निम्नलिखित में से कौन-सी संख्याएँ ऋणात्मक परिमेय संख्याएँ हैं?

(i) $\frac{-2}{3}$ (ii) $\frac{5}{7}$ (iii) $\frac{3}{-5}$ (iv) 0 (v) $\frac{6}{11}$ (vi) $\frac{-2}{-9}$

9.5 एक संख्या रेखा पर परिमेय संख्याएँ

आप यह जानते हैं कि एक संख्या रेखा पर पूर्णांकों को किस प्रकार निरूपित किया जाता है। आइए ऐसी ही एक संख्या रेखा खींचें।



0 के दाईं ओर के बिंदुओं को + चिह्न से व्यक्त करते हैं और ये धनात्मक पूर्णांक दर्शाते हैं। 0 से बाईं ओर के बिंदुओं को – चिह्न से व्यक्त करते हैं और ये ऋणात्मक पूर्णांक दर्शाते हैं। संख्या रेखा पर भिन्नों के निरूपण से भी आप परिचित हैं।

आइए अब देखें कि परिमेय संख्याएँ संख्या रेखा पर किस प्रकार निरूपित की जा सकती हैं?

आइए संख्या रेखा पर संख्या $-\frac{1}{2}$ को निरूपित करें।

जैसा कि धनात्मक पूर्णांकों की स्थिति में किया गया था, धनात्मक परिमेय संख्याओं को 0 के दाईं ओर अंकित किया जाएगा तथा ऋणात्मक परिमेय संख्याओं को 0 के बाईं ओर अंकित किया जाएगा।

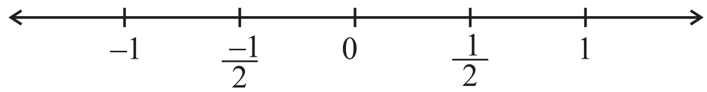
0 के किस ओर आप $-\frac{1}{2}$ को अंकित करेंगे? ऋणात्मक परिमेय संख्या होने के कारण इसे 0 के बाईं ओर अंकित किया जाएगा।

आप जानते हैं कि संख्या रेखा पर पूर्णांकों को अंकित करते समय, उत्तरोत्तर पूर्णांकों को समान अंतरालों पर अंकित किया जाता है। साथ ही, संख्याओं 1 और –1 का युग्म संख्या 0 से समदूरस्थ हैं। इसी प्रकार, 2 और –2 तथा 3 और –3 भी समदूरस्थ हैं।

इसी प्रकार, परिमेय संख्याएँ $\frac{1}{2}$ और $-\frac{1}{2}$ भी 0 से समदूरस्थ होंगी। हम जानते हैं कि परिमेय संख्या $\frac{1}{2}$ को किस प्रकार संख्या रेखा पर अंकित किया जाता है। यह उस बिंदु पर अंकित किया

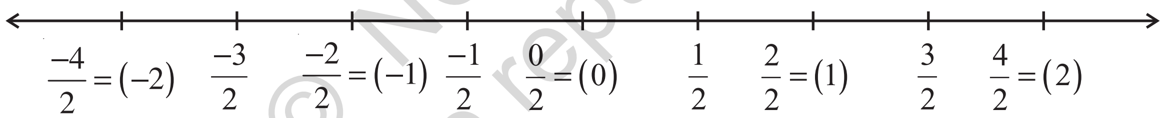
© NCERT not to be republished

जाता है, जो 0 और 1 से बराबर दूरी (ठीक बीच में) पर है। अर्थात् 0 और 1 की आधी दूरी पर है। इसलिए, $-\frac{1}{2}$ को 0 और –1 की आधी दूरी पर अंकित किया जाएगा।



हम जानते हैं कि $\frac{3}{2}$ को संख्या रेखा पर किस प्रकार अंकित किया जाता है। इसे 0 के दाईं ओर 1 और 2 के बीच में आधी दूरी पर अंकित किया जाता है। आइए अब संख्या रेखा पर $\frac{-3}{2}$ को अंकित करें। यह 0 के बाईं ओर उतनी ही दूरी पर अंकित होगा जितनी दूरी 0 और $\frac{3}{2}$ के बीच है।

घटते हुए क्रम में $\frac{-1}{2}, \frac{-2}{2} (= -1), \frac{-3}{2}, \frac{-4}{2} (= -2)$, इत्यादि प्राप्त हैं। इससे यह प्रदर्शित होता है कि $\frac{-3}{2}$ संख्याओं – 1 और – 2 के बीच में आधी दूरी पर स्थित (या अंकित) होगा।



इसी प्रकार, $\frac{-5}{2}$ और $\frac{-7}{2}$ को संख्या रेखा पर अंकित कीजिए।

इसी प्रकार, $-\frac{1}{3}$ संख्या रेखा पर 0 के बाईं ओर शून्य से उतनी ही दूरी पर होगी जितनी कि $\frac{1}{3}$ शून्य से दाईं ओर है।

अतः जैसा कि ऊपर किया गया है, $-\frac{1}{3}$ को संख्या रेखा पर निरूपित किया जा सकता है। एक बार, हमें $-\frac{1}{3}$ को संख्या रेखा पर निरूपित करना आ जाए तो, हम $-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}, \ldots$ इत्यादि को संख्या रेखा पर निरूपित कर सकते हैं। विभिन्न हरों वाली अन्य परिमेय संख्याओं को भी इसी प्रकार संख्या रेखा पर निरूपित किया जा सकता है।

9.6 मानक रूप में परिमेय संख्याएँ

निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को देखिए :

$$\frac{3}{5}, \frac{-5}{8}, \frac{2}{7}, \frac{-7}{11}$$

© NCERT not to be republished

इन सभी परिमेय संख्याओं के हर धनात्मक पूर्णांक हैं तथा अंश और हरों के बीच में केवल 1 सार्व गुणनखंड (common factor) है। साथ ही, ऋणात्मक चिह्न (–) केवल अंश में ही स्थित है।

ऐसी परिमेय संख्याओं को **मानक रूप (standard form)** में व्यक्त की गई परिमेय संख्याएँ कहा जाता है।

एक परिमेय संख्या मानक रूप में व्यक्त की हुई कही जाती है, यदि उसका हर धनात्मक पूर्णांक हो तथा उसके अंश और हर में 1 के अतिरिक्त कोई सार्व गुणनखंड न हो।

यदि कोई परिमेय संख्या मानक रूप में नहीं है, तो उसे उसके मानक रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

स्मरण कीजिए कि भिन्नों को उनके न्यूनतम रूपों में व्यक्त करने के लिए, हमने उनके अंशों और हरों को एक ही शून्येतर पूर्णांक से भाग दिया था। हम इसी विधि का प्रयोग परिमेय संख्याओं को उनके मानक रूपों में व्यक्त करने में करेंगे।

उदाहरण 1 $\frac{-45}{30}$ को मानक रूप में व्यक्त कीजिए।

हल हमें प्राप्त है : $\frac{-45}{30} = \frac{-45 \div 3}{30 \div 3} = \frac{-15}{10} = \frac{-15 \div 5}{10 \div 5} = \frac{-3}{2}$

हमें दो बार भाग देना पड़ा। पहली बार 3 से और फिर 5 से। इसे निम्नलिखित प्रकार से भी किया जा सकता था :

$$\frac{-45}{30} = \frac{-45 \div 15}{30 \div 15} = \frac{-3}{2}$$

इस उदाहरण में देखिए कि 15, संख्याओं 45 और 30 का म.स. है।

*इस प्रकार, एक परिमेय संख्या को मानक रूप में व्यक्त करने के लिए, हम उसके अंश और हर को उनके **म.स.** से, ऋण चिह्न पर बिना कोई ध्यान दिए (यदि कोई हो), भाग देते हैं।* (ऋण चिह्न पर ध्यान ना देने का कारण हम अगली कक्षाओं में पढ़ेंगे)

यदि हर में ऋणात्मक चिह्न है, तो **'–म.स.'** से भाग दीजिए।

उदाहरण 2 मानक रूप में बदलिए :

(i) $\frac{36}{-24}$ (ii) $\frac{-3}{-15}$

हल

(i) 36 और 24 का म.स. 12 है।

अत:, मानक रूप अंश और हर को –12 से भाग देने पर प्राप्त होगा।

इस प्रकार, $\frac{36}{-24} = \frac{36 \div (-12)}{-24 \div (-12)} = \frac{-3}{2}$

(ii) 3 और 15 का म.स. 3 है।

इस प्रकार, $\frac{-3}{-15} = \frac{-3 \div (-3)}{-15 \div (-3)} = \frac{1}{5}$

© NCERT not to be republished

प्रयास कीजिए

मानक रूप ज्ञात कीजिए (i) $\frac{-18}{45}$ (ii) $\frac{-12}{18}$

9.7 परिमेय संख्याओं की तुलना

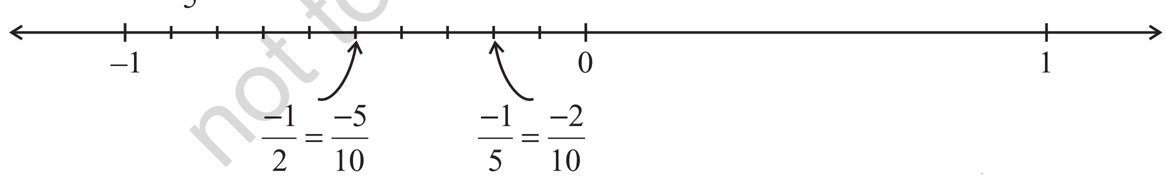
हम यह जानते हैं कि दो पूर्णांकों या दो भिन्नों की तुलना किस प्रकार की जाती है तथा यह भी कि इनमें कौन बड़ा है और कौन छोटा। आइए अब देखें कि दो परिमेय संख्याओं की तुलना किस प्रकार की जा सकती है।

- $\frac{2}{3}$ और $\frac{5}{7}$ जैसी दो धनात्मक परिमेय संख्याओं की तुलना ठीक उसी प्रकार की जा सकती है, जैसा कि हम भिन्नों की स्थिति के लिए पहले पढ़ चुके हैं।

- मेरी ने दो ऋणात्मक परिमेय संख्याओं $-\frac{1}{2}$ और $-\frac{1}{5}$ की तुलना संख्या रेखा का प्रयोग करते हुए की। उसे ज्ञात था कि दो पूर्णांकों में वह पूर्णांक बड़ा था जो दूसरे पूर्णांक के दाईं ओर स्थित था।

  उदाहरणार्थ, संख्या रेखा पर पूर्णांक 5 पूर्णांक 2 के दाईं ओर स्थित है तथा $5 > 2$ है। संख्या रेखा पर पूर्णांक -2 पूर्णांक -5 के दाईं ओर स्थित है तथा $-2 > -5$ है।

  उसने इस विधि का प्रयोग परिमेय संख्याओं के लिए भी किया। उसे पता था कि संख्या रेखा पर परिमेय संख्याओं को किस प्रकार अंकित (निरूपित) किया जाता है। उसने $-\frac{1}{2}$ और $-\frac{1}{5}$ को नीचे दर्शाए अनुसार अंकित किया:



क्या उसने दोनों बिंदु सही प्रकार से अंकित किए हैं? उसने कैसे और क्यों $-\frac{1}{2}$ को $-\frac{5}{10}$ तथा $-\frac{1}{5}$ को $-\frac{2}{10}$ में बदला? उसे ज्ञात हुआ कि परिमेय संख्या $-\frac{1}{5}$ परिमेय संख्या $-\frac{1}{2}$ के दाईं ओर स्थित है। इस प्रकार, $-\frac{1}{5} > -\frac{1}{2}$ है या $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{5}$ है।

क्या आप $-\frac{3}{4}$ और $-\frac{2}{3}$ की तथा $-\frac{1}{3}$ और $-\frac{1}{5}$ की तुलना कर सकते हैं?

हम भिन्नों के अपने अध्ययन से यह जानते हैं कि $\frac{1}{5} < \frac{1}{2}$ है। साथ ही, मेरी ने $-\frac{1}{2}$ और $-\frac{1}{5}$ के लिए क्या प्राप्त किया? क्या यह इसका ठीक विपरीत नहीं था।

© NCERT not to be republished

आप देखते हैं कि $\frac{1}{2} > \frac{1}{5}$ है, परंतु $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{5}$ है।

क्या आप $-\frac{3}{4}$ और $-\frac{2}{3}$ तथा $-\frac{1}{2}$ और $-\frac{1}{5}$ के लिए भी इसी प्रकार का परिणाम देखते हैं?

मेरी को याद आता है कि उसने पूर्णांकों में पढ़ा था कि $4 > 3$ है, परंतु $-4 < -3$ है; $5 > 2$ है, परंतु $-5 < -2$ इत्यादि।

- ऋणात्मक परिमेय संख्याओं के युग्मों की स्थिति भी ठीक इसी प्रकार है। *दो ऋणात्मक परिमेय संख्याओं की तुलना करने के लिए, हम उनकी तुलना उनके चिह्नों को छोड़ते हुए करते हैं और बाद में असमिका (inequality) के चिह्न को उल्टा कर (बदल) देते हैं।*

  उदाहरणार्थ, $-\frac{7}{5}$ और $-\frac{5}{3}$, की तुलना करने के लिए, पहले हम $\frac{7}{5}$ और $\frac{5}{3}$ की तुलना करते हैं।

  हमें $\frac{7}{5} < \frac{5}{3}$ प्राप्त होता है और इससे हम निष्कर्ष निकालते हैं कि $\frac{-7}{5} > \frac{-5}{3}$ है।

  ऐसे पाँच युग्म और लीजिए और फिर उनकी तुलना कीजिए।

  कौन बड़ा है : $-\frac{3}{8}$ या $-\frac{2}{7}$?; $-\frac{4}{3}$ या $-\frac{3}{2}$?

- एक ऋणात्मक और धनात्मक परिमेय संख्या की तुलना सुस्पष्ट है। संख्या रेखा पर, एक ऋणात्मक परिमेय संख्या शून्य के बाईं ओर स्थित होती है तथा एक धनात्मक परिमेय संख्या शून्य के दाईं ओर स्थित होती है। अतः, एक ऋणात्मक परिमेय संख्या सदैव एक धनात्मक परिमेय संख्या से छोटी होती है।

  इस प्रकार $-\frac{2}{7} < \frac{1}{2}$ है।

- परिमेय संख्याओं $\frac{-3}{-5}$ और $\frac{-2}{-7}$ की तुलना करने के लिए पहले उन्हें मानक रूप में बदलिए और फिर उनकी तुलना कीजिए।

उदाहरण 3 क्या $\frac{4}{-9}$ और $\frac{-16}{36}$ एक ही परिमेय संख्या को निरूपित करते हैं?

हल हाँ, क्योंकि $\frac{4}{-9} = \frac{4 \times (-4)}{-9 \times (-4)} = \frac{-16}{36}$ या $\frac{-16}{36} = \frac{-16 \div -4}{36 \div -4} = \frac{4}{-9}$ है।

9.8 दो परिमेय संख्याओं के बीच में परिमेय संख्याएँ

रेशमा 3 और 10 के बीच में पूर्ण संख्याएँ गिनना चाहती थी। उसको अपनी पिछली कक्षाओं से यह ज्ञात था कि 3 और 10 के बीच में ठीक 6 पूर्ण संख्याएँ होंगी। इसी प्रकार, वह –3 और 3 के बीच पूर्णांकों की संख्या भी ज्ञात करना चाहती थी। –3 और 3 के बीच में पूर्णांक –2, –1, 0, 1 और 2 हैं। इस प्रकार, –3 और 3 के बीच ठीक 5 पूर्णांक हैं।

© NCERT not to be republished

क्या -3 और -2 के बीच कोई पूर्णांक हैं? नहीं, -3 और -2 के बीच कोई पूर्णांक नहीं है। दो क्रमागत पूर्णांकों के बीच पूर्णांकों की संख्या 0 होती है।

इस प्रकार, हम प्राप्त करते हैं कि दो पूर्णांकों के बीच में पूर्णांकों की संख्या सीमित परिमित या (finite) होती है।

क्या यह परिमेय संख्याओं की स्थिति में भी होगा?

रेशमा ने दो परिमेय संख्याएँ $\frac{-3}{5}$ और $\frac{-1}{3}$ लीं।

उसने इन्हें समान हर वाली परिमेय संख्याओं में बदल लिया।

अतः, $\frac{-3}{5}=\frac{-9}{15}$ और $\frac{-1}{3}=\frac{-5}{15}$ है।

हमें प्राप्त है कि $\frac{-9}{15}<\frac{-8}{15}<\frac{-7}{15}<\frac{-6}{15}<\frac{-5}{15}$ है, या $\frac{-3}{5}<\frac{-8}{15}<\frac{-7}{15}<\frac{-6}{15}<\frac{-1}{3}$ है।

इस प्रकार, वह $\frac{-3}{5}$ और $\frac{-1}{3}$ के बीच में परिमेय संख्याएँ $\frac{-8}{15},\frac{-7}{15},\frac{-6}{15}$ ज्ञात कर सकी।

क्या $\frac{-3}{5}$ और $\frac{-1}{3}$ के बीच में केवल परिमेय संख्याएँ $\frac{-8}{15},\frac{-7}{15},\frac{-6}{15}$ ही हैं?

हमें प्राप्त है कि $\frac{-3}{5}=\frac{-18}{30}$ और $\frac{-8}{15}=\frac{-16}{30}$ है।

साथ ही, $\frac{-18}{30}<\frac{-17}{30}<\frac{-16}{30}$ है। अर्थात् $\frac{-3}{5}<\frac{-17}{30}<\frac{-8}{15}$ है।

अतः, $\frac{-3}{5}<\frac{-17}{30}<\frac{-8}{15}<\frac{-7}{15}<\frac{-6}{15}<\frac{-1}{3}$ है।

इस प्रकार, $\frac{-1}{3}$ और $\frac{-3}{5}$ के बीच हम एक और परिमेय संख्या ज्ञात करने में सफल हो गए।

इस विधि का प्रयोग करके, आप दो भिन्न-भिन्न परिमेय संख्याओं के बीच में जितनी चाहें उतनी परिमेय संख्याएँ ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरणार्थ, $\frac{-3}{5}=\frac{-3\times30}{5\times30}=\frac{-90}{150}$ और $\frac{-1}{3}=\frac{-1\times50}{3\times50}=\frac{-50}{150}$ है।

हमें $\frac{-90}{150}$ और $\frac{-50}{150}$ के बीच में, अर्थात् $\frac{-3}{5}$ और $\frac{-1}{3}$ के बीच में 39 परिमेय संख्याएँ $\frac{-89}{150},\frac{-88}{150},\frac{-87}{150},\ldots,\frac{-51}{150}$ प्राप्त करते हैं।

आप यह ज्ञात करेंगे कि यह सूची कभी समाप्त नहीं होगी।

क्या आप $\frac{-5}{3}$ और $\frac{-8}{7}$ के बीच में पाँच परिमेय संख्याएँ लिख सकते हैं?

हम दो परिमेय संख्याओं के बीच में असीमित (या अपरिमित रूप से अनेक) परिमेय संख्याएँ ज्ञात कर सकते हैं।

प्रयास कीजिए

$\frac{-5}{7}$ और $\frac{-3}{8}$ के बीच में पाँच परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

© NCERT not to be republished

उदाहरण 4 – 2 और – 1 के बीच में तीन परिमेय संख्याएँ लिखिए।

हल आइए –1 और –2 को हर 5 वाली परिमेय संख्याओं के रूप में लिखें।

हमें प्राप्त है कि $-1 = \frac{-5}{5}$ और $-2 = \frac{-10}{5}$ है।

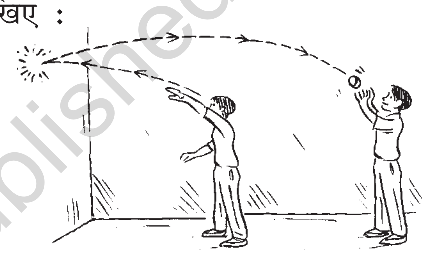
अतः, $\frac{-10}{5} < \frac{-9}{5} < \frac{-8}{5} < \frac{-7}{5} < \frac{-6}{5} < \frac{-5}{5}$ है, या $-2 < \frac{-9}{5} < \frac{-8}{5} < \frac{-7}{5} < \frac{-6}{5} < -1$ है।

–2 और –1 के बीच तीन परिमेय संख्याएँ $\frac{-9}{5}, \frac{-8}{5}, \frac{-7}{5}$ होंगी।

(आप $\frac{-9}{5}, \frac{-8}{5}, \frac{-7}{5}$ और $\frac{-6}{5}$ में से कोई सी भी तीन परिमेय संख्याएँ ले सकते हैं।)

उदाहरण 5 निम्नलिखित प्रतिरूप (Pattern) में, चार और संख्याएँ लिखिए :

$$\frac{-1}{3}, \frac{-2}{6}, \frac{-3}{9}, \frac{-4}{12}, \ldots$$



हल हमें प्राप्त है :

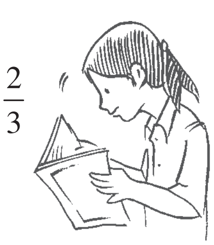
$$\frac{-2}{6} = \frac{-1 \times 2}{3 \times 2}, \frac{-3}{9} = \frac{-1 \times 3}{3 \times 3}, \frac{-4}{12} = \frac{-1 \times 4}{3 \times 4}$$

अथवा $\frac{-1 \times 1}{3 \times 1} = \frac{-1}{3}, \frac{-1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{-2}{6}, \frac{-1 \times 3}{3 \times 3} = \frac{-3}{9}, \frac{-1 \times 4}{3 \times 4} = \frac{-4}{12}$ है।

इस प्रकार, इन संख्याओं में हम एक प्रतिरूप देखते हैं।

अन्य संख्याएँ $\frac{-1 \times 5}{3 \times 5} = \frac{-5}{15}, \frac{-1 \times 6}{3 \times 6} = \frac{-6}{18}, \frac{-1 \times 7}{3 \times 7} = \frac{-7}{21}$ होंगी।

प्रश्नावली 9.1



1. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं के बीच में पाँच परिमेय संख्याएँ लिखिए :

(i) –1 और 0 (ii) –2 और –1 (iii) $\frac{-4}{5}$ और $\frac{-2}{3}$ (iv) $-\frac{1}{2}$ और $\frac{2}{3}$

2. निम्नलिखित प्रतिरूपों में से प्रत्येक में चार और परिमेय संख्याएँ लिखिए :

(i) $\frac{-3}{5}, \frac{-6}{10}, \frac{-9}{15}, \frac{-12}{20}, \ldots\ldots$ (ii) $\frac{-1}{4}, \frac{-2}{8}, \frac{-3}{12}, \ldots\ldots$

(iii) $\frac{-1}{6}, \frac{2}{-12}, \frac{3}{-18}, \frac{4}{-24}, \ldots\ldots$ (iv) $\frac{-2}{3}, \frac{2}{-3}, \frac{4}{-6}, \frac{6}{-9}, \ldots\ldots$

3. निम्नलिखित के समतुल्य चार परिमेय संख्याएँ लिखिए :

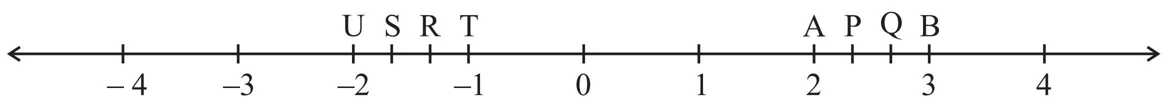
(i) $\frac{-2}{7}$ (ii) $\frac{5}{-3}$ (iii) $\frac{4}{9}$

© NCERT not to be republished

4. एक संख्या रेखा खींचिए और उस पर निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को निरूपित कीजिए :

(i) $\frac{3}{4}$ (ii) $\frac{-5}{8}$ (iii) $\frac{-7}{4}$ (iv) $\frac{7}{8}$

5. एक संख्या रेखा पर बिंदु P, Q, R, S, T, U, A और B इस प्रकार हैं कि TR = RS = SU तथा AP = PQ = QB है। P, Q, R और S से निरूपित परिमेय संख्याओं को लिखिए।



6. निम्नलिखित में से कौन-से युग्म एक ही परिमेय संख्या को निरूपित करते हैं?

(i) $\frac{-7}{21}$ और $\frac{3}{9}$ (ii) $\frac{-16}{20}$ और $\frac{20}{-25}$ (iii) $\frac{-2}{-3}$ और $\frac{2}{3}$

(iv) $\frac{-3}{5}$ और $\frac{-12}{20}$ (v) $\frac{8}{-5}$ और $\frac{-24}{15}$ (vi) $\frac{1}{3}$ और $\frac{-1}{9}$

(vii) $\frac{-5}{-9}$ और $\frac{5}{-9}$

7. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को उनके सरलतम रूप में लिखिए :

(i) $\frac{-8}{6}$ (ii) $\frac{25}{45}$ (iii) $\frac{-44}{72}$ (iv) $\frac{-8}{10}$

8. संकेतों >, <, और = में से सही संकेत चुन कर रिक्त स्थानों को भरिए :

(i) $\frac{-5}{7}$ ☐ $\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{-4}{5}$ ☐ $\frac{-5}{7}$ (iii) $\frac{-7}{8}$ ☐ $\frac{14}{-16}$

(iv) $\frac{-8}{5}$ ☐ $\frac{-7}{4}$ (v) $\frac{1}{-3}$ ☐ $\frac{-1}{4}$ (vi) $\frac{5}{-11}$ ☐ $\frac{-5}{11}$

(vii) 0 ☐ $\frac{-7}{6}$

9. निम्नलिखित में प्रत्येक में से कौन-सी संख्या बड़ी है?

(i) $\frac{2}{3}, \frac{5}{2}$ (ii) $\frac{-5}{6}, \frac{-4}{3}$ (iii) $\frac{-3}{4}, \frac{2}{-3}$

(iv) $\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}$ (v) $-3\frac{2}{7}, -3\frac{4}{5}$

10. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को आरोही क्रम में लिखिए :

(i) $\frac{-3}{5}, \frac{-2}{5}, \frac{-1}{5}$ (ii) $\frac{1}{3}, \frac{-2}{9}, \frac{-4}{3}$ (iii) $\frac{-3}{7}, \frac{-3}{2}, \frac{-3}{4}$

© NCERT not to be republished

9.9 परिमेय संख्याओं पर संक्रियाएँ

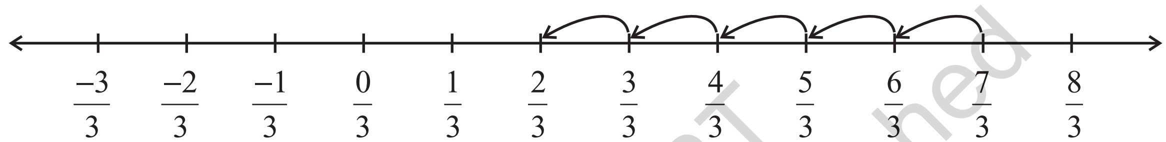
आप जानते हैं कि पूर्णांकों तथा भिन्नों को किस प्रकार जोड़ा, घटाया, गुणा और भाग किया जाता है। आइए इन आधारभूत संक्रियाओं का परिमेय संख्याओं पर अध्ययन करें।

9.9.1 योग

- आइए समान हर वाली दो परिमेय संख्याओं, मान लीजिए $\frac{7}{3}$ और $\frac{-5}{3}$, को जोड़ें।

  हम $\frac{7}{3}+\left(\frac{-5}{3}\right)$ ज्ञात करते हैं।

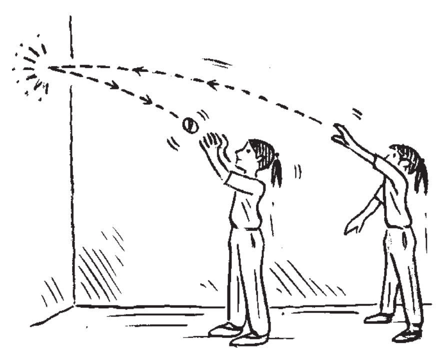
  संख्या रेखा पर, हमें प्राप्त होता है :



दो क्रमागत बिंदुओं के बीच की दूरी $\frac{1}{3}$ है। अतः, $\frac{7}{3}$ में $\frac{-5}{3}$ जोड़ने का अर्थ है कि $\frac{7}{3}$ के बाईं ओर 5 कदम चलें। हम कहाँ पहुँचते हैं? हम $\frac{2}{3}$ पर पहुँचते हैं। अतः, $\frac{7}{3}+\left(\frac{-5}{3}\right)=\frac{2}{3}$ है।

आइए इसको इस प्रकार करने का प्रयत्न करें :

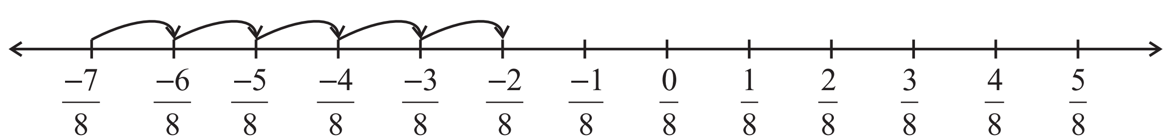
$$\frac{7}{3}+\frac{(-5)}{3}=\frac{7+(-5)}{3}=\frac{2}{3}$$



हमें वही उत्तर प्राप्त होता है।

$\frac{6}{5}+\frac{(-2)}{5}$, $\frac{3}{7}+\frac{(-5)}{7}$ को उपरोक्त दोनों विधियों से ज्ञात कीजिए और जाँच करें कि क्या दोनों उत्तर समान हैं।

इसी प्रकार, $\frac{-7}{8}+\frac{5}{8}$ निम्नलिखित होगा :



हमें क्या प्राप्त होता है?

साथ ही, $\frac{-7}{8}+\frac{5}{8}=\frac{-7+5}{8}=?$ क्या दोंनों मान समान हैं?

प्रयास कीजिए

$\frac{-13}{7}+\frac{6}{7}$ तथा $\frac{19}{5}+\left(\frac{-7}{5}\right)$ ज्ञात कीजिए:

© NCERT not to be republished

इस प्रकार, हम देखते हैं कि समान हर वाली परिमेय संख्याओं को जोड़ते समय, हम, हर को वही रखते हुए, अंशों को जोड़ देते हैं।

इस प्रकार, $\frac{-11}{5}+\frac{7}{5}=\frac{-11+7}{5}=\frac{-4}{5}$ है।

- हम अलग-अलग हरों वाली दो परिमेय संख्याओं को किस प्रकार जोड़ें? भिन्नों की तरह, हम पहले इन हरों का ल.स. ज्ञात करते हैं। फिर हम ऐसी समतुल्य परिमेय संख्याएँ ज्ञात करते हैं, जिनके हर यह ल.स. हों। इसके बाद हम इन दोनों परिमेय संख्याओं को जोड़ते हैं।

उदाहरणार्थ, आइए $\frac{-7}{5}$ और $\frac{-2}{3}$ को जोड़ें। 5 और 3 का ल.स. 15 है।

अतः, $\frac{-7}{5}=\frac{-21}{15}$ और $\frac{-2}{3}=\frac{-10}{15}$ है।

इस प्रकार $\frac{-7}{5}+\left(\frac{-2}{3}\right)=\frac{-21}{15}+\left(\frac{-10}{15}\right)=\frac{-31}{15}$ हुआ।

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{-3}{7}+\frac{2}{3}$

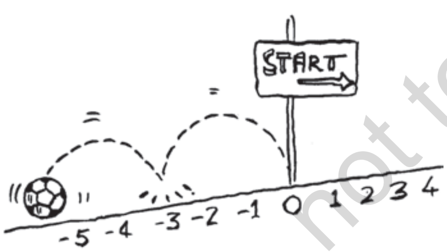
(ii) $\frac{-5}{6}+\frac{-3}{11}$

योज्य प्रतिलोम :

$\frac{-4}{7}+\frac{4}{7}$ किसके बराबर होगा?

$\frac{-4}{7}+\frac{4}{7}=\frac{-4+4}{7}=0$ है। साथ ही, $\frac{4}{7}+\left(\frac{-4}{7}\right)=0$ है

इसी प्रकार, $\frac{-2}{3}+\frac{2}{3}=0=\frac{2}{3}+\left(\frac{-2}{3}\right)$ है।



आपको याद होगा कि पूर्णांकों में, – 2 का **योज्य प्रतिलोम (additive inverse)** 2 है, तथा 2, पूर्णांक – 2 का योज्य प्रतिलोम होता है।

परिमेय संख्याओं के लिए, हम कहते हैं कि $\frac{-4}{7}$ परिमेय संख्या $\frac{4}{7}$ का **योज्य प्रतिलोम** है तथा $\frac{4}{7}$ परिमेय संख्या $\frac{-4}{7}$ का योज्य प्रतिलोम है।

इसी प्रकार, $\frac{-2}{3}$ परिमेय संख्या $\frac{2}{3}$ का योज्य प्रतिलोम है तथा $\frac{2}{3}$ परिमेय संख्या $\frac{-2}{3}$ का योज्य प्रतिलोम है।

प्रयास कीजिए

$\frac{-3}{9}, \frac{-9}{11}$ और $\frac{5}{7}$ के योज्य प्रतिलोम क्या हैं?

उदाहरण 6 सतपाल किसी स्थान P से पूर्व दिशा में $\frac{2}{3}$ km चलता है और फिर वहाँ से पश्चिम दिशा में $1\frac{5}{7}$ km चलता है। अब वह P से कहाँ स्थित होगा?

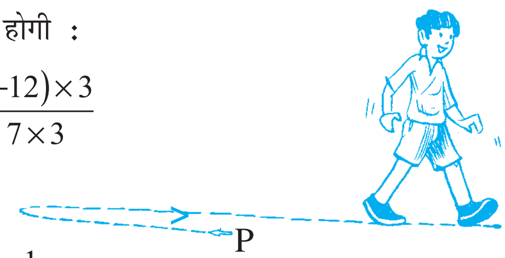
हल आइए पूर्व दिशा में चली गई दूरी को धनात्मक चिह्न से व्यक्त करें। इसलिए, पश्चिम दिशा में चली गई दूरी को ऋणात्मक चिह्न से व्यक्त किया जाएगा।

© NCERT not to be republished

इस प्रकार, बिंदु P से सतपाल की दूरी (km में) होगी :

$$\frac{2}{3}+\left(-1\frac{5}{7}\right)=\frac{2}{3}+\frac{(-12)}{7}=\frac{2\times 7}{3\times 7}+\frac{(-12)\times 3}{7\times 3}$$

$$=\frac{14-36}{21}=\frac{-22}{21}=-1\frac{1}{21}$$



क्योंकि यह ऋणात्मक है, इसलिए सतपाल P से पश्चिम की ओर $1\frac{1}{21}$ km की दूरी पर है।

9.9.2 व्यवकलन (घटाना)

सविता ने दो परिमेय संख्याओं $\frac{5}{7}$ और $\frac{3}{8}$ का अंतर इस विधि से प्राप्त किया :

$$\frac{5}{7}-\frac{3}{8}=\frac{40-21}{56}=\frac{19}{56}$$

फरीदा जानती थी कि दो पूर्णांकों a और b के लिए, $a - b = a + (-b)$ लिखा जा सकता है।

उसने ऐसा परिमेय संख्याओं के लिए भी किया और ज्ञात किया कि $\frac{5}{7}-\frac{3}{8}=\frac{5}{7}+\frac{(-3)}{8}=\frac{19}{56}$ है।

दोनों ने एक ही (समान) अंतर प्राप्त किया।

दोनों विधियों से, $\frac{7}{8}-\frac{5}{9}$, $\frac{3}{11}-\frac{8}{7}$ ज्ञात करने का प्रयत्न कीजिए। क्या आपको समान उत्तर प्राप्त होते हैं?

अत: हम कहते हैं कि *दो परिमेय संख्याओं को घटाते (व्यवकलन करते) समय, घटाए जाने वाली संख्या के योज्य प्रतिलोम को अन्य परिमेय संख्या में जोड़ देना चाहिए।*

इस प्रकार, $1\frac{2}{3}-2\frac{4}{5}=\frac{5}{3}-\frac{14}{5}=\frac{5}{3}+\frac{14}{5}$ का योज्य प्रतिलोम

$$=\frac{5}{3}+\frac{(-14)}{5}=\frac{-17}{15}=-1\frac{2}{15}$$ है।

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए

(i) $\frac{7}{9}-\frac{2}{5}$ (ii) $2\frac{1}{5}-\frac{(-1)}{3}$

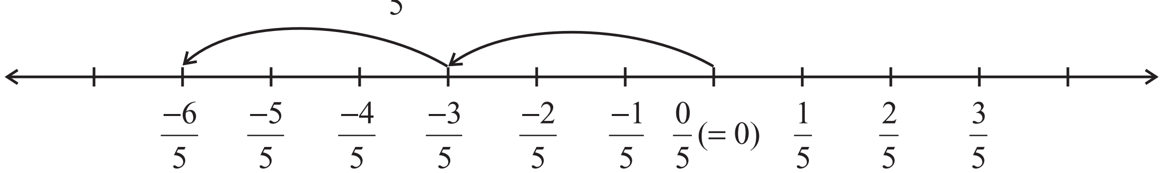
$\frac{2}{7}-\left(\frac{-5}{6}\right)$ क्या होगा? $\frac{2}{7}-\left(\frac{-5}{6}\right)=\frac{2}{7}+\left(\frac{-5}{6}\right)$ का योज्य प्रतिलोम

$$=\frac{2}{7}+\frac{5}{6}=\frac{47}{42}=1\frac{5}{42}$$

9.9.3 गुणन

आइए परिमेय संख्या $\frac{-3}{5}$ को 2 से गुणा करें, अर्थात् हम $\frac{-3}{5}\times 2$ ज्ञात करें।

संख्या रेखा पर इसका अर्थ होगा $\frac{3}{5}$ कि बाईं ओर दो कदम चलना।



© NCERT not to be republished

हम कहाँ पहुँचते हैं? हम $\frac{-6}{5}$ पर पहुँचते हैं। आइए हम इसको भिन्नों वाली विधि से ज्ञात करें।

$$\frac{-3}{5}\times 2=\frac{-3\times 2}{5}=\frac{-6}{5}$$

हम उसी परिमेय संख्या पर पहुँच जाते हैं।

दोनों विधियों का प्रयोग करते हुए, $\frac{-4}{7}\times 3$ और $\frac{-6}{5}\times 4$, को ज्ञात कीजिए। आप क्या देखते हैं?

अतः, *हम ज्ञात करते हैं कि एक परिमेय संख्या को एक धनात्मक पूर्णांक से गुणा करने पर, हम अंश को उस पूर्णांक से गुणा कर देते हैं तथा हर को वही रखते हैं।*

आइए अब एक परिमेय संख्या को एक ऋणात्मक पूर्णांक से गुणा करें।

$$\frac{-2}{9}\times(-5)=\frac{-2\times(-5)}{9}=\frac{10}{9}$$

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित गुणनफल क्या होंगे?

(i) $\frac{-3}{5}\times 7$ (ii) $\frac{-6}{5}\times(-2)$

याद रखिए कि -5 को $\frac{-5}{1}$ लिखा जा सकता है।

अतः, $\frac{-2}{9}\times\frac{-5}{1}=\frac{10}{9}=\frac{-2\times(-5)}{9\times 1}$ है।

इसी प्रकार, $\frac{3}{11}\times(-2)=\frac{3\times(-2)}{11\times 1}=\frac{-6}{11}$ है।

उपरोक्त प्रेक्षणों के आधार पर, हम ज्ञात करते हैं कि $\frac{-3}{8}\times\frac{5}{7}=\frac{-3\times 5}{8\times 7}=\frac{-15}{56}$ है।

अतः, जैसा कि हमने भिन्नों की स्थिति में किया था, हम दो परिमेय संख्याओं को निम्नलिखित विधि से गुणा करते हैं :

चरण 1 : दोनों परिमेय संख्याओं के अंशों का गुणा कीजिए।

चरण 2 : दोनों परिमेय संख्याओं के हरों का गुणा कीजिए।

चरण 3 : गुणनफल को $\frac{\text{चरण 1 में प्राप्त परिणाम}}{\text{चरण 2 में प्राप्त परिणाम}}$ के रूप में लिखिए।

इस प्रकार, $\frac{-3}{5}\times\frac{2}{7}=\frac{-3\times 2}{5\times 7}=\frac{-6}{35}$ है।

साथ ही $\frac{-5}{8}\times\left(\frac{-9}{7}\right)=\frac{(-5)\times(-9)}{8\times 7}=\frac{45}{56}$ है।

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{-3}{4}\times\frac{1}{7}$

(ii) $\frac{2}{3}\times\frac{-5}{9}$

9.9.4 विभाजन

भिन्नों के व्युत्क्रमों (reciprocals) के बारे में हम पहले पढ़ चुके हैं। $\frac{2}{7}$ का व्युत्क्रम क्या है? यह $\frac{7}{2}$ है। हम इस अवधारणा को शून्येतर परिमेय संख्याओं के व्युत्क्रमों के लिए भी लागू करते हैं।

इस प्रकार, $\frac{-2}{7}$ का व्युत्क्रम $\frac{7}{-2}$, अर्थात् $\frac{-7}{2}$ होगा तथा $\frac{-3}{5}$ का व्युत्क्रम $\frac{-5}{3}$ होगा।

© NCERT not to be republished

परिमेय संख्या का उसके व्युत्क्रम से गुणनफल

किसी संख्या का उसके व्युत्क्रम से गुणनफल सदैव 1 होता है।

उदाहरणार्थ $\frac{-4}{9} \times (\frac{-4}{9}$ का व्युत्क्रम)

$= \frac{-4}{9} \times \left(\frac{-9}{4}\right) = 1$ है।

इसी प्रकार $\frac{-6}{13}\left(\frac{-13}{6}\right) = 1$ है।

कुछ और उदाहरण लेकर, इस प्रेक्षण की पुष्टि कीजिए।

प्रयास कीजिए

$\frac{-6}{11}, \frac{-8}{5}$ के व्युत्क्रम क्या होंगे?

सविता ने एक परिमेय संख्या $\frac{4}{9}$ को एक अन्य परिमेय संख्या $\frac{-5}{7}$ से इस प्रकार विभाजित किया (भाग दिया) :

$$\frac{4}{9} \div \left(\frac{-5}{7}\right) = \frac{4}{9} \times \frac{7}{-5} = \frac{-28}{45}$$

उसने भिन्नों की तरह ही व्युत्क्रम की अवधारणा का प्रयोग किया।

अर्पित ने पहले $\frac{4}{9}$ को $\frac{5}{7}$ से भाग दिया और $\frac{28}{45}$ प्राप्त किया।

अंत में, उसने कहा कि $\frac{4}{9} \div \left(\frac{-5}{7}\right) = \frac{-28}{45}$ है। उसने ऐसा किस प्रकार प्राप्त किया?

उसने ऋणात्मक चिह्न को छोड़ते हुए, उन्हें भिन्नों की तरह विभाजित किया और बाद में प्राप्त परिणाम के साथ ऋणात्मक चिह्न लगा दिया।

दोनों ने एक ही मान $\frac{-28}{45}$ प्राप्त किया। $\frac{2}{3}$ को $\frac{-5}{7}$ से दोनों विधियों द्वारा भाग देकर देखिए कि क्या आप एक ही (समान) उत्तर प्राप्त करते हैं।

उपरोक्त से यह प्रदर्शित होता है कि *एक परिमेय संख्या को किसी अन्य परिमेय संख्या से भाग देने के लिए, हम उस परिमेय संख्या को अन्य परिमेय संख्या के व्युत्क्रम से गुणा कर देते हैं।*

इस प्रकार, $\frac{6}{-5} \div \frac{-2}{3} = \frac{6}{-5} \times \left(\frac{-2}{3}\right)$ का व्युत्क्रम $= \frac{6}{-5} \times \frac{3}{-2} = \frac{18}{10}$ है।

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए: (i) $\frac{2}{3} \times \left(\frac{-7}{8}\right)$ (ii) $\frac{-6}{7} \times \frac{5}{7}$

© NCERT not to be republished

प्रश्नावली 9.2

1. योग ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{5}{4}+\left(\frac{-11}{4}\right)$ (ii) $\frac{5}{3}+\frac{3}{5}$ (iii) $\frac{-9}{10}+\frac{22}{15}$

(iv) $\frac{-3}{-11}+\frac{5}{9}$ (v) $\frac{-8}{19}+\frac{(-2)}{57}$ (vi) $\frac{-2}{3}+0$

(vii) $-2\frac{1}{3}+4\frac{3}{5}$

2. ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{7}{24}-\frac{17}{36}$ (ii) $\frac{5}{63}-\left(\frac{-6}{21}\right)$ (iii) $\frac{-6}{13}-\left(\frac{-7}{15}\right)$

(iv) $\frac{-3}{8}-\frac{7}{11}$ (v) $-2\frac{1}{9}-6$

3. गुणनफल ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{9}{2}\times\left(\frac{-7}{4}\right)$ (ii) $\frac{3}{10}\times(-9)$ (iii) $\frac{-6}{5}\times\frac{9}{11}$

(iv) $\frac{3}{7}\times\left(\frac{-2}{5}\right)$ (v) $\frac{3}{11}\times\frac{2}{5}$ (vi) $\frac{3}{-5}\times\frac{-5}{3}$

4. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए :

(i) $(-4)\div\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{-3}{5}\div 2$ (iii) $\frac{-4}{5}\div(-3)$

(iv) $\frac{-1}{8}\div\frac{3}{4}$ (v) $\frac{-2}{13}\div\frac{1}{7}$ (vi) $\frac{-7}{12}\div\left(\frac{-2}{13}\right)$

(vii) $\frac{3}{13}\div\left(\frac{-4}{65}\right)$

© NCERT not to be republished

हमने क्या चर्चा की ?

1. एक संख्या जिसे $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त किया जा सके, जहाँ p और q पूर्णांक हैं तथा $q \neq 0$ है, परिमेय संख्या कहलाती है। संख्याएँ $\frac{-2}{7}, \frac{3}{8}, 3$ इत्यादि परिमेय संख्याएँ हैं।
2. सभी पूर्णांक और भिन्न परिमेय संख्याएँ हैं।
3. यदि किसी परिमेय संख्या के अंश और हर को एक ही शून्येतर पूर्णांक से गुणा किया जाए या भाग दिया जाए, तो हमें एक परिमेय संख्या प्राप्त होती है जो दी हुई परिमेय संख्या के समतुल्य परिमेय संख्या कही जाती है। उदाहरणार्थ, $\frac{-3}{7} = \frac{-3 \times 2}{7 \times 2} = \frac{-6}{14}$ है। अतः, हम कहते हैं कि $\frac{-6}{14}$ संख्या $\frac{-3}{7}$ का एक समतुल्य रूप है। साथ ही, ध्यान दीजिए कि $\frac{-6}{14} = \frac{-6 \div 2}{14 \div 2} = \frac{-3}{7}$ है।
4. परिमेय संख्याओं को धनात्मक और ऋणात्मक परिमेय संख्याओं के रूप में वर्गीकृत किया जाता है। जब अंश और हर दोनों ही या तो धनात्मक पूर्णांक हों या ऋणात्मक पूर्णांक हों, तो वह परिमेय संख्या धनात्मक परिमेय संख्या कहलाती है। जब अंश या हर में से एक ऋणात्मक पूर्णांक हो, तो वह परिमेय संख्या एक ऋणात्मक परिमेय संख्या कहलाती है। उदाहरणार्थ, $\frac{3}{8}$ एक धनात्मक परिमेय संख्या है तथा $\frac{-8}{9}$ एक ऋणात्मक परिमेय संख्या है।
5. संख्या 0 न तो एक धनात्मक परिमेय संख्या है और न ही ऋणात्मक परिमेय संख्या है।
6. एक परिमेय संख्या को अपने मानक रूप में तब माना जाता है, जब उसका हर धनात्मक पूर्णांक हो तथा अंश और हर में 1 के अतिरिक्त कोई सार्व गुणनखंड न हो। संख्याएँ $\frac{-1}{3}, \frac{2}{7}$, इत्यादि मानक रूप में हैं।
7. दो परिमेय संख्याओं के बीच असीमित परिमेय संख्याएँ होती हैं।
8. समान हर वाली दो परिमेय संख्याओं का योग ज्ञात करने के लिए, उनके अंशों को जोड़ा जा सकता है तथा हर वही रख कर योग ज्ञात किया जा सकता है। भिन्न-भिन्न हरों वाली दो परिमेय संख्याओं को जोड़ने के लिए, पहले दोनों हरों का ल.स. ज्ञात किया जाता है और फिर दोनों परिमेय संख्याओं को ल.स. के बराबर समान हर वाली दो समतुल्य परिमेय संख्याओं में बदल कर जोड़ लिया जाता है। उदाहरणार्थ, $\frac{-2}{3} + \frac{3}{8} = \frac{-16}{24} + \frac{9}{24} = \frac{-16+9}{24} = \frac{-7}{24}$ है। यहां 3 और 8 का ल. स. 24 है।

© NCERT not to be republished

9. दो परिमेय संख्याओं का व्यवकलन करने के लिए हम घटाई जाने वाली परिमेय संख्या के योज्य प्रतिलोम को अन्य परिमेय संख्या में जोड़ते हैं।

इस प्रकार, $\frac{7}{8}-\frac{2}{3}=\frac{7}{8}+\frac{2}{3}$ का योज्य प्रतिलोम $=\frac{7}{8}+\frac{(-2)}{3}=\frac{21+(-16)}{24}=\frac{5}{24}$ है।

10. दो परिमेय संख्याओं का गुणा करने के लिए, हम इन संख्याओं के अंशों तथा हरों को अलग-अलग गुणा करते हैं और फिर गुणनफल को $\frac{\text{अंशों का गुणनफल}}{\text{हरों का गुणनफल}}$ के रूप में लिखते हैं।

11. एक परिमेय संख्या को एक अन्य शून्येतर परिमेय संख्या से भाग देने के लिए, हम पहली परिमेय संख्या को अन्य परिमेय संख्या के व्युत्क्रम से गुणा करते हैं। इस प्रकार

$\frac{-7}{2}\div\frac{4}{3}=\frac{-7}{2}\times(\frac{4}{3}$ का व्युत्क्रम$)=\frac{-7}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{-21}{8}$ है।

© NCERT not to be republished

प्रायोगिक ज्यामिति

अध्याय 10

10.1 भूमिका

आप अनेक प्रकार के आकारों से परिचित हैं। आप पिछली कक्षाओं में इनमें से कुछ आकारों की रचना करना सीख चुके हैं। उदाहरणतः अब आप एक दी हुई लंबाई का रेखाखंड, एक रेखाखंड पर एक लंब रेखा, एक कोण, कोण का समद्विभाजक, एक वृत्त, इत्यादि की रचना कर सकते हैं। अब आप समांतर रेखाएँ तथा कुछ प्रकार के त्रिभुजों को खींचना सीखेंगे।

© NCERT not to be republished

10.2 एक दी हुई रेखा के समांतर उस बिंदु से होकर रेखा खींचना जो उस रेखा पर स्थित नहीं है

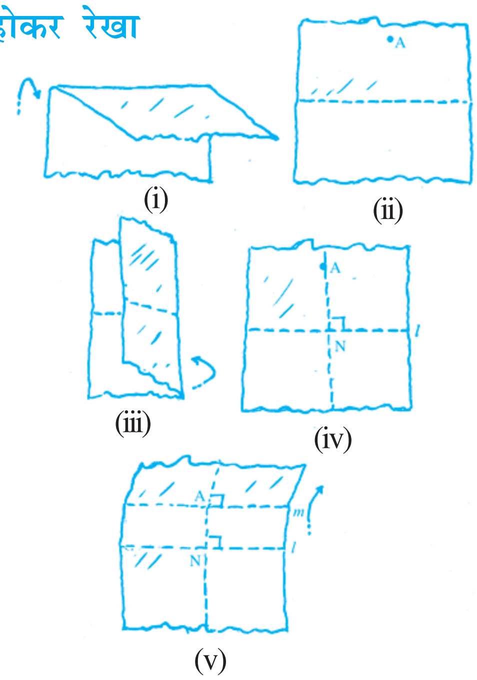
आइए एक क्रियाकलाप से प्रारंभ करें। (आकृति 10.1)

(i) एक कागज़ की शीट लीजिए और इसे मोड़कर एक निशान बनाइए। यह मोड़ का निशान एक रेखा l को निरूपित करता है।

(ii) कागज़ को खोल लीजिए। इस कागज़ पर l के बाहर एक बिंदु A अंकित कीजिए।

(iii) इस बिंदु A से होकर जाता हुआ और रेखा l पर लंब एक मोड़ का निशान बनाइए। इस लंब का नाम AN रखिए।

(iv) अब, बिंदु A से होकर इस लंब के लंबवत एक मोड़ का निशान बनाइए। इस नयी लंबवत रेखा का नाम m रखिए। अब, $l \parallel m$ है क्या आप देख सकते हैं कि ऐसा क्यों है?

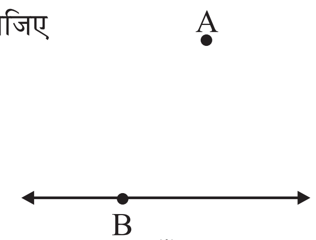


आकृति 10.1

यहाँ समांतर रेखाओं का कौन-सा गुण या कौन-से गुण यह कहने में सहायता कर सकता है या कर सकते हैं कि रेखाएँ l और m समांतर हैं?

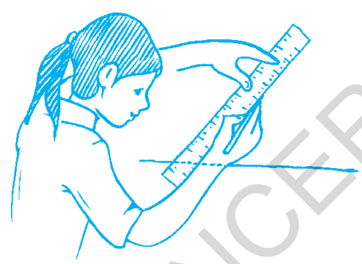
आप तिर्यक रेखा और समांतर रेखाओं से संबंधित गुणों में से किसी भी गुण का प्रयोग करके इस **रचना को केवल पैमाना (रूलर) *और परकार का प्रयोग करके कर सकते हैं।***

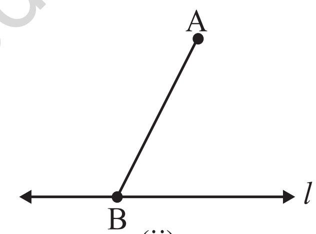
चरण 1 एक रेखा 'l' और उसके बाहर स्थित कोई बिंदु 'A' लीजिए [आकृति10.2 (i)]।



(i)

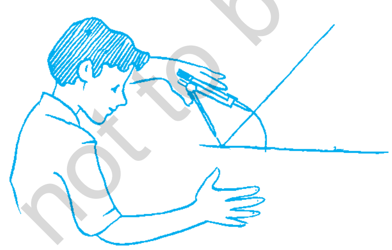
चरण 2 रेखा l और कोई बिंदु B लीजिए और A को B से मिलाइए [आकृति 10.2(ii)]।

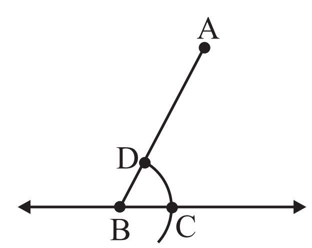




(ii)

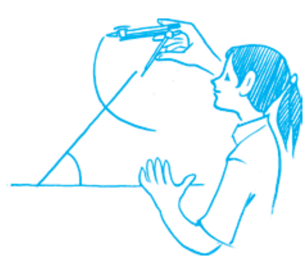
चरण 3 बिंदु B को केंद्र मान कर और कोई सुविधाजनक त्रिज्या लेकर, l को C पर और BA को D पर प्रतिच्छेद करता (काटता) हुआ एक चाप खींचिए [आकृति 10.2(iii)]।

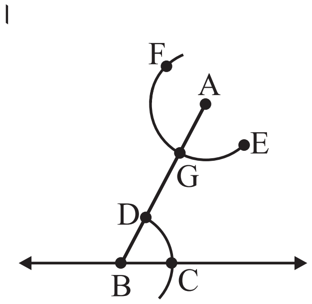




(iii)

चरण 4 अब, A बिंदु को केंद्र मान कर और चरण 3 वाली ही त्रिज्या लेकर, AB को G पर काटता हुआ एक चाप EF खींचिए [आकृति 10.2 (iv)]।

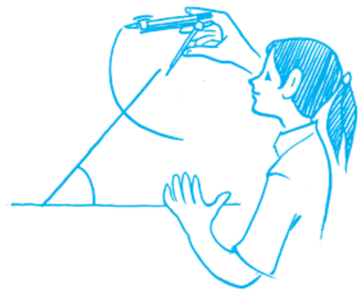


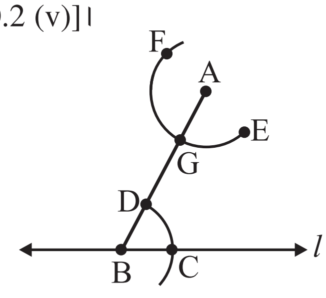


(iv)

© NCERT not to be republished

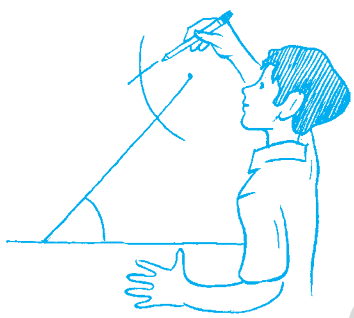
चरण 5 परकार के नुकीले सिरे को C पर रखिए और इसे खोल कर इस प्रकार समायोजित कीजिए कि पेंसिल की नोक D पर रहे [आकृति 10.2 (v)]।

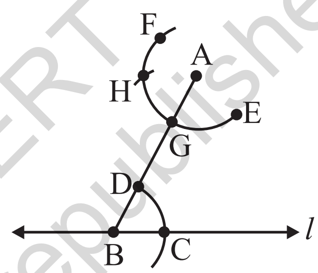




(v)

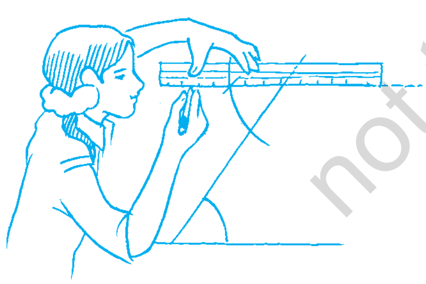
चरण 6 G को केंद्र मानकर और परकार का खुलाव (opening) चरण 5 वाला ही रखते हुए, एक चाप खींचिए जो चाप EF को H पर काटे [आकृति 10.2 (vi)]।

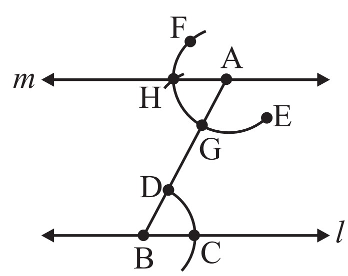




(vi)

चरण 7 अब AH को मिलाकर रेखा m खींचिए [आकृति 10.2 (vii)]।





(vii)

आकृति 10.2 (i)-(vii)

ध्यान दीजिए कि ∠ABC और ∠BAH एकांतर अंत:कोण हैं, जो परस्पर बराबर हैं। इसलिए $m \parallel l$ है।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

1. उपरोक्त रचना में, क्या आप A से होकर जाती हुई अन्य रेखा खींच सकते हैं जो l के समांतर हो?
2. क्या आप इस रचना में इस प्रकार का परिवर्तन कर सकते हैं कि बराबर एकांतर अंत:कोण बनाने के स्थान पर बराबर संगत कोण बनें?

© NCERT not to be republished

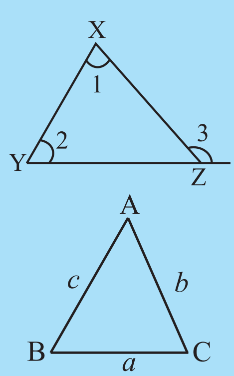
प्रश्नावली 10.1

1. एक रेखा, (मान लीजिए AB) खींचिए और इसके बाहर स्थित कोई बिंदु C लीजिए। केवल पैमाना (रूलर) और परकार का प्रयोग करते हुए, C से होकर AB के समांतर एक रेखा खींचिए।
2. एक रेखा l खींचिए और l पर स्थित किसी भी बिंदु पर l पर लंब खींचिए। इस लंब रेखा पर एक बिंदु X लीजिए जो l से 4 cm की दूरी पर हो। X से होकर l के समांतर एक रेखा m खींचिए।
3. मान लीजिए l एक रेखा है और P एक बिंदु है जो l पर स्थित नहीं है। P से होकर l के समांतर एक रेखा m खींचिए। अब P को l के किसी बिंदु Q से जोड़िए। m पर कोई अन्य बिंदु R चुनिए। R से होकर, PQ के समांतर एक रेखा खींचिए। मान लीजिए यह रेखा, रेखा l से बिंदु S पर मिलती है। समांतर रेखाओं के इन दोनों युग्मों से क्या आकृति बनती है?

10.3 त्रिभुजों की रचना

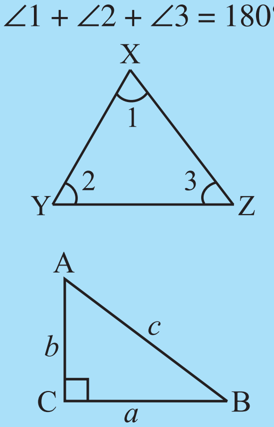
इस अनुच्छेद को पढ़ने से पहले, यह अच्छा होगा कि आप त्रिभुजों की अवधारणाओं, विशेष रूप से त्रिभुजों के गुणों और त्रिभुजों की सर्वांगसमता वाले अध्यायों को याद करें।

$\angle 3 = \angle 1 + \angle 2$



$a + b > c$

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$



$b^2 + a^2 = c^2$

आप भुजाओं और कोणों के आधारों पर त्रिभुजों को वर्गीकृत करना तथा त्रिभुजों से संबंधित निम्नलिखित महत्वपूर्ण गुणों के बारे में जानते हैं :

(i) एक त्रिभुज का बाह्यकोण उसके दोनों अभिमुख अंत:कोणों के योगफल के बराबर होता है।

(ii) त्रिभुज के तीनों अन्त: कोणों का योग 180° होता है।

(iii) त्रिभुज की किन्हीं भी दो भुजाओं की लंबाइयों का योग तीसरी भुजा की लंबाई से अधिक होता है।

(iv) एक समकोण त्रिभुज में कर्ण पर बना वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गों के योगफल के बराबर होता है।

'त्रिभुजों की सर्वांगसमता' वाले अध्याय में हमने देखा था कि एक त्रिभुज प्राप्त किया जा सकता है, यदि उसके निम्नलिखित माप समूहों में से कोई एक दिया हुआ है:

(i) तीन भुजाएँ

(ii) दो भुजाएँ और उनके बीच का कोण

(iii) दो कोण और उनके बीच की भुजा

(iv) समकोण त्रिभुज के लिए, कर्ण और एक पाद (leg)

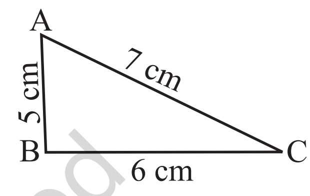
अब, हम इन अवधारणाओं का त्रिभुजों की रचनाओं में प्रयोग करेंगे।

© NCERT not to be republished

10.4 एक त्रिभुज की रचना जब उसकी तीनों भुजाओं की लंबाइयाँ दी हों (SSS कसौटी)

इस अनुच्छेद में, हम त्रिभुजों की रचना करेंगे जब उसकी तीनों भुजाएँ ज्ञात हों। पहले हम इसकी एक रफ़ (rough) आकृति खींचते हैं, जिससे उसकी भुजाओं का कुछ अनुमान लग जाए और फिर तीनों भुजाओं में से एक भुजा लेकर रचना प्रारंभ करते हैं। निम्नलिखित उदाहरण को समझिए :

उदाहरण 1 एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जबकि AB = 5 cm, BC = 6 cm और AC = 7 cm दिया है।

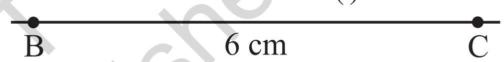


(i)

हल

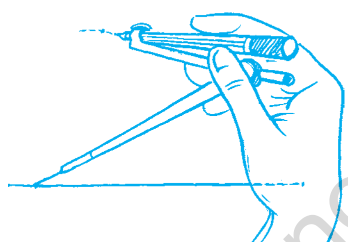
चरण 1 पहले हम दी हुई मापों की एक रफ आकृति खींचते हैं (इससे हमें आगे बढ़ने में सहायता मिलेगी) [आकृति 10.3(i)]।

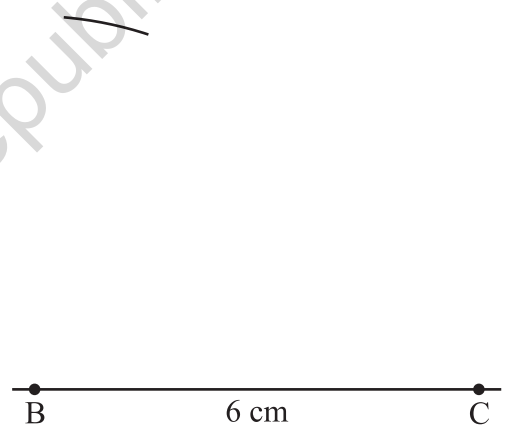
चरण 2 6 cm लंबाई का रेखा खंड BC खींचिए [आकृति 10.3(ii)]।



(ii)

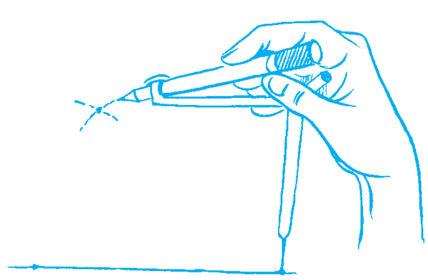
चरण 3 बिंदु B से, बिंदु A, 5 cm की दूरी पर है। अतः, B को केंद्र मान कर और 5 cm त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए। (अब A इस चाप पर कहीं स्थित एक बिंदु है। यह ज्ञात करना हमारा काम है कि A बिल्कुल ठीक इस चाप पर कहाँ है) [आकृति 10.3(iii)]।

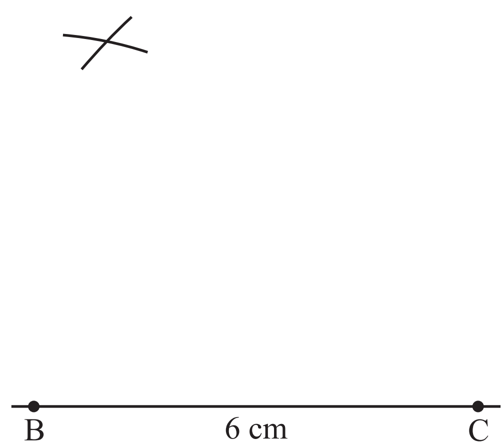




(iii)

चरण 4 C से, बिंदु A, 7 cm की दूरी पर है। अतः, C को केंद्र मान कर और 7 cm त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए। (A इस चाप पर कहीं स्थित होगा। हमें इसका पता लगाना है) [आकृति 10.3(iv)]।

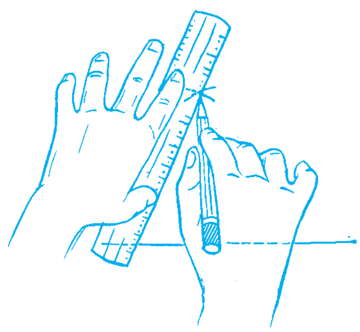


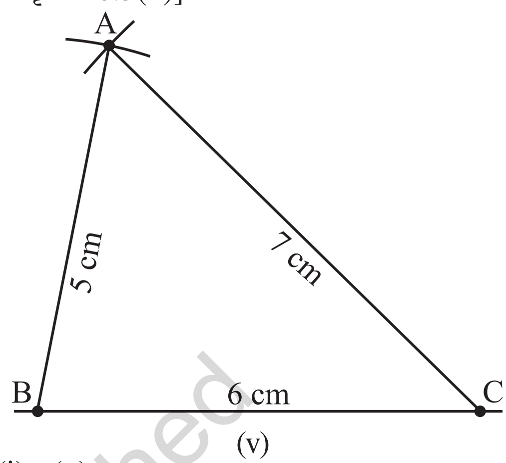


(iv)

© NCERT not to be republished

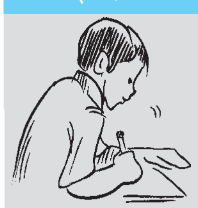
चरण 5 A को खींचे गए इन दोनों चापों पर स्थित होना चाहिए। अतः, यह इन दोनों चापों का प्रतिच्छेद बिंदु है। इन चापों के प्रतिच्छेद बिंदु को A से अंकित कीजिए। AB और AC को जोड़िए। अब ΔABC तैयार है [आकृति 10.3(v)]।





आकृति 10.3 (i) - (v)

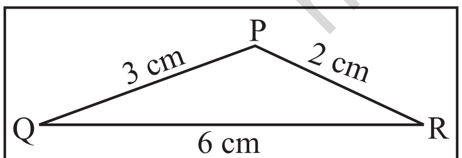
इन्हें कीजिए



आइए अब एक अन्य त्रिभुज DEF की रचना करें, जिसमें DE = 5 cm, EF = 6 cm और DF = 7 cm है। ΔDEF को काट कर उसे ΔABC पर रखिए।

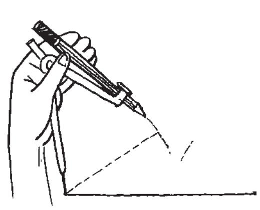
हम देखते हैं कि ΔDEF, ΔABC को पूर्णतया ढक लेता है, अर्थात् उसके साथ संपाती हो जाता है। (ध्यान दीजिए कि इन दोनों त्रिभुजों की रचना दी हुई तीन भुजाओं से की गई है।) इस प्रकार, यदि एक त्रिभुज की तीन भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की संगत तीन भुजाओं के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। यह SSS सर्वांगसमता नियम (या कसौटी) कहलाता है, जिसे आप पिछले अध्याय में पढ़ चुके हैं।

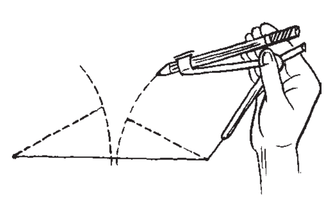
सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए



आकृति 10.4 : सोचिए, क्या यह सही है। सही है?

एक विद्यार्थी ने एक ऐसा त्रिभुज खींचने का प्रयत्न किया, जिसकी रफ़ आकृति यहाँ दी गई है। पहले उसने QR खींचा। फिर उसने Q को केंद्र मान कर और 3 cm त्रिज्या लेकर एक चाप खींची तथा R को केंद्र मान कर और 2 cm त्रिज्या लेकर एक अन्य चाप खींची। परंतु वह P नहीं प्राप्त कर सका। इसका क्या कारण है? इस प्रश्न से संबंधित त्रिभुज के किस गुण को आप जानते हैं? क्या ऐसे त्रिभुज का अस्तित्व है? (त्रिभुजों के इस गुण को याद कीजिए: किसी त्रिभुज की दो भुजाओं का योग सदैव तीसरी भुजा से बड़ा होता है)।





© NCERT not to be republished

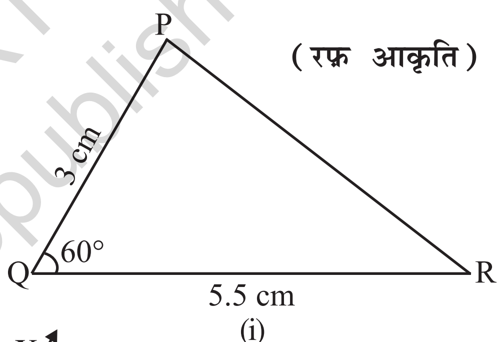
प्रश्नावली 10.2

1. ΔXYZ की रचना कीजिए, जिसमें XY = 4.5 cm, YZ = 5 cm और ZX = 6 cm है।
2. 5.5 cm भुजा वाले एक समबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए।
3. ΔPQR की रचना कीजिए, जिसमें PQ = 4 cm, QR = 3.5 cm और PR = 4 cm है। यह किस प्रकार का त्रिभुज है?
4. ABC की रचना कीजिए, ताकि AB = 2.5 cm, BC = 6 cm और AC = 6.5 cm हो। $\angle B$ को मापिए।

10.5 एक त्रिभुज की रचना जब दो भुजाओं की लंबाइयाँ और उनके बीच के कोण की माप दी हो (SAS कसौटी)

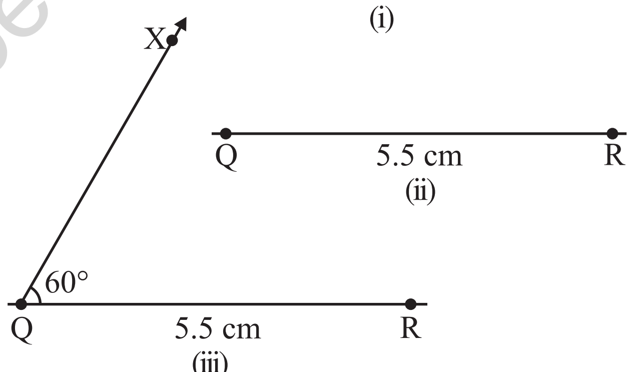
यहाँ, हमें दो भुजाएँ और उनके बीच का कोण दिया हुआ है। पहले हम एक रफ़ आकृति खींचते हैं और फिर दिए हुए रेखाखंडों में से एक रेखाखंड खींचते हैं। इसके बाद अन्य चरणों का अनुसरण किया जाता है। उदाहरण 2 देखिए।

उदाहरण 2 एक त्रिभुज PQR की रचना कीजिए, जब दिया है कि PQ = 3 cm, QR = 5.5 cm और $\angle PQR = 60°$ है।



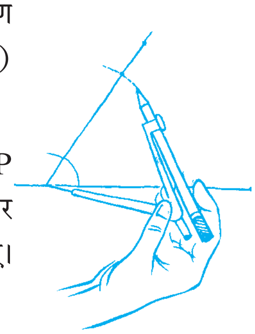
हल

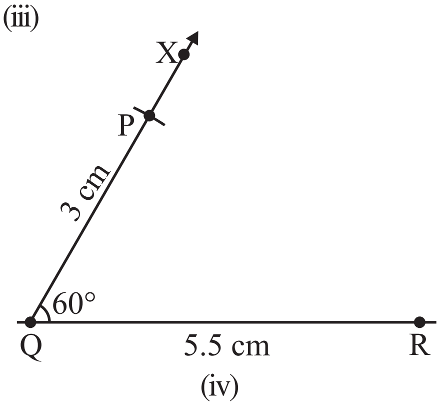
चरण 1 पहले हम दी हुई मापों के अनुसार, एक रफ़ आकृति खींचते हैं। (इससे हमें रचना की प्रक्रिया निर्धारित करने में सहायता मिलेगी) [आकृति 10.5(i)]।



चरण 2 5.5 cm लंबाई का एक रेखाखंड QR खींचिए [आकृति 10.5(ii)]।

चरण 3 Q पर किरण QX खींचिए, जो QR के साथ 60° का कोण बनाए। (बिंदु P कोण की इसी किरण पर कहीं स्थित होगा) [आकृति 10.5(iii)]।

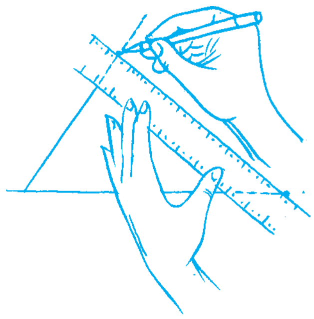


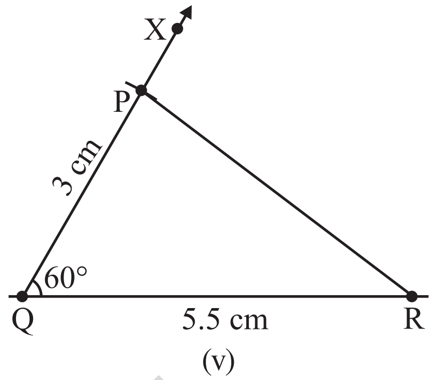


चरण 4 (P को निश्चित करने के लिए, दूरी QP दी हुई है।) Q को केंद्र मान कर 3 cm त्रिज्या वाली एक चाप खींचिए। यह QX को बिंदु P पर काटता है। [आकृति 10.5(iv)]।

© NCERT not to be republished

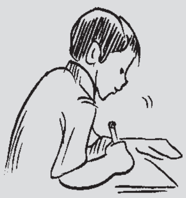
चरण 5 PR को जोड़िए। इस प्रकार, ΔPQR प्राप्त हो जाता है [आकृति 10.5 (v)]।





आकृति 10.5 (i)-(v)

इन्हें कीजिए



आईए अब एक अन्य त्रिभुज ABC की रचना करें ताकि AB = 3 cm, BC = 6.5 cm और ∠ABC = 60° हो। इस ΔABC को काट कर ΔPQR पर रखिए। हम क्या देखते हैं? हम देखते हैं कि ΔABC पूर्णतया ΔPQR के साथ संपाती हो जाता है, अर्थात् उसे ढक लेता है। इस प्रकार, यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएँ और उनके मध्य स्थित (बीच का) कोण एक अन्य त्रिभुज की संगत भुजाओं और उनके मध्य स्थित कोण के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। यह SAS सर्वांगसमता नियम या कसौटी है, जिसे हम पिछले अध्याय में पढ़ चुके हैं। (ध्यान दीजिए कि दोनों त्रिभुजों की रचना दी हुई दो भुजाओं और उनके मध्य स्थित (बीच के) कोण द्वारा की गई है।)

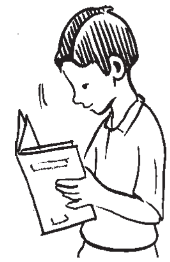
सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

उपरोक्त रचना में, दो भुजाओं की लंबाइयाँ और एक कोण का माप दिया हुआ था। अब, निम्नलिखित समस्या का अध्ययन कीजिए :

एक ΔABC में, यदि AB = 3 cm, AC = 5 cm और ∠C = 30° है, तो क्या हम इस त्रिभुज की रचना कर सकते हैं? हम AC = 5 cm खींच कर, ∠C = 30° खींच सकते हैं। ∠C की एक भुजा CA है। बिंदु B को इस कोण C की दूसरी भुजा पर स्थित होना चाहिए। परंतु, ध्यान दीजिए कि बिंदु B को एक अद्वितीय रूप से निर्धारित नहीं किया जा सकता है। अतः, त्रिभुज ABC की रचना करने के लिए, दिए हुए आँकड़े पर्याप्त नहीं हैं।

अब ΔABC की रचना करने का प्रयत्न कीजिए, जब AB = 3 cm, AC = 5 cm और ∠B = 30° है। हम क्या प्रेक्षित करते हैं? पुनः, ΔABC की रचना अद्वितीय रूप से नहीं की जा सकती है। इस प्रकार, हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि एक अद्वितीय त्रिभुज की रचना तभी की जा सकती है जब उसकी दो भुजाओं की लंबाइयाँ और उनके मध्य स्थित (बीच के) कोण का माप दिया हुआ हो।

प्रश्नावली 10.3



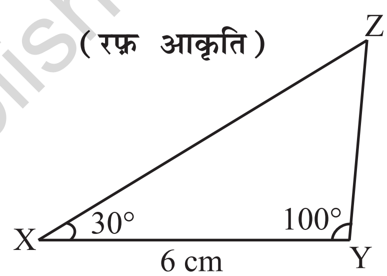
1. ΔDEF की रचना कीजिए, ताकि $DE = 5$ cm, $DF = 3$ cm और $m\angle EDF = 90°$ हो।
2. एक समद्विबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी प्रत्येक समान भुजा की लंबाई 6.5 cm हो और उनके बीच का कोण 110° का हो।
3. $BC = 7.5$ cm और $AC = 5$ cm और $m\angle C = 60°$ वाले ΔABC की रचना कीजिए।

10.6 एक त्रिभुज की रचना जब उसके दो कोणों के माप और इन कोणों के बीच की भुजा की लंबाई दी हो (ASA कसौटी)

जैसा पहले किया था, एक रफ़ आकृति खींचिए। अब, दिया हुआ रेखाखंड खींचिए। दोनों अंत बिंदुओं पर कोण बनाइए। उदाहरण 3 देखिए।

उदाहरण 3 ΔXYZ की रचना कीजिए, यदि, $XY = 6$ cm, $m\angle ZXY = 30°$ और $m\angle XYZ = 100°$ है।

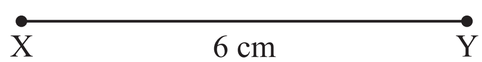
हल



(i)

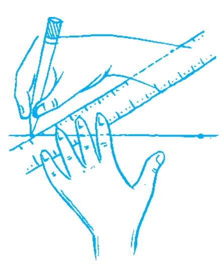
चरण 1 वास्तविक रचना से पहले, हम इस पर अंकित मापों के अनुसार एक रफ़ आकृति खींचते हैं। (इससे कुछ अनुमान लग जाता है कि कैसे रचना की जाए) [आकृति 10.6(i)]।

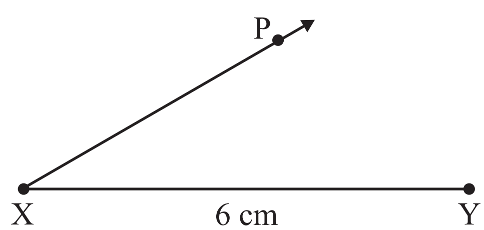
चरण 2 6 cm लंबाई का रेखाखंड XY खींचिए [आकृति 10.6(ii)]।



(ii)

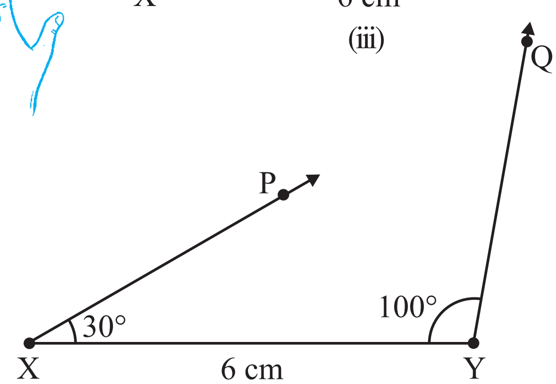
चरण 3 X पर एक किरण XP खींचिए जो XY से 30° का कोण बनाए। दिए हुए प्रतिबंध के अनुसार बिंदु Z किरण XP पर कहीं स्थित होना चाहिए [आकृति 10.6(iii)]।





(iii)

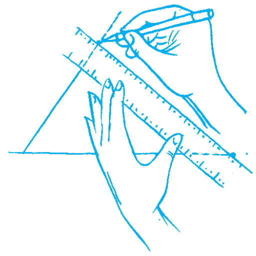
चरण 4 Y पर एक किरण YQ खींचिए, जो YX से 100° का कोण बनाए। दिए हुए प्रतिबंध के अनुसार Z किरण YQ पर भी अवश्य स्थित होना चाहिए [आकृति 10.6(iv)]।

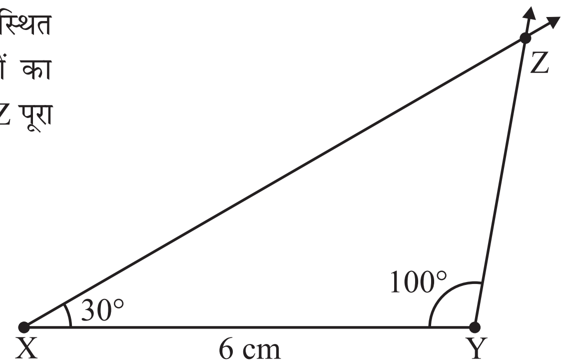


(iv)

© NCERT not to be republished

चरण 5 Z को दोनों किरणों XP और YQ पर स्थित होना चाहिए। अतः, इन दोनों किरणों का प्रतिच्छेद बिंदु ही Z है। अब ΔXYZ पूरा बन जाता है [आकृति 10.6(v)]।





(v)

आकृति 10.6 (i) - (v)

इन्हें कीजिए

अब एक अन्य त्रिभुज LMN खींचिए, जिसमें m∠NLM = 30°, LM = 6 cm और m∠NML = 100° हो। इस त्रिभुज LMN को काटकर त्रिभुज XYZ पर रखिए। हम देखते हैं कि त्रिभुज LMN त्रिभुज XYZ के साथ पूर्णतया संपाती हो जाता है। इस प्रकार, यदि एक त्रिभुज के दो कोण और उनके मध्य स्थित भुजा दूसरे त्रिभुज के संगत दो कोणों और उनके मध्य स्थित भुजा के बराबर हो, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। यह ASA सर्वांगसमता नियम या कसौटी है, जिसे आप पिछले अध्याय में पढ़ चुके हैं। (ध्यान दीजिए कि यहाँ दो त्रिभुजों की रचना की गई है, जब दो कोण और उनके मध्य स्थित भुजा दी गई है।)

© NCERT not to be republished

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

उपरोक्त उदाहरण में, एक भुजा की लंबाई और दो कोणों के माप दिए गए थे। अब निम्नलिखित समस्या का अध्ययन कीजिए :

ΔABC, में, यदि AC = 7 cm, m∠A = 60° और m∠B = 50° है, तो क्या आप त्रिभुज की रचना कर सकते हैं? (त्रिभुज का कोण योग गुण आपकी सहायता कर सकता है!)

प्रश्नावली 10.4

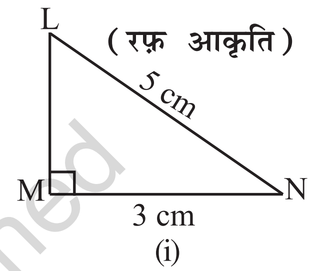
1. ΔABC, की रचना कीजिए, जब m∠A = 60°, m∠B = 30° और AB = 5.8 cm दिया है।
2. ΔPQR की रचना कीजिए, यदि PQ = 5 cm, m∠PQR = 105° और m∠QRP = 40° दिया है।

   (संकेत : त्रिभुज के कोण योग गुण को याद कीजिए)।
3. जाँच कीजिए कि आप ΔDEF की रचना कर सकते हैं या नहीं, यदि EF = 7.2 cm, m∠E = 110° और m∠F = 80° है। अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

10.7 एक समकोण त्रिभुज की रचना, जब उसके एक पाद (भुजा) और कर्ण की लंबाईयाँ दी हुई हों। (RHS कसौटी)

यहाँ, रफ़ आकृति बनाना सरल है। अब दी हुई भुजा के अनुसार, एक रेखाखंड खींचिए। इसके एक अंतः बिंदु पर एक समकोण बनाइए। त्रिभुज की दी हुई लंबाइयों की भुजा और कर्ण खींचने के लिए परकार का प्रयोग कीजिए। त्रिभुज को पूरा कीजिए। निम्नलिखित उदाहरण पर विचार कीजिए :

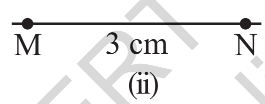
उदाहरण 4 ΔLMN की रचना कीजिए, जिसका $\angle$LMN समकोण है तथा दिया है कि LN = 5 cm और MN = 3 cm ।



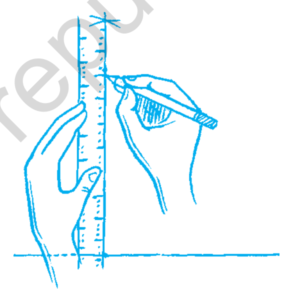
हल

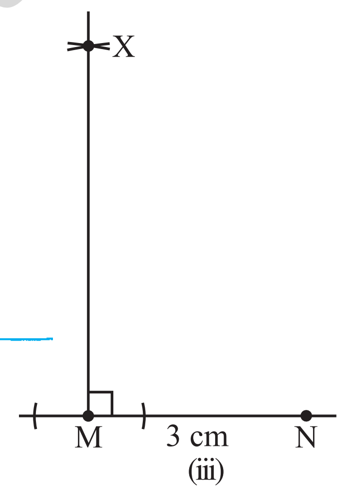
चरण 1 एक रफ़ आकृति खींचिए और उस पर दिए हुए माप को अंकित कीजिए। समकोण अंकित करना याद रखिए (आकृति 10.7(i))।

चरण 2 3 cm लंबाई का रेखाखंड MN खींचिए। [आकृति 10.7(ii)]

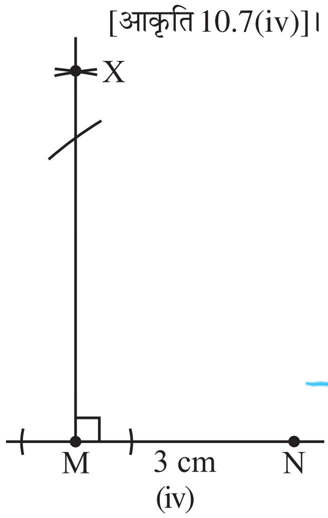


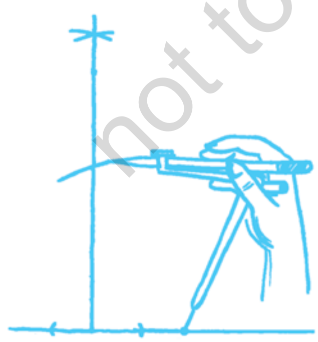
चरण 3 M पर MX ⊥ MN खींचिए। (L इसी लंब पर कहीं स्थित होना चाहिए) [आकृति 10.7(iii)]।



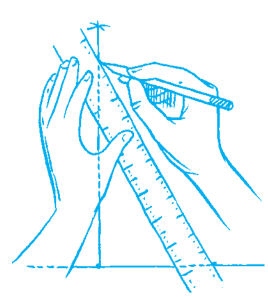


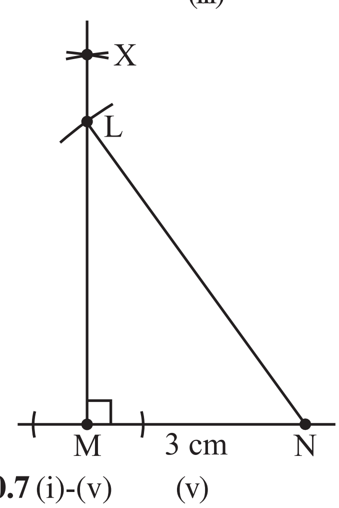
चरण 4 N को केंद्र मानकर, 5 cm त्रिज्या का एक चाप खींचिए।(L इसी चाप पर स्थित होना चाहिए, क्योंकि यह N से 5 cm की दूरी पर है) [आकृति 10.7(iv)]।





चरण 5 L को लंब रेखा MX पर और केंद्र N वाले चाप पर स्थित होना चाहिए। अतः, L इन दोनों का प्रतिच्छेद बिंदु होगा। LN को जोड़िए। अब ΔLMN प्राप्त हो जाता है। [आकृति 10.7(v)]।





आकृति 10.7 (i)-(v)

© NCERT not to be republished

प्रश्नावली 10.5

1. समकोण ΔPQR की रचना कीजिए, जहाँ $m\angle Q = 90°$, $QR = 8$ cm और $PR = 10$ cm है।

2. एक समकोण त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसका कर्ण 6 cm लंबा है और एक पाद 4 cm लंबा है।

3. एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जहाँ $m\angle ACB = 90°$ है और $AC = 6$ cm है।

विविध प्रश्न

नीचे कुछ त्रिभुजों की भुजाओं और कोणों के माप दिए गए हैं। इनमें से उनकी पहचान कीजिए, जिनकी रचना नहीं की जा सकती तथा यह भी बताइए कि आप इनकी रचना क्यों नहीं कर सकते। शेष त्रिभुजों की रचना कीजिए।

	त्रिभुज	दिए हुए माप		
1.	ΔABC	$m\angle A = 85°$,	$m\angle B = 115°$,	$AB = 5$ cm
2.	ΔPQR	$m\angle Q = 30°$,	$m\angle R = 60°$,	$QR = 4.7$ cm
3.	ΔABC	$m\angle A = 70°$,	$m\angle B = 50°$,	$AC = 3$ cm
4.	ΔLMN	$m\angle L = 60°$,	$m\angle N = 120°$]	$LM = 5$ cm
5.	ΔABC	$BC = 2$ cm,	$AB = 4$ cm,	$AC = 2$ cm
6.	ΔPQR	$PQ = 3.5$ cm,	$QR = 4$ cm,	$PR = 3.5$ cm
7.	ΔXYZ	$XY = 3$ cm,	$YZ = 4$ cm,	$XZ = 5$ cm
8.	ΔDEF	$DE = 4.5$ cm,	$EF = 5.5$ cm,	$DF = 4$ cm

© NCERT not to be republished

हमने क्या चर्चा की?

इस अध्याय में हमने पैमाना (रूलर) और परकार की कुछ रचनाओं की विधियों का अध्ययन किया है।

1. एक दी हुई रेखा और ऐसे बिंदु के लिए जो इस रेखा पर स्थित नहीं है, हमने तिर्यक छेदी रेखा आकृति में, रेखा के समांतर एक रेखा खींचने के लिए समान एकांतर कोणों की अवधारणा का उपयोग किया है।

इस रचना के लिए हम समान संगत कोणों की अवधारणा का उपयोग भी कर सकते हैं।

2. त्रिभुजों की सर्वांगसमता की संकल्पना का अप्रत्यक्ष रूप से उपयोग करते हुए हमने त्रिभुज की रचना की विधि का अध्ययन किया है।

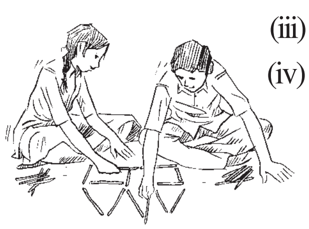
इस अध्याय में निम्नलिखित उदाहरणों की चर्चा की गई है।

(i) SSS: त्रिभुज की तीन भुजाओं की लंबाई दी हुई है।

(ii) SAS: किन्हीं दो भुजाओं की लंबाई और इन भुजाओं के मध्य स्थित कोण का माप दिया हुआ है।

(iii) ASA: दो कोणों के माप और इनके मध्य स्थित भुजा की लंबाई दी हुई है।

(iv) RHS: समकोण त्रिभुज के कर्ण एवं एक पाद की लंबाई दी हुई है।



अध्याय 11

परिमाप और क्षेत्रफल

0757CH11

11.1 भूमिका

आप तल में बनी आकृतियों का परिमाप तथा वर्ग और आयत के क्षेत्रफलों के बारे में कक्षा VI में पढ़ चुके हैं। परिमाप एक बंद आकृति के चारों ओर की दूरी है जबकि क्षेत्रफल एक बंद आकृति द्वारा घेरे गए तल के भाग या क्षेत्र को दर्शाता है। इस कक्षा में आप कुछ और तल की आकृतियों के परिमाप और क्षेत्रफल के बारे में सीखेंगे।

11.2 वर्ग और आयत

आयुष और दीक्षा दोनों चित्र बनाते हैं। आयुष ने एक चित्र 60 cm लंबाई तथा 20 cm चौड़ाई वाली एक आयताकार शीट पर बनाया जबकि दीक्षा ने एक चित्र 40 cm लंबाई तथा 35 cm चौड़ाई वाली एक आयताकार शीट पर बनाया। इन दोनों चित्रों को अलग-अलग फ्रेम तथा लेमिनेट कराना है।

यदि फ्रेम कराने का खर्च ₹ 3.00 प्रति cm हो तो कौन-से चित्र को फ्रेम कराने के लिए अधिक रुपये खर्च करने पड़ेंगे?

यदि लेमिनेशन पर खर्च की दर ₹ 2.00 प्रति cm^2 हो तो किसके चित्र के लेमिनेशन पर अधिक खर्च करना पड़ेगा?

फ्रेम पर कुल व्यय ज्ञात करने के लिए हमें उनका परिमाप ज्ञात करके, फ्रेम कराने की दर से गुणा करने की आवश्यकता होगी। इसी प्रकार, लेमिनेशन पर कुल व्यय ज्ञात करने के लिए हमें उसका क्षेत्रफल ज्ञात करके उसे लेमिनेशन कराने की दर से गुणा करने की आवश्यकता होगी।

इन्हें कीजिए

नीचे दिए गए प्रश्नों के उत्तर देने के लिए आपको क्षेत्रफल या परिमाप में से किसको ज्ञात करने की आवश्यकता होगी।

1. एक श्यामपट कितनी जगह घेरता है?

2. एक आयताकार फूलों की क्यारी के चारों ओर बाड़ लगाने के लिए आवश्यक तार की लंबाई क्या है?

© NCERT not to be republished

3. एक तिकोने पार्क के चारों ओर दो बार चक्कर लगाने पर आप कितनी दूरी तय करेंगे?
4. एक आयताकार स्वीमिंग पूल को ढकने के लिए आपको कितनी प्लास्टिक शीट की आवश्यकता होगी?

क्या आप जानते हैं,

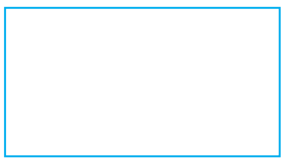
समबहुभुज का परिमाप = भुजाओं की संख्या × एक भुजा की लंबाई

वर्ग का परिमाप = 4 × भुजा

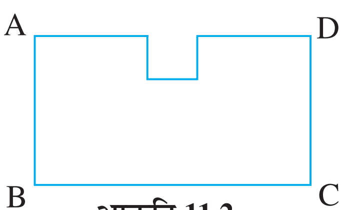
आयत का परिमाप = $2 \times (l + b)$

आयत का क्षेत्रफल = $l \times b$

वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा

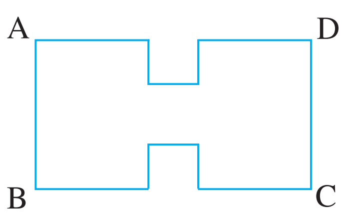

आकृति 11.1

तान्या को एक कोलाज़ (collage) को पूरा करने के लिए एक 4 cm भुजा वाले वर्ग की आवश्यकता थी। उसके पास 28 cm लंबाई तथा 21 cm चौड़ाई वाली एक आयताकार शीट थी (आकृति 11.1)। उसने इस आयताकार शीट में से एक 4 cm भुजा वाले एक वर्ग को काटा। उसकी सहेली ने शीट के शेष भाग को देखा (आकृति 11.2) और तान्या से पूछा, 'क्या शीट का परिमाप अब बढ़ गया है या कम हो गया है'?



आकृति 11.2

क्या भुजा AD की कुल लंबाई, वर्ग काटने के उपरांत बढ़ गई है?
क्या क्षेत्रफल बढ़ गया है या कम हो गया है?
तान्या सम्मुख भुजा में से एक और वर्ग काटती है (आकृति 11.3)।
क्या शीट के शेष भाग का परिमाप पहले से और अधिक हो जाएगा?
क्या क्षेत्रफल पहले से और अधिक बढ़ेगा या कम होगा?
अतः, यहाँ से हम क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?



आकृति 11.3

इससे यह स्पष्ट है कि परिमाप के बढ़ाए जाने पर क्षेत्रफल का बढ़ना आवश्यक नहीं है।

इन्हें कीजिए

1. ऐसी बहुत सारी आकृतियों और काटी गई आकृतियों पर प्रयोग कीजिए।
   आप इनका उपयोग इन आकृतियों को वर्गांकित शीटों पर बनाकर क्षेत्रफल और परिमाप ज्ञात करने के लिए कर सकेंगे। आप यह जान चुके हैं कि परिमाप में बढ़त का यह अर्थ नहीं है कि उसका क्षेत्रफल भी बढ़ेगा।
2. दो ऐसे उदाहरण दीजिए जहाँ परिमाप के बढ़ने पर उसका क्षेत्रफल भी बढ़ जाए।
3. ऐसे दो उदाहरण दीजिए जहाँ परिमाप के बढ़ने पर उसके क्षेत्रफल में बढ़ोतरी न हो।

उदाहरण 1 10 m × 10 m माप वाली एक दीवार में 3 m × 2 m माप वाले एक दरवाज़े का फ्रेम (चौखट) लगाया जाना है। यदि 1 m^2 दीवार पर पेंट कराने की मज़दूरी ₹ 2.50 हो तो पूरी दीवार पर पेंट कराने का कुल मज़दूरी खर्च ज्ञात कीजिए।

हल दीवार पर पेंट, दरवाज़े के क्षेत्रफल को छोड़कर होगा।

© NCERT not to be republished

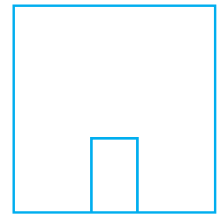
दरवाज़े का क्षेत्रफल = $l \times b$

= $3\text{ m} \times 2\text{ m} = 6\text{ m}^2$

दरवाज़े सहित, दीवार का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा = $10\text{ m} \times 10\text{ m} = 100\text{ m}^2$

दरवाज़े को छोड़कर, दीवार का क्षेत्रफल = $(100 - 6)\text{ m}^2 = 94\text{ m}^2$

दीवार पर पेंट कराने की कुल मज़दूरी = $2.50 \times 94 = 235$ रु



आकृति 11. 4

उदाहरण 2 एक आयताकार शीट का क्षेत्रफल 500 cm^2 है। यदि शीट की लंबाई 25 cm हो तो इसकी चौड़ाई क्या होगी? आयताकार शीट का परिमाप भी ज्ञात कीजिए।

हल आयताकार शीट का क्षेत्रफल = 500 cm^2

लंबाई (l) = 25 cm

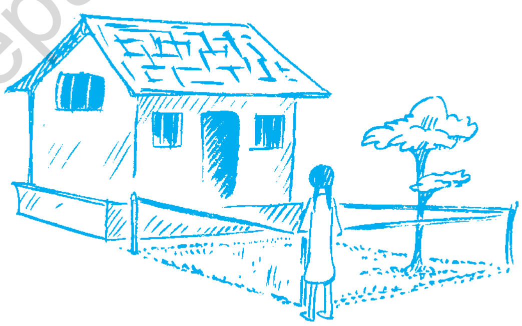
आयत का क्षेत्रफल = $l \times b$ (जहाँ b = शीट की चौड़ाई)

इसलिए, चौड़ाई $b = \dfrac{\text{क्षेत्रफल}}{l} = \dfrac{500}{25} = 20\text{ cm}$

शीट का परिमाप = $2 \times (l + b) = 2 \times (25 + 20)\text{ cm} = 90\text{ cm}$

इस प्रकार, आयताकार शीट की चौड़ाई 20 cm तथा इसका परिमाप 90 cm है।

उदाहरण 3 अनु अपने घर के सामने वाले बगीचे के तीनों ओर बाड़ लगाना चाहती है (आकृति 11.5)। इनमें से एक बाजू की लंबाई 20 m तथा बाकी प्रत्येक बाजू की लंबाई 12 m है। ₹ 150 प्रति मीटर की दर से बाड़ लगाने पर व्यय ज्ञात कीजिए।



आकृति 11.5

हल बाड़ की आवश्यक लंबाई बगीचे का वह परिमाप है जिसमें एक भुजा सम्मिलित नहीं है। यह 20 m + 12 m + 12 m यानि 44 m के बराबर है।

बाड़ लगाने पर व्यय = ₹ 150×44 = ₹ 6600

उदाहरण 4 एक तार 10 cm भुजा वाले वर्ग के आकार की है। यदि तार को दुबारा मोड़ कर एक 12 cm लंबाई वाला आयत बनाया जाता है, तो इसकी चौड़ाई ज्ञात कीजिए। किसका क्षेत्रफल अधिक होगा, वर्ग का या आयत का?

हल वर्ग की भुजा = 10 cm

तार की लंबाई = वर्ग का परिमाप = 4 × भुजा = 4×10 cm

= 40 cm

आयत की लंबाई l = 12 cm, b को आयत की चौड़ाई मान लीजिए

आयत का परिमाप = तार की लंबाई = 40 cm

आयत का परिमाप = $2\,(l + b)$

© NCERT not to be republished

इस प्रकार $40 = 2\,(12 + b)$

या $\frac{40}{2} = 12 + b$

इसलिए $b = 20 - 12 = 8$ cm

आयत की चौड़ाई 8 cm है।

वर्ग का क्षेत्रफल = (भुजा)^2

= 10 cm × 10 cm = 100 cm^2

आयत का क्षेत्रफल = $l \times b$

= 12 cm × 8 cm = 96 cm^2

अतः, वर्ग अधिक क्षेत्रफल घेरता है यद्यपि इसका परिमाप आयत के परिमाप के बराबर है।

उदाहरण 5 एक वर्ग और एक आयत का क्षेत्रफल समान है। यदि वर्ग की भुजा 40 cm हो और आयत की चौड़ाई 25 cm हो तो आयत की लंबाई ज्ञात कीजिए। आयत का परिमाप भी ज्ञात कीजिए।

हल वर्ग का क्षेत्रफल = (भुजा)^2

= 40 cm × 40 cm = 1600 cm^2

यह दिया है कि

आयत का क्षेत्रफल = वर्ग का क्षेत्रफल

आयत का क्षेत्रफल = 1600 cm^2

आयत की चौड़ाई = 25 cm

आयत का क्षेत्रफल = $l \times b$

या $1600 = l \times 25$

या $\frac{1600}{25} = l$

या $l = 64$ cm

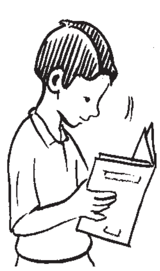
अतः, आयत की लंबाई 64 cm है।

आयत का परिमाप = $2\,(l + b) = 2\,(64 + 25)$ cm

= 2 × 89 cm = 178 cm

इस प्रकार, आयत का परिमाप 178 cm है यद्यपि इसका क्षेत्रफल वर्ग के क्षेत्रफल के बराबर है।

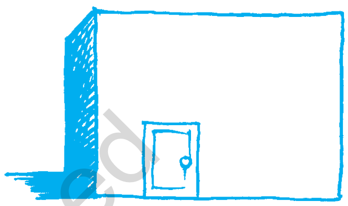
प्रश्नावली 11. 1



1. एक आयताकार भूखंड की लंबाई और चौड़ाई क्रमशः 500 m तथा 300 m हैं। ज्ञात कीजिए :
   (i) भूखंड का क्षेत्रफल (ii) भूखंड का मूल्य, यदि 1 m^2 का मूल्य ₹ 10,000 है।
2. एक वर्गाकार पार्क का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका परिमाप 320 m है।
3. एक आयताकार भूखंड की चौड़ाई ज्ञात कीजिए यदि इसका क्षेत्रफल 440 m^2 और लंबाई 22 m हो। इसका परिमाप भी ज्ञात कीजिए।

© NCERT not to be republished

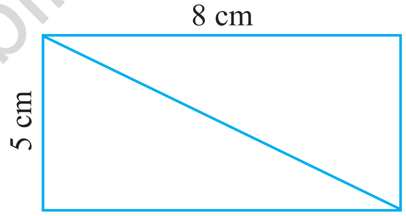
4. एक आयताकार शीट का परिमाप 100 cm है। यदि लंबाई 35 cm हो तो इसकी चौड़ाई ज्ञात कीजिए। क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए।
5. एक वर्गाकार पार्क का क्षेत्रफल एक आयताकार पार्क के बराबर है। यदि वर्गाकार पार्क की एक भुजा 60 m हो और आयताकार पार्क की लंबाई 90 m हो तो आयताकार पार्क की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।
6. एक तार आयत के आकार का है। इसकी लंबाई 40 cm और चौड़ाई 22 cm है। यदि उसी तार को दुबारा मोड़कर एक वर्ग बनाया जाता है तो प्रत्येक भुजा की माप क्या होगी? यह भी ज्ञात कीजिए की किस आकार का क्षेत्रफल अधिक होगा?
7. एक आयत का परिमाप 130 cm है। यदि आयत की चौड़ाई 30 cm हो तो आयत की लंबाई ज्ञात कीजिए। आयत का क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए।
8. 2 m लंबाई और 1 m चौड़ाई वाले दरवाज़े को एक दीवार में लगाया जाता है। दीवार की लंबाई 4.5 m तथा चौड़ाई 3.6 m है (आकृति 11.6). ₹ 20 प्रति m^2 की दर से दीवार पर सफ़ेदी (white wash) कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।



आकृति 11.6

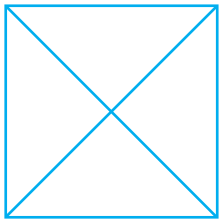
11.2.1 आयत के भाग के रूप में त्रिभुज

8 सेमी और 5 सेमी भुजाओं वाला एक आयत लीजिए। आयत को विकर्ण के अनुदिश ऐसा काटिए जिससे दो त्रिभुज प्राप्त हों(आकृति 11.7)।
एक त्रिभुज को दूसरे पर रखिए।
क्या ये दोनों पूर्णतया समान माप के हैं?
क्या आप कह सकते है कि दोनों त्रिभुजों का क्षेत्रफल बराबर है?
क्या ये त्रिभुज सवार्गसम भी हैं?
इनमें से प्रत्येक त्रिभुज का क्षेत्रफल कितना है?
आप देखेंगे कि दोनों त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का योगफल आयत के क्षेत्रफल के बराबर है।



आकृति 11.7

$$\text{प्रत्येक त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}(\text{आयत का क्षेत्रफल})$$
$$= \frac{1}{2}\times(l\times b) = \frac{1}{2}(8\times 5)$$
$$= \frac{40}{2} = 20\ cm^2$$



आकृति 11.8

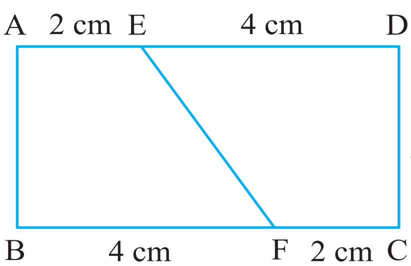
अब एक 5 cm भुजा वाला वर्ग लीजिए और इसे 4 त्रिभुजों में बाँटिए जैसा कि आकृति में दिखाया गया है (आकृति 11.8)।
क्या चारों त्रिभुजों का क्षेत्रफल बराबर है?
क्या वे एक दूसरे के सर्वांगसम हैं? (त्रिभुजों को एक-दूसरे पर रख कर जाँचिए)
प्रत्येक त्रिभुज का क्षेत्रफल क्या है?

$$\text{प्रत्येक त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{4}\ (\text{वर्ग का क्षेत्रफल})$$
$$= \frac{1}{4}\ (\text{भुजा})^2 = \frac{1}{4}\ (5)^2\ cm^2 = 6.25\ cm^2$$

© NCERT not to be republished

11.2.2 आयतों के अन्य सर्वांगसम भागों के लिए व्यापीकरण

6 cm लंबाई और 4 cm चौड़ाई वाले एक आयत को दो भागों में बाँटा गया है जैसा आकृति में दिखाया है (आकृति 11.9)। आयत को दूसरे कागज़ पर ट्रेस कीजिए और आयत को EF के अनुदिश काटकर, दो भागों में बाँटिए।



आकृति 11.9

एक भाग को दूसरे पर रखिए और देखिए कि क्या वे एक दूसरे को पूर्णतया ढकते हैं। (आपको इन्हें घुमाना भी पड़ सकता है।)

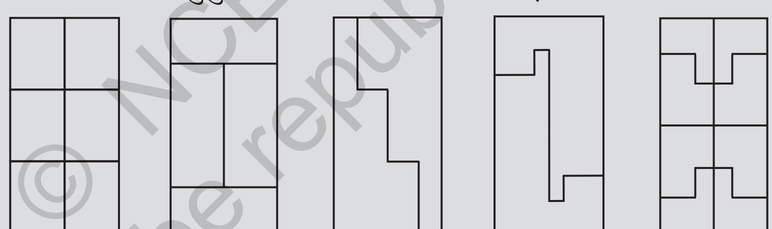
क्या ये सर्वांगसम हैं? दोनों भाग एक-दूसरे से सर्वांगसम हैं। इस प्रकार, एक भाग का क्षेत्रफल दूसरे भाग के क्षेत्रफल के बराबर है।

इसलिए, प्रत्येक सर्वांगसम भाग का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ (आयत का क्षेत्रफल)

$$= \frac{1}{2} \times (6 \times 4)\ \text{cm}^2 = 12\ \text{cm}^2$$

इन्हें कीजिए

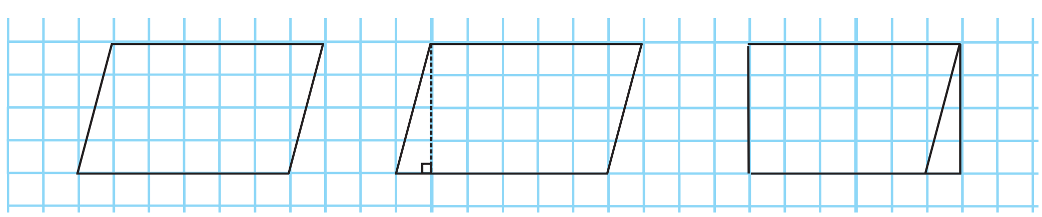
नीचे दिए गए प्रत्येक आयत जिसकी लंबाई 6 cm और चौड़ाई 4 cm है, सर्वांगसम बहुभुजों से मिलकर बने हैं। प्रत्येक बहुभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



11.3 समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल

हमें वर्ग और आयत के अतिरिक्त बहुत से दूसरे आकार देखने को मिलते हैं।
आप एक भूखंड का क्षेत्रफल कैसे ज्ञात करेंगे जिसका आकार समांतर चतुर्भुज जैसा है?
आइए समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल प्राप्त करने की एक विधि ज्ञात करें।
क्या एक समांतर चतुर्भुज को एक समान क्षेत्रफल वाले आयत में रूपांतरित किया जा सकता है?

ग्राफ़ पेपर पर एक समांतर चतुर्भुज बनाइए जैसाकि आकृति [11.10(i)] में दिखाया गया है। इस समांतर चतुर्भुज को काटिए। समांतर चतुर्भुज के एक शीर्ष से इसकी सम्मुख भुजा पर एक लंब खींचिए [आकृति 11.10(ii)]। इस त्रिभुज को काट लीजिए और इस त्रिभुज को समांतर चतुर्भुज की दूसरी भुजा के साथ रखिए [आकृति 11.10(iii)]।


(i) (ii) (iii)

आकृति 11.10

© NCERT not to be republished

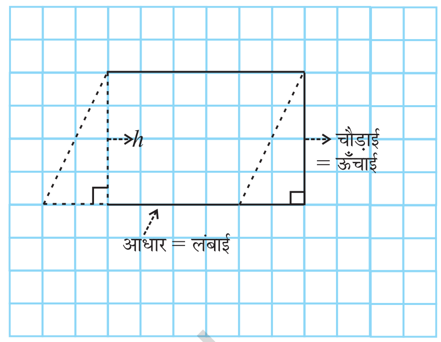
आप कैसा आकार प्राप्त करते हैं? आप एक आयत प्राप्त करते हैं।

क्या समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल बनाए गए आयत के क्षेत्रफल के बराबर है?

हाँ, समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = बनाए गए आयत का क्षेत्रफल

आयत की लंबाई और चौड़ाई क्या है?

हमने देखा कि बनाए गए आयत की लंबाई, समांतर चतुर्भुज के आधार की लंबाई के बराबर है और आयत की चौड़ाई, समांतर चतुर्भुज की ऊँचाई के बराबर है (आकृति 11.11)।



आकृति 11.11

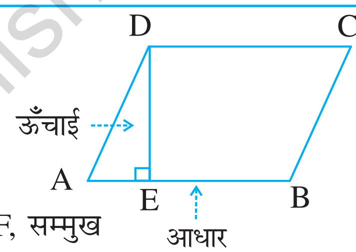
अब, समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आयत का क्षेत्रफल

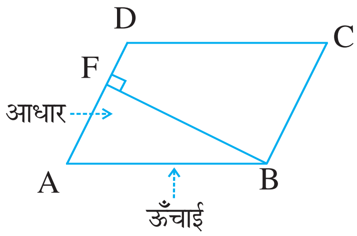
= लंबाई × चौड़ाई = $l \times b$

लेकिन आयत की लंबाई l तथा चौड़ाई b क्रमश: समांतर चतुर्भुज का आधार b और ऊँचाई h ही है।

इस प्रकार, समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई = $b \times h$

समांतर चतुर्भुज की किसी भी भुजा को **आधार** ले सकते हैं। इस भुजा पर, सम्मुख शीर्ष से डाला गया लंब, इसकी **ऊँचाई** कहलाती है। समांतर चतुर्भुज ABCD में DE, AB पर लंब है। यहाँ AB आधार तथा DE समांतर चतुर्भुज की ऊँचाई है।

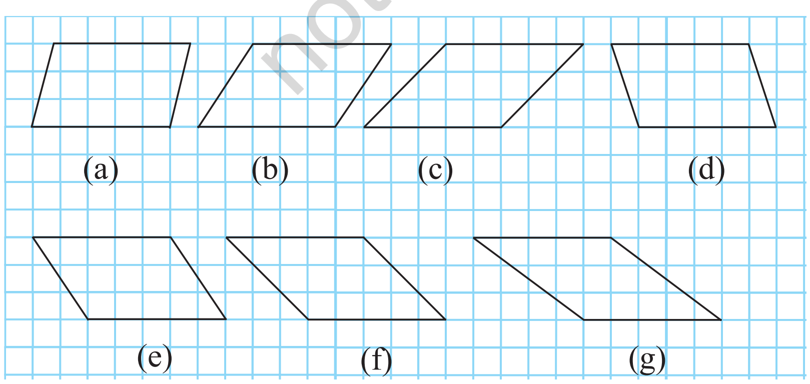




इस समांतर चतुर्भुज ABCD में, BF, सम्मुख भुजा AD पर डाला गया लंब है। यहाँ AD **आधार** तथा BF **ऊँचाई** है।

© NCERT not to be republished

निम्न समांतर चतुर्भुजों के बारे में सोचिए (आकृति 11.12)।



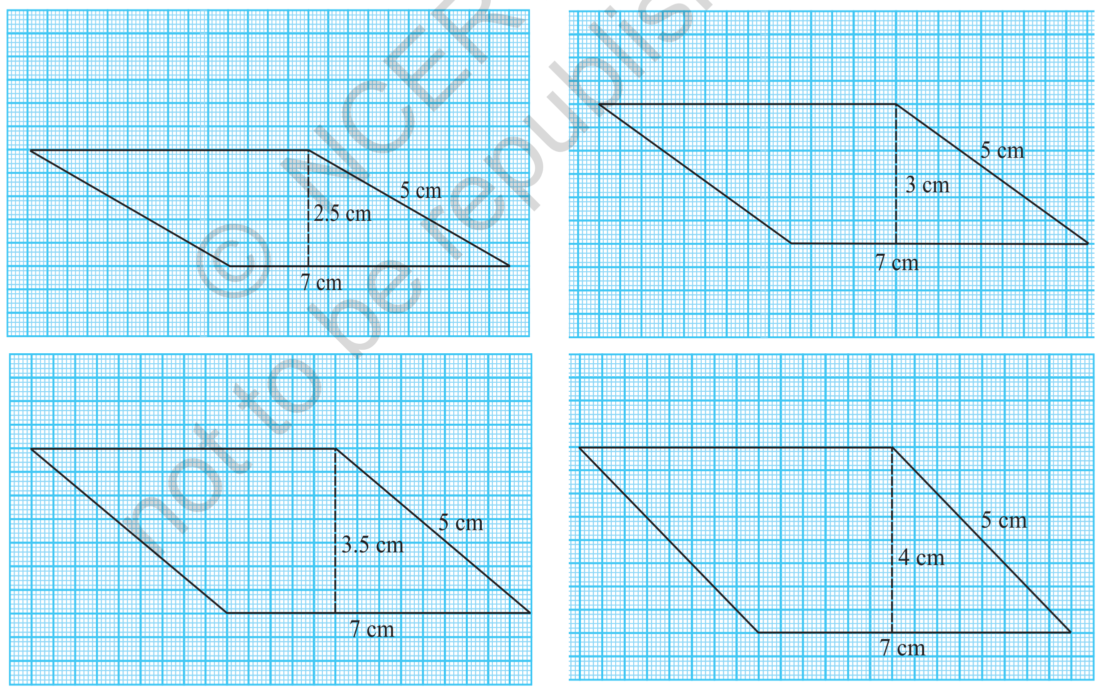
आकृति 11.12

आकृतियों द्वारा घेरे गए वर्गों की संख्या को गिन कर, समांतर चतुर्भुजों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए और भुजाओं को माप कर परिमाप भी ज्ञात कीजिए।

निम्न तालिका को पूरा कीजिए :

समांतर चतुर्भुज	आधार	ऊँचाई	क्षेत्रफल	परिमाप
(a)	5 इकाई	3 इकाई	15 वर्ग इकाई	
(b)				
(c)				
(d)				
(e)				
(f)				
(g)				

आप दखेंगे कि इन सभी समांतर चतुर्भुजों का क्षेत्रफल तो समान है परंतु परिमाप अलग-अलग हैं। अब, निम्न 7 cm तथा 5 cm भुजाओं वाले समांतर चतुर्भुजों को देखते हैं (आकृति 11.13)।



© NCERT not to be republished

आकृति 11.13

प्रत्येक समांतर चतुर्भुज का परिमाप तथा क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। अपने परिणाम का विश्लेषण कीजिए।

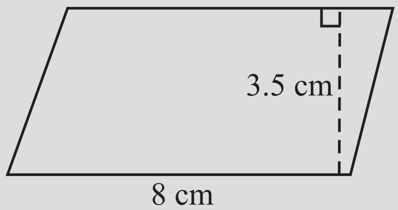
आप देखेंगे कि इन समांतर चतुर्भुजों का क्षेत्रफल अलग-अलग हैं लेकिन परिमाप समान हैं।

समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए आपको समांतर चतुर्भुज का आधार तथा संगत ऊँचाई को ज्ञात करने की आवश्यकता है।

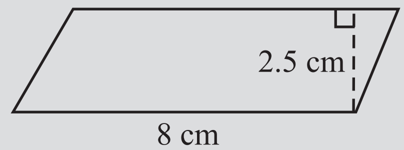
इन्हें कीजिए

निम्न समांतर चतुर्भुजों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए

(i)

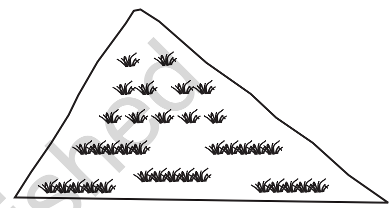


(ii)



(iii) समांतर चतुर्भुज ABCD में AB = 7.2 cm और C से AB पर लंब 4.5 cm है।

11.4 एक त्रिभुज का क्षेत्रफल



एक माली पूरे तिकोने पार्क पर घास लगाने का व्यय जानना चाहता है। इस स्थिति में हमें त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करने की आवश्यकता है। आइए एक त्रिभुज के क्षेत्रफल को प्राप्त करने की विधि ज्ञात करें।

कागज़ के एक टुकड़े पर एक विषमबाहु त्रिभुज बनाइए। इस त्रिभुज को काट लीजिए। इस त्रिभुज को दूसरे कागज़ के टुकड़े पर रखिए और समान माप का एक ओर त्रिभुज काटिए। इस प्रकार अब आपके पास समान माप के दो विषमबाहु त्रिभुज हैं। क्या दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं?

एक त्रिभुज को दूसरे पर रखिए जिससे वे एक-दूसरे को पूर्ण रूप से ढक लें। आप दोनों में से एक त्रिभुज को घुमा भी सकते हैं।

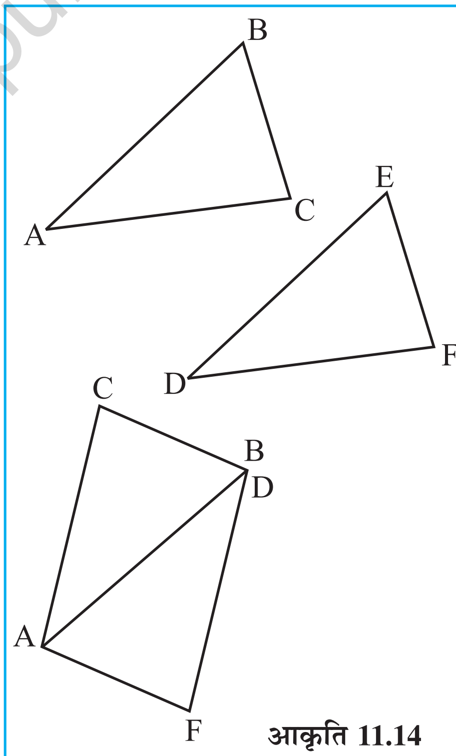
अब दोनों त्रिभुजों को इस प्रकार आपस में रखिए जिससे उनकी संगत भुजाओं का एक युग्म आपस में मिल जाएँ (जैसा आकृति 11.14 में दिखाया गया है)।

क्या इस प्रकार से बनी आकृति एक समांतर चतुर्भुज है?

प्रत्येक त्रिभुज के क्षेत्रफल की तुलना समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल से कीजिए।

त्रिभुजों के आधार तथा ऊँचाई की तुलना समांतर चतुर्भुज के आधार तथा ऊँचाई से कीजिए।

आप देखेंगे कि दोनों त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का योगफल समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल के बराबर है। त्रिभुज का आधार और ऊँचाई क्रमशः समांतर चतुर्भुज के आधार और ऊँचाई के बराबर है।



आकृति 11.14

प्रत्येक त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ (समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल)

$= \frac{1}{2}$ (आधार × ऊँचाई) (क्योंकि, समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई)

$= \frac{1}{2}(b \times h)$ (या $\frac{1}{2}bh$, संक्षेप में)

© NCERT not to be republished

इन्हें कीजिए

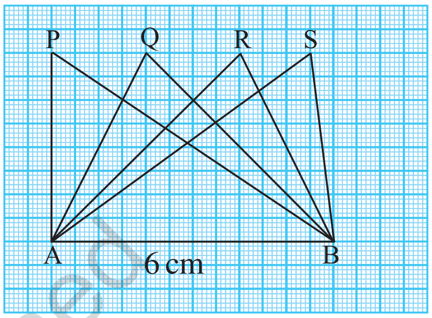
1. ऊपर दिए गए क्रियाकलापों को अलग-अलग प्रकार के त्रिभुज लेकर कीजिए।
2. अलग-अलग प्रकार के समांतर चतुर्भुज लीजिए। प्रत्येक समांतर चतुर्भुज को दो त्रिभुजों में एक विकर्ण के अनुदिश काटिए। क्या ये त्रिभुज सर्वांगसम हैं।

आकृति (11.15) में सभी त्रिभुज, आधार AB = 6 cm पर स्थित हैं।

आधार AB पर प्रत्येक त्रिभुज की संगत ऊँचाई के बारे में आप क्या कह सकते हैं?

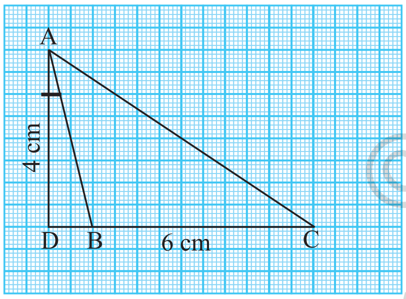
क्या हम कह सकते हैं कि सभी त्रिभुजों का क्षेत्रफल बराबर है? हाँ।

क्या त्रिभुज सर्वांगसम हैं? नहीं।



आकृति 11 .15

हम निष्कर्ष निकालते हैं कि **सभी सर्वांगसम त्रिभुजों का क्षेत्रफल बराबर होता है लेकिन यह आवश्यक नहीं है कि वे त्रिभुज जिनका क्षेत्रफल बराबर होता है वे सर्वांगसम हैं।**



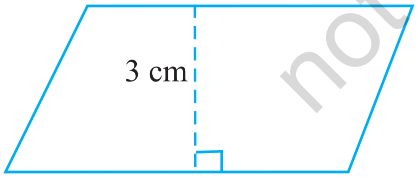
आकृति 11 .16

आधार 6 cm वाले एक अधिक कोण (obtuse angled triangle) त्रिभुज ABC पर विचार करते हैं (आकृति 11.16)।

इसकी ऊँचाई AD शीर्ष A से DC पर लंब है जो त्रिभुज के बाह्य स्थित है।

क्या आप इस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं?

उदाहरण 6 एक समांतर चतुर्भुज की एक भुजा और संगत ऊँचाई क्रमशः 4 cm और 3 cm है। समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए (आकृति 11.17)।



आकृति 11.17

हल आधार की लंबाई दी गई है $(b) = 4$ cm, ऊँचाई $(h) = 3$ cm

समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $b \times h = 4 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} = 12 \text{ cm}^2$

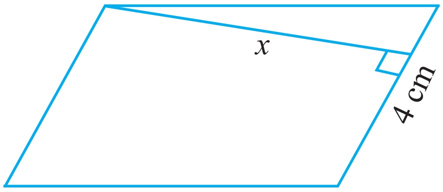
उदाहरण 7 यदि एक समांतर चतुर्भुज (आकृति 11.18) का क्षेत्रफल 24 cm² और आधार 4 cm हो तो ऊँचाई 'x' ज्ञात कीजिए।

हल समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $b \times h$

इसलिए, $24 = 4 \times x$

या $\frac{24}{4} = x$

या $x = 6$ cm



आकृति 11.18

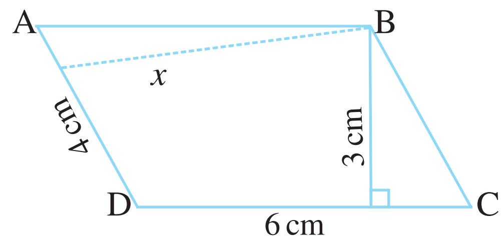
इस प्रकार, समांतर चतुर्भुज की ऊँचाई 6 cm है।

© NCERT not to be republished

उदाहरण 8 समांतर चतुर्भुज ABCD की दो भुजाओं की लंबाइयाँ 6 cm और 4 cm हैं। आधार CD की संगत ऊँचाई 3 cm है (आकृति 11.19)। ज्ञात कीजिए :

(i) समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल (ii) आधार AD की संगत ऊँचाई

हल



आकृति 11.19

(i) समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $b \times h$

$= 6 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} = 18 \text{ cm}^2$

(ii) आधार (b) = 4 cm,

ऊँचाई = x (मान लीजिए)

क्षेत्रफल = 18 cm^2

समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $b \times x$

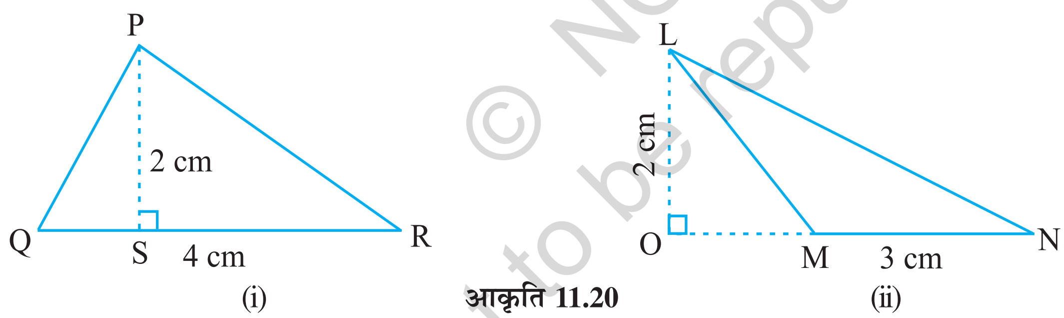
$18 = 4 \times x$

$\frac{18}{4} = x$

इसलिए, $x = 4.5$ cm

इस प्रकार, आधार AD की संगत ऊँचाई 4.5 cm है।

उदाहरण 9 निम्न त्रिभुजों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए (आकृति 11.20) :



आकृति 11.20

हल

(i) त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}\ bh = \frac{1}{2} \times \text{QR} \times \text{PS}$

$= \frac{1}{2} \times 4 \text{ cm} \times 2 \text{ cm} = 4 \text{ cm}^2$

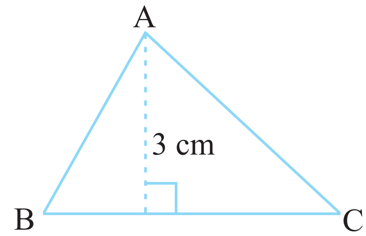
(ii) त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}\ bh = \frac{1}{2} \times \text{MN} \times \text{LO}$

$= \frac{1}{2} \times 3 \text{ cm} \times 2 \text{ cm} = 3 \text{ cm}^2$

उदाहरण 10 BC ज्ञात कीजिए, यदि त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल 36 cm² और ऊँचाई AD 3 cm है। (आकृति 11.21) :

© NCERT not to be republished

हल ऊँचाई = 3 cm, क्षेत्रफल = 36 cm^2



आकृति 11.21

त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}bh$

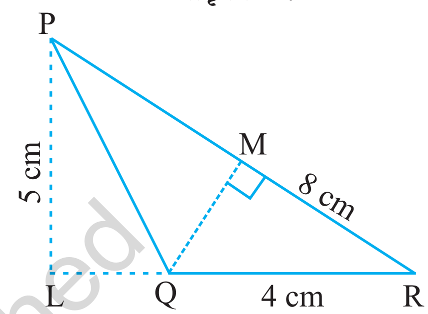
या $36 = \frac{1}{2} \times b \times 3$

$b = \frac{36 \times 2}{3} = 24$ cm

इसलिए BC = 24 cm

उदाहरण 11 ΔPQR में PR = 8 cm, QR = 4 cm और PL = 5 cm (आकृति 11.22)। ज्ञात कीजिए:

(i) ΔPQR का क्षेत्रफल (ii) QM



आकृति 11.22

हल

(i) आधार = 4 cm ऊँचाई = 5 cm

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}bh$

$= \frac{1}{2} \times 4 \text{ cm} \times 5 \text{ cm} = 10 \text{ cm}^2$

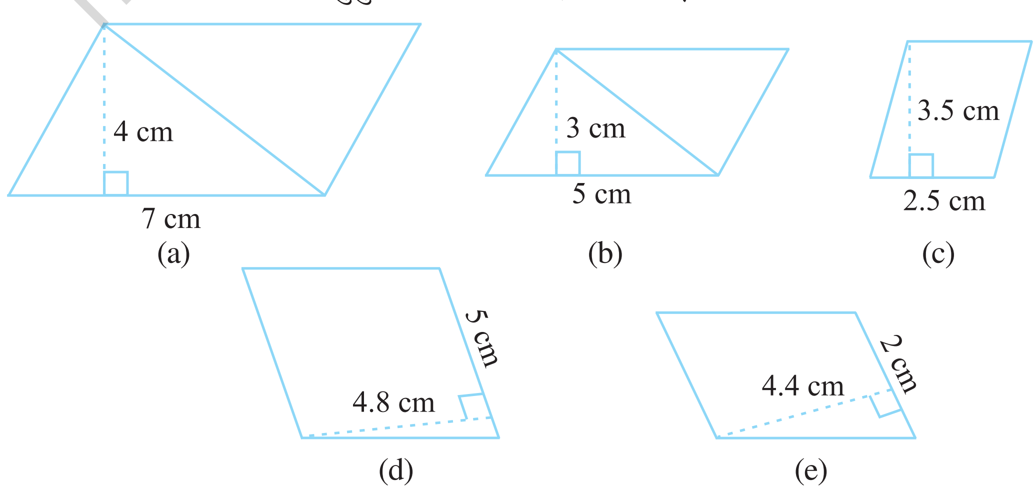
(ii) आधार = 8 cm, ऊँचाई = ?, क्षेत्रफल = 10 cm^2

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times b \times h$ अर्थात् $10 = \frac{1}{2} \times 8 \times h$

$h = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2.5$ इसलिए, QM = 2.5 cm

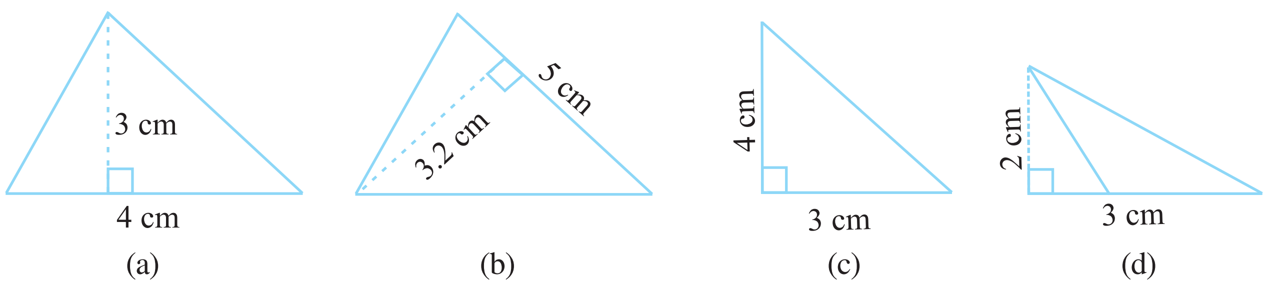
प्रश्नावली 11.2

1. निम्न में प्रत्येक समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :



© NCERT not to be republished

2. निम्न में प्रत्येक त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :

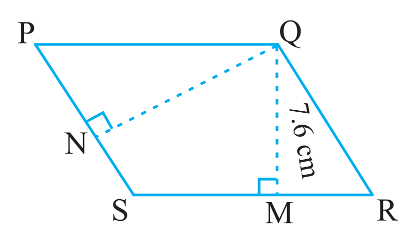


3. रिक्त स्थान का मान ज्ञात कीजिए :

क्र.सं.	आधार	ऊँचाई	समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल
a.	20 cm		246 cm^2
b.		15 cm	154.5 cm^2
c.		8.4 cm	48.72 cm^2
d.	15.6 cm		16.38 cm^2

4. रिक्त स्थानों का मान ज्ञात कीजिए :

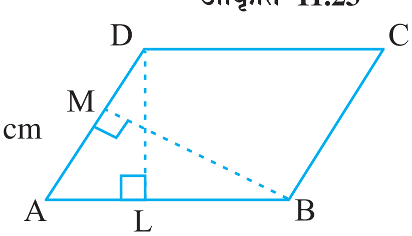
आधार	ऊँचाई	त्रिभुज का क्षेत्रफल
15 cm	_______	87 cm^2
_______	31.4 mm	1256 mm^2
22 cm	_______	170.5 cm^2



आकृति 11.23

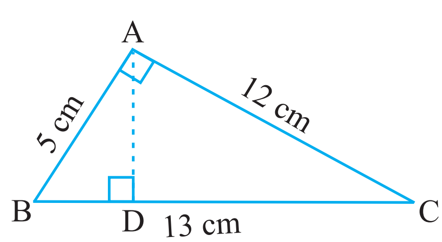
5. PQRS एक समांतर चतुर्भुज है (आकृति 11.23)। QM शीर्ष Q से SR तक की ऊँचाई तथा QN शीर्ष Q से PS तक की ऊँचाई है। यदि SR = 12 cm और QM = 7.6 cm तो ज्ञात कीजिए :

(a) समांतर चतुर्भुज PQRS का क्षेत्रफल (b) QN, यदि PS = 8 cm



आकृति 11.24

6. DL और BM समांतर चतुर्भुज ABCD की क्रमशः भुजाएँ AB और AD पर लंब हैं (आकृति 11.24)। यदि समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल 1470 cm^2 है, AB = 35 cm और AD = 49 cm है, तो BM तथा DL की लंबाई ज्ञात कीजिए।

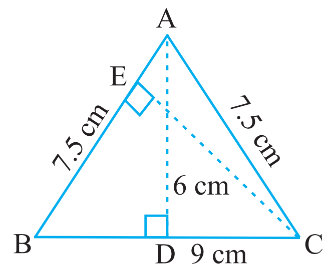


आकृति 11.25

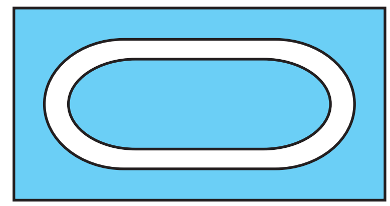
7. त्रिभुज ABC, A पर समकोण है (आकृति 11.25), और AD भुजा BC पर लंब है। यदि AB = 5 cm, BC = 13 cm और AC = 12 cm है, तो ΔABC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। AD की लंबाई भी ज्ञात कीजिए।

© NCERT not to be republished

8. ΔABC समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AB = AC = 7.5 cm और BC = 9 cm है (आकृति 11.26)। A से BC तक की ऊँचाई AD, 6 cm है। ΔABC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। C से AB तक की ऊँचाई, अर्थात् CE क्या होगी?



आकृति 11.26


आकृति 11.27

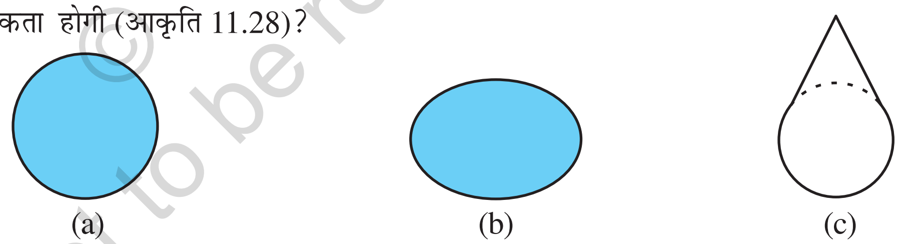
11.5 वृत्त

एक दौड़ पथ अपने दोनों किनारों पर अर्धवृत्ताकार है (आकृति 11.27)।

क्या आप एक धावक द्वारा तय की गई दूरी ज्ञात कर सकते हैं यदि वह इस दौड़ पथ के दो पूरे चक्कर लगाता है? जब आकार वृत्ताकार हो तो हमें उसके चारों ओर की दूरी प्राप्त करने की एक विधि ज्ञात करने की आवश्यकता होती है।

11.5.1 वृत्त की परिधि

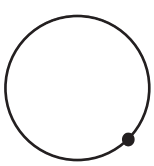
तान्या गत्ते के घुमावदार आकार के अलग-अलग कार्ड काटती है। वह इन कार्डों को सजाने के लिए इनके चारों ओर किनारी लगाना चाहती है। प्रत्येक के लिए उसे कितनी लंबी किनारी की आवश्यकता होगी (आकृति 11.28)?



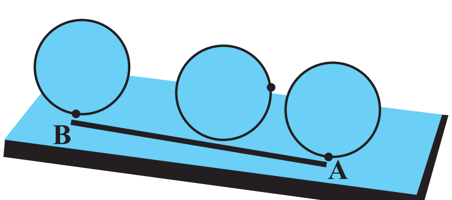
आकृति 11.28

© NCERT not to be republished

आप एक पैमाने (रूलर) की सहायता से वक्र (curve) को नहीं माप सकते क्योंकि ये आकृतियाँ सीधी नहीं हैं। आप क्या करेंगे?


आकृति 11.29

आकृति 11. 28(a) में दिए गए आकार की आवश्यक किनारी की लंबाई ज्ञात करने के लिए आपको एक तरीका बताया जा रहा है। कार्ड के किनारे पर एक बिंदु अंकित कीजिए और इसे एक टेबल पर रखिए। बिंदु की स्थिति को टेबल पर भी अंकित कीजिए (आकृति 11.29)।



आकृति 11.30

अब वृत्ताकार कार्ड को एक सरल रेखा की दिशा में टेबल पर तब तक घुमाइए जब तक अंकित बिंदु टेबल को दुबारा स्पर्श न कर जाए। इस दूरी को रेखा के अनुदिश में मापिए। यह आवश्यक किनारी की लंबाई है। यह कार्ड के अंकित किए गए बिंदु से कार्ड के किनारे-किनारे वापस उसी बिंदु तक की दूरी है।

आप एक धागे को वृत्ताकार वस्तु के चारों ओर किनारे-किनारे रख कर भी दूरी ज्ञात कर सकते हैं।

एक वृत्ताकार क्षेत्र के चारों ओर की दूरी इसकी परिधि कहलाती है।

इन्हें कीजिए

एक बोतल का ढक्कन, एक चूड़ी या कोई अन्य वृत्ताकार वस्तु लीजिए और इसकी परिधि ज्ञात कीजिए।

अब, क्या आप इस विधि से एक धावक द्वारा एक पथ पर तय की गई दूरी ज्ञात कर सकते है?

अभी भी, पथ के चारों ओर की दूरी ज्ञात करना या अन्य किसी वृत्ताकार वस्तु को धागे से मापना बहुत ही मुश्किल होगा। तथापि यह माप सही नहीं होगी।

अतः इसके लिए हमें एक सूत्र की आवश्यकता है जैसाकि तल की आकृति या आकारों के लिए हम प्रयोग करते हैं।

आइए हम देखें क्या वृत्तों के व्यास और परिधि के बीच में कोई संबंध है।

निम्न तालिका पर विचार कीजिए। अलग-अलग त्रिज्याओं के 6 वृत्त खींचिए और धागे की सहायता से उनकी परिधि ज्ञात कीजिए। परिधि और व्यास के अनुपात को भी ज्ञात कीजिए :

वृत्त	त्रिज्या	व्यास	परिधि	परिधि और व्यास का अनुपात
1.	3.5 cm	7.0 cm	22.0 cm	$\frac{22}{7} = 3.14$
2.	7.0 cm	14.0 cm	44.0 cm	$\frac{44}{14} = 3.14$
3.	10.5 cm	21.0 cm	66.0 cm	$\frac{66}{21} = 3.14$
4.	21.0 cm	42.0 cm	132.0 cm	$\frac{132}{42} = 3.14$
5.	5.0 cm	10.0 cm	32.0 cm	$\frac{32}{10} = 3.2$
6.	15.0 cm	30.0 cm	94.0 cm	$\frac{94}{30} = 3.13$

ऊपर दी गई तालिका से आप क्या निष्कर्ष निकालते हैं? क्या यह अनुपात लगभग समान है? हाँ। क्या आप कह सकते हैं कि एक वृत्त की परिधि हमेशा इसके व्यास की तीन गुणा है? हाँ।

यह अनुपात स्थिर है और इसे 'π' (*pi*) (पाई) से प्रदर्शित करते हैं। इसका मान लगभग $\frac{22}{7}$ या 3.14 है।

अतः हम कह सकते हैं $\frac{C}{d} = \pi$, जहाँ 'C' वृत्त की परिधि और '*d*' इसका व्यास दर्शाता है।

या $$C = \pi d$$

© NCERT not to be republished

हम जानते हैं कि एक वृत्त का व्यास (d), त्रिज्या (r) का दुगुना होता है; अर्थात् $d = 2r$

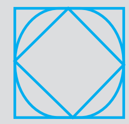
अत:, $C = \pi d = \pi \times 2r$ या $C = 2\pi r$

इन्हें कीजिए

आकृति 11.31 में

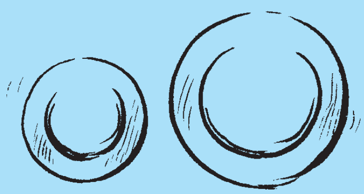
(a) किस वर्ग का परिमाप अधिक है?

(b) कौन-सा अधिक है, छोटे वर्ग का परिमाप या वृत्त की परिधि?



आकृति 11.31

प्रयास कीजिए



एक चौथाई प्लेट तथा एक अर्ध प्लेट लीजिए। प्रत्येक को टेबल की ऊपरी सतह पर एक बार घुमाइए। कौन-सी प्लेट एक पूरे चक्कर में अधिक दूरी तय करती है? कौन-सी प्लेट कम चक्कर में टेबल की ऊपरी सतह की लंबाई को पूरा करेगी?

© NCERT not to be republished

उदाहरण 12 10 cm व्यास वाले एक वृत्त की परिधि ज्ञात कीजिए ($\pi = 3.14$ लीजिए)

हल वृत्त का व्यास (d) = 10 cm

वृत्त की परिधि = πd

$= 3.14 \times 10 \text{ cm} = 31.4 \text{ cm}$

अत:, 10 cm व्यास वाले वृत्त की परिधि 31.4 cm है।

उदाहरण 13 एक वृत्ताकार तश्तरी (disc) की परिधि ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 14 cm है।

$$\left(\text{प्रयोग करें } \pi = \frac{22}{7}\right)$$

हल वृत्ताकार तश्तरी (disc) की त्रिज्या (r) = 14 cm

तश्तरी की परिधि = $2\pi r$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 14 \text{ cm} = 88 \text{ cm}$$

अत:, वृत्ताकार तश्तरी की परिधि 88 cm है।

उदाहरण 14 एक वृत्ताकार पाइप की त्रिज्या 10 cm है। पाइप के चारों ओर एक बार टेप लपेटने की आवश्यक लंबाई ज्ञात कीजिए (प्रयोग करें $\pi = 3.14$)।

हल पाइप की त्रिज्या (r) = 10 cm

आवश्यक टेप की लंबाई, पाइप की परिधि के बराबर है।

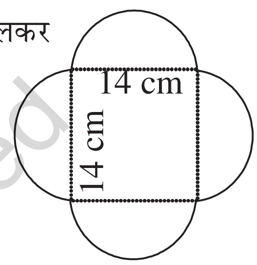
$$\text{पाइप की परिधि} = 2\pi r$$
$$= 2 \times 3.14 \times 10 \text{ cm} = 62.8 \text{ cm}$$

इसलिए, पाइप के चारों ओर एक बार टेप लपेटने की आवश्यक लंबाई 62.8 cm है।

उदाहरण 15 दी गई आकृति का परिमाप ज्ञात कीजिए (आकृति 11.32) ।

($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)।

हल इस आकृति में हमें वर्ग के प्रत्येक ओर स्थित अर्धवृत्त की परिधि को ज्ञात करने की आवश्यकता है। क्या आपको वर्ग के परिमाप को भी ज्ञात करने की आवश्यकता है? नहीं। इस आकृति की बाह्य परिसीमा अर्धवृत्तों से मिलकर बनी है। प्रत्येक अर्धवृत्त का व्यास 14 cm है।



आकृति 11.32

हम जानते हैं कि, $\text{वृत्त की परिधि} = \pi d$

$$\text{अर्धवृत्त की परिधि} = \frac{1}{2}\pi d$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times 14 \text{ cm} = 22 \text{ cm}$$

प्रत्येक अर्धवृत्त की परिधि 22 cm है। अतः दी गई आकृति का परिमाप = 4×22 cm = 88 cm

उदाहरण 16 सुधांशु 7 cm त्रिज्या वाली एक वृत्ताकार तश्तरी (disc) को दो बराबर भागों में विभाजित करता है। प्रत्येक अर्धवृत्ताकार तश्तरी का परिमाप ज्ञात कीजिए (प्रयोग करें $\pi = \frac{22}{7}$)

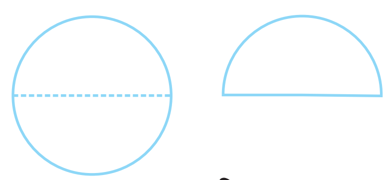
हल अर्धवृत्ताकार तश्तरी (disc) के परिमाप को ज्ञात करने के लिए, (आकृति 11.33), हमें ज्ञात करने की आवश्यकता है:

(i) अर्धवृत्ताकार आकार की परिधि (ii) व्यास

दी गई त्रिज्या (r) = 7 cm

हम जानते हैं कि वृत्त की परिधि = $2\pi r$

$$\text{अतः, अर्धवृत्त की परिधि} = \frac{1}{2} \times 2\pi r = \pi r$$
$$= \frac{22}{7} \times 7 \text{ cm} = 22 \text{ cm}$$


आकृति 11.33

इसलिए, वृत्त का व्यास = $2r = 2 \times 7$ cm = 14 cm

अतः प्रत्येक अर्धवृत्ताकार तश्तरी (disc) का परिमाप = 22 cm + 14 cm = 36 cm

11.5.2 वृत्त का क्षेत्रफल

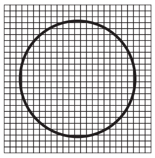
निम्न पर विचार कीजिए :

- एक किसान खेत के केंद्र पर 7 m त्रिज्या वाली एक फूलों की क्यारी खोदता है। उसे खाद को खरीदने की आवश्यकता है। यदि 1 m^2 क्षेत्रफल के लिए 1 kg खाद की आवश्यकता हो, तो उसे कितने किलोग्राम खाद खरीदनी चाहिए?

© NCERT not to be republished

- 10 रु प्रति m^2 की दर से, 2 m त्रिज्या वाले एक वृत्ताकार टेबल के ऊपरी सतह पर पॉलिश कराने का व्यय क्या होगा?

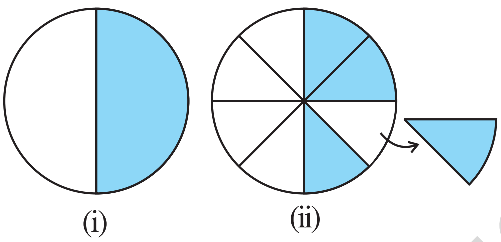
क्या आप बता सकते हैं कि इन स्थितियों में हमें क्या ज्ञात करने की आवश्यकता है, क्षेत्रफल या परिमाप? ऐसी स्थितियों में हमें वृत्ताकार क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करने की आवश्यकता होती है। आइए ग्राफ़ पेपर की सहायता से हम एक वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात करते हैं।


आकृति 11.34

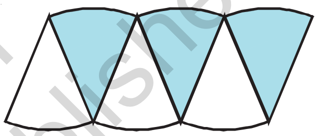
4 cm त्रिज्या वाले एक वृत्त को ग्राफ़ पेपर पर बनाइए (आकृति 11.34)। वृत्त के द्वारा घिरे हुए वर्गों को गिनकर इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

क्योंकि किनारे सीधे नहीं हैं, हमें, इस विधि से, वृत्त के क्षेत्रफल का एक कच्चा (rough) अनुमान ही प्राप्त होता है। एक और विधि से वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात करते हैं।

एक वृत्त बनाइए और उसके अर्धभाग को छायांकित कीजिए [आकृति 11.35(i)] अब वृत्त को **आठ भागों** में मोड़िए और उन्हें मुड़ी हुई तहों के अनुदिश में काटिए (आकृति 11.35(ii))।



आकृति 11.35


आकृति 11.36

© NCERT not to be republished

अलग-अलग टुकड़ों को, जैसा आकृति 11.36 में दिखाया गया है, व्यवस्थित कीजिए, जो एक स्थूल रूप से (roughly) समांतर चतुर्भुज को दर्शाता है।

जितने अधिक त्रिज्याखंड होंगे, उतना ही सही समांतर चतुर्भुज हमें प्राप्त होता है।

जैसा ऊपर किया गया है यदि हम वृत्त को 64 त्रिज्याखंडों में विभाजित करें और उन्हें व्यवस्थित करें, तो हमें लगभग एक आयत प्राप्त होता है (आकृति 11.37)।

आकृति 11.37

इस आयत की चौड़ाई क्या है? इस आयत की चौड़ाई वृत्त की त्रिज्या ही है अर्थात् 'r'

जैसाकि पूरे वृत्त को 64 त्रिज्याखंडों में विभाजित किया गया तथा प्रत्येक ओर 32 त्रिज्यखंड हैं। आयत की लंबाई 32 त्रिज्यखंडों की लंबाइयों के बराबर है जो वृत्त की परिधि की आधी है (आकृति 11.37)।

वृत्त का क्षेत्रफल = बनाए गए आयत का क्षेत्रफल = $l \times b$

= (परिधि का आधा) × त्रिज्या = $\left(\frac{1}{2} \times 2\pi r\right) \times r = \pi r^2$

अत:, वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2

इन्हें कीजिए

ग्राफ़ पेपर पर अलग-अलग त्रिज्याओं के वृत्तों को बनाइए। वर्गों की संख्या को गिनकर क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। सूत्र का प्रयोग करके भी क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। दोनों उत्तरों की तुलना कीजिए।

उदाहरण 17 30 cm त्रिज्या वाले वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। (π = 3.14 लीजिए)

हल त्रिज्या r = 30 cm

वृत्त का क्षेत्रफल = $\pi r^2 = 3.14 \times 30^2 = 2826 \text{ cm}^2$

उदाहरण 18 एक वृत्ताकार बगीचे का व्यास 9.8 m है। इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए

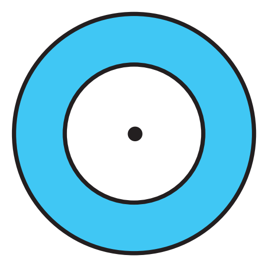
हल व्यास, d = 9.8 m अत: त्रिज्या $r = 9.8 \div 2 = 4.9$ m

वृत्त का क्षेत्रफल = $\pi r^2 = \frac{22}{7} \times (4.9)^2 \text{ m}^2 = \frac{22}{7} \times 4.9 \times 4.9 \text{ m}^2 = 75.46 \text{ m}^2$

उदाहरण 19 संलग्न आकृति दो वृत्तों को दर्शाती है जिनका केंद्र समान है। बड़े वृत्त की त्रिज्या 10 cm और छोटे वृत्त की त्रिज्या 4 cm है।

ज्ञात कीजिए (a) बड़े वृत्त का क्षेत्रफल (b) छोटे वृत्त का क्षेत्रफल

(c) दोनों वृत्तों के बीच छायांकित भाग का क्षेत्रफल (π = 3.14)



हल

(a) बड़े वृत्त की त्रिज्या = 10 cm

अत:, बड़े वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2

= $3.14 \times 10 \times 10 = 314 \text{ cm}^2$

(b) छोटे वृत्त की त्रिज्या = 4 cm

छोटे वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2

= $3.14 \times 4 \times 4 = 50.24 \text{ cm}^2$

(c) छायांकित भाग का क्षेत्रफल = $(314 - 50.24) \text{ cm}^2 = 263.76 \text{ cm}^2$

© NCERT not to be republished

प्रश्नावली 11.3

1. निम्न त्रिज्याओं वाले वृत्तों की परिधि ज्ञात कीजिए ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)

   (a) 14 cm (b) 28 mm (c) 21 cm

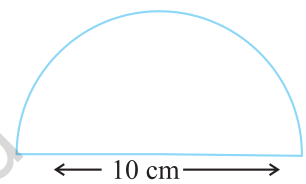
2. निम्न वृत्तों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। दिया गया है :

   (a) त्रिज्या = 14 mm ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए) (b) व्यास = 49 m

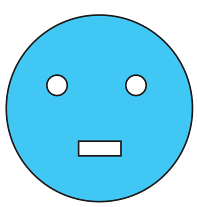
   (c) त्रिज्या = 5 cm

3. यदि एक वृत्ताकार शीट की परिधि 154 m हो तो इसकी त्रिज्या ज्ञात कीजिए। शीट का क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)

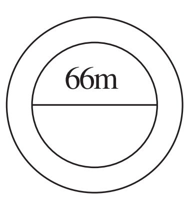
4. 21 m व्यास वाले एक वृत्ताकार बगीचे के चारों ओर माली बाड़ लगाना चाहता है। खरीदे जाने वाले आवश्यक रस्से की लंबाई ज्ञात कीजिए, यदि वह 2 पूरे चक्कर की बाड़ बनाना चाहता है। 4 रु प्रति मीटर की दर से रस्से पर व्यय ज्ञात कीजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)
5. 4 cm त्रिज्या वाली एक वृत्ताकार शीट में से 3 cm त्रिज्या वाले एक वृत्त को निकाल दिया जाता है। शीट के शेष भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ लीजिए)
6. साइमा 1.5 m व्यास वाले एक वृत्ताकार टेबल कवर के चारों ओर किनारी लगाना चाहती है। आवश्यक किनारी की लंबाई ज्ञात कीजिए और ₹ 15 प्रति मीटर की दर से किनारी लगाने का व्यय ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ लीजिए)
7. दी गई आकृति, व्यास के साथ एक अर्धवृत्त है। उसका परिमाप ज्ञात कीजिए।



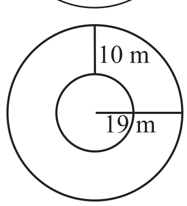
8. 15 रु प्रति वर्ग मीटर की दर से, 1.6 m व्यास वाले एक वृत्ताकार टेबल के ऊपरी सतह पर पॉलिश कराने का व्यय ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ लीजिए)
9. शाझली 44 cm लंबाई वाली एक तार लेती है और उसे एक वृत्त के आकार में मोड़ देती है। उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए। इसका क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए। यदि इसी तार को दुबारा एक वर्ग के आकार में मोड़ा जाता है, तो इसकी प्रत्येक भुजा की लंबाई क्या होगी? कौन-सी आकृति अधिक क्षेत्रफल घेरती है वृत्त या वर्ग? ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)
10. 14 cm त्रिज्या वाली एक वृत्ताकार गत्ते की शीट में से, 3.5 cm त्रिज्या वाले दो वृत्तों को और 3 cm लंबाई तथा 1 cm चौड़ाई वाले एक आयत को निकाल दिया जाता है (जैसाकि आकृति में दिखाया गया है) शीट के शेष भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)।



11. 6 cm भुजा वाले एक वर्गाकार एल्युमिनियम शीट के टुकड़े में से 2 cm त्रिज्या वाले एक वृत्त को काट दिया जाता है। शीट के शेष भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए? ($\pi = 3.14$ लीजिए)
12. एक वृत्त की परिधि 31.4 cm है। वृत्त की त्रिज्या और क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए? ($\pi = 3.14$ लीजिए)



13. एक वृत्ताकार फूलों की क्यारी के चारों ओर 4 m चौड़ा पथ है तथा फूलों की क्यारी का व्यास 66 m है। इस पथ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए? ($\pi = 3.14$ लीजिए)
14. एक वृत्ताकार फूलों के बगीचे का क्षेत्रफल 314 m^2 है। बगीचे के केंद्र में एक घूमने वाला फव्वारा (sprinkler) लगाया जाता है, जो अपने चारों ओर 12 m त्रिज्या के क्षेत्रफल में पानी का छिड़काव करता है। क्या फव्वारा पूरे बगीचे में पानी का छिड़काव कर सकेगा। ($\pi = 3.14$)

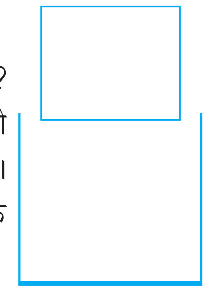


15. आकृति में, अंत: और बाह्य वृत्तों की परिधि ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ लीजिए)
16. 28 cm त्रिज्या वाले एक पहिए को 352 m दूरी तय करने के लिए कितनी बार घुमाना पड़ेगा? ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)
17. एक वृत्ताकार घड़ी की मिनट की सुई की लंबाई 15 cm है। मिनट की सुई की नोक 1 घंटे में कितनी दूरी तय करती है। ($\pi = 3.14$ लीजिए)

© NCERT not to be republished

11.6 इकाइयों का रूपांतरण

हम जानते हैं कि 1 cm = 10 mm^2। क्या आप बता सकते हैं कि 1 cm^2 में कितने mm^2 होते हैं? आइए हम ऐसे ही प्रश्नों को खोजें और ज्ञात करें कि क्षेत्रफलों को मापते हुए इनकी इकाइयों को कैसे रूपांतरित किया जाता है। ग्राफ़ पेपर पर 1 cm भुजा वाला एक वर्ग बनाइए (आकृति 11.38)। आप देखेंगे कि 1 cm वाले इस वर्ग को 100 वर्गों में विभाजित किया जा सकता है और प्रत्येक वर्ग की भुजा 1 mm है।



आकृति 11.38

1 cm भुजा वाले वर्ग का क्षेत्रफल= 100 वर्गों का क्षेत्रफल, जिसकी प्रत्येक भुजा 1 mm है।

अत: $1\ cm^2 = 100 \times 1\ mm^2$ या $1\ cm^2 = 100\ mm^2$

इस प्रकार, $1\ m^2 = 1\ m \times 1\ m = 100\ cm \times 100\ cm$ (1 m = 100 cm)

$= 10000\ cm^2$

अब क्या आप 1 km^2 को m^2 में बदल सकते हैं?

मिट्रिक प्रणाली में भूखंड के क्षेत्रफल को हेक्टेयर में मापा जाता है [संक्षेप में ha लिखा जाता है]

इस प्रकार, 1 हेक्टेयर = $100 \times 100\ m^2 = 10,000\ m^2$

जब हम क्षेत्रफल की एक इकाई को छोटी इकाई में बदलते हैं तो परिणामस्वरूप इकाइयों की संख्या अधिक होगी।

उदाहरण के लिए $1000\ cm^2 = 1000 \times 100\ mm^2 = 100000\ mm^2$

परंतु जब हम क्षेत्रफल की एक इकाई को बड़ी इकाई में बदलते हैं तो बड़ी इकाइयों की संख्या कम होगी।

उदाहरण के लिए, $1000\ cm^2 = \frac{1000}{10000}\ m^2 = 0.1\ m^2$

इन्हें कीजिए

निम्न को बदलिए :

(i) 50 cm^2 को mm^2 में
(ii) 2 ha को m^2 में
(iii) 10 m^2 को cm^2 में
(iv) 1000 cm^2 को mm^2

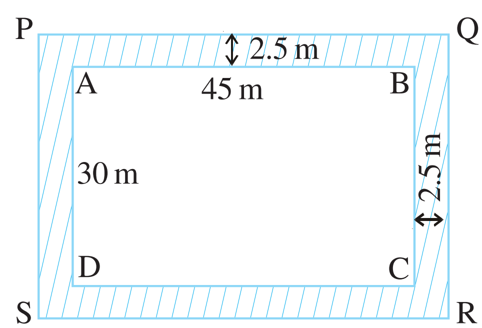
11.7 उपयोग

आपने ध्यान दिया होगा कि बहुधा पार्कों या बगीचों में उनके चारों ओर या बीच में चौपड़ की तरह कुछ स्थान पथ के रूप में छोड़ दिया जाता है। एक फ्रेम किए हुए चित्र या पेंटिंग के चारों ओर कुछ स्थान छोड़ दिया जाता है।

हमें ऐसे पथों या बार्डरों के क्षेत्रफलों को ज्ञात करने की आवश्यकता होती है, जब हम उनके बनाने का व्यय ज्ञात करना चाहते हैं।

उदाहरण 20 एक आयताकार पार्क 45 m लंबा और 30 m चौड़ा है। पार्क के बाहर चारों ओर एक 2.5 m चौड़ा एक पथ बनाया गया है। पथ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल माना ABCD आयताकार पार्क को और छायांकित क्षेत्र 2.5 m चौड़े पथ को दर्शाता है।



पथ के क्षेत्रफल को ज्ञात करने के लिए हमें (आयात PQRS का क्षेत्रफल – आयात ABCD का क्षेत्रफल) ज्ञात करने की आवश्यकता है।

हमें प्राप्त है $PQ = (45 + 2.5 + 2.5)\ m = 50\ m$

$PS = (30 + 2.5 + 2.5)\ m = 35\ m$

आयत ABCD का क्षेत्रफल $= l \times b = 45 \times 30\ m^2 = 1350\ m^2$

आयत PQRS का क्षेत्रफल $= l \times b = 50 \times 35\ m^2 = 1750\ m^2$

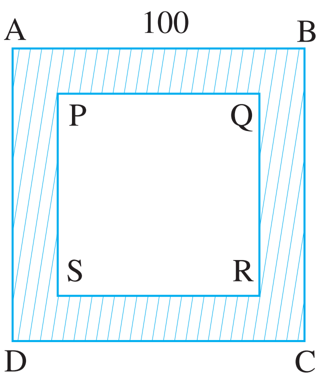
© NCERT not to be republished

पथ का क्षेत्रफल = आयत PQRS का क्षेत्रफल – आयत ABCD का क्षेत्रफल

$= (1750 - 1350)\ m^2 = 400\ m^2$

उदाहरण 21 100 m भुजा वाले एक वर्गाकार पार्क की परिसीमा के साथ लगा हुआ भीतर की ओर एक 5 m चौड़ा पथ बना हुआ है। इस पथ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ₹ 250 प्रति 10 m^2 की दर से इसे सीमेंट कराने का भी व्यय ज्ञात कीजिए।

हल माना ABCD, 100 m भुजा वाला वर्गाकार पार्क है। छायांकित भाग 5 m चौड़े पथ को दर्शाता है।



$PQ = 100 - (5 + 5) = 90$ m

वर्ग ABCD का क्षेत्रफल = (भुजा)^2 = $(100)^2\ m^2 = 10,000\ m^2$

वर्ग PQRS का क्षेत्रफल = (भुजा)^2 = $(90)^2\ m^2 = 8100\ m^2$

अतः, पथ का क्षेत्रफल = $(10000 - 8100)\ m^2 = 1900\ m^2$

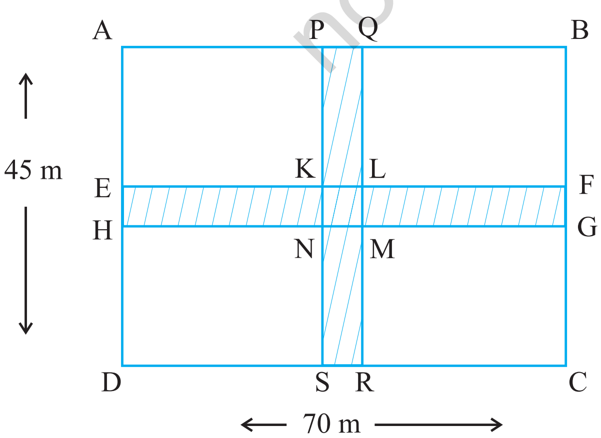
10 m^2 पर सीमेंट कराने का व्यय = ₹ 250

इसलिए, 1 m^2 पर सीमेंट कराने का व्यय = ₹ $\frac{250}{10}$

अतः, 1900 m^2 पर सीमेंट कराने का व्यय = $\frac{250}{10} \times 1900$ = ₹ 47500

उदाहरण 22 70 m लंबाई और 45 m चौड़ाई वाले एक आयताकार पार्क के मध्य से होकर 5 m चौड़ाई के दो पथ, एक दूसरे पर लंब ऐसे बने हुए हैं जो भुजाओं के समांतर हैं। पथों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए तथा ₹ 105 प्रति m^2 की दर से पथों को बनाने का भी व्यय ज्ञात कीजिए।

हल पथों का क्षेत्रफल, छायांकित भाग का क्षेत्रफल ही है, अर्थात् आयत PQRS का क्षेत्रफल और आयत EFGH का क्षेत्रफल। परंतु ऐसा करते समय, वर्ग KLMN के क्षेत्रफल को दो बार लिया जाता है, जिसे घटाना होगा।



अब

PQ = 5 m और PS = 45 m

EH = 5 m और EF = 70 m

KL = 5 m और KN = 5 m

पथों का क्षेत्रफल = आयत PQRS का क्षेत्रफल

+ आयत EFGH का क्षेत्रफल

– वर्ग KLMN का क्षेत्रफल

$= PS \times PQ + EF \times EH - KL \times KN$

$= (45 \times 5 + 70 \times 5 - 5 \times 5)\ m^2$

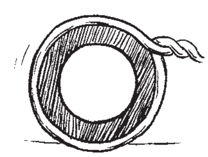
$= (225 + 350 - 25)$ मी^{2} $= 550\ m^2$

पथों को बनाने का व्यय = 105×550 = ₹ 5775

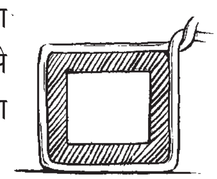
© NCERT not to be republished

प्रश्नावली 11.4

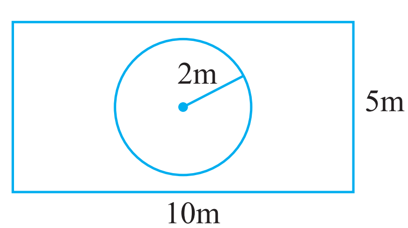
1. एक बगीचा 90 m लंबा और 75 m चौड़ा है। इसके बाहर, चारों ओर एक 5 m चौड़ा पथ बनाना है। पथ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। बगीचे का क्षेत्रफल हेक्टेयर में भी ज्ञात कीजिए।
2. 125 m लंबाई और 65 m चौड़ाई वाले एक आयताकार पार्क के चारों ओर बाहर एक 3 m चौड़ा एक पथ बना हुआ है। पथ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
3. 8 cm लंबे और 5 cm चौड़े एक गत्ते पर एक चित्र की पेंटिंग इस प्रकार बनाई गई है कि इसकी प्रत्येक भुजाओं के अनुदिश 1.5 cm चौड़ा हाशिया (margin) छोड़ा गया है। हाशिये का कुल क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
4. 5.5 m लंबे और 4 m चौड़े कमरे के चारों ओर बाहर 2.25 m चौड़ा एक बरामदा बनाया गया है। ज्ञात कीजिए :
   (i) बरामदे का क्षेत्रफल
   (ii) ₹ 200 प्रति m^2 की दर से बरामदे के फर्श पर सीमेंट कराने का व्यय।
5. 30 m भुजा वाले एक वर्गाकार बगीचे की परिसीमा से लगा भीतर की ओर 1 m चौड़ा पथ बना हुआ है। ज्ञात कीजिए :
   (i) पथ का क्षेत्रफल
   (ii) ₹ 40 प्रति m^2 की दर से बगीचे के शेष भाग पर घास लगवाने का व्यय।
6. 700 m लंबे और 300 m चौड़े एक आयताकार पार्क के मध्य से होकर जाते 10 m चौड़े दो पथ बने हुए हैं जो एक-दूसरे पर परस्पर लंब और चौपड़ के आकार के हैं। इनमें से प्रत्येक पथ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए तथा पार्क की भुजाओं को छोड़कर पार्क के शेष भाग का भी क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। उत्तर को हेक्टेयर में दीजिए।
7. 90 m लंबाई और 60 m चौड़ाई वाले एक आयताकार मैदान में दो पथ बनाए गए हैं, जो भुजाओं के समांतर हैं, एक-दूसरे को लंबवत् काटते हैं और मैदान के मध्य से होकर निकलते हैं। यदि प्रत्येक पथ की चौड़ाई 3 m हो, तो ज्ञात कीजिए :
   (i) पथों द्वारा आच्छादित क्षेत्रफल
   (ii) ₹ 110 प्रति m^2 की दर से पथ बनाने का व्यय



8. प्रज्ञा 4 cm त्रिज्या वाले एक वृत्ताकार पाइप के चारों ओर एक रस्सी लपेटती है (जैसा दिखाया गया है) और रस्सी की आवश्यक लंबाई को काट लेती है। इसके बाद वह उसे 4 cm भुजा वाले एक वर्गाकार बॉक्स के चारों ओर लपेटती है (दिखाया गया है)। क्या उसके पास कुछ और रस्सी बचेगी? ($\pi = 3.14$)

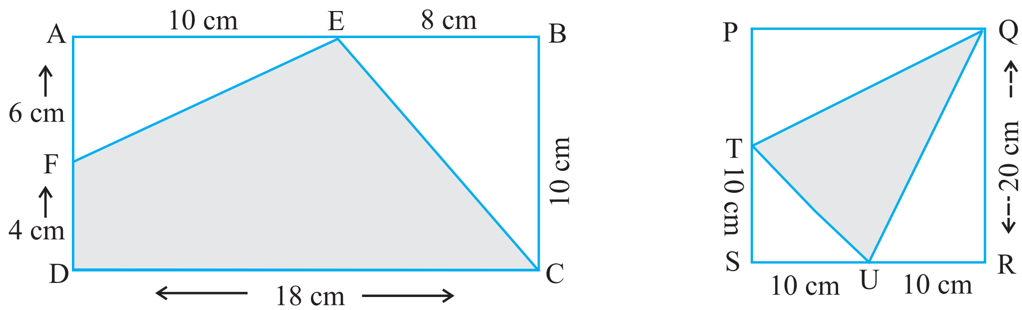


9. संलग्न आकृति, एक आयताकार पार्क के मध्य में एक वृत्ताकार फूलों की क्यारी को दर्शाती है। ज्ञात कीजिए :
   (i) पूरे पार्क का क्षेत्रफल
   (ii) फूलों की क्यारी का क्षेत्रफल
   (iii) फूलों की क्यारी को छोड़कर, पार्क के शेष भाग का क्षेत्रफल
   (iv) क्यारी की परिधि

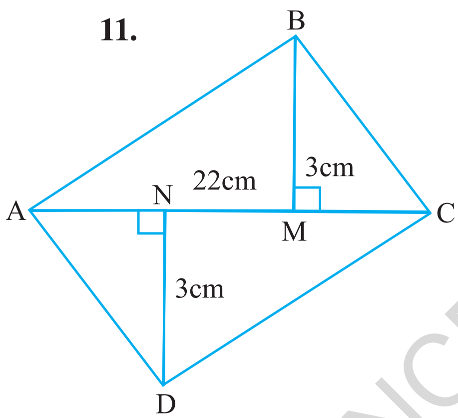


© NCERT not to be republished

10. दी गई आकृति में, छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :



11.



चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। यहाँ AC = 22 cm, BM = 3 cm, DN = 3 cm और $BM \perp AC$, $DN \perp AC$

हमने क्या चर्चा की?

1. परिमाप एक बंद आकृति के चारों ओर की दूरी है जबकि क्षेत्रफल एक बंद आकृति द्वारा घेरे गए तल के भाग या क्षेत्र को दर्शाता है।

2. हम पिछली कक्षा में जान चुके हैं कि एक वर्ग और आयत का परिमाप तथा क्षेत्रफल कैसे निकालते हैं। जैसे :

(a) एक वर्ग का परिमाप = 4 × भुजा

(b) एक आयत का परिमाप = 2 × (लंबाई + चौड़ाई)

(c) एक वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा

(d) एक आयत का क्षेत्रफल = लंबाई × चौड़ाई

3. एक समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई

4. एक त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (इससे प्राप्त समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल)

= $\frac{1}{2}$ × आधार × ऊँचाई

5. एक वृत्ताकार क्षेत्र के चारों ओर की दूरी इसकी परिधि कहलाती है। एक वृत्त की परिधि = πd, जहाँ d वृत्त का व्यास और $\pi = \frac{22}{7}$ या 3.14 (लगभग) है।

6. एक वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2, जहाँ r वृत्त की त्रिज्या है।

7. जैसा कि आप जानते हैं कि जिस प्रकार लंबाइयों की इकाइयों का रूपांतरण करते हैं उसी प्रकार क्षेत्रफलों की ईकाइयों को भी रूपांतरित किया जा सकता है।

$1\ cm^2 = 100\ mm^2$, $1\ m^2 = 10000\ cm^2$, 1 हेक्टेयर = $10000\ m^2$

© NCERT not to be republished

अध्याय 12

बीजीय व्यंजक

0757CH12

© NCERT not to be republished

12.1 भूमिका

हम $x + 3$, $y - 5$, $4x + 5$, $10y - 5$, इत्यादि जैसे सरल बीजीय व्यंजकों से परिचित हो चुके हैं। कक्षा VI में, हमने देखा था कि ये व्यंजक किस प्रकार पहेलियों और समस्याओं को एक सुव्यवस्थित प्रकार से प्रस्तुत करने में सहायक होते हैं। हम सरल समीकरणों वाले अध्याय में भी व्यंजकों के अनेक उदाहरणों को देख चुके हैं।

बीजगणित में व्यंजकों (expressions) को एक केंद्रीय अवधारणा माना जाता है। यह अध्याय बीजीय व्यंजकों से संबद्ध होगा। जब आप इस अध्याय को पढ़ लेंगे, तो आपको ज्ञात हो जाएगा कि बीजीय व्यंजक किस प्रकार बनते हैं, इन्हें किस प्रकार संयोजित किया (मिलाया) जाता है, इनके मान हम कैसे ज्ञात कर सकते हैं तथा इनका किस प्रकार उपयोग किया जा सकता है।

12.2 व्यंजक किस प्रकार बनते हैं ?

अब हम भली भाँति जानते हैं कि एक चर (variable) क्या होता है। हम चरों को व्यक्त करने के लिए, अक्षरों $x, y, l, m, \ldots$ इत्यादि का प्रयोग करते हैं। एक **चर** के विभिन्न मान हो सकते हैं। इसका मान निश्चित नहीं होता है। इसके दूसरी ओर **अचर** (constant) का एक निश्चित मान होता है। अचरों के उदाहरण $4, 100, -17$, इत्यादि हैं।

हम चरों और अचरों को संयोजित करके बीजीय व्यंजकों को बनाते हैं। इसके लिए हम योग, व्यवकलन, गुणन और विभाजन की संक्रियाओं का प्रयोग करते हैं। हम, $4x + 5$, $10y - 20$ जैसे व्यंजकों को पहले ही देख चुके हैं। व्यंजक $4x + 5$, 'x' चर के प्रयोग से बना है, जिसमें पहले चर x को अचर 4 से गुणा करके और फिर इस गुणनफल में अचर 5 जोड़ कर प्राप्त किया जाता है। इसी प्रकार, $10y - 20$ पहले चर y को अचर 10 से गुणा करके और फिर इस गुणनफल में से 20 घटा कर प्राप्त किया जाता है।

उपरोक्त व्यंजक चरों और अचरों को संयोजित करके प्राप्त किए गए थे। हम व्यंजकों को, चरों को स्वयं उन चरों से अथवा अन्य चरों से संयोजित करके भी प्राप्त कर सकते हैं।

देखिए कि निम्नलिखित व्यंजक किस प्रकार प्राप्त किए जाते हैं ?

$$x^2, 2y^2, 3x^2 - 5, xy, 4xy + 7$$

(i) व्यंजक x^2 चर x को स्वयं x से गुणा करके प्राप्त किया जाता है।

अर्थात् $x \times x = x^2$ है।

जिस प्रकार $4 \times 4 = 4^2$ लिखा जाता है, उसी प्रकार हम $x \times x = x^2$. लिखते हैं। इसे सामान्यतः x का वर्ग (x squared) पढ़ा जाता है।

[बाद में, जब आप 'घातांक और घात' वाले अध्याय का अध्ययन करेंगे, तब आप अनुभव करेंगे कि x^2 को x के ऊपर घात 2 भी पढ़ा जा सकता है]।

इसी प्रकार, हम लिख सकते हैं : $x \times x \times x = x^3$

सामान्यतः, x^3 को x का घन (x cubed) पढ़ा जाता है। बाद में, आप यह अनुभव करेंगे कि x^3 को x के ऊपर घात 3 भी पढ़ा जा सकता है।

$x, x^2, x^3, \ldots$ में से प्रत्येक x से प्राप्त एक बीजीय व्यंजक है।

(ii) व्यंजक $2y^2$ को y से इस प्रकार प्राप्त किया जाता है: $2y^2 = 2 \times y \times y$

यहाँ, हम y को y से गुणा करके y^2 प्राप्त करते हैं और फिर इस गुणनफल y^2 को 2 से गुणा करते हैं।

(iii) $(3x^2 - 5)$ में, हम पहले x^2 प्राप्त करते हैं और फिर उसे 3 से गुणा करके $3x^2$ प्राप्त करते हैं। अंत में, $3x^2 - 5$ पर पहुँचने के लिए, हम $3x^2$ में से 5 को घटाते हैं।

(iv) xy में, हम चर x को एक अन्य चर y से गुणा करते हैं। इस प्रकार, $x \times y = xy$।

(v) $4xy + 7$ में, हम पहले xy प्राप्त करते हैं; उसे 4 से गुणा करके $4xy$ प्राप्त करते हैं और फिर दिया हुआ व्यंजक प्राप्त करने के लिए, $4xy$ में 7 जोड़ते हैं।

प्रयास कीजिए

बताइए कि निम्नलिखित व्यंजक किस प्रकार प्राप्त किए जाते हैं :

$7xy + 5, x^2y, 4x^2 - 5x$

12.3 एक व्यंजक के पद

अभी तक ऊपर हमने पढ़ा है कि व्यंजक किस प्रकार बनाए जाते हैं, अब हम उसे एक सुव्यवस्थित रूप में रखेंगे। इस कार्य के लिए, हमें यह जानने की आवश्यकता है कि एक व्यंजक के पद (terms) और उनके गुणनखंड (factors) क्या होते हैं, अर्थात् उनके अर्थ क्या हैं।

व्यंजक $(4x + 5)$ पर विचार कीजिए। इस व्यंजक को बनाने के लिए, पहले हमने अलग से 4 और x का गुणा करके $4x$ बनाया था और फिर इसमें 5 जोड़ दिया था। इसी प्रकार, व्यंजक $(3x^2 + 7y)$ पर विचार कीजिए। यहाँ, हमने पहले अलग से $3, x$ और x का गुणा करके $3x^2$ बनाया था। फिर हमने अलग से 7 और y का गुणा करके $7y$ बनाया था। $3x^2$ और $7y$ बनाने के बाद, हमने दिया हुआ व्यंजक प्राप्त करने के लिए, इनको जोड़ दिया था।

आप पाएँगे कि हम जितने भी व्यंजकों पर कार्य करते हैं वे सभी इसी रूप में देखे जा सकते हैं। इनके भाग होते हैं जो अलग से बनाए जाते हैं और फिर जोड़ दिए जाते हैं। व्यंजकों के इस प्रकार के भाग, जो पहले अलग से बनाए जाते हैं और फिर जोड़ दिए जाते हैं, इस व्यंजक के **पद** कहलाते हैं। व्यंजक $4x^2 - 3xy$ को देखिए। हम कहते हैं कि इसके दो पद $4x^2$ और $-3xy$ हैं। पद $4x^2$; $4, x$ और x का गुणनफल है तथा पद $-3xy$; $-3, x$ और y का गुणनफल है।

© NCERT not to be republished

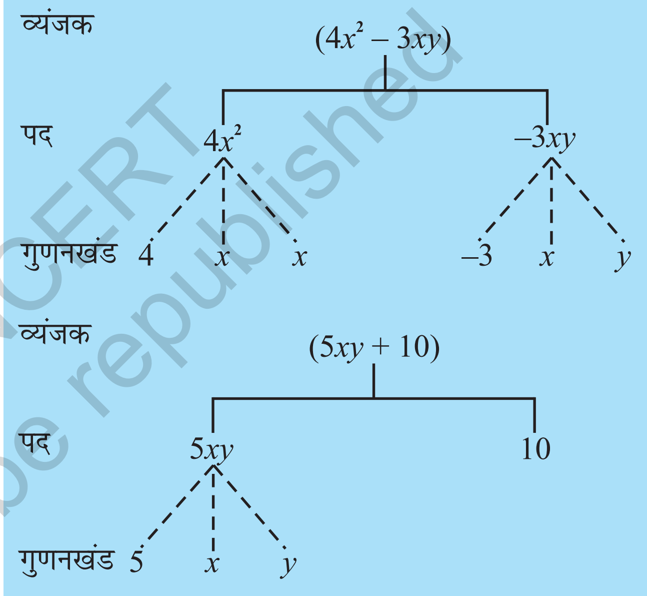
व्यंजकों को बनाने के लिए पदों को जोड़ा जाता है। जिस प्रकार व्यंजक $(4x + 5)$ को बनाने के लिए $4x$ और 5 को जोड़ा जाता है, उसी प्रकार व्यंजक $(4x^2–3xy)$ को बनाने के लिए $4x^2$ और $(– 3xy)$ को जोड़ा जाता है। इसका कारण $4x^2 + (–3xy) = 4x^2 – 3xy$ होता है।

> ध्यान दीजिए कि पद में ऋण *(minus)* चिह्न सम्मिलित होता है। व्यंजक $4x^2 –3xy$ में, हमने पद को $3xy$ न लेकर $(–3xy)$ लिया था। इसलिए, हमें यह कहने कि आवश्यकता नहीं है कि एक व्यंजक को बनाने के लिए, पदों को जोड़ा या घटाया जाता है। इसके लिए केवल यह कहना ही पर्याप्त है कि पदों को जोड़ा जाता है।

एक पद के गुणनखंड

हमने ऊपर देखा था कि व्यंजक $(4x^2 – 3xy)$ के दो पद $4x^2$ और $–3xy$ हैं। पद $4x^2$; 4, x और x का गुणनफल है। हम कहते हैं कि 4, x और x पद $4x^2$ के गुणनखंड (factors) हैं। एक पद अपने गुणनखंडों का एक गुणनफल होता है। पद $–3xy$, गुणनखंडों $–3$, x और y का एक गुणनफल है।

हम एक व्यंजक के पदों तथा पदों के गुणनखंडों को एक सुविधाजनक और आकर्षक प्रकार से एक व्यंजक पेड़ आरेख (tree diagram) द्वारा निरूपित कर सकते हैं। व्यंजक $(4x^2 – 3xy)$ का पेड़ संलग्न आकृति में दर्शाया गया है।



> ध्यान दीजिए कि पेड़ आरेख में, हमने गुणनखंड के लिए बिंदुकित रेखाओं का प्रयोग किया तथा पदों के लिए सतत रेखाओं का प्रयोग किया है। यह इनके मिश्रित न होने के लिए किया गया है।

आइए व्यंजक $5xy + 10$ का पेड़ आरेख खींचें। गुणनखंड ऐसे लिखे जाएँ कि जिनके आगे गुणनखंड न हो सके। इस प्रकार, हम $5xy$ को $5 \times xy$ के रूप में नहीं लिखते हैं, क्योंकि xy के आगे और भी गुणनखंड हो सकते हैं। इसी प्रकार, यदि x^3 एक पद होता, तो इसे $x \times x^2$ न लिख कर $x\times x \times x$ लिखा जाए। साथ ही, याद रखिए 1 को अलग से गुणनखंड नहीं लिया जाता है।

प्रयास कीजिए

1. निम्नलिखित व्यंजकों में कौन-कौन से पद हैं ? दर्शाइए कि ये व्यंजक कैसे बनाए जाते हैं। प्रत्येक व्यंजक के लिए एक पेड़ आरेख भी खींचिए।
   $8y + 3x^2$, $7mn – 4$, $2x^2 y$
2. ऐसे तीन व्यंजक लिखिए, जिनमें से प्रत्येक में चार पद हों।

© NCERT not to be republished

गुणांक

हम एक पद को उसके गुणनखंडों के एक गुणनफल के रूप में लिखना सीख चुके हैं। इनमें से एक गुणनखंड संख्यात्मक (numerical) हो सकता है तथा अन्य बीजीय (algebraic) हो सकते हैं (अर्थात् इनमें चर होते हैं)। इस संख्यात्मक गुणनखंड को **पद का संख्यात्मक गुणांक (numerical coefficient)** या केवल **गुणांक** कहते हैं। इसे शेष पद (जो स्पष्टत: बीजीय गुणनखंडों का गुणनफल है) का गुणांक भी कहते हैं। इस प्रकार, पद $5xy$ में, xy का गुणांक 5 है। इसी प्रकार, पद $10xyz$, में xyz का गुणांक 10 है तथा पद $-7x^2y^2$ में x^2y^2 का गुणांक -7 है।

जब किसी पद का गुणांक +1 होता है, प्राय: उसे लिखते समय छोड़ दिया जाता है। उदाहरणार्थ, $1x$ को x लिखा जाता है, $1x^2y^2$ को x^2y^2 लिखा जाता है, इत्यादि। साथ ही, गुणांक (-1) को केवल ऋण चिह्न (–) से दर्शाया जाता है। इस प्रकार, $(-1)x$ को $-x$ लिखा जाता है, $(-1)x^2y^2$ को $-x^2y^2$ लिखा जाता है, इत्यादि।

कभी-कभी शब्द गुणांक का प्रयोग एक अधिक व्यापक रूप में प्रयोग किया जाता है। इस रूप में, हम कहते हैं कि पद $5xy$ में, xy का गुणांक 5 है, $5y$ का गुणांक x है तथा $5x$ का गुणांक y है। $10xy^2$ में, xy^2 का गुणांक 10 है, $10y^2$ का गुणांक x है तथा $10x$ का गुणांक y^2 है। इस प्रकार, इसे अधिक व्यापक रूप में, गुणांक एक संख्यात्मक गुणनखंड हो सकता है या एक बीजीय गुणनखंड हो सकता है या दो या अधिक गुणनखंडों का गुणनफल भी हो सकता है। इसे शेष गुणनखंडों के गुणनफल का गुणांक कहा जाता है।

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित व्यंजकों के पदों के गुणांकों की पहचान कीजिए :

$4x - 3y$, $a + b + 5$, $2y + 5$, $2xy$

© NCERT not to be republished

उदाहरण 1 निम्नलिखित व्यंजकों में, वे पद छाँटिए जो अचर नहीं हैं। उनके संख्यात्मक गुणांक भी लिखिए :

$xy + 4$, $13 - y^2$, $13 - y + 5y^2$, $4p^2q - 3pq^2 + 5$

हल

क्रम संख्या	व्यंजक	पद (जो अचर नहीं है)	संख्यात्मक गुणांक
(i)	$xy + 4$	xy	1
(ii)	$13 - y^2$	$-y^2$	-1
(iii)	$13 - y + 5y^2$	$-y$ $5y^2$	-1 5
(iv)	$4p^2q - 3pq^2 + 5$	$4p^2q$ $-3pq^2$	4 -3

उदाहरण 2

(a) निम्नलिखित व्यंजकों में x के क्या गुणांक हैं ?

$$4x - 3y,\ 8 - x + y,\ y^2x - y,\ 2z - 5xz$$

(b) निम्नलिखित व्यंजकों में y के क्या गुणांक हैं ?

$$4x - 3y,\ 8 + yz,\ yz^2 + 5,\ my + m$$

हल

(a) प्रत्येक व्यंजक में, हम गुणनखंड x वाले पद को देखते हैं। उस पद का शेष भाग x का वांछित गुणांक होगा।

क्रम संख्या	व्यंजक	गुणनखंड x वाला पद	x का गुणांक
(i)	$4x - 3y$	$4x$	4
(ii)	$8 - x + y$	$-x$	-1
(iii)	$y^2x - y$	y^2x	y^2
(iv)	$2z - 5xz$	$-5xz$	$-5z$

(b) इसकी विधि उपरोक्त (a) की विधि जैसी ही है।

क्रम संख्या	व्यंजक	गुणनखंड y वाला पद	y का गुणांक
(i)	$4x - 3y$	$-3y$	-3
(ii)	$8 + yz$	yz	z
(iii)	$yz^2 + 5$	yz^2	z^2
(iv)	$my + m$	my	m

© NCERT not to be republished

12.4 समान और असमान पद

जब पदों के बीजीय गुणनखंड एक जैसे ही हों, तो वे पद **समान पद (like terms)** कहलाते हैं। जब पदों के बीजीय गुणनखंड भिन्न-भिन्न हों, तो वे **असमान पद** (unlike terms) कहलाते हैं। उदाहरणार्थ व्यंजक $2xy - 3x + 5xy - 4$, में पदों $2xy$ और $5xy$ को देखिए। $2xy$ के गुणनखंड 2, x और y है। $5xy$ के गुणनखंड 5, x और y हैं। इस प्रकार, इनके बीजीय (अर्थात् वे जिनमें चर हैं) गुणनखंड एक ही हैं और इसीलिए ये **समान पद** हैं। इसके विपरीत, पदों $2xy$ और $-3x$ में भिन्न-भिन्न बीजीय गुणनखंड हैं। ये **असमान पद** हैं। इसी प्रकार, पद $2xy$ और 4 असमान पद हैं। साथ ही, $-3x$ और 4 भी असमान पद हैं।

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित में, समान पदों के समूह बनाइए :

$12x, 12, -25x, -25, -25y, 1, x, 12y, y$

12.5 एकपदी, द्विपद, त्रिपद और बहुपद

वह बीजीय व्यंजक जिसमें केवल एक पद हो, **एकपदी** (monomial) कहलाता है, जैसे $7xy, -5m, 3z^2, 4$ इत्यादि।

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित व्यंजकों को एकपदी, द्विपद और त्रिपद के रूप में वर्गीकृत कीजिए : a, $a + b$, $ab + a + b$, $ab + a + b - 5$, xy, $xy + 5$, $5x^2 - x + 2$, $4pq - 3q + 5p$, 7, $4m - 7n + 10$, $4mn + 7$.

एक व्यंजक जिसमें केवल दो पद हों और वे असमान पद हों वह **द्विपद** (binomial) कहलाता है, उदाहरणार्थ $x + y$, $m - 5$, $mn + 4m$, $a^2 - b^2$ द्विपद हैं। व्यंजक $10pq$ एक द्विपद नहीं है यह एक एकपदी है। व्यंजक $(a + b + 5)$ एक द्विपद नहीं है। इसमें तीन पद हैं।

एक व्यंजक जिसमें तीन पद हों, **एक त्रिपद** (trinomial) कहलाता है, उदाहरणार्थ $x + y + 7$, $ab + a + b$, $3x^2 - 5x + 2$, $m + n + 10$ त्रिपद हैं। परंतु व्यंजक $ab + a + b + 5$ एक त्रिपद नहीं है इसमें तीन पद न होकर चार पद हैं। व्यंजक $x + y + 5x$ एक त्रिपद नहीं है क्योंकि पद x और $5x$ समान पद हैं।

व्यापक रूप में, एक या, अधिक पदों वाला व्यंजक **एक बहुपद** (Polynomial) कहलाता है। इस प्रकार, एकपदी, द्विपदी और त्रिपदी भी बहुपद हैं।

उदाहरण 3 कारण सहित बताइए कि पदों के निम्नलिखित युग्मों में कौन-कौन से युग्म समान पदों के हैं तथा कौन-कौन से युग्म असमान पदों के हैं :

(i) $7x$, $12y$ (ii) $15x$, $-21x$ (iii) $-4ab$, $7ba$ (iv) $3xy$, $3x$
(v) $6xy^2$, $9x^2y$ (vi) pq^2, $-4pq^2$ (vii) mn^2, $10mn$

हल

क्रम संख्या	युग्म	गुणनखंड	बीजीय गुणनखंड एक ही हैं या भिन्न-भिन्न हैं	समान/ असमान पद	टिप्पणी
(i)	$7x$ $12y$	7, x 12, y	भिन्न-भिन्न	असमान	पदों में चर भिन्न-भिन्न हैं
(ii)	$15x$ $-21x$	15, x -21, x	एक ही हैं	समान	
(iii)	$-4ab$ $7\ ba$	-4, a, b 7, b, a	एक ही हैं	समान	याद रखिए $ab = ba$
(iv)	$3xy$ $3x$	3, x, y 3, x	भिन्न-भिन्न	असमान	चर y केवल पहले पद में है
(v)	$6xy^2$ $9x^2y$	6, x, y, y 9, x, x, y	भिन्न-भिन्न	असमान	दोनों पदों में चर तो एक जैसे हैं; परंतु इनकी घातें अलग अलग हैं
(vi)	pq^2 $-4pq^2$	1, p, q, q -4, p, q, q	एक ही हैं	समान	ध्यान दीजिए संख्यात्मक गुणांक 1 दिखाया नहीं जाता है

© NCERT not to be republished

निम्नलिखित सरल चरण आपको यह निर्णय लेने में सहायक होंगे कि दिए हुए पद **समान** पद हैं या **असमान** पद हैं :

(i) संख्यात्मक गुणांकों पर ध्यान न दीजिए। पदों के बीजीय भाग पर अपना ध्यान केंद्रित कीजिए।

(ii) पदों में चरों की जाँच कीजिए। ये एक ही होने चाहिए।

(iii) अब, पदों में प्रत्येक चर की घातों की जाँच कीजिए। ये एक ही होनी चाहिए।

ध्यान दीजिए कि समान पदों के बारे मे निर्णय लेते समय, इन दो बातों से कोई प्रभाव नहीं पड़ता है : (1) पदों के संख्यात्मक गुणांक तथा (2) पदों में चरों के गुणा करने का क्रम।

प्रश्नावली 12.1

1. निम्नलिखित स्थितियों में, चरों, अचरों और अंक गणितीय संक्रियाओं का प्रयोग करते हुए, बीजीय व्यंजक प्राप्त कीजिए :

(i) संख्या y में से z को घटाना।

(ii) संख्याओं x और y के योग का आधा।

(iii) संख्या z को स्वयं उससे गुणा किया जाता है।

(iv) संख्याओं p और q के गुणनफल का एक-चौथाई।

(v) दोनों संख्याओं x और y के वर्गों को जोड़ा जाता है।

(vi) संख्याओं m और n के गुणनफल के तीन गुने में संख्या 5 जोड़ना।

(vii) 10 में से संख्याओं y और z गुणनफल को घटाना।

(viii) संख्याओं a और b के गुणनफल में से उनके योग को घटाना।

2. (i) निम्नलिखित व्यंजकों में पदों ओर उनके गुणनखंडों को छाँटिए। पदों और उनके गुणनखंडों को पेड़ आरेखों द्वारा भी दर्शाइए।

(a) $x - 3$ (b) $1 + x + x^2$ (c) $y - y^3$

(d) $5xy^2 + 7x^2y$ (e) $-ab + 2b^2 - 3a^2$

(ii) नीचे दिए व्यंजकों में, पदों और उनके गुणनखंडों को छाँटिए।

(a) $-4x + 5$ (b) $-4x + 5y$ (c) $5y + 3y^2$

(d) $xy + 2x^2y^2$ (e) $pq + q$ (f) $1.2\,ab - 2.4\,b + 3.6\,a$

(g) $\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$ (h) $0.1\,p^2 + 0.2\,q^2$

3. निम्नलिखित व्यंजकों में पदों के संख्यात्मक गुणांकों, जो अचर न हों, की पहचान कीजिए।

(i) $5 - 3t^2$ (ii) $1 + t + t^2 + t^3$ (iii) $x + 2xy + 3y$

(iv) $100m + 1000n$ (v) $-p^2q^2 + 7pq$ (vi) $1.2\,a + 0.8\,b$

(vii) $3.14\,r^2$ (viii) $2\,(l + b)$ (ix) $0.1\,y + 0.01\,y^2$

4. (a) वे पद पहचानिए जिनमें x है और फिर इनमें x का गुणांक लिखिए।

(i) $y^2x + y$ (ii) $13y^2 - 8yx$ (iii) $x + y + 2$

(iv) $5 + z + zx$ (v) $1 + x + xy$ (vi) $12xy^2 + 25$

(vii) $7 + xy^2$

© NCERT not to be republished

(b) वे पद पहचानिए जिनमें y^2 है और फिर इनमें y^2 का गुणांक लिखिए।

(i) $8 - xy^2$ (ii) $5y^2 + 7x$ (iii) $2x^2y - 15xy^2 + 7y^2$

5. निम्नलिखित व्यंजकों को एकपदी, द्विपद और त्रिपद के रूप में वर्गीकृत कीजिए :

(i) $4y - 7z$ (ii) y^2 (iii) $x + y - xy$ (iv) 100
(v) $ab - a - b$ (vi) $5 - 3t$ (vii) $4p^2q - 4pq^2$ (viii) $7mn$
(ix) $z^2 - 3z + 8$ (x) $a^2 + b^2$ (xi) $z^2 + z$ (xii) $1 + x + x^2$

6. बताइए कि दिए हुए पदों के युग्म समान पदों के हैं या असमान पदों के हैं :

(i) 1, 100 (ii) $-7x, \frac{5}{2}x$ (iii) $-29x, -29y$
(iv) $14xy, 42yx$ (v) $4m^2p, 4mp^2$ (vi) $12xz, 12x^2z^2$

7. निम्नलिखित में समान पदों को छाँटिए :

(a) $-xy^2, -4yx^2, 8x^2, 2xy^2, 7y, -11x^2, -100x, -11yx, 20x^2y,$
$-6x^2, y, 2xy, 3x$

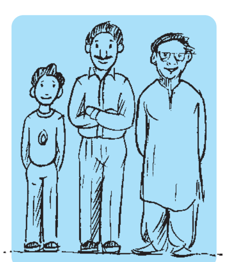
(b) $10pq, 7p, 8q, -p^2q^2, -7qp, -100q, -23, 12q^2p^2, -5p^2, 41, 2405p, 78qp,$
$13p^2q, qp^2, 701p^2$

12.6 बीजीय व्यंजकों के योग और व्यवकलन

निम्नलिखित समस्याओं पर विचार कीजिए :

1. सरिता के पास कुछ कँचे हैं। अमीना के पास उससे 10 कँचे अधिक हैं। अप्पू कहता है कि उसके पास सरिता और अमीना के पास कुल जितने कँचे हैं उससे 3 अधिक कँचे हैं। आप अप्पू के कँचों की संख्या कैसे ज्ञात करेंगे ?

   चूँकि यह नहीं दिया गया है कि सरिता के पास कितने कँचे है, इसलिए हम इन्हें x मान लेते हैं। अमीना के पास इनसे 10 अधिक, अर्थात् $x + 10$ कँचे हैं। अप्पू कहता है कि उसके पास सरिता और अमीना के कुल कँचों से 3 अधिक कँचे हैं। अतः हम सरिता और अमीना के कँचों का योग ज्ञात करते हैं और उस योग में 3 जोड़ते हैं, अर्थात् हम x, $x + 10$ और 3 को जोड़ते हैं।



2. रामू के पिता की वर्तमान आयु रामू की आयु की तीन गुनी है। रामू के दादाजी की आयु रामू और रामू के पिता की आयु के योग से 13 वर्ष अधिक है। आप रामू के दादाजी की आयु किस प्रकार ज्ञात करेंगे ?

   चूँकि रामू की आयु दी हुई नहीं है, इसलिए आइए इसे y वर्ष मान लें। तब, उसके पिता की आयु $3y$ वर्ष है। रामू के दादाजी की आयु ज्ञात करने के लिए, हमें रामू की आयु (y) और उसके पिता की आयु $(3y)$ का योग ज्ञात करके इस योग में 13 जोड़ना होगा, अर्थात् हमें y, $3y$ और 13 का योग ज्ञात करना पड़ेगा।

3. एक बाग में, गुलाब और गेंदे के पौधे वर्गाकार क्यारियों में लगाए जाते हैं। जिस वर्गाकार क्यारी में गेंदे के फूल लगाए जाते हैं उसकी भुजा की लंबाई उस वर्गाकार क्यारी की भुजा की लंबाई से 3 मीटर अधिक है, जिसमें गुलाब के पौधे लगाए गए हैं। गेंदे की क्यारी गुलाब की क्यारी से क्षेत्रफल में कितनी बड़ी है ?

© NCERT not to be republished

आइए गुलाब की क्यारी की भुजा को l मीटर मान लेते हैं। तब गेंदे की क्यारी की भुजा $(l + 3)$ मीटर होगी। इनके क्षेत्रफल (वर्ग मीटर में) क्रमशः l^2 और $(l + 3)^2$ होंगे। इन दोनों का अंतर ही यह बताएगा कि गेंदे के पौधों वाली क्यारी गुलाबों वाली क्यारी से क्षेत्रफल में कितनी बड़ी है।

उपरोक्त तीनों स्थितियों में, हमें बीजीय व्यंजकों को जोड़ना या घटाना पड़ा था। दैनिक जीवन में, इसी प्रकार की अनेक ऐसी स्थितियाँ हमारे सम्मुख आती हैं, जहाँ हमें बीजीय व्यंजकों का प्रयोग करना पड़ता है तथा उन पर अंकगणितीय संक्रियाएँ करनी पड़ती हैं। इस अनुच्छेद में, हम यह देखेंगे कि बीजीय व्यंजकों को किस प्रकार जोड़ा और घटाया जाता है।

प्रयास कीजिए

कम से कम ऐसी दो स्थितियों के बारे मे सोचिए जिनमें से प्रत्येक में आपको दो बीजीय व्यंजकों को बनाने की आवश्यकता पड़े और उन्हें जोड़ना या घटाना पड़े।

समान पदों का जोड़ना और घटाना

सरलतम व्यंजक एकपदी होते हैं। इनमें केवल एक ही पद होता है। प्रारंभ करने के लिए, हम यह सीखेंगे कि समान पदों को किस प्रकार जोड़ा या घटाया जाता है।

- आइए $3x$ और $4x$. को जोड़ें। हम जानते हैं कि x एक संख्या है तथा इसीलिए $3x$ और $4x$ भी संख्याएँ हैं।

  अब, $3x + 4x = (3 \times x) + (4 \times x)$

  $= (3 + 4) \times x$ वितरण या बंटन गुण के प्रयोग से

  $= 7 \times x = 7x$

  या $3x + 4x = 7x$

  चूँकि चर, संख्याएँ ही हैं, इसलिए हम वितरण गुण का प्रयोग कर सकते हैं।

- आइए अब आगे $8xy$, $4xy$ और $2xy$ को जोड़ें।

$$8xy + 4xy + 2xy = (8 \times xy) + (4 \times xy) + (2 \times xy)$$
$$= (8 + 4 + 2) \times xy$$
$$= 14 \times xy = 14xy$$

  या $8xy + 4xy + 2xy = 14\,xy$

- आइए $7n$ में से $4n$ को घटाएँ।

$$7n - 4n = (7 \times n) - (4 \times n)$$
$$= (7 - 4) \times n = 3 \times n = 3n$$

  या $7n - 4n = 3n$

- इसी प्रकार, $11ab$ में से $5ab$ को घटाइए।

$$11ab - 5ab = (11 - 5)\,ab = 6ab$$

इसी प्रकार, *दो या अधिक समान पदों का योग एक समान पद होता है, जिसका संख्यात्मक गुणांक सभी समान पदों के गुणांकों के योग के बराबर होता है।*

© NCERT not to be republished

इसी प्रकार, *दो समान पदों का अंतर एक समान पद होता है, जिसका संख्यात्मक गुणांक दोनों समान पदों के संख्यात्मक गुणांकों के अंतर के बराबर होता है।*

ध्यान दीजिए कि ***असमान पदों को उस प्रकार जोड़ा या घटाया नहीं जा सकता, जिस प्रकार कि समान पदों को जोड़ या घटा लिया जाता है।*** इसके उदाहरण हम पहले ही देख चुके हैं। जब x में 5 को जोड़ा जाता है, तो हम इस परिणाम को $(x + 5)$ लिखते हैं। ध्यान दीजिए कि $(x + 5)$ में 5 और x दोनों ही पद पहले जैसे ही हैं। इसी प्रकार, यदि हम असमान पदों $3xy$ और 7 को जोड़े, तो योग $3xy + 7$ है।

यदि हम $3xy$ में से 7 घटाएँ, तो परिणाम $3xy - 7$ है।

व्यापक बीजीय व्यंजकों का जोड़ना और घटाना

आइए कुछ उदाहरण लें :

- $3x + 11$ और $7x - 5$ को जोड़िए।

  वांछित योग $= 3x + 11 + 7x - 5$

  अब, हम जानते हैं कि पद $3x$ और $7x$ समान पद हैं तथा 11 और -5 भी समान पद हैं। साथ ही, $3x + 7x = 10x$ और $11 + (-5) = 6$ हैं। अत:, हम उपरोक्त योग को नीचे दिए अनुसार सरल कर सकते हैं:

  योग $= 3x + 11 + 7x - 5$

  $= 3x + 7x + 11 - 5$ (पदों को पुनर्व्यवस्थित करने पर)

  $= 10x + 6$

  अत:, $3x + 11 + 7x - 5 = 10x + 6$

- $3x + 11 + 8z$ और $7x - 5$ को जोड़िए।

  योग $= 3x + 11 + 8z + 7x - 5$

  $= 3x + 7x + 11 - 5 + 8z$ (पदों को पुनर्व्यवस्थित करने पर)

  ध्यान दीजिए कि हमने समान पदों को एक साथ रखा है तथा अकेला असमान पद $8z$ उसी प्रकार रहता है।

  अत:, योग $= 10x + 6 + 8z$

- $3a - b + 4$ में से $a - b$ को घटाइए।

  अंतर $= 3a - b + 4 - (a - b)$

  $= 3a - b + 4 - a + b$

  ध्यान दीजिए कि किस प्रकार हमने $a - b$ को कोष्ठकों में रखा। तथा किस प्रकार कोष्ठकों को खोलते समय चिह्नों का ध्यान रखा है समान पदों को एक साथ रखने के लिए, पदों को पुनर्व्यवस्थित करने पर,

  अंतर $= 3a - a - b + b + 4$

  $= (3 - 1)\, a - (1 - 1)\, b + 4$

  अंतर $= 2a + (0)\, b + 4 = 2a + 4$

  या, $3a - b + 4 - (a - b) = 2a + 4$

> **ध्यान दीजिए :**
> जैसे $-(5 - 3) = -5 + 3$ है, उसी प्रकार $-(a - b) = -a + b$ है। बीजीय पदों के चिह्नों पर उसी प्रकार कार्य किया जाता है, जैसाकि संख्याओं के चिह्नों के साथ किया जाता है।

© NCERT not to be republished

अब, हम अभ्यास के लिए, व्यंजकों के योग और व्यवकलन पर कुछ और उदाहरण हल करेंगे।

उदाहरण 4 समान पदों को एकत्रित करके, व्यंजक $12m^2 - 9m + 5m - 4m^2 - 7m + 10$ को सरल कीजिए :

हल पदों को पुनर्व्यवस्थित करने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$12m^2 - 4m^2 + 5m - 9m - 7m + 10$$
$$= (12 - 4)\, m^2 + (5 - 9 - 7)\, m + 10$$
$$= 8m^2 + (-4 - 7)\, m + 10$$
$$= 8m^2 + (-11)\, m + 10$$
$$= 8m^2 - 11m + 10$$

प्रयास कीजिए

जोड़िए और घटाइए:

(i) $m - n, m + n$

(ii) $mn + 5 - 2, mn + 3$

उदाहरण 5 $30ab + 12b + 14a$ में से $24ab - 10b - 18a$ को घटाइए।

हल $30ab + 12b + 14a - (24ab - 10b - 18a)$

$$= 30ab + 12b + 14a - 24ab + 10b + 18a$$
$$= 30ab - 24ab + 12b + 10b + 14a + 18a$$
$$= 6ab + 22b + 32a$$

वैकल्पिक रूप से, हम व्यंजकों को एक के नीचे एक करके इस प्रकार रखते हैं कि समान पद एक ही सीध, अर्थात् स्तंभों में रहें, जैसा नीचे दर्शाया गया है:

$$\begin{array}{rcrcr} 30ab & + & 12b & + & 14a \\ 24ab & - & 10b & - & 18a \\ - & & + & & + \\ \hline 6ab & + & 22b & + & 32a \\ \hline \end{array}$$

ध्यान दीजिए कि एक पद घटाने का अर्थ है कि उसके योज्य प्रतिलोम को जोड़ना। अत:, $-10b$ घटाने का अर्थ है कि $+10b$ जोड़ना, $-18a$ घटाने का अर्थ है कि $+18a$ जोड़ना तथा $24ab$ घटाने का अर्थ है कि $-24ab$ को जोड़ना। घटाए जाने वाले व्यंजक के नीचे दर्शाए गए चिह्न, घटाने की प्रक्रिया को उचित रूप से करने में सहायक होते हैं।

उदाहरण 6 $2y^2 + 3yz, -y^2 - yz - z^2$ और $yz + 2z^2$ के योग में से $3y^2 - z^2$ और $-y^2 + yz + z^2$ के योग को घटाइए।

हल पहले हम $2y^2 + 3yz, -y^2 - yz - z^2$ और $yz + 2z^2$ को जोड़ते हैं।

$$\begin{array}{rrcrcr} & 2y^2 & + & 3yz & & \\ - & y^2 & - & yz & - & z^2 \\ & & + & yz & + & 2z^2 \\ \hline & y^2 & + & 3yz & + & z^2 \\ \hline \end{array} \qquad (1)$$

फिर हम, $3y^2 - z^2$ और $-y^2 + yz + z^2$ को जोड़ते हैं।

$$\begin{array}{rrcrcr} & 3y^2 & & & - & z^2 \\ - & y^2 & + & yz & + & z^2 \\ \hline & 2y^2 & + & yz & & \\ \hline \end{array} \qquad (2)$$

© NCERT not to be republished

अब हम योग (1) में से योग (2) को घटाते हैं।

$$\begin{array}{rrr} y^2 & +\ 3yz & +\ z^2 \\ 2y^2 & +\ yz & \\ - & - & \\ \hline -\ y^2 & +\ 2yz & +\ z^2 \\ \hline \end{array}$$

प्रश्नावली 12.2

1. समान पदों को संयोजित (मिला) करके सरल कीजिए :

(i) $21b - 32 + 7b - 20b$

(ii) $-z^2 + 13z^2 - 5z + 7z^3 - 15z$

(iii) $p - (p - q) - q - (q - p)$

(iv) $3a - 2b - ab - (a - b + ab) + 3ab + b - a$

(v) $5x^2y - 5x^2 + 3yx^2 - 3y^2 + x^2 - y^2 + 8xy^2 - 3y^2$

(vi) $(3y^2 + 5y - 4) - (8y - y^2 - 4)$

2. जोड़िए :

(i) $3mn, -5mn, 8mn, -4mn$

(ii) $t - 8tz, 3tz - z, z - t$

(iii) $-7mn + 5, 12mn + 2, 9mn - 8, -2mn - 3$

(iv) $a + b - 3, b - a + 3, a - b + 3$

(v) $14x + 10y - 12xy - 13, 18 - 7x - 10y + 8xy, 4xy$

(vi) $5m - 7n, 3n - 4m + 2, 2m - 3mn - 5$

(vii) $4x^2y, -3xy^2, -5xy^2, 5x^2y$

(viii) $3p^2q^2 - 4pq + 5, -10\,p^2q^2, 15 + 9pq + 7p^2q^2$

(ix) $ab - 4a, 4b - ab, 4a - 4b$

(x) $x^2 - y^2 - 1, y^2 - 1 - x^2, 1 - x^2 - y^2$

3. घटाइए :

(i) y^2 में से $-5y^2$

(ii) $-12xy$ में से $6xy$

(iii) $(a + b)$ में से $(a - b)$

(iv) $b\,(5 - a)$ में से $a\,(b - 5)$

(v) $4m^2 - 3mn + 8$ में से $-m^2 + 5mn$

(vi) $5x - 10$ में से $-x^2 + 10x - 5$

(vii) $3ab - 2a^2 - 2b^2$ में से $5a^2 - 7ab + 5b^2$

(viii) $5p^2 + 3q^2 - pq$ में से $4pq - 5q^2 - 3p^2$

4. (a) $2x^2 + 3xy$ प्राप्त करने के लिए, $x^2 + xy + y^2$ में क्या जोड़ना चाहिए ?

(b) $-3a + 7b + 16$ प्राप्त करने के लिए, $2a + 8b + 10$ में से क्या घटाना चाहिए ?

© NCERT not to be republished

5. $-x^2 - y^2 + 6xy + 20$ प्राप्त करने के लिए, $3x^2 - 4y^2 + 5xy + 20$ में क्या निकाल लेना चाहिए ?

6. (a) $3x - y + 11$ और $- y - 11$ के योग में से $3x - y - 11$ को घटाइए।

(b) $4 + 3x$ और $5 - 4x + 2x^2$ के योग में से $3x^2 - 5x$ और $-x^2 + 2x + 5$ के योग को घटाइए।

12.7 किसी व्यंजक का मान ज्ञात करना

हम जानते हैं कि एक बीजीय व्यंजक का मान उस व्यंजक को बनाने वाले चरों के मानों पर निर्भर करता है। ऐसी अनेक स्थितियाँ हैं, जहाँ हमें व्यंजकों के मान ज्ञात करने होते हैं, जैसे कि हम यह जाँच करना चाहते हैं कि चर का एक विशेष मान एक दिए हुए समीकरण को संतुष्ट करता है या नहीं।

जब हम ज्यामिति और प्रतिदिन की गणित के सूत्रों का प्रयोग करते हैं, तो भी हम व्यंजकों के मान ज्ञात करते हैं। उदाहरणार्थ, भुजा l वाले वर्ग का क्षेत्रफल l^2 होता है। यदि $l = 5$ cm है, तो क्षेत्रफल 5^2 cm^2 = 25 cm^2 है। यदि भुजा = 10 cm है, तो क्षेत्रफल 10^2 cm^2 या 100 cm^2 है, इत्यादि। ऐसे कुछ और उदाहरणों को हम अगले अनुच्छेद में देखेंगे।

© NCERT not to be republished

उदाहरण 7 निम्नलिखित व्यंजकों के मान $x = 2$ के लिए ज्ञात कीजिए :

(i) $x + 4$ (ii) $4x - 3$ (iii) $19 - 5x^2$

(iv) $100 - 10x^3$

हल

(i) $x + 4$ में, $x = 2$ रखने पर, हमें $x + 4$ का निम्नलिखित मान प्राप्त होता है:

$x + 4 = 2 + 4 = 6$

(ii) $4x - 3$ में, $x = 2$ रखने पर, हमें प्राप्त होता है:

$4x - 3 = (4 \times 2) - 3 = 8 - 3 = 5$

(iii) $19 - 5x^2$ में, $x = 2$ रखने पर, हमें प्राप्त होता है:

$19 - 5x^2 = 19 - (5 \times 2^2) = 19 - (5 \times 4) = 19 - 20 = - 1$

(v) $100 - 10x^3$ में, $x = 2$ रखने पर, हमें प्राप्त होता है :

$100 - 10x^3 = 100 - (10 \times 2^3) = 100 - (10 \times 8)$ [ध्यान दीजिए कि $2^3 = 8$ है]

$= 100 - 80 = 20$

उदाहरण 8 निम्नलिखित व्यंजकों के मान ज्ञात कीजिए, जब $n = - 2$

(i) $5n - 2$ (ii) $5n^2 + 5n - 2$ (iii) $n^3 + 5n^2 + 5n - 2$ है :

हल

(i) $5n - 2$ में, $n = -2$ रखने पर, हमें प्राप्त होता है:

$5(- 2) - 2 = - 10 - 2 = - 12$

(ii) $5n^2 + 5n - 2$ में $n = -2$ के लिए, $5n - 2 = -12$ है,

और, $5n^2 = 5 \times (- 2)^2 = 5 \times 4 = 20$ [चूँकि $(- 2)^2 = 4$]

दोनों को मिलाने पर, हमें प्राप्त होता है :

$5n^2 + 5n - 2 = 20 - 12 = 8$

(iii) अब, $n = -2$ के लिए

$5n^2 + 5n - 2 = 8$ है तथा

$n^3 = (-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$ है।

दोनों के मिलाने पर,

$n^3 + 5n^2 + 5n - 2 = -8 + 8 = 0$

अब हम दो चरों के व्यंजकों, जैसे $x + y$, xy इत्यादि पर विचार करेंगे। दो चरों वाले एक व्यंजक का संख्यात्मक मान ज्ञात करने के लिए, हमें इसमें दोनों चरों के मान रखने की आवश्यकता होती है। उदाहरणार्थ, $x = 3$ और $y = 5$ के लिए $(x + y)$ का मान $3 + 5 = 8$ है।

उदाहरण 9 $a = 3$ और $b = 2$ के लिए, निम्नलिखित व्यंजकों के मान ज्ञात कीजिए:

(i) $a + b$ (ii) $7a - 4b$ (iii) $a^2 + 2ab + b^2$

(iv) $a^3 - b^3$

हल दिए हुए व्यंजकों में, $a = 3$ और $b = 2$ रखने पर, हमें प्राप्त होता है :

(i) $a + b = 3 + 2 = 5$

(ii) $7a - 4b = 7 \times 3 - 4 \times 2 = 21 - 8 = 13.$

(iii) $a^2 + 2ab + b^2 = 3^2 + 2 \times 3 \times 2 + 2^2 = 9 + 12 + 4 = 25$

(iv) $a^3 - b^3 = 3^3 - 2^3 = 3 \times 3 \times 3 - 2 \times 2 \times 2 = 9 \times 3 - 4 \times 2 = 27 - 8 = 19$

© NCERT not to be republished

प्रश्नावली 12.3

1. यदि $m = 2$ है, तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए :

(i) $m - 2$ (ii) $3m - 5$ (iii) $9 - 5m$

(iv) $3m^2 - 2m - 7$ (v) $\frac{5m}{2}$ 4

2. यदि $p = -2$ है, तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए :

(i) $4p + 7$ (ii) $-3p^2 + 4p + 7$ (iii) $-2p^3 - 3p^2 + 4p + 7$

3. निम्नलिखित व्यंजकों के मान ज्ञात कीजिए, जब $x = -1$ है :

(i) $2x - 7$ (ii) $-x + 2$ (iii) $x^2 + 2x + 1$

(iv) $2x^2 - x - 2$

4. यदि $a = 2$ और $b = -2$ है, तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए :

(i) $a^2 + b^2$ (ii) $a^2 + ab + b^2$ (iii) $a^2 - b^2$

5. जब $a = 0$ और $b = -1$ है, तो दिए हुए व्यंजकों के मान ज्ञात कीजिए :

(i) $2a + 2b$ (ii) $2a^2 + b^2 + 1$ (iii) $2a^2b + 2ab^2 + ab$

(iv) $a^2 + ab + 2$

6. इन व्यंजकों को सरल कीजिए तथा इनके मान ज्ञात कीजिए, जब x का मान 2 है :

(i) $x + 7 + 4(x - 5)$ (ii) $3(x + 2) + 5x - 7$

(iii) $6x + 5(x - 2)$ (iv) $4(2x - 1) + 3x + 11$

7. इन व्यंजकों को सरल कीजिए तथा इनके मान ज्ञात कीजिए, जब $x = 3$, $a = -1$ और $b = -2$ है:

(i) $3x - 5 - x + 9$ (ii) $2 - 8x + 4x + 4$

(iii) $3a + 5 - 8a + 1$ (iv) $10 - 3b - 4 - 5b$

(v) $2a - 2b - 4 - 5 + a$

8. (i) यदि $z = 10$ है, तो $z^3 - 3(z - 10)$ का मान ज्ञात कीजिए :

(ii) यदि $p = -10$ है, तो $p^2 - 2p - 100$ का मान ज्ञात कीजिए।

9. यदि $x = 0$ पर $2x^2 + x - a$ का मान 5 के बराबर है, तो a का मान क्या होना चाहिए ?

10. व्यंजक $2(a^2 + ab) + 3 - ab$ को सरल कीजिए और इसका मान ज्ञात कीजिए, जब $a = 5$ और $b = -3$ है।

12.8 बीजीय व्यंजकों के प्रयोग–सूत्र और नियम

हम पहले भी देख चुके हैं कि गणित में सूत्रों (formulas) और नियम (rules) को संक्षिप्त और व्यापक रूप में, बीजीय व्यंजकों का प्रयोग करके लिखा जा सकता है। हम नीचे अनेक उदाहरण देखेंगे :

- **परिमाप सूत्र**

1. एक समबाहु त्रिभुज का परिमाप $= 3 \times$ उसकी भुजा की लंबाई होता है। यदि इस समबाहु त्रिभुज की भुजा की लंबाई को l से व्यक्त करें, तो **उसका परिमाप = $3l$** का होगा।
2. इसी प्रकार, **एक वर्ग का परिमाप = $4l$ होता है**, जहाँ l वर्ग की भुजा की लम्बाई है।
3. एक सम पंचभुज (regular pentagon) **का परिमाप = $5l$ होता है**, जहाँ l उसकी भुजा की लंबाई है, इत्यादि।

- **क्षेत्रफल सूत्र**

1. यदि हम एक वर्ग की भुजा को l से व्यक्त करें, तो वर्ग का क्षेत्रफल $= l^2$ होता है।
2. यदि हम एक आयत की लंबाई और चौड़ाई को क्रमशः l और b से व्यक्त करें, तो आयत का क्षेत्रफल $= l \times b = lb$ होता है।
3. इसी प्रकार, यदि एक त्रिभुज का आधार b और ऊंचाई h है, तो त्रिभुज का

क्षेत्रफल $= \dfrac{b \times h}{2} = \dfrac{bh}{2}$ होता है।

एक बार किसी दी हुई राशि के लिए सूत्र, अर्थात् बीजीय व्यंजक ज्ञात हो जाए, तो उस राशि का मान वांछित प्रतिबंधों के अंतर्गत परिकलित किया जा सकता है।

उदाहरणार्थ, लंबाई 3 cm की भुजा वाले एक दिए हुए वर्ग का परिमाप, वर्ग के परिमाप के व्यंजक, अर्थात् $4l$ में $l = 3$ cm रखने पर प्राप्त किया जाता है।

दिए हुए वर्ग का परिमाप $= (4 \times 3)$ cm $= 12$ cm

इसी प्रकार, इस वर्ग का क्षेत्रफल, वर्ग के क्षेत्रफल के व्यंजक, अर्थात् l^2 में $l = 3$ cm रख कर प्राप्त किया जाता है।

दिए हुए वर्ग का क्षेत्रफल $= (3)^2$ cm^2 $= 9$ cm^2

- **संख्या प्रतिरूपों (Patterns) के लिए नियम**

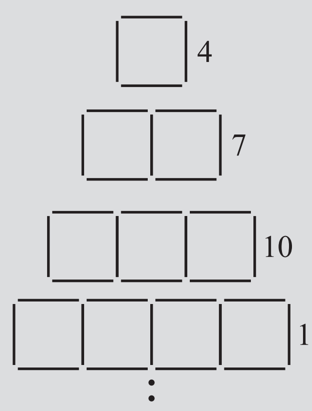
निम्नलिखित कथनों का अध्ययन कीजिए :

1. यदि किसी प्राकृत संख्या को n से व्यक्त किया जाए तो उसका परवर्ती (successor) $(n + 1)$ होता है। हम इसकी जाँच किसी भी प्राकृत संख्या के लिए कर सकते हैं। उदाहरणार्थ, यदि प्राकृत संख्या 10 है, तो उसका परिवर्ती $10 + 1 = 11$ है, जो सर्वविदित है (ज्ञात है)।
2. यदि किसी प्राकृत संख्या को n से व्यक्त किया जाए, तो $2n$ एक सम संख्या होती है तथा $(2n + 1)$ एक विषम संख्या होती है। आइए इसकी जाँच कोई भी प्राकृत संख्या, माना 15 लेकर करें। अब, $2n = 2 \times 15 = 30$ है, जो वास्तव में एक सम संख्या है तथा $2n + 1 = 2 \times 15 + 1 = 30 + 1 = 31$ है, जो वास्तव में एक विषम संख्या है।

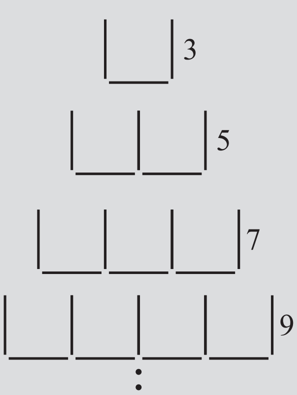
इन्हें कीजिए

माचिस की तीलियों, दाँत साफ़ करने की सीकों या सरकंडों के बराबर लंबाई के टुकड़ों के छोटे रेखाखंडों को लीजिए। उन्हें आकृतियों में दर्शाए अनुसार प्रतिरूपों (patterns) में जोड़िए :

1. आकृति 12.1 में बने पैटर्न को देखिए।
इसमें चार रेखाओं से बने आकार □ की पुनरावृत्ति हो रही है। जैसा कि आप देख सकते हैं कि एक आकार को बनाने के लिए चार रेखाखंडों की आवश्यकता होती है, दो आकारों के लिए 7, तीन आकारों के लिए 10, इत्यादि रेखाखंडों की आवश्यकता होती है। यदि आकारों की संख्या n हो, तो उन्हें बनाने के लिए आवश्यक रेखाखंडों की संख्या $(3n + 1)$ होगी। आप इसकी सत्यता की जाँच $n = 1, 2, 3, ..., 10, ...$ इत्यादि लेकर कर सकते हैं। यदि बनाए गए आकारों की संख्या 3 है, तो आवश्यक रेखाखंडों की संख्या $3 \times 3 + 1 = 10$ होती, जैसाकि आकृति से भी देखा जासकता है।



आकृति 12.1



आकृति 12.2

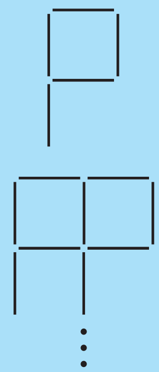
2. अब आकृति 12.2 में दिए पैटर्न पर विचार कीजिए। यहाँ आकार ⊔ की पुनरावृत्ति हो रही है। आकारों 1, 2, 3, ... को बनाने के लिए आवश्यक रेखाखंडों की संख्याएँ क्रमशः 3, 5, 7, 9, ... हैं। क्रमशः यदि n बनाए गए आकारों की संख्या को व्यक्त करता है तो आवश्यक रेखाखंडों की संख्या व्यंजक $(2n + 1)$ से प्राप्त होगी। व्यंजक सही है या नहीं, की जाँच आप n के किसी भी मान को लेकर कर सकते हैं। उदाहरणार्थ, $n = 4$ लेने पर, वांछित रेखाखंडों की संख्या, $2n + 1 = (2 \times 4) + 1 = 9$, होगी, जो वास्तव में 4 ⊔ के बनाने के लिए आवश्यक है।

© NCERT not to be republished

प्रयास कीजिए

दर्शाए गए आधारभूत आकारों को लेकर उपरोक्त प्रकार के पैटर्न बनाइए :

(i)



5

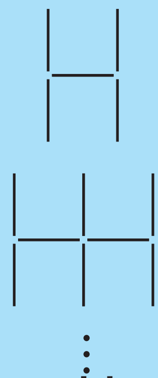
9

⋮

$(4n + 1)$

(आकार P)

(ii)



5

8

⋮

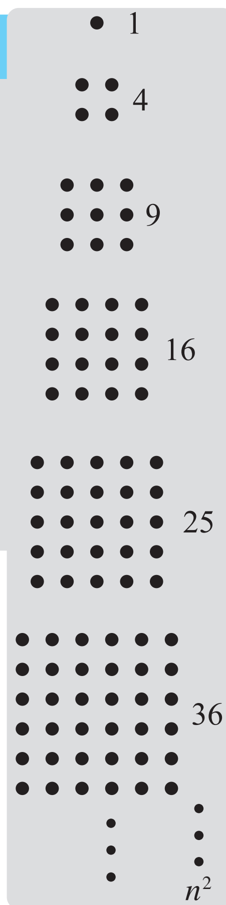
$(3n + 2)$

(आकार H)

[आकारों को बनाने के लिए आवश्यक रेखाखंडों की संख्या दाईं ओर लिखी हुई है। साथ ही n आकारों को बनाने के लिए आवश्यक रेखाखंडों के दर्शाने वाला व्यंजक भी दाईं ओर दिया हुआ है।]

आगे बढ़िए और ऐसी ही और पैटर्नों की खोज कीजिए।

इन्हें कीजिए



आकृति में दर्शाए अनुसार, बिंदुओं (dots) के पैटर्न बनाइए। यदि आप एक आलेख कागज़ या बिंदुकित कागज़ (dot paper) लें, तो पैटर्नों को बनाना सरल रहेगा।

देखिए कि किस प्रकार बिंदुओं को एक वर्ग के आकार में व्यवस्थित किया गया है। यदि किसी विशिष्ट आकार में एक पंक्ति या एक स्तंभ में बिंदुओं की संख्या चर n लेते हैं, तो आकार में कुल बिंदुओं की संख्या व्यंजक $n \times n = n^2$ से प्राप्त होगी। उदाहरणार्थ $n = 4$ लीजिए। उस आकार के लिए जिसकी प्रत्येक पंक्ति (या प्रत्येक स्तंभ) में 4 बिंदु हैं, तब कुल बिंदुओं की संख्या $4 \times 4 = 16$ होगी, जिसे वास्तव में आकृति से देखा जा सकता है। आप इसी प्रकार की जाँच n के अन्य मान लेकर भी कर सकते हैं। प्राचीन यूनानी गणितज्ञों ने इन संख्याओं 1, 4, 9, 16, ... को वर्ग संख्याओं (square numbers) से नामांकित किया।

● कुछ और संख्या पैटर्न

आइए संख्याओं के एक अन्य पैटर्न पर विचार करें, जिसमें हमारी सहायता के लिए कोई आकृति बनी हुई नहीं है : $3, 6, 9, 12, ..., 3n, ...$

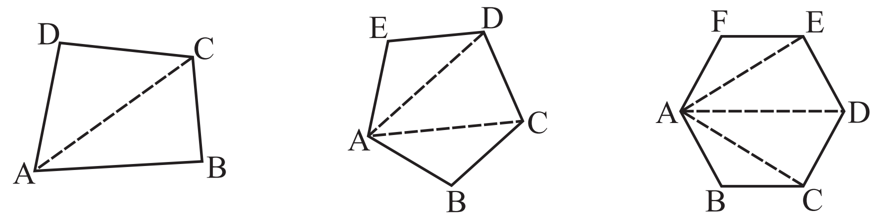
ये संख्याएँ 3 के गुणज (multiples) हैं और इन्हें 3 से प्रारंभ करते हुए आरोही क्रम में व्यवस्थित किया गया है। n वें स्थान पर आने वाले पद को $3n$ से व्यक्त किया गया है इसकी सहायता से, आप सरलतापूर्वक 10वें स्थान पर आने वाले पद (जो $3 \times 10 = 30$ है) तथा 100 वें स्थान पर आने वाले पद (जो $3 \times 100 = 300$ है), इत्यादि ज्ञात कर सकते हैं।

© NCERT not to be republished

● **ज्यामिति में पैटर्न**

एक चतुर्भुज के किसी शीर्ष से उसके कितने विकर्ण खींचे जा सकते हैं ? जाँच कीजिए कि इनकी संख्या एक है।

एक पंचभुज के एक शीर्ष से उसके कितने विकर्ण खींच सकते हैं ? जाँच कीजिए कि इनकी संख्या दो है।



एक षटभुज के एक शीर्ष से उसके कितने विकर्ण खींचे जा सकते हैं? जाँच कीजिए यह संख्या 3 है।

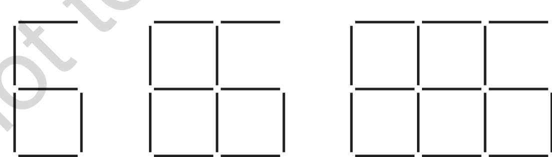
n भुजा वाले किसी बहुभुज के एक शीर्ष से हम कुल $(n-3)$ विकर्ण खींच सकते हैं। एक सप्तभुज (7 भुजाएँ) और अष्टभुज (8 भुजाएँ) के लिए, उनकी आकृतियाँ खींच करके इसकी जाँच कीजिए। यह संख्या एक त्रिभुज (3 भुजाएँ) के लिए क्या है ? ध्यान दीजिए कि किसी बहुभुज के किसी एक शीर्ष से खींचे गए विकर्ण उसे उतने अनानिव्यापी (non-overlapping) (जो एक दूसरे को न ढकते हों) त्रिभुजों में विभाजित करते हैं जितनी विकर्णों की संख्या से अधिक 1 संख्या होती है।

© NCERT not to be republished

प्रश्नावली 12.4

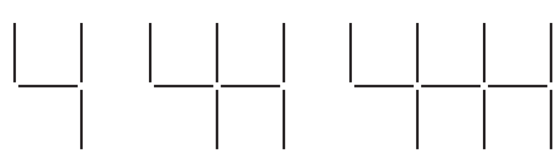
1. बराबर लंबाई के रेखाखंडों से बनाए गए अंकों के पैटर्न को देखिए। आप रेखाखंडों से बने हुए इस प्रकार के अंकों को इलैक्ट्रॉनिक घड़ियों या कैलकुलेटरों पर देख सकते हैं।

(a)



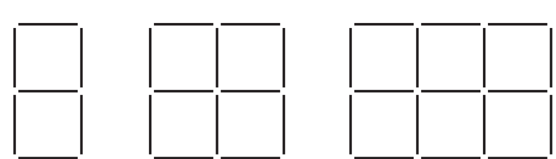
6   11   16   21 ... $(5n + 1)$ ...

(b)



4   7   10   13 ... $(3n + 1)$ ...

(c)



7   12   17   22 ... $(5n + 2)$ ...

यदि बनाए गए अंकों की संख्या n ली जाए, तो उसके लिए आवश्यक रेखाखंडों की (n) संख्या दर्शाने वाला बीजीय व्यंजक प्रत्येक पैटर्न के दाईं ओर लिखा गया है।

5, 4, 8 के प्रकार के 5,10,100 अंकों को बनाने के लिए कितने रेखाखंडों की आवश्यकता होगी ?

2. संख्या पैटर्नों की निम्नलिखित सारणी को पूरा करने के लिए, दिए हुए बीजीय व्यंजकों का प्रयोग कीजिए :

क्रम संख्या	व्यंजक	पद									
		पहला	दूसरा	तीसरा	चौथा	पाँचवाँ	...	दसवाँ	...	सौवाँ	...
(i)	$2n-1$	1	3	5	7	9	-	19	-	-	-
(ii)	$3n+2$	5	8	11	14	-	-	-	-	-	-
(iii)	$4n+1$	5	9	13	17	-	-	-	-	-	-
(iv)	$7n+20$	27	34	41	48	-	-	-	-	-	-
(v)	n^2+1	2	5	10	17	-	-	-	-	10,001	-

हमने क्या चर्चा की ?

1. **चरों** और **अचरों** से **बीजीय व्यंजक** बनते हैं। व्यंजकों को बनाने के लिए, हम चरों और अचरों पर योग, व्यवकलन, गुणन और विभाजन की संक्रियाएँ करते हैं। उदाहरणार्थ, व्यंजक $4xy + 7$ चरों x और y तथा अचरों 4 और 7 से बनाया गया है। अचर 4 तथा चरों x और y को गुणा करके $4xy$ बनाकर उसमें 7 जोड़ कर $4xy + 7$ बनाया जाता है।

2. व्यंजक **पदों** से मिलकर बनते हैं। पदों को जोड़ कर व्यंजक बनाया जाता है। उदाहरणार्थ, पदों $4xy$ और 7 को जोड़ने से व्यंजक $4xy + 7$ बन जाता है।

3. एक **पद, गुणनखंडों** का एक **गुणनफल** होता है। व्यंजक $4xy + 7$ में पद $4xy$ गुणनखंडों x, y और 4 का एक गुणनफल है। चरों वाले गुणनखंड **बीजीय गुणनखंड** कहलाते हैं।

4. पद का **गुणांक** उसका संख्यात्मक गुणनखंड होता है। कभी-कभी पद का कोई भी एक गुणनखंड पद के शेष भाग का गुणांक कहलाता है।

5. एक या अधिक पदों से बना व्यंजक एक **बहुपद** कहलाता है। विशिष्ट रूप से, एक पद वाला व्यंजक **एकपदी**, दो पदों वाला व्यंजक **द्विपद** तथा तीन पदों वाला व्यंजक **त्रिपद** कहलाता है।

6. वे पद जिनमें बीजीय गुणनखंड एक जैसे हों, **समान पद** कहलाते हैं तथा भिन्न-भिन्न बीजीय गुणनखंडों वाले पद **असमान पद** कहलाते हैं। इस प्रकार $4xy$ और $-3xy$ समान पद हैं, परंतु $4xy$ और $-3x$ समान पद नहीं हैं।

7. **दो समान पदों का योग** (या **अंतर**) एक अन्य समान पद होता है, जिसका गुणांक उन समान पदों के **गुणांकों** के योग (या **अंतर**) के बराबर होता है। इस प्रकार, $8xy - 3xy = (8 - 3)xy$, अर्थात् $5xy$।

© NCERT not to be republished

8. जब हम दो बीजीय व्यंजकों को **जोड़ते** हैं, तो समान पदों को, ऊपर वर्णित नियम के अनुसार जोड़ा जाता है; जो समान पद नहीं हैं उन्हें वैसे ही छोड़ दिया जाता है। इस प्रकार, $4x^2 + 5x$ और $2x + 3$ का योग $4x^2 + 7x + 3$ है। यहाँ समान पद $5x$ और $2x$ जुड़ कर $7x$ बन जाते हैं तथा **असमान** पदों $4x^2$ और 3 को वैसे ही छोड़ दिया जाता है।

9. एक समीकरण को हल करने और किसी सूत्र का प्रयोग करने जैसी स्थितियों में, हमें एक **व्यंजक का मान** ज्ञात करने की आवश्यकता होती है। बीजीय व्यंजक का मान उन चरों के मानों पर निर्भर करता है, जिनसे वह बनाया गया है। इस प्रकार, $x = 5$ के लिए $7x - 3$ का मान 32, है क्योंकि $7 \times 5 - 3 = 32$ है।

10. गणित में, बीजीय व्यंजकों का प्रयोग करते हुए, **नियमों और सूत्रों** को संक्षिप्त और व्यापक रूप में लिखा जाता है।

    इस प्रकार, आयत का क्षेत्रफल $= lb$, है, जहाँ l आयत की लंबाई तथा b आयत की चौड़ाई है।

    एक संख्या पैटर्न (या अनुक्रम) का व्यापक (nवाँ) पद, n में एक व्यंजक होता है। इस प्रकार, संख्या पैटर्न 11, 21, 31, 41, . . . का n वाँ पद $(10n + 1)$ है।

© NCERT not to be republished

अध्याय 13

घातांक और घात

© NCERT not to be republished

13.1 भूमिका

क्या आप जानते हैं कि पृथ्वी का द्रव्यमान (mass) क्या है? यह 5,970,000,000,000,000,000,000,000 kg है!

क्या आप इस संख्या को पढ़ सकते हैं?

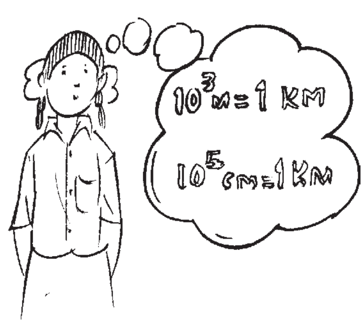
यूरेनस ग्रह (Uranus) का द्रव्यमान 86,800,000,000,000,000,000,000,000 kg है।

किसका द्रव्यमान अधिक है–पृथ्वी या यूरेनस ग्रह?

सूर्य (Sun) और शनि (Saturn) के बीच की दूरी 1,433,500,000,000 m है तथा शनि और यूरेनस ग्रह के बीच की दूरी 1,439,000,000,000 m है। क्या आप इन संख्याओं को पढ़ सकते हैं? इनमें कौन-सी दूरी कम है?

ऐसी बहुत बड़ी संख्याओं का पढ़ना, समझना और इनकी तुलना करना कठिन होता है। इन संख्याओं को सरलता से पढ़ने, समझने और इनकी तुलना करने के लिए, हम घातांकों (exponents) का प्रयोग करते हैं। इस अध्याय में, हम घातांकों के बारे में सीखेंगे तथा यह भी सीखेंगे कि इनका प्रयोग किस प्रकार किया जाता है।

13.2 घातांक



हम बड़ी संख्याओं को घातांकों का प्रयोग करके संक्षिप्त रूप में लिख सकते हैं। निम्नलिखित को देखिए : $10,000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$

संक्षिप्त संकेतन 10^4 गुणनफल $10\times10\times10\times10$ को व्यक्त करता है। यहाँ, '10' **आधार (base)** और '4' **घातांक** कहलाता है। **10^4** को **10 के ऊपर घात (power) 4 या केवल 10 की चौथी घात पढ़ा जाता है। 10^4** को 10000 का **घातांकीय रूप (exponential form)** कहा जाता है।

हम इसी प्रकार 1000 को भी 10 की घात के रूप में व्यक्त कर सकते हैं। ध्यान दीजिए कि

$$1000 = 10 \times 10 \times 10 = 10^3 \text{ है।}$$

यहाँ, पुनः 10^3 संख्या 1000 का घातांकीय रूप है।

इसी प्रकार, $1,00,000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^5$ है।

अर्थात्, 10^5 संख्या 1,00,000 का घातांकीय रूप है।

इन दोनों उदाहरणों में, आधार 10 है। 10^3 में घातांक 3 है तथा 10^5 में घातांक 5 है।

हम संख्याओं को विस्तारित या प्रसारित रूप (expanded form) में लिखने के लिए 10, 100, 1000 इत्यादि जैसी संख्याओं का प्रयोग कर चुके हैं।

उदाहरणार्थ, $47561 = 4 \times 10000 + 7 \times 1000 + 5 \times 100 + 6 \times 10 + 1$ है।

इसे $4 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 6 \times 10 + 1$ के रूप में लिखा जा सकता है।

निम्नलिखित संख्याओं को इसी प्रकार लिखने का प्रयत्न कीजिए :

172, 5642, 6374

उपरोक्त सभी उदाहरणों में, हमने वे संख्याएँ देखी हैं जिनके आधार 10 हैं। परंतु आधार कोई भी संख्या हो सकती है। उदाहरणार्थ,

$81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$ के रूप में लिखा जा सकता है। यहाँ आधार 3 है और घातांक 4 है।

कुछ घातों के विशिष्ट नाम हैं। उदाहरणार्थ :

10^2, जो 10 के ऊपर घात 2 है, इसे 10 का वर्ग (10 squared) भी पढ़ा जाता है।

10^3, जो 10 के ऊपर घात 3 है, इसे 10 का घन (10 cubed) भी पढ़ा जाता है।

क्या आप बता सकते हैं कि 5^3 (5 के घन) का क्या अर्थ है?

$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$

अतः हम कह सकते हैं कि 125 संख्या 5 की तीसरी घात (third power) है।

5^3 में आधार तथा घातांक क्या हैं?

इसी प्रकार $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ है, जो 2 की पाँचवीं घात है।

2^5 में, 2 आधार है तथा घातांक 5 है।

इसी विधि के अनुसार,

$$243 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5,$$

$$64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6$$

$$625 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$$

प्रयास कीजिए

ऐसे पाँच और उदाहरण दीजिए, जहाँ एक संख्या को घातांकीय रूप में व्यक्त किया जाता है। प्रत्येक स्थिति में, घातांक व आधार की पहचान भी कीजिए।

आप संक्षिप्त रूप में लिखने की इस विधि को तब भी लागू कर सकते हैं, जब आधार एक ऋणात्मक पूर्णांक हो।

$(-2)^3$ का क्या अर्थ है?

© NCERT not to be republished

यह $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$ है।

क्या $(-2)^4 = 16$ है? इसकी जाँच कीजिए।

कोई निश्चित संख्या लेने के स्थान पर, आइए किसी भी संख्या a को आधार लें तथा संख्याओं को निम्नलिखित रूप में लिखें :

$a \times a = a^2$ (इसे 'a का वर्ग' या 'a के ऊपर घात 2' पढ़ा जाता है)

$a \times a \times a = a^3$ (इसे 'a का घन' या 'a के ऊपर घात 3' पढ़ा जाता है)

$a \times a \times a \times a = a^4$ (इसे a के ऊपर घात 4 या 'a की चौथी घात' पढ़ा जाता है)

$a \times a \times a \times a \times a \times a \times a = a^7$ (इसे 'a के ऊपर घात 7' या 'a की सातवीं घात' पढ़ा जाता है)

इत्यादि।

$a \times a \times a \times b \times b$ को a^3b^2 के रूप में व्यक्त किया जा सकता है (इसे a का घन गुणा b का वर्ग पढ़ा जाता है)।

$a \times a \times b \times b \times b \times b$ को a^2b^4 के रूप में व्यक्त किया जा सकता है (इसे a का वर्ग गुणा b पर 4 घात पढ़ा जाता है)।

प्रयास कीजिए

व्यक्त कीजिए :

(i) 729 को 3 की घात के रूप में

(ii) 128 को 2 की घात के रूप में

(iii) 343 को 7 की घात के रूप में

उदाहरण 1 256 को 2 की घात के रूप में व्यक्त कीजिए।

हल हमें प्राप्त है $256 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

अतः हम कह सकते हैं कि $256 = 2^8$

उदाहरण 2 2^3 और 3^2 में कौन बड़ा है?

हल हमें प्राप्त है कि $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ है तथा $3^2 = 3 \times 3 = 9$ है।

चूँकि $9 > 8$ है, इसलिए 3^2 संख्या 2^3 से बड़ा है।

उदाहरण 3 8^2 और 2^8 में कौन बड़ा है?

हल $8^2 = 8 \times 8 = 64$ है।

$2^8 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 256$ है।

स्पष्टतया, $2^8 > 8^2$

उदाहरण 4 $a^3 b^2$, $a^2 b^3$, $b^2 a^3$, और $b^3 a^2$ को प्रसारित रूप में लिखिए। क्या ये सभी बराबर हैं?

हल

$$a^3 b^2 = a^3 \times b^2 = (a \times a \times a) \times (b \times b) = a \times a \times a \times b \times b$$

$$a^2 b^3 = a^2 \times b^3 = a \times a \times b \times b \times b$$

$$b^2 a^3 = b^2 \times a^3 = b \times b \times a \times a \times a$$

$$b^3 a^2 = b^3 \times a^2 = b \times b \times b \times a \times a$$

© NCERT not to be republished

ध्यान दीजिए कि पद a^3 b^2 और a^2 b^3 की स्थिति में, a और b की घातें भिन्न-भिन्न हैं। इस प्रकार, a^3 b^2 और a^2 b^3 भिन्न-भिन्न हैं।

इसके विपरीत, a^3 b^2 और b^2 a^3 बराबर (एक ही) हैं, चूँकि इनमें a और b की घातें एक ही हैं। गुणनखंडों के क्रम से कोई प्रभाव नहीं पड़ता है।

इस प्रकार, $a^3 b^2 = a^3 \times b^2 = b^2 \times a^3 = b^2 a^3$ है।

इसी प्रकार a^2 b^3 और b^3 a^2 भी बराबर हैं।

उदाहरण 5 निम्नलिखित संख्याओं को अभाज्य गुणनखंडों की घातों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) 72 (ii) 432 (iii) 1000 (iv) 16000

हल

2	72
2	36
2	18
3	9
	3

(i) $72 = 2 \times 36 = 2 \times 2 \times 18$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 9$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^2$

इस प्रकार $72 = 2^3 \times 3^2$ (वांछित अभाज्य गुणनखंडों की घातों के गुणनफल वाला रूप)

(ii) $432 = 2 \times 216 = 2 \times 2 \times 108 = 2 \times 2 \times 2 \times 54$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 27 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 9$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$

या $432 = 2^4 \times 3^3$ (वांछित रूप)

(iii) $1000 = 2 \times 500 = 2 \times 2 \times 250 = 2 \times 2 \times 2 \times 125$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 25 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$

या $1000 = 2^3 \times 5^3$

अतुल इस उदाहरण को निम्नलिखित विधि से हल करना चाहता है :

$1000 = 10 \times 100 = 10 \times 10 \times 10$

$= (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5)$ (चूँकि $10 = 2 \times 5$ है)

$= 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$

या $1000 = 2^3 \times 5^3$

क्या अतुल की विधि सही है?

(iv) $16000 = 16 \times 1000 = (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times 1000$ (चूँकि $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$ है।)

$= (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5)$

(चूँकि $1000 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$ है।)

$= (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (5 \times 5 \times 5)$

या, $16000 = 2^7 \times 5^3$

उदाहरण 6 निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए।

$(1)^5$, $(-1)^3$, $(-1)^4$, $(-10)^3$ और $(-5)^4$:

हल

(i) हमें प्राप्त है, $(1)^5 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$

वास्तव में, 1 की कोई भी घात 1 के बराबर होती है।

© NCERT not to be republished

(ii) $(-1)^3 = (-1) \times (-1) \times (-1) = 1 \times (-1) = -1$

(iii) $(-1)^4 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = 1 \times 1 = 1$

आप इसकी जाँच कर सकते हैं कि (–1) की कोई भी **विषम** घात (–1) के बराबर होती है तथा (–1) की कोई भी **सम** घात (+1) के बराबर होती है।

$(-1)^{\text{विषम संख्या}} = -1$

$(-1)^{\text{सम संख्या}} = +1$

(iv) $(-10)^3 = (-10) \times (-10) \times (-10) = 100 \times (-10) = -1000$

(v) $(-5)^4 = (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) = 25 \times 25 = 625$

प्रश्नावली 13.1

1. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए :

(i) 2^6 (ii) 9^3 (iii) 11^2 (iv) 5^4

2. निम्नलिखित को घातांकीय रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) $6 \times 6 \times 6 \times 6$ (ii) $t \times t$ (iii) $b \times b \times b \times b$

(iv) $5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7$ (v) $2 \times 2 \times a \times a$ (vi) $a \times a \times a \times c \times c \times c \times c \times d$

3. निम्नलिखित संख्याओं में से प्रत्येक को घातांकीय संकेतन में व्यक्त कीजिए :

(i) 512 (ii) 343 (iii) 729 (iv) 3125

4. निम्नलिखित में से प्रत्येक भाग में, जहाँ भी संभव हो, बड़ी संख्या को पहचानिए:

(i) 4^3 या 3^4 (ii) 5^3 या 3^5 (iii) 2^8 या 8^2

(iv) 100^2 या 2^{100} (v) 2^{10} या 10^2

5. निम्नलिखित में से प्रत्येक को उनके अभाज्य गुणनखंडों की घातों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) 648 (ii) 405 (iii) 540 (iv) 3600

6. सरल कीजिए :

(i) 2×10^3 (ii) $7^2 \times 2^2$ (iii) $2^3 \times 5$ (iv) 3×4^4

(v) 0×10^2 (vi) $5^2 \times 3^3$ (vii) $2^4 \times 3^2$ (viii) $3^2 \times 10^4$

7. सरल कीजिए :

(i) $(-4)^3$ (ii) $(-3) \times (-2)^3$ (iii) $(-3)^2 \times (-5)^2$

(iv) $(-2)^3 \times (-10)^3$

8. निम्नलिखित संख्याओं की तुलना कीजिए :

(i) 2.7×10^{12} ; 1.5×10^8 (ii) 4×10^{14} ; 3×10^{17}

© NCERT not to be republished

13.3 घातांकों के नियम

13.3.1 एक ही आधार वाली घातों का गुणन

(i) आइए $2^2 \times 2^3$ को परिकलित करें।

$$2^2 \times 2^3 = (2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2)$$
$$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 2^{2+3}$$

ध्यान दीजिए कि 2^2 और 2^3 में आधार एक ही (समान) है तथा घातांकों का योग, अर्थात् 2 और 3 का योग 5 है।

(ii) $(-3)^4 \times (-3)^3 = [(-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)] \times [(-3) \times (-3) \times (-3)]$

$= (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)$

$= (-3)^7$

$= (-3)^{4+3}$

पुनः ध्यान दीजिए कि आधार एक ही है तथा घातांकों का योग $4 + 3 = 7$ है।

(iii) $a^2 \times a^4 = (a \times a) \times (a \times a \times a \times a)$

$= a \times a \times a \times a \times a \times a = a^6$

(टिप्पणी: आधार एक ही है तथा घातांकों का योग $2 + 4 = 6$ है)

इसी प्रकार, सत्यापित कीजिए कि

$4^2 \times 4^2 = 4^{2+2}$

तथा $3^2 \times 3^3 = 3^{2+3}$ है।

प्रयास कीजिए

सरल करके घातांकीय रूप में लिखिए :

(i) $2^5 \times 2^3$

(ii) $p^3 \times p^2$

(iii) $4^3 \times 4^2$

(iv) $a^3 \times a^2 \times a^7$

(v) $5^3 \times 5^7 \times 5^{12}$

(vi) $(-4)^{100} \times (-4)^{20}$

क्या आप बॉक्स में उपयुक्त संख्या लिख सकते हैं ?

$(-11)^2 \times (-11)^6 = 11^{\square}$

$b^2 \times b^3 = b^{\square}$ (याद रखिए, आधार एक ही है, b कोई भी शून्येतर पूर्णांक है)।

$c^3 \times c^4 = c^{\square}$ (c कोई भी शून्येतर पूर्णांक है)।

$d^{10} \times d^{20} = d^{\square}$

यहाँ से हम व्यापक रूप से यह कह सकते हैं कि एक शून्येतर पूर्णांक a, के लिए, $a^m \times a^n = a^{m+n}$

होता है, जहाँ m और n पूर्ण संख्याएँ हैं।

© NCERT not to be republished

सावधानी!

$2^3 \times 3^2$ पर विचार कीजिए।

क्या आप घातांकों को जोड़ सकते हैं? नहीं! क्या आप बता सकते हैं 'क्यों'? 2^3 का आधार 2 है और 3^2 का आधार 3 है। आधार एक समान नहीं हैं।

13.3.2 एक ही आधार वाली घातों का विभाजन

आइए $3^7 \div 3^4$ को सरल करें।

$$3^7 \div 3^4 = \frac{3^7}{3^4} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 3 \times 3}$$

$$= 3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 3^{7-4}$$

इस प्रकार, $3^7 \div 3^4 = 3^{7-4}$ है।

[ध्यान दीजिए कि 3^7 और 3^4 के आधार एक ही हैं और $3^7 \div 3^4 = 3^{7-4}$ हो जाता है।]

इस प्रकार, $$5^6 \div 5^2 = \frac{5^6}{5^2} = \frac{5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5}{5 \times 5}$$

$$= 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4 = 5^{6-2}$$

या, $5^6 \div 5^2 = 5^{6-2}$ है।

मान लीजिए कि a कोई शून्येतर पूर्णांक है। तब,

$$a^4 \div a^2 = \frac{a^4}{a^2} = \frac{a \times a \times a \times a}{a \times a} = a \times a = a^2 = a^{4-2}$$

या $\quad a^4 \div a^2 = a^{4-2}$ है।

क्या अब आप तुरंत उत्तर दे सकते हैं?

$10^8 \div 10^3 = 10^{8-3} = 10^5$

$7^9 \div 7^6 = 7^{\square}$

$a^8 \div a^5 = a^{\square}$

शून्येतर पूर्णांक b और c के लिए

$b^{10} \div b^5 = b^{\square}$

$c^{100} \div c^{90} = c^{\square}$

व्यापक रूप में, किसी भी शून्येतर पूर्णांक a के लिए,

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

होता है, जहाँ m और n पूर्ण संख्याएँ हैं तथा $m > n$ है।

प्रयास कीजिए

सरल करके घातांकीय रूप में लिखिए:
(उदाहरण के लिए, $11^6 \div 11^2 = 11^4$)

(i) $2^9 \div 2^3$ (ii) $10^8 \div 10^4$

(iii) $9^{11} \div 9^7$ (iv) $20^{15} \div 20^{13}$

(v) $7^{13} \div 7^{10}$

13.3.3 एक घात की घात लेना

निम्नलिखित पर विचार कीजिए :

$\left(2^3\right)^2$ और $\left(3^2\right)^4$ को सरल कीजिए।

अब, $\left(2^3\right)^2$ का अर्थ है 2^3 का स्वयं से दो बार गुणा किया गया है।

$$\left(2^3\right)^2 = 2^3 \times 2^3$$

$= 2^{3+3}$ (चूँकि $a^m \times a^n = a^{m+n}$ है।)

$= 2^6 = 2^{3 \times 2}$

अर्थात् $\quad \left(2^3\right)^2 = 2^{3\times2}$

इसी प्रकार, $\quad \left(3^2\right)^4 = 3^2 \times 3^2 \times 3^2 \times 3^2$

$= 3^{2+2+2+2}$

$= 3^8$ (देखिए कि 2 और 4 का गुणनफल 8 है।)

$= 3^{2 \times 4}$

क्या आप बता सकते हैं कि $\left(7^2\right)^{10}$ किसके बराबर है?

अत:, $\quad \left(2^3\right)^2 = 2^{3 \times 2} = 2^6$

$\left(3^2\right)^4 = 3^{2 \times 4} = 3^8$

प्रयास कीजिए

सरल करके, उत्तर को घातांकीय रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) $\left(6^2\right)^4$ (ii) $\left(2^2\right)^{100}$

(iii) $\left(7^{50}\right)^2$ (iv) $\left(5^3\right)^7$

© NCERT not to be republished

$$\left(7^{2}\right)^{10} = 7^{2\times 10} = 7^{20}$$

$$\left(a^{2}\right)^{3} = a^{2\times 3} = a^{6}$$

$$(a^{m})^{3} = a^{m\times 3} = a^{3m}$$

उपरोक्त से, हम व्यापक रूप से कह सकते हैं कि किसी शून्येतर पूर्णांक 'a' के लिए,

$$\left(a^{m}\right)^{n} = a^{mn}$$

होता है, जहाँ m और n पूर्ण संख्याएँ हैं।

उदाहरण 7 क्या आप बता सकते हैं कि $(5^2) \times 3$ और $\left(5^{2}\right)^{3}$ में से कौन बड़ा है?

हल $(5^2) \times 3$ का अर्थ है कि 5^2 को 3 से गुणा किया गया है, अर्थात् यह $5 \times 5 \times 3 = 75$

परंतु $\left(5^{2}\right)^{3}$ का अर्थ है कि 5^2 का स्वयं से तीन बार गुणा किया गया है, अर्थात् यह

$$5^2 \times 5^2 \times 5^2 = 5^6 = 15625 \text{ है।}$$

अतः, $(5^2)^3 > (5^2) \times 3$ है।

13.3.4 समान घातांकों वाली घातों का गुणन

क्या आप $2^3 \times 3^3$ को सरल कर सकते हैं? ध्यान दीजिए कि यहाँ दोनों पदों 2^3 और 3^3 के आधार भिन्न-भिन्न हैं। परंतु इनके घातांक समान हैं।

अब $2^3 \times 3^3 = (2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3)$

$= (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3)$

$= 6 \times 6 \times 6$

$= 6^3$ (देखिए 6 आधारों 2 और 3 का गुणनफल है)

देखिए $4^4 \times 3^4 = (4 \times 4 \times 4 \times 4) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3)$

$= (4 \times 3) \times (4 \times 3) \times (4 \times 3) \times (4 \times 3)$

$= 12 \times 12 \times 12 \times 12$

$= 12^4$

साथ ही, देखिए $3^2 \times a^2 = (3 \times 3) \times (a \times a)$

$= (3 \times a) \times (3 \times a)$

$= (3 \times a)^2$

$= (3a)^2$ (ध्यान दीजिए : $3\times a = 3a$)

इसी प्रकार $a^4 \times b^4 = (a \times a \times a \times a) \times (b \times b \times b \times b)$

$= (a \times b) \times (a \times b) \times (a \times b) \times (a \times b)$

$= (a \times b)^4$

$= (ab)^4$ (ध्यान दीजिए कि $a \times b = ab$ है)

© NCERT not to be republished

व्यापक रूप में, किसी भी शून्येतर पूर्णांक के लिए,

$a^m \times b^m = (ab)^m$ होता है जहाँ, m एक पूर्ण संख्या है

उदाहरण 8 निम्नलिखत पदों को घातांकीय रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) $(2 \times 3)^5$ (ii) $(2a)^4$ (iii) $(-4m)^3$

हल

(i) $(2 \times 3)^5 = (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3)$
$= (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3)$
$= 2^5 \times 3^5$

(ii) $(2a)^4 = 2a \times 2a \times 2a \times 2a$
$= (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (a \times a \times a \times a)$
$= 2^4 \times a^4$

(iii) $(-4m)^3 = (-4 \times m)^3$
$= (-4 \times m) \times (-4 \times m) \times (-4 \times m)$
$= (-4) \times (-4) \times (-4) \times (m \times m \times m) = (-4)^3 \times (m)^3$

प्रयास कीजिए

$a^m \times b^m = (ab)^m$ का प्रयोग करके, अन्य रूप में बदलिए :

(i) $4^3 \times 2^3$ (ii) $2^5 \times b^5$

(iii) $a^2 \times t^2$ (iv) $5^6 \times (-2)^6$

(v) $(-2)^4 \times (-3)^4$

13.3.5 समान घातांकों वाली घातों से विभाजन

निम्नलिखित सरलीकरणों को देखिए :

(i) $\dfrac{2^4}{3^4} = \dfrac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{3 \times 3 \times 3 \times 3} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^4$

(ii) $\dfrac{a^3}{b^3} = \dfrac{a \times a \times a}{b \times b \times b} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{a}{b} \times \dfrac{a}{b} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^3$

इन उदाहरणों से, हम कह सकते हैं कि व्यापक रूप में,

$a^m \div b^m = \dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$ जहाँ, a और b कोई दो शून्येतर पूर्णांक हैं तथा m एक पूर्ण संख्या है।

प्रयास कीजिए

$a^m \div b^m = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$ का प्रयोग करके, अन्य रूप में बदलिए:

(i) $4^5 \div 3^5$
(ii) $2^5 \div b^5$
(iii) $(-2)^3 \div b^3$
(iv) $p^4 \div q^4$
(v) $5^6 \div (-2)^6$

उदाहरण 9 प्रसार कीजिए: (i) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^4$ (ii) $\left(\dfrac{-4}{7}\right)^5$

हल

(i) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^4 = \dfrac{3^4}{5^4} = \dfrac{3 \times 3 \times 3 \times 3}{5 \times 5 \times 5 \times 5}$

(ii) $\left(\dfrac{-4}{7}\right)^5 = \dfrac{(-4)^5}{7^5} = \dfrac{(-4) \times (-4) \times (-4) \times (-4) \times (-4)}{7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7}$

© NCERT not to be republished

● शून्य घातांक वाली संख्याएँ

क्या आप बता सकते हैं कि $\frac{3^5}{3^5}$ किसके बराबर है?

$$\frac{3^5}{3^5} = \frac{3\times3\times3\times3\times3}{3\times3\times3\times3\times3} = 1 \text{ है।}$$

घातांकों के नियमों का प्रयोग करते हुए,

$3^5 \div 3^5 = 3^{5-5} = 3^0$ है।

अत: $3^0 = 1$ है।

क्या आप बता सकते हैं कि 7^0 किसके बराबर है?

$7^3 \div 7^3 = 7^{3-3} = 7^0$

साथ ही, $\frac{7^3}{7^3} = \frac{7\times7\times7}{7\times7\times7} = 1$ है।

अत: $7^0 = 1$

इसी प्रकार, $a^3 \div a^3 = a^{3-3} = a^0$ है।

साथ ही $a^3 \div a^3 = \frac{a^3}{a^3} = \frac{a\times a\times a}{a\times a\times a} = 1$ है।

अत:, $a^0 = 1$ (किसी भी शून्येतर पूर्णांक a के लिए)

अत:, हम कह सकते हैं कि किसी भी संख्या (शून्य के अतिरिक्त) पर घात (या घातांक) 0 का मान 1 होता है।

> a^0 क्या है?
>
> निम्नलिखित पैटर्न को देखिए :
>
> $2^6 = 64$
>
> $2^5 = 32$
>
> $2^4 = 16$
>
> $2^3 = 8$
>
> $2^2 = ?$
>
> $2^1 = ?$
>
> $2^0 = ?$
>
> आप केवल पैटर्न देख कर ही 2^0 के मान का अनुमान लगा सकते हैं।
>
> आप देख सकते हैं कि $2^0 = 1$ है।
>
> यदि $3^6 = 729$, से प्रारंभ करें, तो ऊपर दर्शाई विधि से 3^5, 3^4, 3^3,... इत्यादि ज्ञात करते हुए, क्या आप 3^0 का मान बता सकते हैं?

13.4 घातांकों के नियमों का विविध उदाहरणों में प्रयोग

आइए ऊपर विकसित किए गए घातांकों के नियमों का प्रयोग करके, कुछ उदाहरण हल करें।

उदाहरण 10 $8 \times 8 \times 8 \times 8$ के लिए, आधार 2 लेते हुए, इसे घातांकीय रूप में लिखिए।

हल ज्ञात है कि, $8 \times 8 \times 8 \times 8 = 8^4$

परंतु हम जानते हैं कि $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$ है।

अत:, $8^4 = (2^3)^4 = 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3$

$= 2^{3\times4}$ (आप $(a^m)^n = a^{mn}$ का भी प्रयोग कर सकते हैं।)

$= 2^{12}$

उदाहरण 11 सरल कीजिए और उत्तर को घातांकीय रूप में लिखिए :

(i) $\left(\frac{3^7}{3^2}\right)\times3^5$ (ii) $2^3\times2^2\times5^5$ (iii) $(6^2\times6^4)\div6^3$

(iv) $((2^2)^3\times3^6)\times5^6$ (v) $8^2\div2^3$

हल (i) $\left(\frac{3^7}{3^2}\right)\times3^5 = \left(3^{7-2}\right)\times3^5$

$= 3^5\times3^5 = 3^{5+5} = 3^{10}$

© NCERT not to be republished

(ii) $2^3 \times 2^2 \times 5^5 = 2^{3+2} \times 5^5$
$= 2^5 \times 5^5 = (2 \times 5)^5 = 10^5$

(iii) $(6^2 \times 6^4) \div 6^3 = 6^{2+4} \div 6^3$
$= \dfrac{6^6}{6^3} = 6^{6-3} = 6^3$

(iv) $\left[(2^2)^3 \times 3^6\right] \times 5^6 = [2^6 \times 3^6] \times 5^6$
$= (2 \times 3)^6 \times 5^6$
$= (2 \times 3 \times 5)^6 = 30^6$

(v) $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

अतः, $8^2 \div 2^3 = (2^3)^2 \div 2^3$
$= 2^6 \div 2^3 = 2^{6-3} = 2^3$

उदाहरण 12 सरल कीजिए :

(i) $\dfrac{12^4 \times 9^3 \times 4}{6^3 \times 8^2 \times 27}$ (ii) $2^3 \times a^3 \times 5a^4$ (iii) $\dfrac{2 \times 3^4 \times 2^5}{9 \times 4^2}$

हल (i) यहाँ

$$\frac{12^4 \times 9^3 \times 4}{6^3 \times 8^2 \times 27} = \frac{(2^2 \times 3)^4 \times (3^2)^3 \times 2^2}{(2 \times 3)^3 \times (2^3)^2 \times 3^3}$$

$$= \frac{(2^2)^4 \times (3)^4 \times 3^{2\times3} \times 2^2}{2^3 \times 3^3 \times 2^{2\times3} \times 3^3} = \frac{2^8 \times 2^2 \times 3^4 \times 3^6}{2^3 \times 2^6 \times 3^3 \times 3^3}$$

$$= \frac{2^{8+2} \times 3^{4+6}}{2^{3+6} \times 3^{3+3}} = \frac{2^{10} \times 3^{10}}{2^9 \times 3^6}$$

$= 2^{10-9} \times 3^{10-6} = 2^1 \times 3^4$
$= 2 \times 81 = 162$

(ii) $2^3 \times a^3 \times 5a^4 = 2^3 \times a^3 \times 5 \times a^4$
$= 2^3 \times 5 \times a^3 \times a^4 = 8 \times 5 \times a^{3+4}$
$= 40\, a^7$

(ii) $\dfrac{2 \times 3^4 \times 2^5}{9 \times 4^2} = \dfrac{2 \times 3^4 \times 2^5}{3^2 \times (2^2)^2} = \dfrac{2 \times 2^5 \times 3^4}{3^2 \times 2^{2\times2}}$

$= \dfrac{2^{1+5} \times 3^4}{2^4 \times 3^2} = \dfrac{2^6 \times 3^4}{2^4 \times 3^2} = 2^{6-4} \times 3^{4-2}$

$= 2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36$

टिप्पणी: इस अध्याय में, हमने अधिकांशत: ऐसे उदाहरण लिए हैं जिनमें आधार पूर्णांक हैं। परंतु इस अध्याय के सभी परिणाम उन स्थितियों के लिए भी सत्य हैं, जहाँ आधार परिमेय संख्याएँ हैं।

प्रश्नावली 13.2

1. घातांकों के नियमों का प्रयोग करते हुए, सरल कीजिए और उत्तर को घातांकीय रूप में लिखिए :

(i) $3^2 \times 3^4 \times 3^8$ (ii) $6^{15} \div 6^{10}$ (iii) $a^3 \times a^2$

(iv) $7^x \times 7^2$ (v) $\left(5^2\right)^3 \div 5^3$ (vi) $2^5 \times 5^5$

(vii) $a^4 \times b^4$ (viii) $\left(3^4\right)^3$ (ix) $\left(2^{20} \div 2^{15}\right) \times 2^3$

(x) $8^t \div 8^2$

2. निम्नलिखित में से प्रत्येक को सरल करके घातांकीय रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) $\dfrac{2^3 \times 3^4 \times 4}{3 \times 32}$ (ii) $\left[\left(5^2\right)^3 \times 5^4\right] \div 5^7$ (iii) $25^4 \div 5^3$

(iv) $\dfrac{3 \times 7^2 \times 11^8}{21 \times 11^3}$ (v) $\dfrac{3^7}{3^4 \times 3^3}$ (vi) $2^0 + 3^0 + 4^0$

(vii) $2^0 \times 3^0 \times 4^0$ (viii) $(3^0 + 2^0) \times 5^0$ (ix) $\dfrac{2^8 \times a^5}{4^3 \times a^3}$

(x) $\dfrac{a^5}{a^3} \times a^8$ (xi) $\dfrac{4^5 \times a^8 b^3}{4^5 \times a^5 b^2}$ (xii) $\left(2^3 \times 2\right)^2$

3. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य है या असत्य तथा अपने उत्तर का कारण भी दीजिए:

(i) $10 \times 10^{11} = 100^{11}$ (ii) $2^3 > 5^2$ (iii) $2^3 \times 3^2 = 6^5$

(iv) $3^0 = (1000)^0$

4. निम्नलिखित में से प्रत्येक को केवल अभाज्य गुणनखंडों की घातों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) 108×192 (ii) 270 (iii) 729×64

(iv) 768

5. सरल कीजिए :

(i) $\dfrac{\left(2^5\right)^2 \times 7^3}{8^3 \times 7}$ (ii) $\dfrac{25 \times 5^2 \times t^8}{10^3 \times t^4}$ (iii) $\dfrac{3^5 \times 10^5 \times 25}{5^7 \times 6^5}$

© NCERT not to be republished

13.5 दशमलव संख्या पद्धति

आइए 47561 के निम्नलिखित प्रसार को देखें, जिससे हम पहले से ही परिचित हैं :

$$47561 = 4 \times 10000 + 7 \times 1000 + 5 \times 100 + 6 \times 10 + 1$$

हम इसे 10 की घातों का प्रयोग करते हुए, घातांकीय रूप में निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं :

$$47561 = 4 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 1 \times 10^0$$

[ध्यान दीजिए : $10000 = 10^4$, $1000 = 10^3$, $100 = 10^2$, $10 = 10^1$ और $1 = 10^0$ है।]

आइए एक और संख्या को प्रसारित रूप में लिखें :

$$104278 = 1 \times 100,000 + 0 \times 10000 + 4 \times 1000 + 2 \times 100 + 7 \times 10 + 8 \times 1$$

$$= 1 \times 10^5 + 0 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 8 \times 10^0$$

$$= 1 \times 10^5 + 4 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 8 \times 10^0$$

ध्यान दीजिए कि किस प्रकार 10 के घातांक अधिकतम मान 5 से प्रारंभ होते हुए एक-एक करके घटते हुए, 0 तक आ जाते हैं।

13.6 बड़ी संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त करना

© NCERT not to be republished

आइए, इस अध्याय की प्रारंभिक स्थिति पर वापस आ जाएँ। हमने कहा था कि बड़ी संख्याओं को, घातांकों का प्रयोग करके सुविधाजनक रूप से व्यक्त किया जा सकता है। इसे अभी तक हमने दिखाया नहीं है। अब हम ऐसा करेंगे।

प्रयास कीजिए

10 की घातों का प्रयोग करते हुए, घातांकीय रूप में प्रसारित कीजिए :

(i) 172
(ii) 5643
(iii) 56439
(iv) 176428

1. सूर्य हमारी आकाशगंगा (Milky Way Galaxy) के केंद्र से 300,000,000,000,000,000,000 m की दूरी पर स्थित है।
2. हमारी आकाशगंगा में 100,000,000,000 तारे हैं।
3. पृथ्वी का द्रव्यमान 5,976,000,000,000,000,000,000,000 kg है।

ये संख्याएँ पढ़ने और लिखने की दृष्टि से सुविधाजनक नहीं हैं। इनको सुविधाजनक बनाने के लिए, हम घातों (या घातांकों) का प्रयोग करते हैं। निम्नलिखित को देखिए :

$$59 = 5.9 \times 10 = 5.9 \times 10^1$$

$$590 = 5.9 \times 100 = 5.9 \times 10^2$$

$$5900 = 5.9 \times 1000 = 5.9 \times 10^3$$

$$59000 = 5.9 \times 10000 = 5.9 \times 10^4$$ इत्यादि।

हमने इन सभी संख्याओं को **मानक रूप (standard form)** में व्यक्त कर दिया है। किसी भी संख्या को 1.0 और 10.0 के बीच की एक दशमलव संख्या (जिसमें 1.0 सम्मिलित है) और 10 की किसी घात के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। संख्या के इस रूप को उसका **मानक रूप** कहते हैं। इस प्रकार,

$5985 = 5.985 \times 1000 = 5.985 \times 10^3$ संख्या 5985 का मानक रूप है।

ध्यान दीजिए कि 5985 को 59.85×100 या 59.85×10^2 के रूप में भी व्यक्त किया जा सकता है। परंतु यह 5985 का मानक रूप नहीं है। इसी प्रकार

$5985 = 0.5985 \times 10000 = 0.5985 \times 10^4$ भी 5985 का मानक रूप नहीं है।

अब हम इस अध्याय के प्रारंभ में आई हुई संख्याओं को इस मानक रूप में व्यक्त करने में सक्षम हो गए हैं।

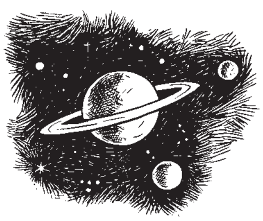
हमारी आकाशगंगा के केंद्र से सूर्य की दूरी अर्थात्,

300,000,000,000,000,000,000 m को

$3.0 \times 100,000,000,000,000,000,000$ m $= 3.0 \times 10^{20}$ m

के रूप में लिखा जा सकता है। अब, क्या आप 40,000,000,000 को इसी रूप में व्यक्त कर सकते हैं? इसमें शून्यों की संख्या को गिनिए। यह 10 है।

अत: $40,000,000,000 = 4.0 \times 10^{10}$ है।



पृथ्वी का द्रव्यमान = 5,976,000,000,000,000,000,000,000 kg

$= 5.976 \times 10^{24}$ kg है।

क्या आप इस बात से सहमत हैं कि पढ़ने, समझने और तुलना करने की दृष्टि से मानक रूप में लिखी यह संख्या उस 25 अंकों की संख्या की अपेक्षा बहुत अधिक सरल या सुविधाजनक है?

अब, यूरेनस ग्रह का द्रव्यमान = 86,800,000,000,000,000,000,000,000 kg

$= 8.68 \times 10^{25}$ kg है।

अब, उपरोक्त दोनों व्यंजकों में केवल 10 की घातों की तुलना करके ही, आप यह कह सकते हैं कि यूरेनस ग्रह का द्रव्यमान पृथ्वी से अधिक है।

सूर्य और शनि के बीच की दूरी 1,433,500,000,000 m या 1.4335×10^{12} m है। शनि और यूरेनस के बीच की दूरी 1,439,000,000,000 m या 1.439×10^{12} m हैं। सूर्य और पृथ्वी के बीच की दूरी 149, 600,000,000 m या 1.496×10^{11} m है।

क्या आप बता सकते हैं कि इन तीनों दूरियों में कौन-सी दूरी न्यूनतम है?

उदाहरण 13 निम्नलिखित संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) 5985.3 (ii) 65950

(iii) 3,430,000 (iv) 70,040,000,000

हल

(i) $5985.3 = 5.9853 \times 1000 = 5.9853 \times 10^3$

(ii) $65950 = 6.595 \times 10000 = 6.595 \times 10^4$

(iii) $3,430,000 = 3.43 \times 1000,000 = 3.43 \times 10^6$

(iv) $70,040,000,000 = 7.004 \times 10,000,000,000 = 7.004 \times 10^{10}$

© NCERT not to be republished

यहाँ ध्यान रखने योग्य बात यह है कि दशमलव बिंदु से बाईं ओर के (अंकों की संख्या) गिनकर, उसमें से 1 घटा कर जो प्राप्त होता है, वही 10 का घातांक होता है, जिसे मानक रूप में प्रयोग किया जाता है। हम इस बिंदु की कल्पना, संख्या के (दाएँ) सिरे पर कर लेते हैं। यहाँ से बाईं ओर अंकों की (संख्या) 11 है। इसलिए, मानक रूप में व्यक्त करने के लिए, 10 का घातांक 11 – 1 = 10 है। इसलिए इसके मानक रूप में 10 का घातांक 4 – 1 = 3 है।

प्रश्नावली 13.3

1. निम्नलिखित संख्याओं को प्रसारित रूप में लिखिए :

279404, 3006194, 2806196, 120719, 20068

2. निम्नलिखित प्रसारित रूपों में से प्रत्येक के लिए संख्या ज्ञात कीजिए :

(a) $8 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 5 \times 10^0$

(b) $4 \times 10^5 + 5 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 2 \times 10^0$

(c) $3 \times 10^4 + 7 \times 10^2 + 5 \times 10^0$

(d) $9 \times 10^5 + 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1$

3. निम्नलिखित संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) 5,00,00,000 (ii) 70,00,000 (iii) 3,18,65,00,000

(iv) 3,90,878 (v) 39087.8 (vi) 3908.78

4. निम्नलिखित कथनों में प्रकट होने वाली (आने वाली) संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त कीजिए।

(a) पृथ्वी और चंद्रमा के बीच की दूरी 384,000,000 m है।

(b) निर्वात स्थान में प्रकाश की चाल (या वेग) 300,000,000 m/sec. है।

(c) पृथ्वी का व्यास 12756000 m है।

(d) सूर्य का व्यास 1,400,000,000 m है।

(e) एक आकाशगंगा में औसतन 100,000,000,000 तारे हैं।

(f) विश्व मंडल (या सौर मंडल) 12,000,000,000 वर्ष पुराना आकलित किया गया है।

(g) आकाशगंगा के मध्य से सूर्य की दूरी 300,000,000,000,000,000,000 m आकलित की गई है।

(h) 1.8 g भार वाली पानी की एक बूंद में 60,230,000,000,000,000,000,000 अणु (molecules) होते हैं।

(i) पृथ्वी में 1,353,000,000 km^3 समुद्र जल है।

(j) मार्च 2001 में भारत की जनसंख्या 1,027,000,000 थी।

© NCERT not to be republished

हमने क्या चर्चा की?

1. बहुत बड़ी संख्याएँ पढ़ने, समझने, तुलना करने और उन पर संक्रियाएँ करने की दृष्टि से कठिन होती हैं। इनको सरल बनाने के लिए, हम इन अधिकांश बड़ी संख्याओं को घातांकों का प्रयोग करके संक्षिप्त रूप में लिखते हैं।
2. कुछ संख्याओं के घातांकीय रूप निम्नलिखित हैं :

   $10000 = 10^4$ (इसे 10 के ऊपर घात 4 पढ़ा जाता है)

   $243 = 3^5, \quad 128 = 2^7.$

   यहाँ, 10, 3 और 2 आधार हैं तथा 4, 5 और 7 क्रमशः इनके घातांक हैं। हम यह भी कहते हैं कि 10 की चौथी घात 10000 है, 3 की पाँचवीं घात 243 है, इत्यादि।
3. घातांकीय रूप में संख्याएँ कुछ नियमों का पालन करती हैं, जो इस प्रकार हैं :
   किन्हीं शून्येतर पूर्णांकों a और b तथा पूर्ण संख्याओं m और n के लिए,

   (a) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

   (b) $a^m \div a^n = a^{m-n}, \quad m > n$

   (c) $(a^m)^n = a^{mn}$

   (d) $a^m \times b^m = (ab)^m$

   (e) $a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

   (f) $a^\circ = 1$

   (g) $(-1)^{\text{सम संख्या}} = 1$

   $(-1)^{\text{विषम संख्या}} = -1$

© NCERT not to be republished

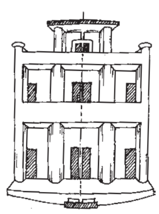
अध्याय 14

सममिति

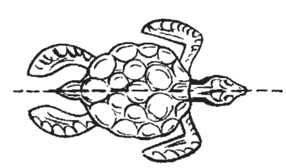
0757CH14

14.1 भूमिका

सममिति (Symmetry) एक महत्वपूर्ण ज्यामितीय अवधारणा है, जो सामान्यतः प्रकृति में प्रदर्शित होती है तथा क्रियाकलाप के लगभग सभी क्षेत्रों में इसका प्रयोग होता है। कलाकार, व्यवसायी, कपड़े या ज्वैलरी डिज़ाइन करने वाले, कार निर्माता, आर्किटेक्ट तथा अनेक अन्य सममिति की संकल्पना का प्रयोग करते हैं। मधुमक्खियों के छत्तों, फूलों, पेड़ की पत्तियों, धार्मिक चिह्नों, कंबलों और रूमालों, इन सभी स्थानों पर आपको सममित डिज़ाइन दिखाई देंगे।


आर्किटेक्चर

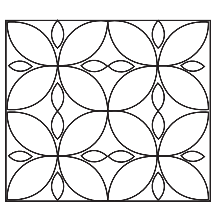
इंजीनियरिंग


प्रकृति

आप पिछली कक्षा में, **रैखिक सममिति** का कुछ 'अनुभव' कर चुके हैं।

एक आकृति मे रैखिक सममिति होती है, यदि उसमें एक रेखा ऐसी हो जिसके अनुदिश उस आकृति को मोड़ने पर, आकृति के दोनों भाग परस्पर संपाती हो जाते हों।

इन अवधारणाओं को आप याद कर सकते हैं। आपकी सहायता के लिए यहाँ कुछ क्रियाकलाप दिए जा रहे हैं।


सममिति दर्शाने वाली एक पिक्चर एलबम बनाइए

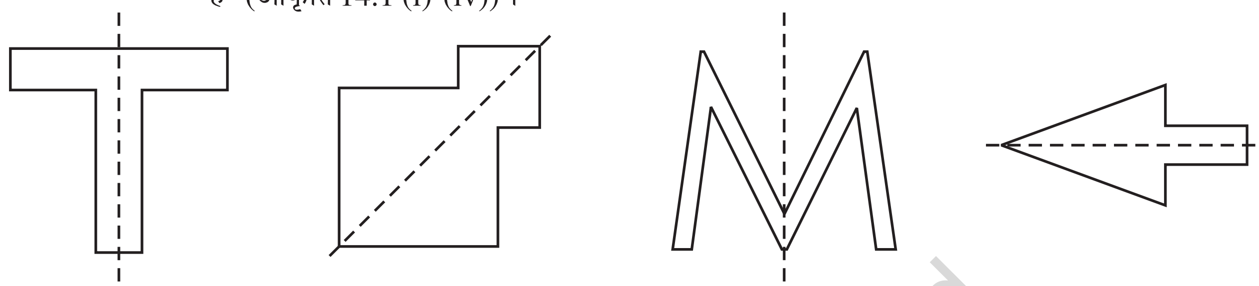
कुछ रंगीन आकर्षक इंक-डाट डेविल्स बनाइए

कागज़ के कटे हुए कुछ सममिति डिज़ाइन बनाइए

© NCERT not to be republished

आपके द्वारा एकत्रित किए गए डिज़ाइन में सममित रेखाओं (या अक्षों) को पहचानने का आनंद लीजिए ।

आइए अब सममिति पर अपनी अवधारणाओं को और अधिक प्रबल बनाएँ। निम्नलिखित आकृतियों का अध्ययन कीजिए, जिनमें सममित रेखाओं को बिंदुकित रेखाओं से अंकित किया गया है (आकृति 14.1 (i)-(iv)) ।



(i) (ii) (iii) (iv)

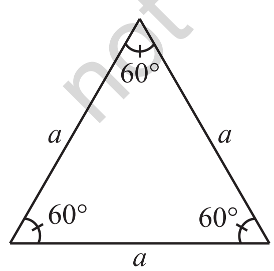
आकृति 14.1

14.2 सम बहुभुजों के लिए सममित रेखाएँ

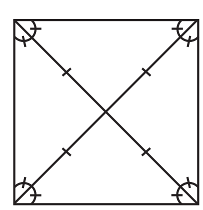
आप जानते हैं कि बहुभुज (polygon) एक ऐसी बंद आकृति है, जो अनेक रेखाखंडों से बनी होती है। सबसे कम रेखाखंडों से बना बहुभुज एक त्रिभुज है। (क्या आप इन रेखाखंडों से कम रेखाखंडों वाला कोई अन्य बहुभुज बना सकते हैं? इसके बारे में सोचिए।)

एक बहुभुज, सम बहुभुज (regular polygon) कहलाता है, यदि इसकी सभी भुजाओं की लंबाइयाँ बराबर हों तथा सभी कोणों के माप बराबर हों। इस प्रकार, एक समबाहु त्रिभज, तीन भुजाओं वाला एक सम बहुभुज होता है। क्या चार भुजाओं वाला एक सम बहुभुज होता है ? क्या आप चार भुजाओं वाले एक सम बहुभुज का नाम बता सकते हैं ?

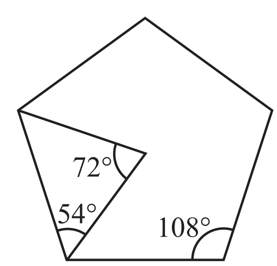
एक समबाहु त्रिभुज एक सम बहुभुज है, क्योंकि इसकी प्रत्येक भुजा की लंबाई समान होती है तथा इसके प्रत्येक कोण की माप 60° होती है (आकृति 14.2)।



आकृति 14.2



आकृति 14.3

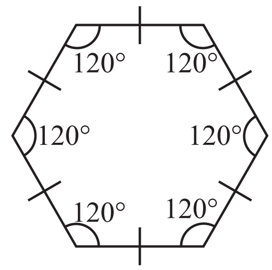


आकृति 14.4

वर्ग भी एक सम बहुभुज है, क्योंकि इसकी सभी भुजाएँ समान लंबाइयों की होती हैं तथा इसका प्रत्येक कोण एक समकोण (अर्थात् 90°) होता है। इसके विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित होते हैं (आकृति 14.3)।

यदि एक पंचभुज (pentagon) एक सम बहुभुज है, तो स्वाभाविक है कि इसकी भुजाएँ बराबर लंबाइयों की होनी चाहिए तथा इसके कोणों के माप बराबर होने चाहिए। बाद में आप पढ़ेंगे कि इसके प्रत्येक कोण की माप 108° होती है (आकृति 14.4)।

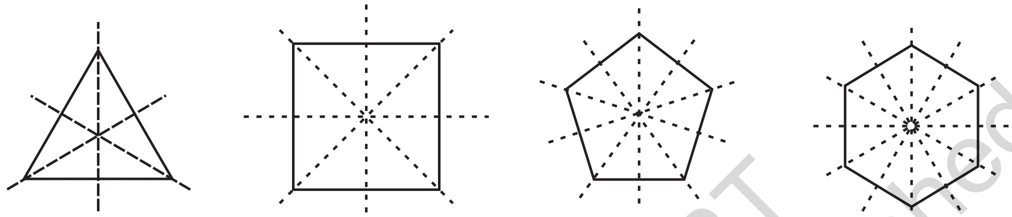
© NCERT not to be republished



आकृति 14.5

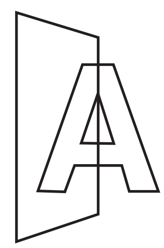
एक सम षड्भुज (regular hexagon) की सभी भुजाएँ बराबर होती हैं तथा इसके प्रत्येक कोण की माप 120° होती है। इस आकृति के बारे में आप और अधिक बाद में पढ़ेंगे (आकृति 14.5)।

सम बहुभुज सममित आकृतियाँ होती हैं और इसीलिए इनकी सममित रेखाएँ बहुत रोचक हैं। प्रत्येक समबहुभुज की उतनी ही सममित रेखाएँ होती हैं, जितनी उसकी भुजाएँ हैं [आकृति 14.6 (i) से (iv)]।



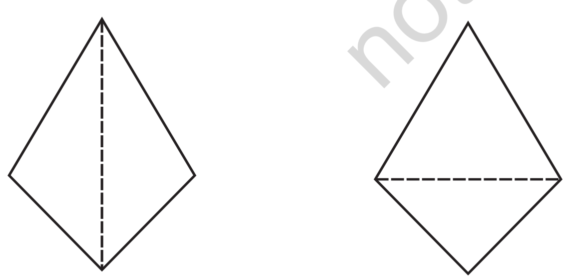
आकृति 14.6

संभवत:, आप कागज़ मोड़ने के क्रियाकलापों द्वारा इसकी खोज करना चाहेंगे। कोई बात नहीं, आगे बढ़िए!

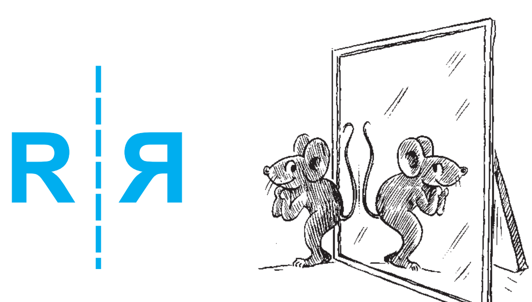


आकृति 14.7

रैखिक सममिति की अवधारण का दर्पण परावर्तन (mirror reflection) से निकट का संबंध है। एक आकार (shape) में रैखिक सममिति तब होती है, जब उसका एक आधा भाग दूसरे आधे भाग का दर्पण प्रतिबिंब (mirror image) हो(आकृति 14.7)। इस प्रकार एक दर्पण रेखा हमें एक सममित रेखा देखने या ज्ञात करने में सहायता करती है (आकृति 14.8)।



आकृति 14.8



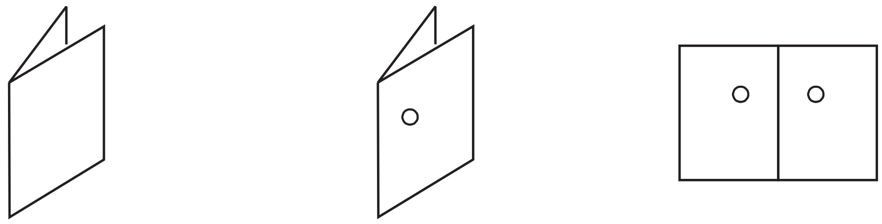
यहाँ आकार तो समान हैं; परंतु दिशाएँ विपरीत हैं।

आकृति 14.9

दर्पण परावर्तन के साथ कार्य करते समय, यह ध्यान रखना चाहिए कि एक आकृति के अभिमुखों (orientations) में दाएँ-बाएँ (left-right) परिवर्तन हो जाता है (आकृति 14.9)।

© NCERT not to be republished

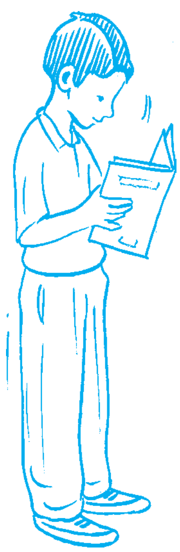
छेद करने वाला यह खेल खेलिए !



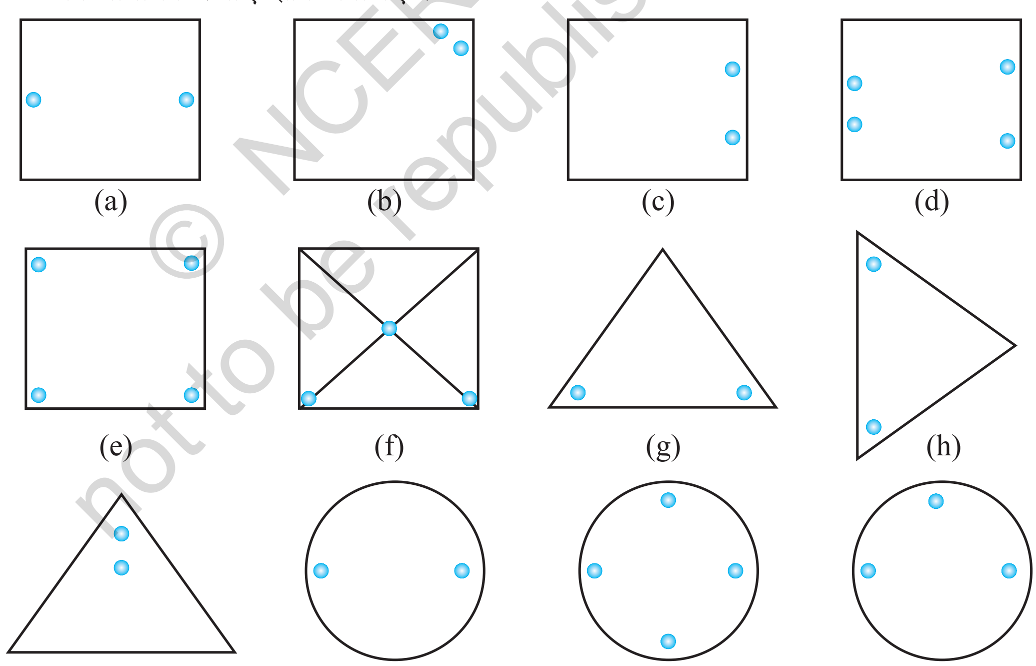
आकृति 14.10

मोड़ का निशान एक सममित रेखा (या अक्ष) है। मोड़े हुए कागज़ पर विभिन्न स्थानों पर बनाए गए छेदों तथा संगत सममित रेखाओं का अध्ययन कीजिए (आकृति 14.10)।

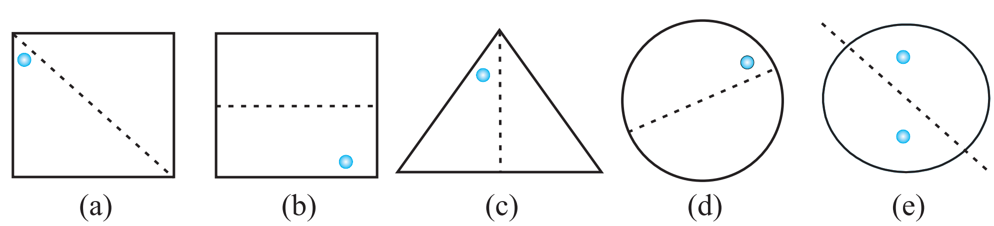
प्रश्नावली 14.1



1. निम्नलिखित छेद की हुई आकृतियों की प्रतिलिपियाँ बनाकर (खींच कर) उनमें से प्रत्येक की सममित रेखाएँ ज्ञात कीजिए :

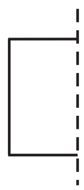


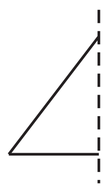
2. नीचे सममित रेखा (रेखाएँ) दी हुई हैं। अन्य छेद ज्ञात कीजिए।

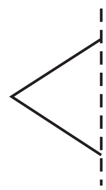


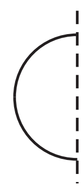
© NCERT not to be republished

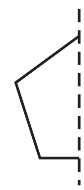
3. निम्नलिखित आकृतियों में, दर्पण रेखा (अर्थात् सममित रेखा) बिंदुकित रेखा के रूप में दी गई है। बिंदुकित (दर्पण) रेखा में प्रत्येक आकृति का परावर्तन करके, प्रत्येक आकृति को पूरा कीजिए। (आप बिंदुकित रेखा के अनुदिश एक दर्पण रख सकते हैं और फिर प्रतिबिंब (image) के लिए दर्पण में देख सकते हैं)। क्या आपको पूरी की गई आकृति का नाम याद है?

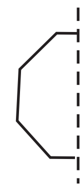

(a)


(b)

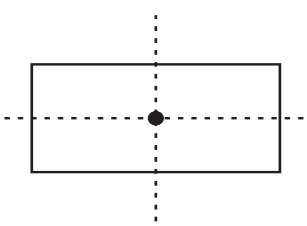

(c)

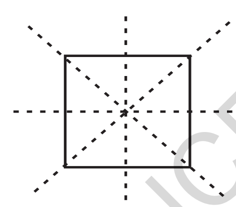

(d)


(e)


(f)

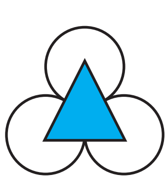
4. निम्नलिखित आकृतियों की एक से अधिक सममित रेखाएँ हैं। ऐसी आकृतियों के लिए यह कहा जाता है कि इनकी अनेक सममित रेखाएँ हैं।

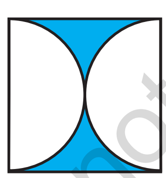

(a)

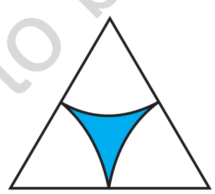

(b)

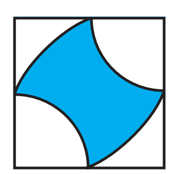
(c)

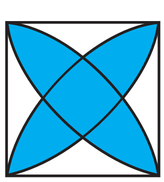
निम्नलिखित आकृतियों में से प्रत्येक में विविध सममित रेखाओं (यदि हों तो), की पहचान कीजिए :

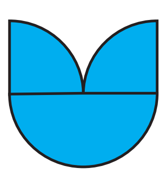

(a)

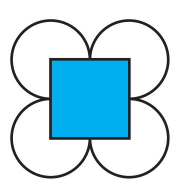

(b)

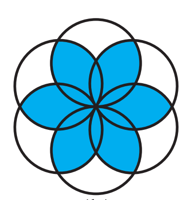

(c)


(d)


(e)

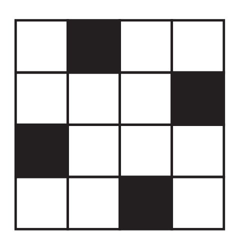

(f)


(g)


(h)

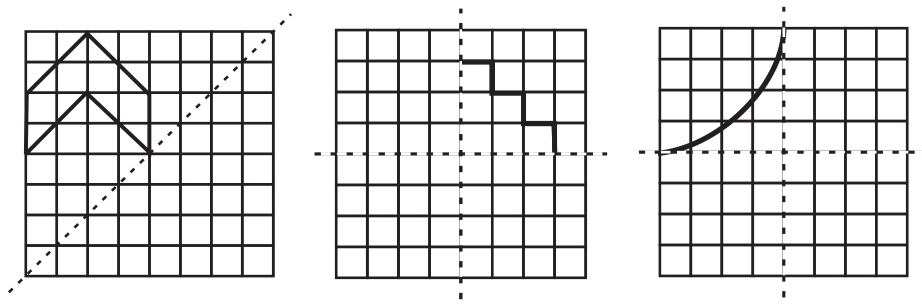
5. यहाँ दी हुई आकृति की प्रतिलिपि बनाइए।

किसी एक विकर्ण की सममित रेखा लीजिए तथा कुछ और वर्गों को इस तरह छायांकित कीजिए, कि यह आकृति इस विकर्ण के अनुदिश सममित हो जाए। क्या ऐसा करने की एक से अधिक विधियाँ हैं? क्या यह आकृति दोनों विकर्णों के अनुदिश सममित होगी?



© NCERT not to be republished

6. निम्नलिखित आरेखों की प्रतिलिपियाँ बनाइए तथा प्रत्येक आकार को इस तरह पूरा कीजिए ताकि वह आकार दर्पण रेखा (या रेखाओं) के अनुदिश सममित हो :



(a) (b) (c)

7. निम्नलिखित आकृतियों के लिए सममित रेखाओं की संख्याएँ बताइए :
   (a) एक समबाहु त्रिभुज (b) एक समद्विबाहु त्रिभुज (c) एक विषमबाहु त्रिभुज
   (d) एक वर्ग (e) एक आयत (f) एक समचतुर्भुज
   (g) एक समांतर चतुर्भुज (h) एक चतुर्भुज (i) एक सम षड्भुज
   (j) एक वृत्त
8. अंग्रेजी वर्णमाला के किन अक्षरों में निम्नलिखित के अनुदिश परावर्तन सममिति (दर्पण परावर्तन से संबंधित सममिति) है :
   (a) एक ऊर्ध्वाधर दर्पण (b) एक क्षैतिज दर्पण
   (c) ऊर्ध्वाधर और क्षैतिज दर्पण दोनों
9. ऐसे आकारों के तीन उदाहरण दीजिए, जिनमें कोई सममित रेखा न हो।
10. आप निम्नलिखित आकृतियों की सममित रेखा के लिए अन्य क्या नाम दे सकते हैं ?
   (a) एक समद्विबाहु त्रिभुज (b) एक वृत्त

© NCERT not to be republished

14.3 घूर्णन सममिति

जब घड़ी की सुइयाँ घूमती हैं, तो आप क्या कहते हैं? आप कहते हैं कि ये घूर्णन (Rotate) कर रही हैं।

घड़ी की सुइयाँ केवल एक ही दिशा में घूमती हैं। यह घूमना एक बिंदु के चारों ओर होता है, जो घड़ी के पटल (face) का केंद्र है।

घड़ियों की सुइयाँ जिस दिशा में घूमती हैं, वह घूर्णन (rotation) दक्षिणावर्त (clockwise) घूर्णन कहलाता है, अन्यथा घूर्णन वामावर्त (anticlockwise rotation) कहलाता है।

छत के पंखे की पँखुड़ियों के घूर्णन के बारे में आप क्या कह सकते हैं ? क्या ये दक्षिणावर्त दिशा में घूमती हैं या वामावर्त दिशा में घूमती हैं ? अथवा क्या ये दोनों दिशाओं में घूमती हैं ?

यदि आप साइकिल के एक पहिए को घुमाते हैं, तो वह घूर्णन करता है। यह दोनों ही दिशाओं, अर्थात् दक्षिणावर्त और वामावर्त दिशाओं में घूर्णन कर सकता है। (i) दक्षिणावर्त घूर्णन और (ii) वामावर्त घूर्णन में से प्रत्येक के लिए तीन उदाहरण दीजिए।

जब कोई वस्तु घूर्णन करती है, तो उसके आकार और माप में कोई परिवर्तन नहीं होता है। घूर्णन उस वस्तु को एक निश्चित बिंदु के चारों तरफ घुमाता है। यह निश्चित बिंदु **घूर्णन का**

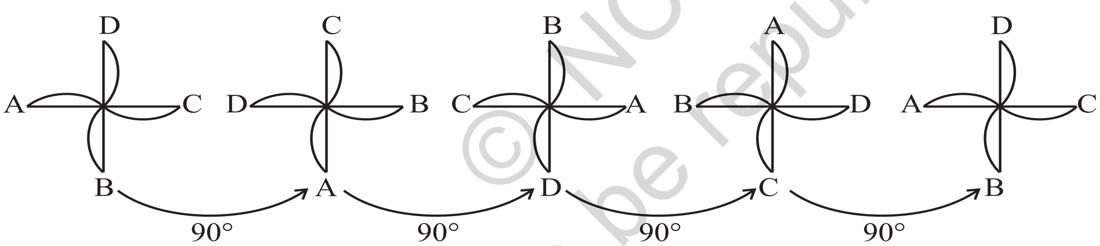
केंद्र (centre of rotation) कहलाता है। घड़ी की सुईयों के घूर्णन का केंद्र क्या है? इसके बारे में सोचिए।

घूर्णन के दौरान घूमे गए कोण को **घूर्णन कोण (angle of rotation)** कहते हैं। आप जानते हैं कि एक पूरे चक्कर में 360° का घूर्णन होता है। (i) एक आधे या अर्ध चक्कर और (ii) एक चौथाई चक्कर के घूर्णन कोणों के क्रमशः क्या माप हैं? एक अर्ध चक्र का अर्थ 180° का घूर्णन है तथा एक-चौथाई चक्कर का अर्थ 90° का घूर्णन है।

जब 12 बजते हैं, तो घड़ी की दोनों सुइयाँ एक साथ होती हैं। 3 बजने तक मिनट की सुई तो तीन पूरे चक्कर लगा लेती है, परंतु घंटे की सुई केवल एक-चौथाई चक्कर ही लगा पाती है। 6 बजे की उनकी स्थितियों के बारे में आप क्या कह सकते हैं?

आकृति 14.11

क्या आपने कभी कागज़ की हवाई चकरी (या फिरकी) (paper windmill) बनाई है? आकृति में दिखाई गई कागज़ की हवाई चकरी सममित दिखाई देती है (आकृति 14.11), परंतु आपको इसकी कोई सममिति रेखा प्राप्त नहीं होती है। इसको किसी प्रकार से मोड़ने पर भी दोनों आधे भाग संपाती नहीं होंगे। यदि आप इसके केंद्र (बीच) वाले स्थिर (या निश्चत) बिंदु के परित 90° के कोण पर घुमाएँ, तो आप देखेंगे की हवाई चकरी का आकार, आकृति 14.11 की स्थिति के अनुसार, पहले जैसा ही है। हम कहते हैं कि चकरी में एक घूर्णन सममिति (rotational symmetry) है।

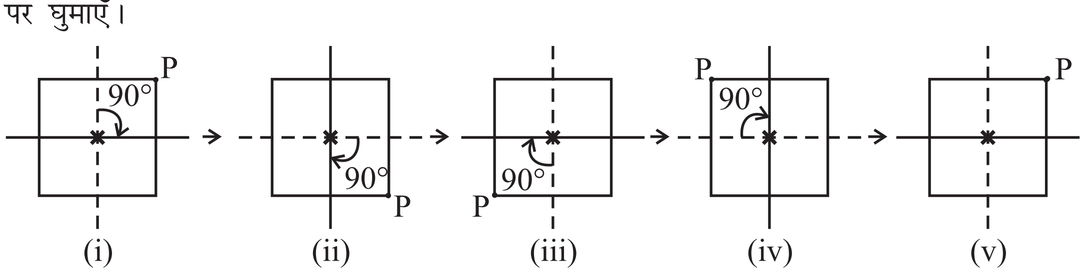


आकृति 14.12

एक पूरे चक्कर में, ऐसी **चार स्थितियाँ** हैं (90°, 180°, 270° और 360° के कोणों पर घुमाने या घूर्णन करने पर), जब चकरी पहली जैसी ही दिखती है। (आकृति 14.12)। इसी कारण, हम कहते हैं कि चकरी में **क्रम 4 (order 4)** की घूर्णन सममिति है।

घूर्णन सममिति का एक और उदाहरण देखिए। एक वर्ग पर विचार कीजिए, जिसका एक कोना (या शीर्ष) P है (आकृति 14.13)।

आइए इस वर्ग के केंद्र को **×** से अंकित करके इसके परित इस वर्ग को एक-चौथाई चक्कर पर घुमाएँ।



आकृति .14.13

© NCERT not to be republished

आकृति 14.13 (i) इसकी प्रारंभिक स्थिति है। केंद्र के चारों ओर 90° घूमाने पर आकृति 14.13 (ii) प्राप्त होती है। अब बिंदु P की स्थिति को देखिए। वर्ग को पुन: 90° के कोण पर घुमाइए (घूर्णन दीजिए)। आपको आकृति 14.13(iii) प्राप्त होती है। इस प्रकार, जब आप वर्ग को चार एक-चौथाई चक्कर घुमा देते हैं, तो वह अपनी प्रारंभिक स्थिति पर आ जाती है। अब यह आकृति 14.13 (i) जैसी ही दिखती है। इसे P द्वारा ली गई विभिन्न स्थितियों से देखा जा सकता है।

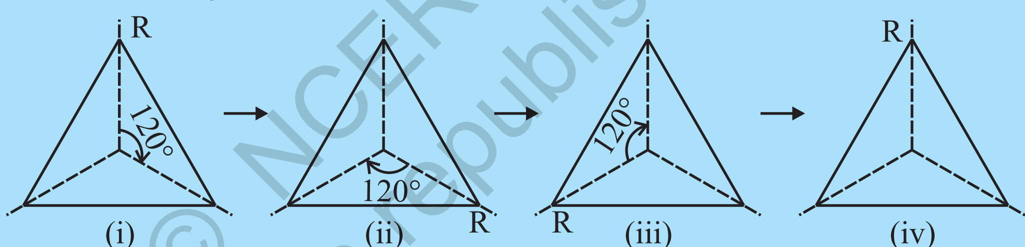
इस प्रकार, एक वर्ग में उसके केंद्र के चारों ओर **क्रम 4 की घूर्णन सममिति** होती है। ध्यान दीजिए कि इस स्थिति में,

(i) घूर्णन का केंद्र वर्ग का केंद्र है। (ii) घूर्णन का कोण 90° है।

(iii) घूर्णन की दिशा दक्षिणावर्त है। (iv) घूर्णन सममिति का क्रम 4 है।

प्रयास कीजिए

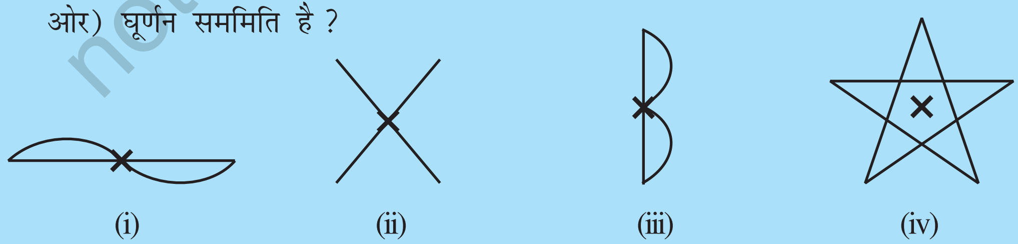
1. (a) क्या अब आप एक समबाहु त्रिभुज के लिए, घूर्णन सममिति के क्रम को बता सकते हैं (आकृति 14.14) ?



आकृति 14.14

(b) जब उपरोक्त त्रिभुज को उसके केंद्र के परित (चारों ओर) 120° के कोण पर घुमाया जाता है, तो कितनी स्थितियों में त्रिभुज (स्थिति के अनुसार) पहले जैसा ही लगता है?

2. निम्नलिखित में से कौन-से आकारों (आकृति 14.15) में अंकित बिंदु के परित (चारों ओर) घूर्णन सममिति है ?



आकृति 14.15

© NCERT not to be republished

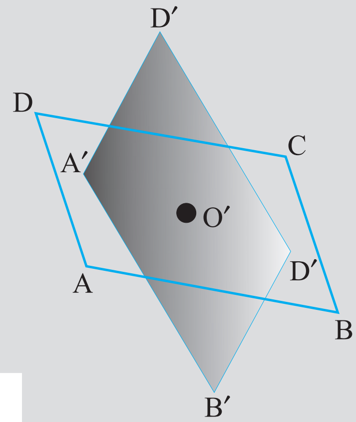
इन्हें कीजिए

दो एक जैसे (सर्वासम समांतर चतुर्भुज खींचिए, एक समांतर चतुर्भुज ABCD एक कागज़ पर तथा दूसरा समांतर चतुर्भुज A'B'C'D' एक पारदर्शक शीट (transparent sheet) पर। उनके विकर्णों के प्रतिच्छेद बिंदुओं को क्रमश: O और O' से अंकित (या व्यक्त) कीजिए (आकृति 14.16)।

समांतर चतुर्भुजों को इस प्रकार रखिए कि A' शीर्ष A पर रहे, B' शीर्ष B पर रहे, इत्यादि।

इन आकारों में, अब बिंदु O पर एक पिन को लगाइए। अब पारदर्शक शीट को दक्षिणावर्त दिशा में घुमाइए। एक पूरे चक्कर में पारदर्शक शीट पर बना आकार कागज़ पर बने आकार से कितनी बार संपाती होता है? इसमें घूर्णन सममिति का क्या क्रम है?

वह बिंदु, जहाँ हमने पिन लगाई है, घूर्णन का केंद्र है। इस स्थिति में, यह विकर्णों का प्रतिच्छेद बिंदु है।

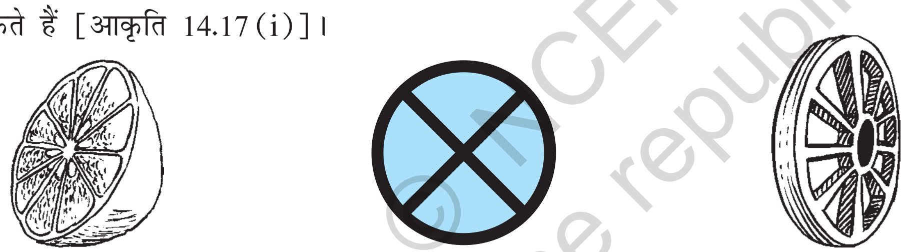


आकृति 14.16

प्रत्येक वस्तु (या आकृति) में, क्रम 1 की घूर्णन सममिति होती है, क्योंकि 360° के घूर्णन के बाद (अर्थात् पूरे एक चक्कर के बाद) वह अपनी प्रारंभिक स्थिति में आ जाता है। ऐसी स्थितियों में हमारी कोई रूचि नहीं होगी।

आपके परिवेश में अनेक ऐसे आकार हैं जिनमें घूर्णन सममिति होती है (आकृति 14.17)।

उदाहरणार्थ, जब कुछ फलों को काटते हैं, तो उनके अनुप्रस्थ काट **(cross-section)** ऐसे आकारों के होते हैं, जिनमें घूर्णन सममिति होती है। जब आप इन्हें देखेंगे तो आप आश्चर्यचकित हो सकते हैं [आकृति 14.17 (i)]।



फल (i) सड़क संकेत (ii) पहिया (iii)

आकृति 14.17

© NCERT not to be republished

ऐसे कई सड़क संकेत (road signs) भी हैं, जो घूर्णन सममिति प्रदर्शित करते हैं। अगली बार जब आप किसी व्यस्त सड़क पर घूमने निकलें, तो ऐसे सड़क संकेतों को पहचानिए और उनकी घूर्णन सममिति के क्रमों को ज्ञात कीजिए [आकृति 14.17(ii)]।

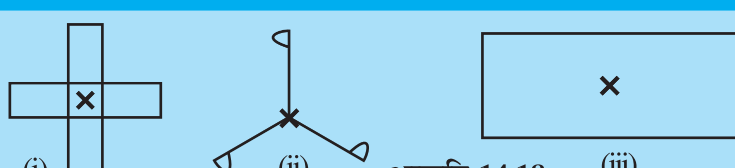
घूर्णन सममिति के कुछ अन्य उदाहरणों के बारे में सोचिए। प्रत्येक स्थिति में, निम्नलिखित की चर्चा कीजिए :

(i) घूर्णन का केंद्र (ii) घूर्णन का कोण

(iii) घूर्णन किस दिशा में किया गया है (iv) घूर्णन सममिति का क्रम

प्रयास कीजिए

दी हुई आकृतियों के लिए ×से अंकित बिंदु के परित घूर्णन सममिति का क्रम बताइए (आकृति 14.18)।

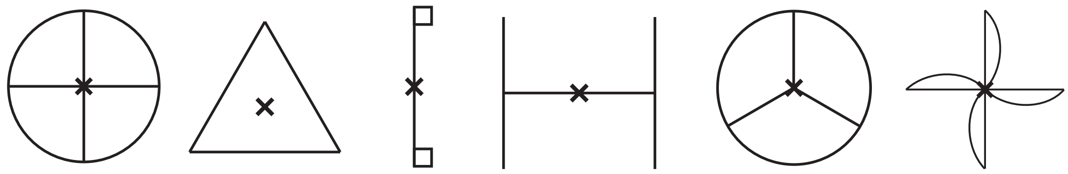


(i) (ii) (iii)

आकृति 14.18

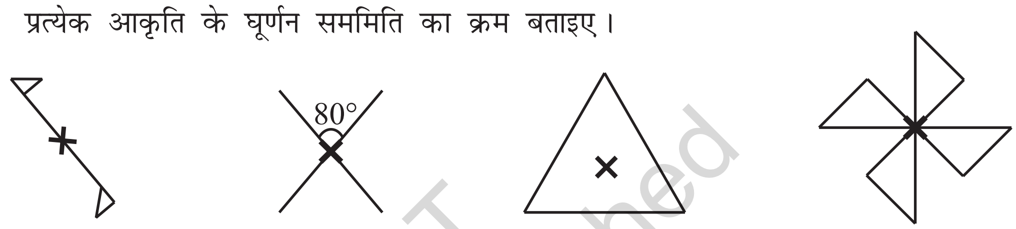
प्रश्नावली 14.2

1. निम्नलिखित आकृतियों में से किन आकृतियों में 1 से अधिक क्रम की घूर्णन सममिति है?

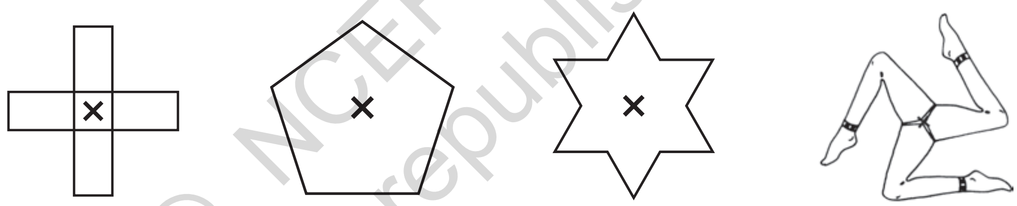


(a) (b) (c) (d) (e) (f)

2. प्रत्येक आकृति के घूर्णन सममिति का क्रम बताइए।



(a) (b) (c) (d)



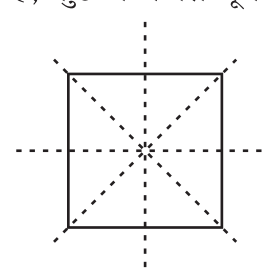
(e) (f) (g) (h)

© NCERT not to be republished

14.4 रैखिक सममिति और घूर्णन सममिति

आप अभी तक अनेक आकारों और उनकी सममितियों को देखते आ रहे हैं। अब तक आपने यह समझ लिया होगा कि कुछ आकारों में केवल रैखिक सममिति होती है, कुछ में केवल घूर्णन सममिति होती है तथा कुछ आकारों में रैखिक तथा घूर्णन दोनों प्रकार की सममितियाँ होती हैं।

उदाहरणार्थ, एक वर्ग के आकार को देखिए (आकृति 14.19)।
इसकी कितनी सममित रेखाएँ हैं?
क्या इसमें कोई घूर्णन सममिति है?
यदि उत्तर 'हाँ' है, तो इस घूर्णन सममिति का क्रम क्या है?
इसके बारे में सोचिए।



आकृति 14.19

एक वृत्त सबसे अधिक पूर्ण सममित आकृति है, क्योंकि इसको इसके केंद्र के परित किसी भी कोण पर घुमा कर वही आकृति प्राप्त की जा सकती है, अर्थात् इसमें अपरिमित रूप से अनेक क्रम की घूर्णन सममिति है तथा साथ ही इसकी अपरिमित सममित रेखाएँ हैं। वृत्त के किसी भी प्रतिरूप को देखिए। केंद्र से होकर जाने वाली प्रत्येक रेखा (अर्थात् प्रत्येक व्यास) परावर्तन सममिति की एक सममिति रेखा है तथा केंद्र के परित प्रत्येक कोण के लिए इसकी एक घूर्णन सममिति है।

इन्हें कीजिए

अंग्रेज़ी वर्णमाला के कुछ अक्षरों में अद्भुत एवं आकर्षक सममितीय संरचनाएँ (structures) हैं। किन बड़े अक्षरों में केवल एक ही सममित रेखा है (जैसे **E**)? किन बड़े अक्षरों में क्रम 2 की घूर्णन सममिति है (जैसे **I**)?

उपरोक्त प्रकार से सोचते हुए, आप निम्नलिखित सारणी को भरने में समर्थ हो पाएँगे:

वर्णमाला का अक्षर	**रैखिक सममिति**	**सममित रेखाओं की संख्या**	**घूर्णन सममित**	**घूर्णन सममिति का क्रम**
Z	नहीं	0	हाँ	2
S				
H	हाँ		हाँ	
O	हाँ		हाँ	
E	हाँ			
N			हाँ	
C				

© NCERT not to be republished

प्रश्नावली 14.3

1. किन्हीं दो आकृतियों के नाम बताइए, जिनमें रैखिक सममिति और क्रम 1 से अधिक की घूर्णन सममिति दोनों ही हों।

2. जहाँ संभव हो, निम्नलिखित की एक रफ़ आकृति खींचिए :

(i) एक त्रिभुज, जिसमें रैखिक सममिति और क्रम 1 से अधिक की घूर्णन सममिति दोनों ही हों।

(ii) एक त्रिभुज, जिसमें केवल रैखिक सममिति और क्रम 1 से अधिक की घूर्णन सममिति न हो।

(iii) एक चतुर्भुज जिसमें क्रम 1 से अधिक की घूर्णन सममिति हो, परंतु रैखिक सममिति न हो।

(iv) एक चतुर्भुज जिसमें केवल रैखिक सममिति हो और क्रम 1 से अधिक की घूर्णन सममिति न हो।

3. यदि किसी आकृति की दो या अधिक सममित रेखाएँ हों, तो क्या यह आवश्यक है कि उसमें क्रम 1 से अधिक की घूर्णन सममिति होगी ?

4. रिक्त स्थानों को भरिए :

आकार	वर्ग	आयत	समचतुर्भुज	समबाहु त्रिभुज	समषड्भुज	वृत्त	अर्धवृत्त
घूर्णन का केंद्र							
घूर्णन सममिति का क्रम							
घूर्णन का कोण							

5. ऐसे चतुर्भुजों के नाम बताइए, जिनमें रैखिक सममिति और क्रम 1 से अधिक की घूर्णन सममिति दोनों ही हों।
6. किसी आकृति को उसके केंद्र के परित 60° के कोण पर घुमाने पर, वह उसकी प्रारंभिक स्थिति जैसी ही दिखाई देती है। इस आकृति के लिए ऐसे कौन-से अन्य कोणों के लिए भी हो सकता है ?
7. क्या हमें कोई ऐसी क्रम 1 से अधिक की घूर्णन सममिति प्राप्त हो सकती है, जिसके घूर्णन के कोण निम्नलिखित हों ?
   (i) 45° (ii) 17°

हमने क्या चर्चा की ?

1. एक आकृति मे **रैखिक सममिति** तब होती है, जब कोई ऐसी रेखा प्राप्त की जा सके जिसके अनुदिश उस आकृति को मोड़ने पर, उसके दोनों भाग परस्पर संपाती हो जाएँ।
2. सम बहुभुजों में बराबर भुजाएँ और बराबर कोण होते हैं। उनकी अनेक अर्थात् एक से अधिक, सममित रेखाएँ होती हैं।
3. प्रत्येक सम बहुभुज की उतनी ही सममित रेखाएँ होती हैं, जितनी उसकी भुजाएँ होती हैं।

समबहुभुज	समषड्भुज	समपंचभुज	वर्ग	समबाहु त्रिभुज
सममित रेखाओं की संख्या	6	5	4	3

4. दर्पण परावर्तन से ऐसी सममिति प्राप्त होती है, जिसमें बाएँ-दाएँ अभिमुखों का ध्यान रखना होता है।
5. घूर्णन में एक वस्तु को एक निश्चित बिंदु के परित घुमाया जाता है। यह निश्चित बिंदु **घूर्णन का केंद्र** कहलाता है। जिस कोण पर वस्तु घूमती है, उसे **घूर्णन का कोण** कहते हैं। आधे या अर्ध चक्कर का अर्थ 180° का घूर्णन है तथा एक-चौथाई चक्कर का अर्थ 90° का घूर्णन है। घूर्णन दक्षिणावर्त और वामावर्त दोनों ही दिशाओं में हो सकता है।
6. यदि घूर्णन के बाद, वस्तु, स्थिति के अनुसार, पहले जैसी ही दिखाई देती है, तो हम कहते हैं कि उसमें **घूर्णन सममिति** है।
7. एक पूरे चक्कर (360° के) में, एक वस्तु जितनी बार स्थिति के अनुसार, पहले जैसी ही दिखाई देती है, वह संख्या उस घूर्णन **सममिति का क्रम** कहलाती है। उदाहरणार्थ, एक वर्ग की घूर्णन सममिति का क्रम 4 है तथा एक समबाहु त्रिभुज की घूर्णन सममिति का क्रम 3 है।
8. कुछ आकारों में केवल एक ही सममिति रेखा होती है, जैसे अक्षर E; कुछ में केवल घूर्णन सममिति ही होती है, जैसे अक्षर S तथा कुछ में दोनों प्रकार की सममितियाँ होती हैं, जैसे अक्षर H है। सममिति का अध्ययन इसलिए महत्वपूर्ण है, क्योंकि इसका दैनिक जीवन में अधिकांशत: प्रयोग होता है तथा इससे भी अधिक महत्व इस कारण है कि यह हमें सुंदर एवं आकर्षक डिज़ाइन प्रदान कर सकती है।

© NCERT not to be republished

अध्याय 15

ठोस आकारों का चित्रण

0757CH15

15.1 भूमिकाः तल-आकृतियाँ और ठोस आकार

इस अध्याय में, आप अब तक देखी गई आकृतियों को उनकी विमाओं के रूप में (dimensions) वर्गीकृत करेंगे।

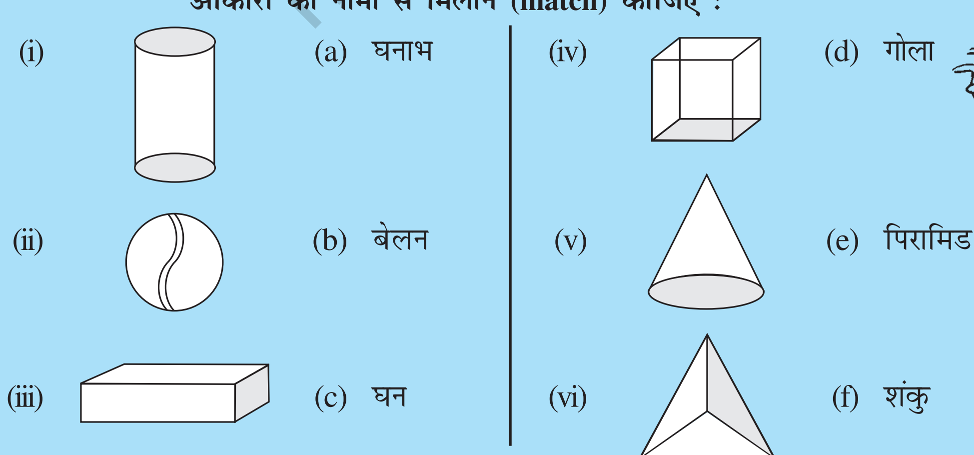
अपने दैनिक जीवन में, हम अपने परिवेश से विभिन्न आकारों की अनेक वस्तुएँ देखते हैं, जैसे पुस्तकें, गेंदें, आइसक्रीम शंकु, इत्यादि। अधिकांशतः, इन सभी वस्तुओं में एक बात सर्वनिष्ठ (common) है, वह यह है कि इनमें से प्रत्येक की कुछ लंबाई, चौड़ाई, ऊँचाई या गहराई है।

इसी कारण, ये सभी स्थान घेरते हैं और इनकी तीन विमाएँ हैं। इसीलिए, ये **त्रिविमीय आकार** (three dimensional shapes) कहलाते हैं

क्या आपको पिछली कक्षाओं में देखे गए कुछ त्रिविमीय आकारों (ठोस आकारों) के बारे में याद है ?

प्रयास कीजिए

आकारों का नामों से मिलान (match) कीजिए :



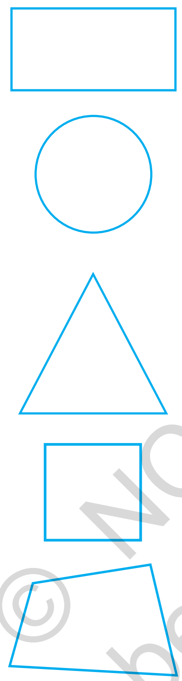
आकृति 15.1

© NCERT not to be republished

उपरोक्त में से प्रत्येक आकार जैसी कुछ वस्तुओं की पहचान करने का प्रयत्न कीजिए।

इसी प्रकार के तर्क द्वारा, हम कह सकते हैं कि एक कागज़ पर खींची जा सकने वाली आकृतियों (जिनकी केवल लंबाई और चौड़ाई होती है) को द्विविमीय (two dimensional) (या तल) कहना चाहिए। हम दो विमाओं की कुछ आकृतियों को पिछली कक्षाओं में भी देख चुके हैं।

द्विविमीय आकृतियों का नामों के साथ मिलान कीजिए (आकृति 15.2):



(i) (a) वृत्त

(ii) (b) आयत

(iii) (c) वर्ग

(iv) (d) चतुर्भुज

(v) (e) त्रिभुज

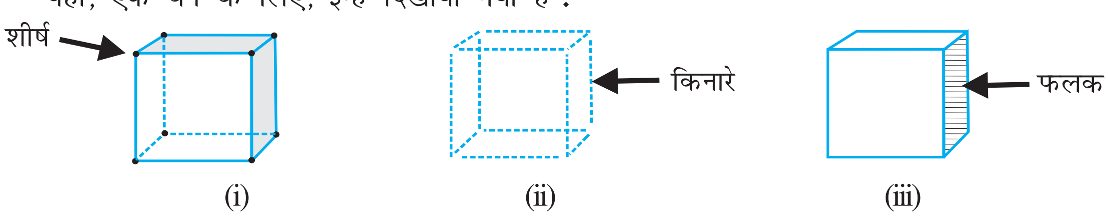
आकृति 15.2

© NCERT not to be republished

टिप्पणी: हम संक्षेप में, द्विविमीय को 2-D और त्रिविमीय को 3-D लिख सकते हैं।

15.2 फलक, किनारे और शीर्ष

क्या आपको पहले पढ़े हुए ठोस आकारों के फलकों, शीर्षों और किनारों के बारे में कुछ याद है? यहाँ, एक घन के लिए, इन्हें दिखाया गया है :



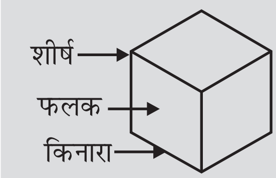
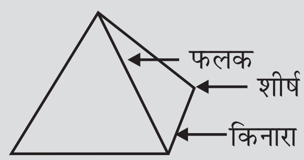
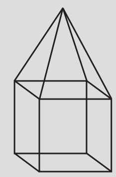
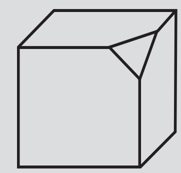
आकृति 15.3

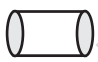
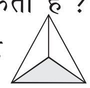
घन के 8 कोने उसके **शीर्ष (vertices)** हैं। घन के ढाँचे को बनाने वाले 12 रेखाखंड उसके किनारे या **कोर (edges)** कहलाते हैं। 6 सपाट वर्गाकार पृष्ठ, जो घन की खाल या त्वचा हैं, उसके **फलक (faces)** कहलाते हैं।

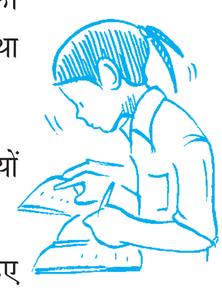
इन्हें कीजिए

निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए :

सारणी 15.1

				
फलक (F)	6	4		
किनारे (E)	12			
शीर्ष (V)	8	4		

क्या आप देख सकते हैं कि द्विविमीय आकृतियों के रूप में त्रिविमीय आकारों के फलकों की पहचान की जा सकती है ? उदाहरणार्थ, एक बेलन  के दो फलक ऐसे हैं जो वृत्त हैं, तथा दर्शाए गए पिरामिड  के फलक त्रिभुज हैं।



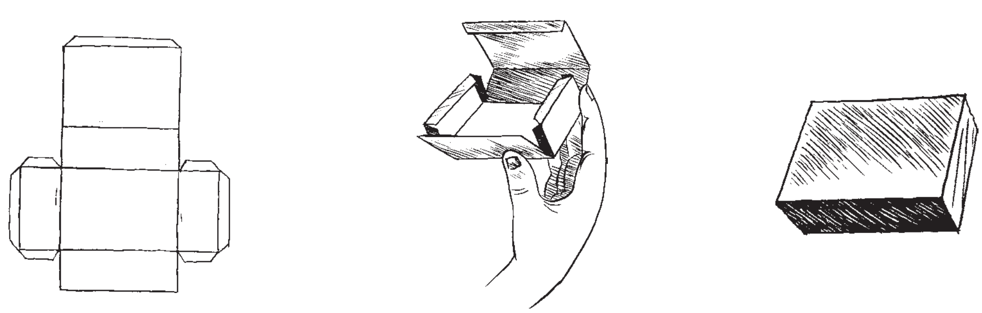
अब हम यह देखने का प्रयत्न करेंगे कि किस प्रकार कुछ 3-D आकारों को 2-D आकृतियों (अर्थात् कागज़ पर) को चित्रीय रूप से निरूपित किया जा सकता है।

ऐसा करने के लिए, हम त्रिविमीय वस्तुओं से निकटतम रूप से परिचित होना चाहेंगे। आइए इन वस्तुओं को उनसे बनाने का प्रयास करें, जो इनके जाल (net) कहलाते हैं।

© NCERT not to be republished

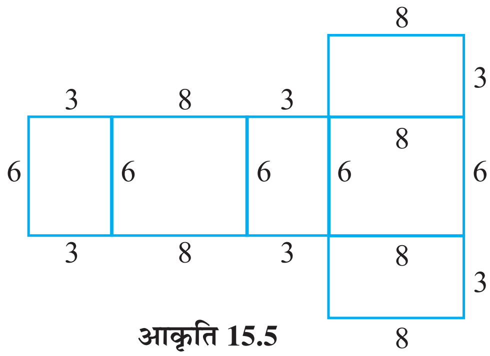
15.3 3-D आकार बनाने के लिए जाल (नेट)

एक गत्ते का बक्सा (box) लीजिए। इसको कुछ किनारों के अनुदिश काट कर सपाट (flat) बना लीजिए। अब आपके पास इस बक्से का जाल है। जाल 2-D में एक प्रकार का ऐसा ढाँचा (या रूपरेखा) होता है (आकृति 15.4 (i)) जिसे मोड़ने पर (आकृति 15.4 (ii))। परिणामस्वरूप एक 3-D आकार प्राप्त हो जाता है (आकृति 15.4 (iii))।



(i) (ii) (iii)

आकृति 15.4

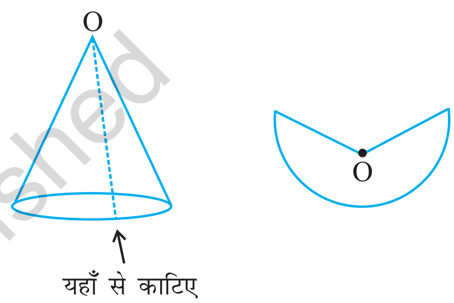


आकृति 15.5

यहाँ आपने किनारों को उपयुक्त रूप से पृथक् करके, एक **जाल** प्राप्त किया है। क्या इसकी विपरीत प्रक्रिया संभव है? यहाँ, एक बक्से के जाल का प्रतिरूप दिया है (आकृति 15.5)। इसका प्रतिरूप बनाकर उसका विस्तार (enlarge) कर लीजिए। फिर इसे उपयुक्त प्रकार से मोड़ कर और चिपका कर एक बक्सा बनाइए।

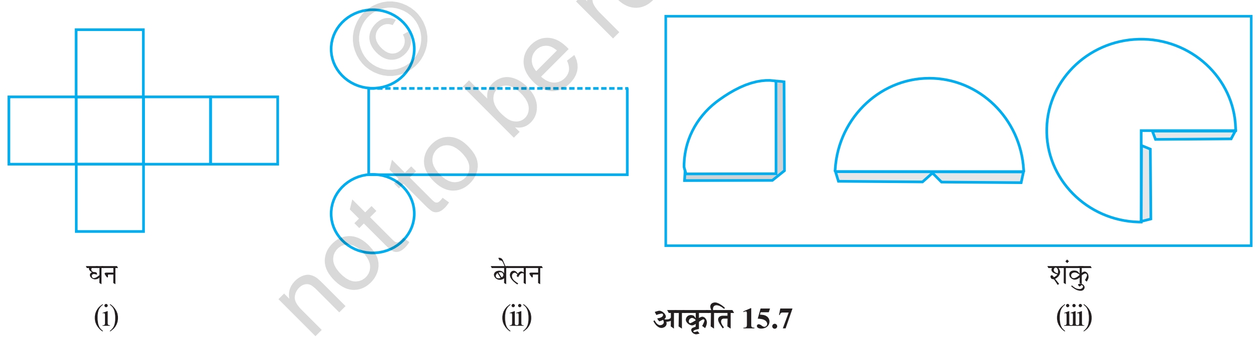
आप उपयुक्त इकाइयों या मात्रकों (units) का प्रयोग कर सकते हैं। प्राप्त बक्सा एक ठोस है। यह घनाभ (cuboid) के आकार की एक 3-D वस्तु है। इसी प्रकार, आप एक शंकु को उसके तिर्यक पृष्ठ के अनुदिश एक पतली पट्टी (या झिरी) काट कर, इसका जाल प्राप्त कर सकते हैं (आकृति 15.6)।

भिन्न-भिन्न आकारों के लिए, भिन्न-भिन्न जाल होते हैं। दिए हुए जालों के प्रतिरूप बनाइए और उनका विस्तार कीजिए, अथवा दिए हुए जालों के विस्तारित रूपों के प्रतिरूप बनाइए (आकृति 15.7) फिर इनके नीचे लिखें 3-D आकारों को बनाने का प्रयास कीजिए। आप गत्ते की पतली पट्टियाँ लेकर और उन्हें कागज़ के क्लिपों (clips) से बाँध कर आकारों के ढाँचे भी बनाना चाह सकते हैं।



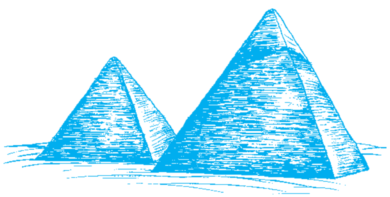
आकृति 15.6

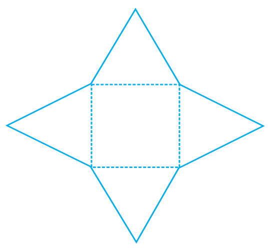
© NCERT not to be republished



आकृति 15.7

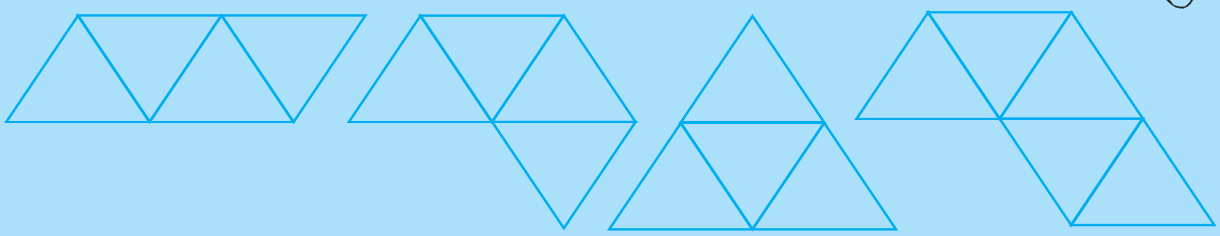
हम गिज़ा (मिस्र में हैं) के ग्रेट पिरामिड (Great Pyramid) (आकृति 15.8) के प्रकार के पिरामिड के लिए भी जाल बनाने का प्रयास कर सकते हैं। इस पिरामिड का आधार एक वर्ग है तथा चारों भुजाओं पर त्रिभुज बने हुए हैं। देखिए कि क्या आप दिए हुए जाल (आकृति 15.9) से इस पिरामिड को बना सकते हैं।


आकृति 15.8


आकृति 15.9

प्रयास कीजिए

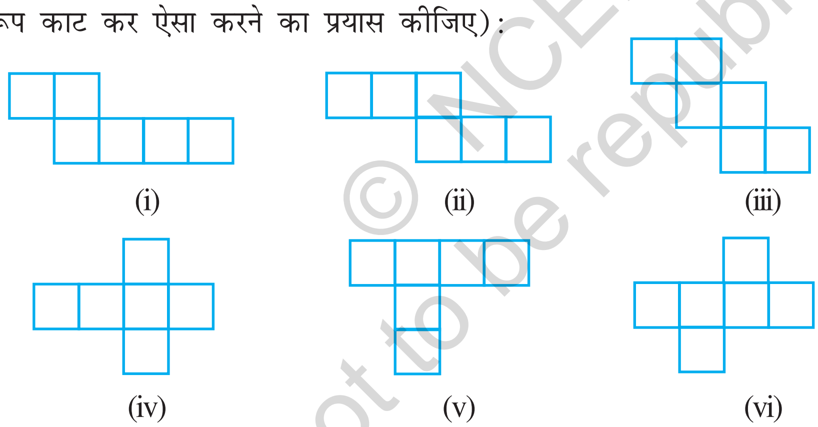
यहाँ आप चार जालों को देख रहे हैं (आकृति 15.10)। एक चतुष्फलक (tetrahedron) बनाने के लिए, इनमें से दो जाल सही हैं। देखिए कि क्या आप यह ज्ञात कर सकते हैं कि किन-किन जालों से चतुष्फलक बन सकता है।



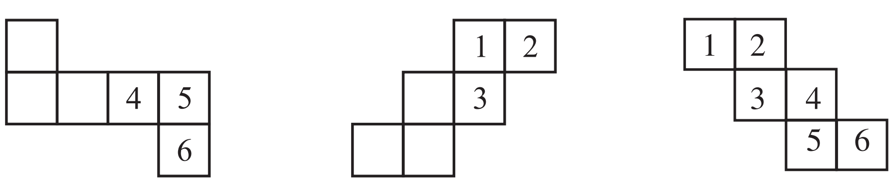
आकृति 15.10

प्रश्नावली 15.1

1. उन जालों को पहचानिए,जिनका प्रयोग करके आप घनों को बना सकते हैं (इन जालों के प्रतिरूप काट कर ऐसा करने का प्रयास कीजिए):



2. पासे (dice) ऐसे घन होते हैं, जिनके प्रत्येक फलक पर बिंदु (dots) अंकित होते हैं। एक पासे के सम्मुख फलकों पर अंकित बिंदुओं की संख्याओं का योग सदैव 7 होता है। यहाँ, पासे (घनों) को बनाने के लिए, दो जाल दिए जा रहे हैं। प्रत्येक वर्ग में लिखी संख्या उस बक्से के बिंदुओं को दर्शाती है।

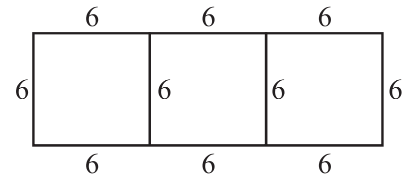


यह याद रखते हुए कि पासे के सम्मुख फलकों की संख्याओं का योग सदैव 7 होता है, रिक्त स्थानों पर उपयुक्त संख्याएँ लिखिए।

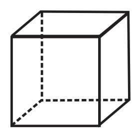
© NCERT not to be republished

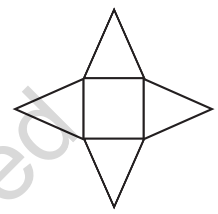
3. क्या यह पासे कि लिए एक जाल हो सकता है ? अपने उत्तर को स्पष्ट कीजिए।

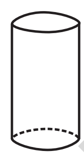
4. यहाँ एक घन बनाने के लिए, एक अधूरा जाल दिया गया है। इसको कम-से-कम दो विभिन्न विधियों से पूरा कीजिए। याद रखिए कि घन के 6 फलक होते हैं। यहाँ इस जाल में कितने फलक दिए हुए हैं। (दो पृथक्-पृथक् चित्र दीजिए। कार्य को सरल बनाने के लिए, आप वर्गांकित कागज़ का प्रयोग कर सकते हैं।)

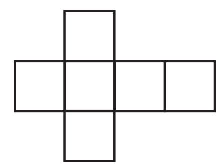


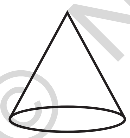
5. जालों को उपयुक्त ठोसों से मिलान कीजिए :

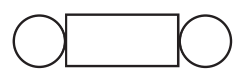
(a) 

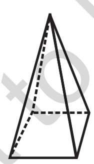
(i) 

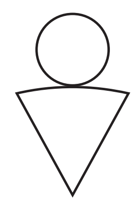
(b) 

(ii) 

(c) 

(iii) 

(d) 

(iv) 

© NCERT not to be republished

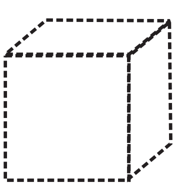
यह खेल खेलिए :

आप और आपका मित्र परस्पर पीठ-से-पीठ मिलाकर बैठे हैं। आप में से एक व्यक्ति कोई 3-D आकार बनाने के लिए एक जाल पढ़ता है, जबकि दूसरा व्यक्ति इसका प्रतिरूप बना कर, बोले गए 3-D आकार को खींचने या बनाने का प्रयत्न करता है।

15.4 एक सपाट पृष्ठ पर ठोसों को खींचना

आपका यह सपाट पृष्ठ एक कागज़ है। जब आप एक ठोस आकार को खींचते हैं, तो प्रतिबिंबों को कुछ विकृत (टेढ़ा) कर दिया जाता है, ताकि वे त्रिविमीय दिखाई दें। यह एक दृष्टिभ्रम है। यहाँ आपकी सहायता के लिए, दो तकनीकें दी जा रही हैं।

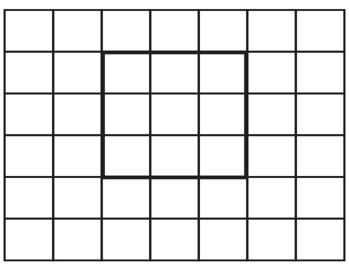
15.4.1 तिर्यक या अनियमित चित्र



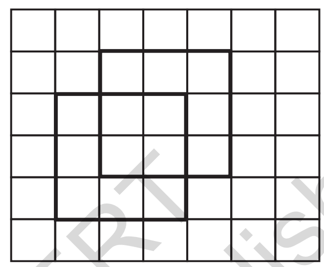
आकृति 15.11

यहाँ एक घन का चित्र दिया है (आकृति 15.11)। जब इसे सामने से देखा जाए तो इससे यह स्पष्ट पता चलता है कि एक घन कैसा दिखता है। आप इसके कुछ फलकों को देख नहीं पाते हैं।

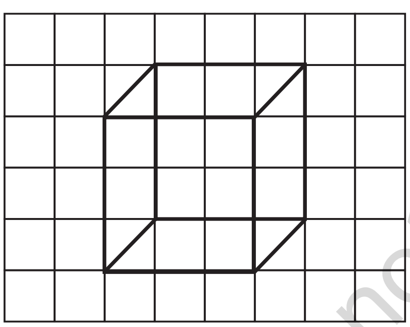
खींचे गए इस चित्र में लंबाई बराबर नहीं है। जबकि घन में यह बराबर होनी चाहिए। फिर भी आप यह पहचान कर लेते हैं कि यह एक घन है। किसी ठोस का ऐसा चित्र **एक तिर्यक** (या अनियमित) चित्र (oblique sketch) कहलाता है। आप ऐसे चित्र किस प्रकार खींच सकते हैं? आइए इसकी तकनीक को सीखने का प्रयत्न करें। आपको एक वर्गांकित (रेखांकित या बिंदुकित) कागज़ की आवश्यकता है। प्रारंभ में इस प्रकार के कागज़ पर चित्र खींचने का अभ्यास करने के बाद, आप बिना इस प्रकार के कागज़ की सहायता के सादे कागज़ पर ये चित्र सरलता से खींच सकते हैं। आइए एक $3 \times 3 \times 3$ का एक तिर्यक चित्र (एक ऐसा घन जिसका प्रत्येक किनारा 3 इकाई है) खींचने का प्रयत्न करें (आकृति 15.12)।



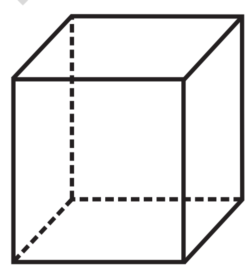
चरण 1
सामने का फलक खींचिए



चरण 2
सामने के फलक का सम्मुख फलक खींचिए। फलकों के माप बराबर होने चाहिए। परंतु यह चित्र चरण 1 के चित्र को कुछ खिसका कर ही बनाया गया है



चरण 3
संगत कोनों को मिलाइए



चरण 4
छिपे हुए किनारों के लिए, चित्र को बिंदुकित रेखाओं का प्रयोग करते हुए पुनः खींचिए (यह एक परंपरा या परिपाटी है) अब अभीष्ट चित्र तैयार है

आकृति 15.12

© NCERT not to be republished

उपरोक्त तिर्यक चित्र में, क्या आप निम्नलिखित बातों को देख रहें हैं?

(i) सामने के फलक और उसके सम्मुख फलक के माप समान हैं; तथा

(ii) घन के किनारे जो बराबर होते हैं, चित्र में भी बराबर-बराबर प्रतीत होते हैं यद्यपि इनको बराबर नहीं लिया गया है।

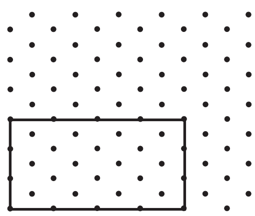
अब आप एक घनाभ का तिर्यक चित्र बनाने का प्रयास कर सकते हैं (याद रखिए इस स्थिति में, फलक आयत है।

टिप्पणी : आप ऐसे चित्र भी खींच सकते हैं, जिनमें माप (या मापन), दिए हुए ठोस के मापों के अनुसार (अनुकूल) ही हो। ऐसा करने के लिए हमें एक ऐसे कागज़ की आवश्यकता होगी, जिसे समदूरीक शीट (isometric sheet) अर्थात् समान दूरियों वाली शीट) कहते हैं। आइए हम एक समदूरीक शीट पर ऐसा घनाभ बनाने का प्रयास करते हैं जिसकी लंबाई 4 cm, चौड़ाई 3 cm और ऊँचाई 3 cm है।

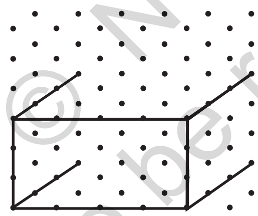
15.4.2 समदूरीक चित्र

क्या आपने एक समदूरीक बिंदुकित शीट देखी है ? (इसका एक प्रतिदर्श (sample) इस पुस्तक के अंत में दिया है।) इस प्रकार की शीट में, पूरा कागज़ (अर्थात् स्वयं यह शीट) बिंदुकित रेखाओं से बने छोटे-छोटे समबाहु त्रिभुजों में बँट जाता है। ऐसे चित्र खींचने के लिए जिनके माप दिए हुए ठोस की मापों के अनुसार हों, हम इन बिंदुकित समदूरीक शीटों का प्रयोग कर सकते हैं।

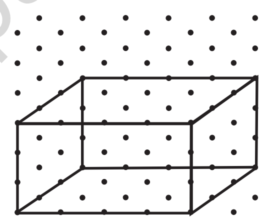
आइए विमाओं $4 \times 3 \times 3$ वाले एक घनाभ (जिसका अर्थ है कि इसकी लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 4, 3 और 3 इकाइयों की हैं) का एक समदूरीक चित्र बनाने का प्रयत्न करें (आकृति 15.13)।



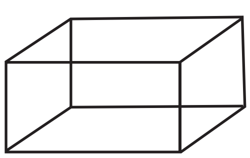
चरण 1
सामने वाला फलक दर्शाने के लिए 4×3 मापों का एक आयत खींचिए।



चरण 2
आयत के चारों कोनों से लंबाई 3 इकाई वाले 4 रेखाखंड खींचिए।



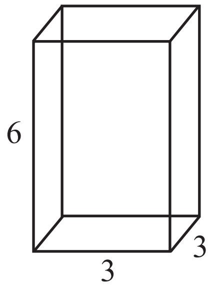
चरण 3
सुमेलित कोनों को उपयुक्त रेखाखंडों से मिलाइए।



चरण 4
यह घनाभ का एक समदूरीक चित्र है।

आकृति 15.13

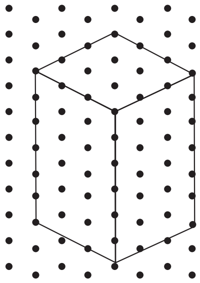
ध्यान दीजिए कि एक समदूरीक चित्र में, मापन ठीक (यथार्थ में) ठोस की दी हुई मापों के होते हैं, जबकि तिर्यक चित्र की स्थिति में ऐसा नहीं होता है।



आकृति 15.14 (i)

उदाहरण 1 यहाँ किसी घनाभ का एक तिर्यक चित्र दिया है (आकृति 15.14 (i))। इस चित्र से मिलान करने वाला एक समदूरीक चित्र खींचिए।

हल इसका हल आकृति 15.14 (ii) में चित्र खींच कर दर्शाया गया है। ध्यान दीजिए कि किस प्रकार मापों के अनुसार चित्र खींचा गया है।

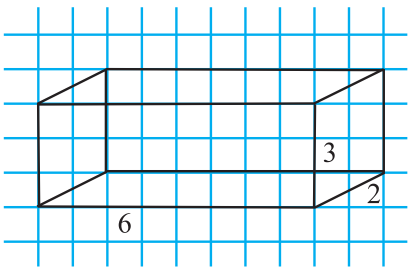


आकृति 15.14 (ii)

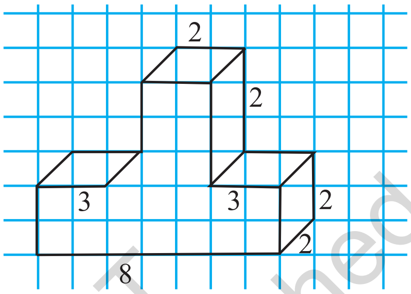
आपने (i) लंबाई (ii) चौड़ाई और (iii) ऊँचाई में से प्रत्येक के अनुदिश कितनी-कितनी इकाइयाँ ली हैं ? क्या ये तिर्यक चित्र में दशाई गई इकाइयों से सुमेलित हैं ?

प्रश्नावली 15.2

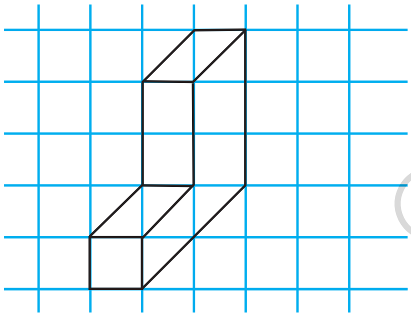
1. एक समदूरीक बिंदुकित कागज़ का प्रयोग करते हुए, निम्नलिखित आकृतियों में से प्रत्येक का एक समदूरीक चित्र खींचिए :



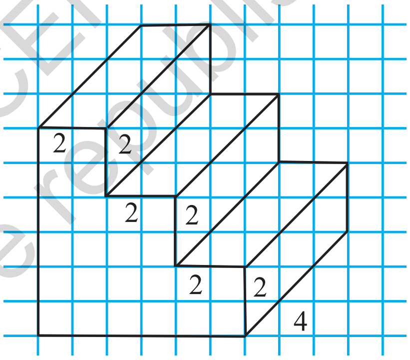
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

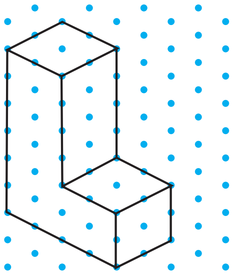
आकृति 15.15 (i)-(iv)

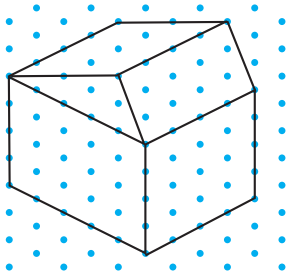
© NCERT not to be republished

2. किसी घनाभ की विमाएँ 5 cm 3 cm और 2 cm हैं। इस घनाभ के तीन भिन्न-भिन्न समदूरीक चित्र खींचिए।

3. 2 cm किनारों वाले तीन घनों को परस्पर सटा कर रखते हुए एक घनाभ बनाया गया है। इस घनाभ का एक तिर्यक अथवा एक समदूरीक चित्र खींचिए।

4. निम्नलिखित समदूरीक आकारों में से प्रत्येक के लिए, एक तिर्यक चित्र खींचिए :





5. निम्नलिखित में से प्रत्येक के लिए, (i) एक तिर्यक चित्र और (ii) एक समदूरीक चित्र खींचिए :

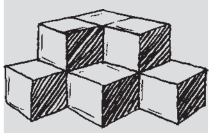
(a) 5 cm, 3 cm और 2 cm विमाओं वाला एक घनाभ (क्या आपका चित्र अद्वितीय है ?)

(b) 4 cm लंबे किनारे वाला एक घन।

इस पुस्तक के अंत में, एक समदूरीक शीट लगी है। आप इस पर अपने मित्र द्वारा निर्दिष्ट विमाओं के घन या घनाभ खींच सकते हैं।

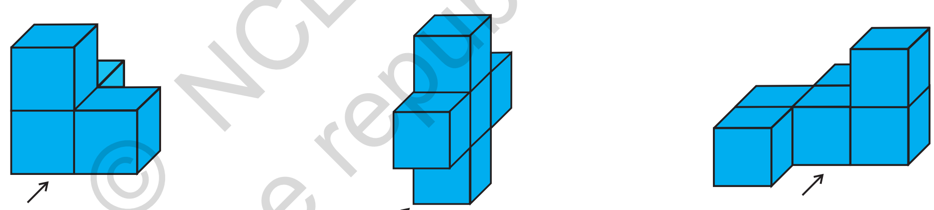
15.4.3 ठोस वस्तुओं का चित्रण

इन्हें कीजिए



कभी-कभी जब आप संयोजित या जुड़े हुए आकारों को देखते हैं, तो इनमें से कुछ आपकी दृष्टि से छिप जाते हैं, अर्थात् आपको दिखाई नहीं देते हैं।

यहाँ कुछ क्रियाकलाप दिए जा रहे हैं, जिन्हें आप अपने खाली समय में करने का प्रयास कर सकते हैं। इनसे आपको कुछ ठोस वस्तुओं के चित्रण या उनके बारे में यह कल्पना करने में सहायता मिलेगी कि वे कैसे दिखाई देते हैं।



(i) (ii) (iii)

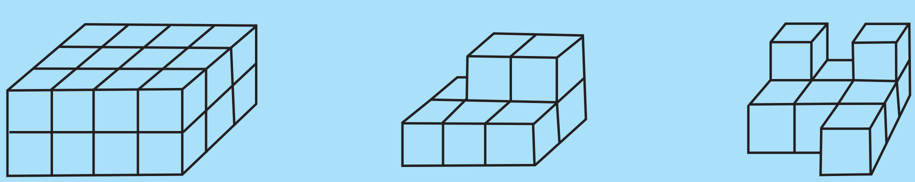
आकृति 15.16

कुछ घन लीजिए तथा उन्हें आकृति 15.16 में दर्शाए अनुसार व्यवस्थित कीजिए। अब अपने मित्र से पूछिए कि वह इसका अनुमान लगाए कि तीर के चिह्न के अनुसार इसको देखने पर कितने घन दिखाई देते हैं ?

© NCERT not to be republished

प्रयास कीजिए

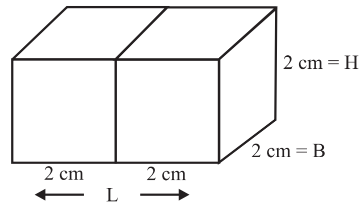
यह अनुमान लगाने का प्रयत्न कीजिए कि निम्नलिखित व्यवस्थाओं में घनों की संख्या कितनी है (आकृति 15.17)।



(i) (ii) (iii)

आकृति 15.17

इस प्रकार का चित्रीयकरण बहुत सहायक होता है। मान लीजिए आप ऐसे घनों को जोड़ कर एक घनाभ बनाते हैं। इस स्थिति में, आप यह अनुमान लगा सकते हैं कि उस घनाभ की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्या होगी ?



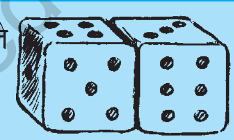
आकृति 15.18

उदाहरण 2 यदि 2 cm × 2 cm × 2 cm विमाओं वाले दो घनों को परस्पर सटा कर रखा जाए, तो परिणामी घनाभ की विमाएँ क्या होंगी ?

हल जैसाकि आप देख सकते हैं (आकृति 15.18) जब घनों को सटा कर रखा जाता है, तो केवल लंबाई ही एक ऐसा मापन है जिसमें वृद्धि हुई है। यह 2 + 2 = 4 cm हो जाती है। घनाभ की चौड़ाई = 2 cm है और ऊँचाई भी = 2 cm है।

प्रयास कीजिए

1. दो पासों को आकृति में दर्शाए अनुसार, परस्पर सटा कर रखा गया है। क्या आप बता सकते हैं कि निम्नलिखित फलकों के विपरीत फलकों पर अंकित बिंदुओं का योग क्या होगा ?



आकृति 15.19

(a) 5 + 6 (b) 4 + 3

(याद रखिए कि एक पासे पर सम्मुख फलकों पर अंकित संख्याओं का योग सदैव 7 होता है।)

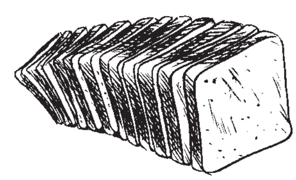
2. 2 cm किनारों वाले तीन घनों को परस्पर सटा कर रखते हुए, एक घनाभ बनाया गया है। इस घनाभ का एक तिर्यक चित्र बनाने का प्रयास कीजिए और बताइए कि इसकी लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्या हो सकती है ?

© NCERT not to be republished

15.5 किसी ठोस के विभिन्न भागों को देखना

आइए अब इस पर चर्चा करें कि एक 3-D वस्तु को किस प्रकार विभिन्न विधियों से देखा जा सकता है।

15.5.1 किसी वस्तु को देखने की एक विधि है उसे काटना या उसके पतले टुकड़े करना



आकृति 15.20

टुकड़े करने वाला खेल

यहाँ एक डबल रोटी (bread) दी हुई है (आकृति 15.20)। यह वर्गाकार आधार वाले एक घनाभ जैसा है। आप चाकू से इसके टुकड़े कीजिए।

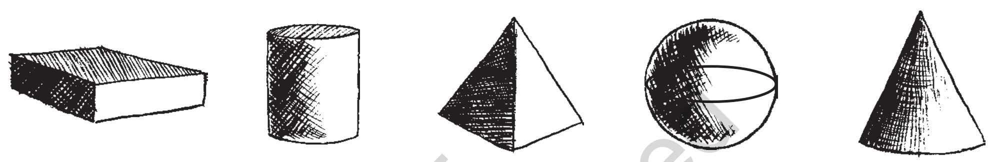
जब आप इसे ऊर्ध्वाधर रूप से काटते हैं, तो आपको अनेक टुकड़े प्राप्त हो जाते हैं, जैसा आकृति 15.20 में दर्शाया गया है। एक टुकड़े का प्रत्येक फलक एक वर्ग है। हम इस फलक को डबल रोटी की एक अनुप्रस्थ-काट (cross section) कहते हैं। वस्तुत:, इस स्थिति में, अनुप्रस्थ काट लगभग एक वर्ग है। ध्यान रखिए! यदि आपका यह काटना या कटाव 'ऊर्ध्वाधर' नहीं होगा, तो आपको एक भिन्न अनुप्रस्थ-काट प्राप्त हो सकती है। इसके बारे में सोचिए! आपके द्वारा प्राप्त अनुप्रस्थ-काट की परिसीमा एक तल-आकृति है। क्या आप इसे देख रहे हैं ?

एक रसोई खेल

क्या आपने सब्जियों के अनुप्रस्थ-काट के आकारों पर ध्यान दिया है, जब उन्हें रसोई में पकाने के लिए काटा जाता है? विभिन्न टुकड़ों को देखिए तथा सब्जियों को काटने से प्राप्त अनुप्रस्थ-काट के आकारों से परिचित हो जाइए।

इसे खेलिए

निम्नलिखित ठोसों के मिट्टी (या प्लास्टिक की मिट्टी) के मॉडल (models) बनाइए तथा इनको ऊर्ध्वाधर या क्षैतिज रूप से काटिए। अपने द्वारा प्राप्त अनुप्रस्थ-काटों के रफ़ (rough) चित्र खींजिए। जहाँ भी संभव हो, इनके नाम भी लिखिए।



आकृति 15.21

प्रश्नावली 15.3

1. आपको कौनसा अनुप्रस्थ-काट प्राप्त होती है, जब आप निम्नलिखित ठोसों को (i) ऊर्ध्वाधर रूप से और (ii) क्षैतिज रूप से काटते हैं?
   (a) एक ईंट (b) एक गोल सेब (c) एक पासा
   (d) एक बेलनाकार पाइप (e) एक आइसक्रीम शंकु

© NCERT not to be republished

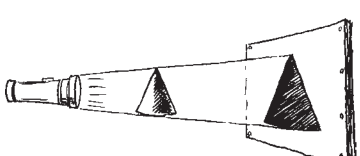
15.5.2 एक अन्य विधि छाया खेल वाली है

आकृति 15.22

एक छाया खेल

यह समझाने के लिए कि किस प्रकार त्रिविमीय वस्तुओं को द्विविमीय आकारों के रूप में देखा जा सकता है, छायाएँ इनके अच्छे (या सुंदर) उदाहरण हैं।

क्या आपने कभी एक छाया खेल (shadow play) देखा है? यह एक प्रकार का मनोरंजन है जिसमें सुस्पष्ट ठोस आकृतियों को एक प्रकाशमय स्रोत के सामने रखकर उनके गतिमान प्रतिबिंबों के भ्रम उत्पन्न किए जाते हैं। इसमें गणित की अवधारणाओं का कुछ अप्रत्यक्ष रूप से प्रयोग होता है।



आकृति 15.23

आपको इस क्रियाकलाप के लिए, एक प्रकाश के स्रोत तथा कुछ ठोस आकारों की आवश्यकता होगी। (यदि आपके पास एक ओवरहैड प्रोजेक्टर (overhead projector) है, तो ठोस को बल्ब के अंतर्गत रखिए और इनकी खोज कीजिए।) एक शंकु के ठीक सामने एक टार्च का प्रकाश डालिए। यह पर्दे पर किस प्रकार की छाया दर्शाता है (आकृति 15.23)?

(i)

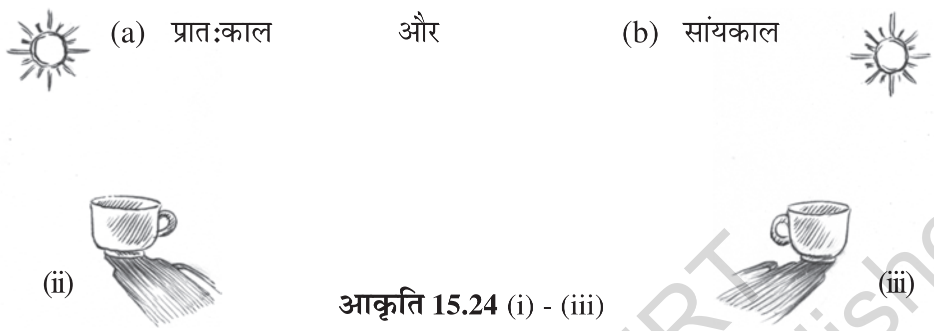
ठोस तीन विमाओं वाला है। इसकी छाया की कितनी विमाएँ हैं?

यदि आप इस खेल में, शंकु के स्थान पर एक घन को टार्च के सामने रखें, तो आपको किस प्रकार की छाया प्राप्त होगी?

प्रकाश के स्रोत की विभिन्न स्थितियों तथा ठोस वस्तु की विभिन्न स्थितियों को लेकर प्रयोग कीजिए। प्राप्त की गई छायाओं के आकारों तथा मापों पर इनके प्रभावों का अध्ययन कीजिए। यहाँ एक और मनोरंजक प्रयोग दिया जा रहा है,

जिसे संभवत: आप पहले ही कर चुके होंगे। एक वृत्ताकार चाय के प्याले को खुले में रख दीजिए, जब दोपहर 12 बजे के समय सूर्य उसके ठीक ऊपर हो। इसे आकृति 15.24 में दिखाया गया है। आपको उसकी छाया कैसी दिखाई देती है?

क्या यह छाया एक ही प्रकार की रहती है?



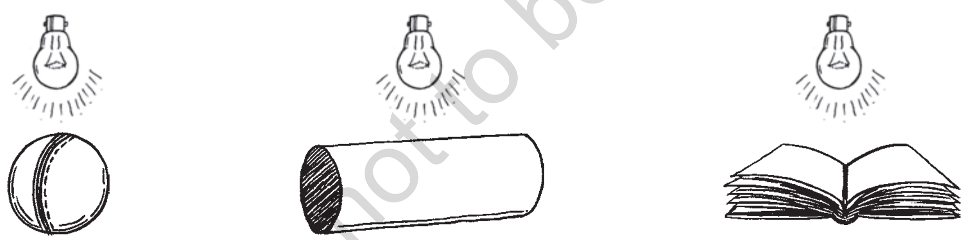
आकृति 15.24 (i) - (iii)

सूर्य की स्थितियों और प्रेक्षण के समयों के अनुसार, छायाओं का अध्ययन कीजिए।

© NCERT not to be republished

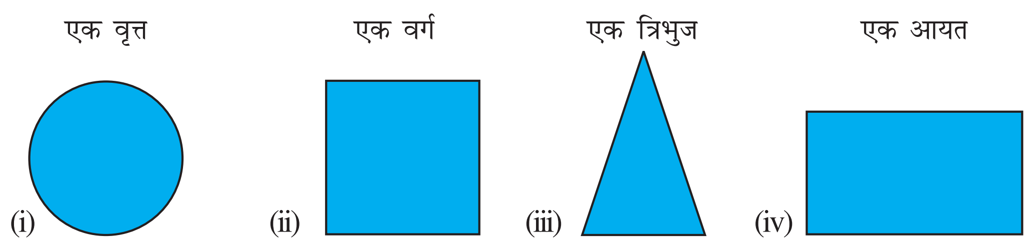
प्रश्नावली 15.4

1. निम्नलिखित ठोसों के ठीक ऊपर एक जलता हुआ बल्ब रखा गया है। प्रत्येक स्थिति में प्राप्त छाया के आकार का नाम बताइए। इस छाया का एक रफ़ चित्र बनाने का प्रयास कीजिए। (पहले आप प्रयोग करने का प्रयास करें और फिर उत्तर दें।)



एक गेंद (i) एक बेलनाकार पाइप (ii) एक पुस्तक (iii)

2. यहाँ कुछ 3-D वस्तुओं की छायाएँ दी गई हैं जो उन्हें एक ओवरहैड प्रोजेक्टर के लैंप (बल्ब) के अंतर्गत या नीचे रख कर प्राप्त की गई हैं। प्रत्येक छाया से मिलान वाले ठोस की पहचान कीजिए। (इनमें एक से अधिक उत्तर हो सकते हैं!)



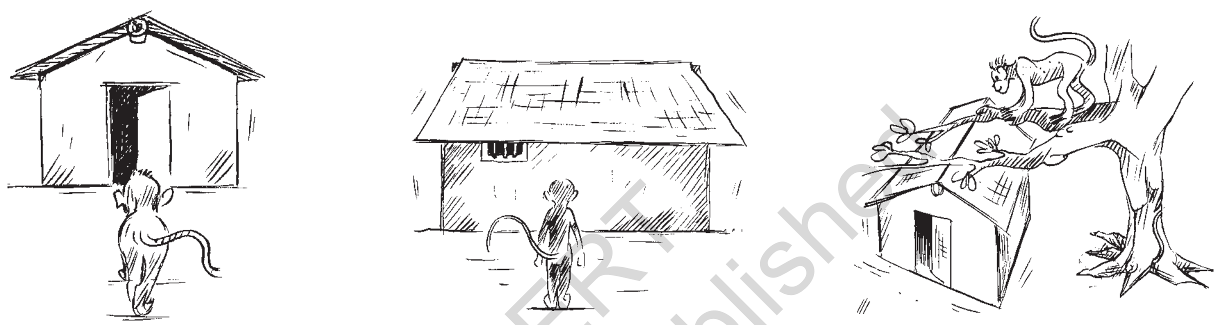
3. जाँच कीजिए कि क्या ये कथन सत्य हैं।

(i) एक घन एक आयत के आकार की छाया दे सकता है।

(ii) एक घन एक षड्भुज के आकार की छाया दे सकता है।

15.5.3 एक तीसरी विधि यह है कि इसके विभिन्न दृश्य देखने के लिए इसे कुछ विशेष कोणों से देखा जाए

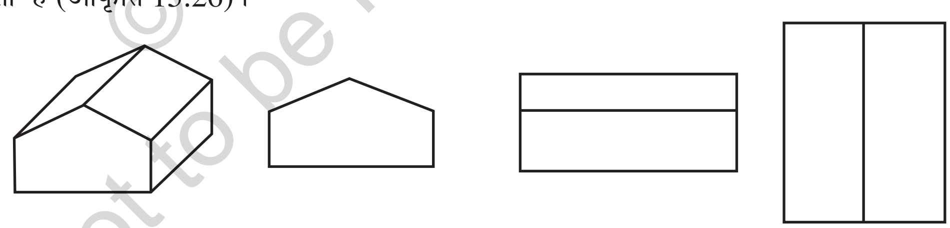
कोई भी व्यक्ति किसी वस्तु को उसके सामने से या उसकी एक ओर (पार्श्व) से या उसके ऊपर से देख सकता है। प्रत्येक बार उसे एक भिन्न दृश्य मिलेगा (आकृति 15.25)।



सामने से दृश्य   पार्श्व दृश्य   ऊपर से दृश्य

आकृति 15.25

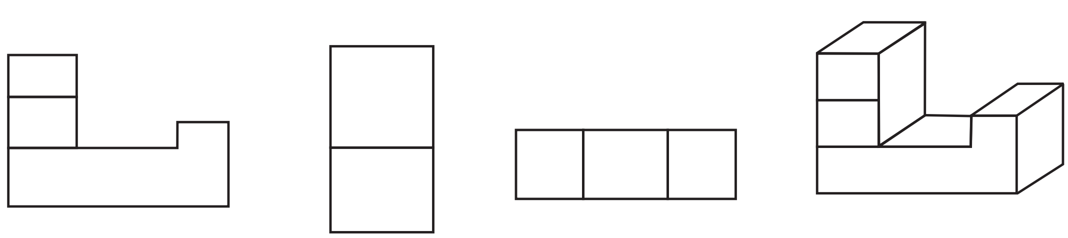
यहाँ, एक उदाहरण दिया जा रहा है, जिसमें कोई व्यक्ति एक भवन के विभिन्न दृश्य प्राप्त कर सकता है (आकृति 15.26)।



भवन   सामने का दृश्य   पार्श्व दृश्य   ऊपर का दृश्य

आकृति 15.26

आप इन्हें, घनों को जोड़ने से बनी आकृतियों के लिए भी कर सकते हैं।



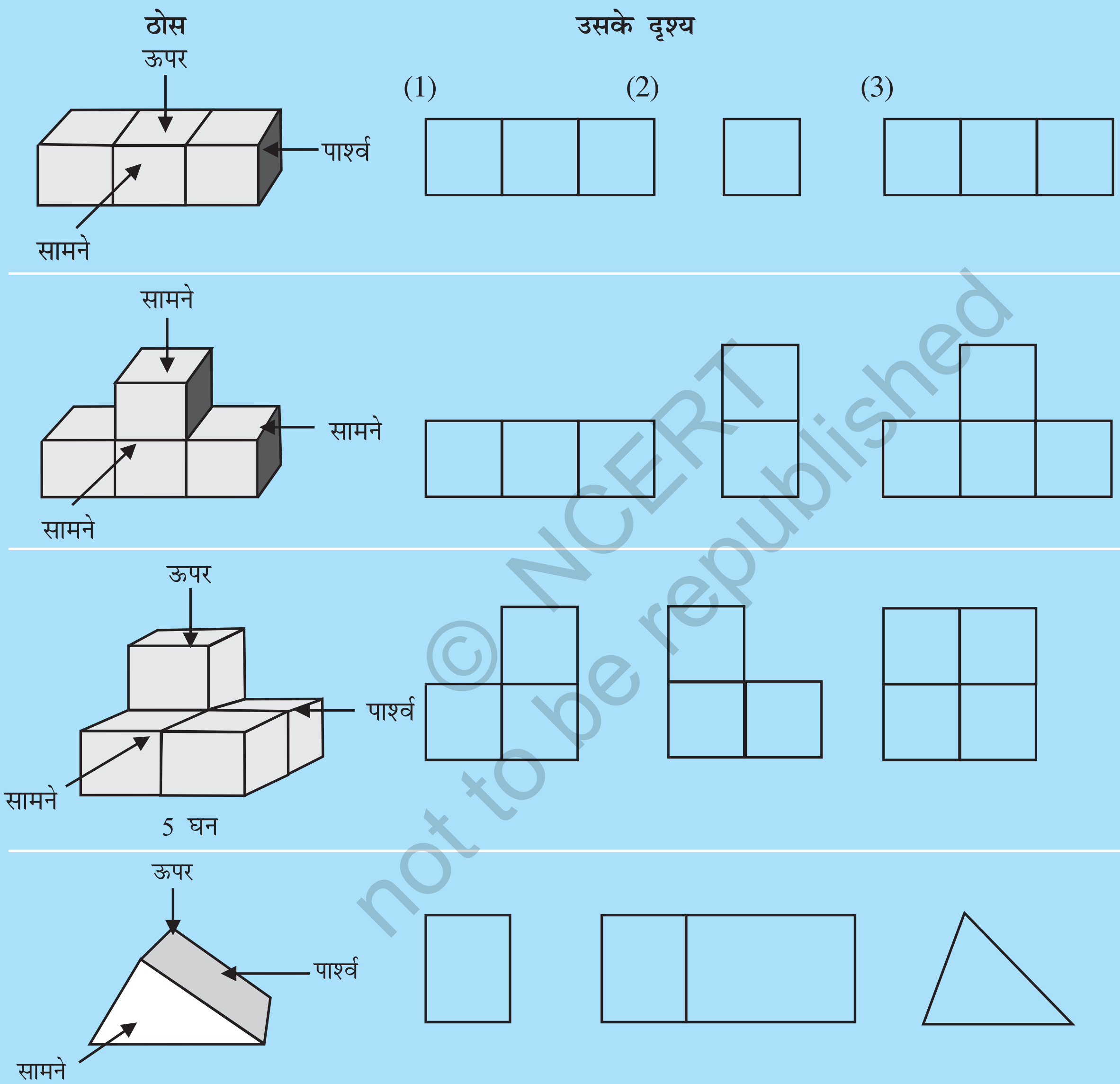
आकृति 15.27

घनों को एक साथ रखकर ठोस बनाइए और फिर उन्हें विभिन्न दिशाओं से देखकर उनके ऊपर बताए अनुसार चित्र बनाने का प्रयत्न कीजिए।

© NCERT not to be republished

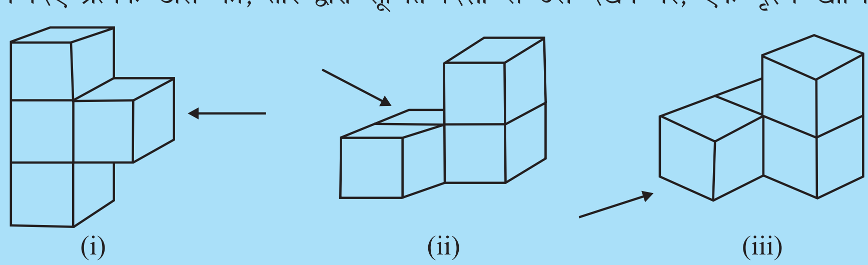
प्रयास कीजिए

1. प्रत्येक ठोस के लिए, तीन दृश्य (1), (2) और (3) दिए हैं। प्रत्येक ठोस के लिए संगत ऊपर के, सामने के और पार्श्व दृश्यों की पहचान कीजिए।



© NCERT not to be republished

2. नीचे दिए प्रत्येक ठोस का, तीर द्वारा सूचित दिशा से उसे देखने पर, एक दृश्य खींचिए।



हमने क्या चर्चा की ?

1. वृत्त, वर्ग, आयत, चतुर्भज और त्रिभुज **समतल** आकृतियों के उदाहरण हैं तथा घन, घनाभ, गोला, बेलन, शंकु और पिरामिड **ठोस आकारों** के उदाहरण हैं।
2. समतल आकृतियों की दो विमाएँ (संक्षिप्त में **2-D**) होती हैं तथा ठोस आकारों की तीन विमाएँ (संक्षिप्त में **3-D**) होती हैं।
3. ठोस आकार के कोने उसके **शीर्ष**, उसके ढाँचें के रेखाखंड उसके **किनारे** (या कोर) तथा उसके सपाट पृष्ठ उसके **फलक** कहलाते हैं।
4. ठोस का एक **जाल** दो विमाओं में एक ऐसा ढाँचा (या रूप रेखा) है, जिसे मोड़कर वह ठोस प्राप्त हो जाता है। एक ही ठोस के अनेक प्रकार के जाल हो सकते हैं।
5. वास्तविक रूप से, ठोस आकारों को सपाट पृष्ठों (जैसे कागज़) पर खींचा जा सकता है। हम इसे **3-D ठोस का 2-D निरूपण कहते** हैं।
6. एक ठोस के दो प्रकार के चित्र बनाना संभव है :
   (a) एक **तिर्यक चित्र,** जिसमें लंबाइयाँ समानुपाती नहीं होती हैं। फिर भी यह ठोस के रुप के बारे में सभी महत्वपूर्ण जानकारी प्रदान कर देता है।
   (b) एक **समदूरीक चित्र** को एक समदूरीक बिंदुकित कागज़ पर खींचा जाता है, जिसका एक प्रतिदर्श इस पुस्तक के अंत में दिया गया है। किसी ठोस के एक समदूरीक चित्र में लंबाइयों को समानुपाती रखा जाता है।
7. **ठोस आकारों का चित्रण** एक बहुत ही उपयोगी कौशल है। आपको ठोस आकार के छिपे हुए भाग दिखाई दे जाने चाहिए।
8. एक ठोस के विभिन्न भागों को अनेक विधियों से देखा जा सकता है।
   (a) एक विधि यह है कि दिए हुए आकार को काट लिया जाए। इससे हमें ठोस का एक **अनुप्रस्थ-काट** प्राप्त हो जाती है।
   (b) एक अन्य विधि यह है कि एक 3-D आकार की एक 2-D छाया देखी जाए।
   (c) तीसरी विधि यह है कि ठोस आकार को विभिन्न कोणों से देखा जाए। देखे गए आकार का **सामने का दृश्य, पार्श्व दृश्य** और **ऊपर का दृश्य** हमें उस आकार के बारे में बहुत अधिक जानकारी प्रदान कर सकते हैं।

© NCERT not to be republished