

2

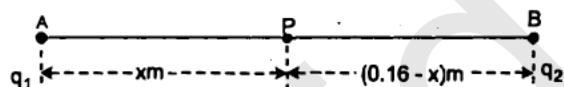
स्थिर वैद्युत विभव तथा धारिता

(Electrostatic Potential and Capacitance)

अभ्यास प्रश्न

प्रश्न 2.1. $5 \times 10^{-8} \text{ C}$ और $-3 \times 10^{-8} \text{ C}$ के दो आवेश 16 cm दूरी पर स्थित हैं। दोनों आवेशों को मिलाने वाली रेखा के किस बिंदु पर वैद्युत विभव शून्य होता? अनन्त पर विभव शून्य लीजिए।

हल : $\because q_1 = 5 \times 10^{-8} \text{ C}$ तथा $q_2 = -3 \times 10^{-8} \text{ C}$ और q_1 तथा q_2 के बीच दूरी $= r = 16 \text{ cm} = 0.16 \text{ m}$
माना q_1 एवं q_2 बिन्दुओं A एवं B पर हैं।
माना P अभीष्ट बिन्दु है अर्थात् रेखा AB पर q_1 से x दूरी पर, जिस पर विद्युत-विभव शून्य है। यदि q_1 एवं q_2 के कारण P पर क्रमशः विभव V_1 तथा V_2 हैं, तब



$$\therefore V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r}$$

$$\therefore V_1 = \frac{9 \times 10^9 \text{ Nm}^2 \text{ C}^{-2} \times 5 \times 10^{-8} \text{ C}}{xm}$$

$$\text{तथा } V_2 = \frac{9 \times 10^9 \text{ Nm}^2 \text{ C}^{-2} \times (-3 \times 10^{-8} \text{ C})}{(0.16-x)m}$$

यदि P पर कुल विभव V है, तब

$$V = V_1 + V_2$$

$$\text{या } V = 0$$

$$\text{या } V = \left[\frac{9 \times 10^9 \times 5 \times 10^{-8}}{x} \right]$$

$$+ \left. \frac{9 \times 10^9 \times (-3 \times 10^{-8})}{(0.16-x)} \right] \text{ NmC}^{-1} = 0$$

$$\text{या } 9 \times 10^9 \times 10^{-8} \left[\frac{5}{x} - \frac{3}{0.16-x} \right] = 0$$

$$\text{या } \frac{5}{x} = \frac{3}{0.16-x}$$

$$\text{या } 5(0.16-x) = 3x$$

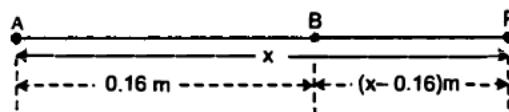
$$\text{या } 0.8 - 5x = 3x$$

$$\text{या } 8x = 0.8$$

$$\text{या } x = 0.1 \text{ m}$$

$$\text{या } x = 10 \text{ cm} \quad \text{उत्तर}$$

अब $5 \times 10^{-8} \text{ C}$ से 10 cm दूरी पर यदि x बढ़ी हुई रेखा AB पर स्थित है, तो अभीष्ट शर्त है।



$$\frac{5}{x} - \frac{3}{x-0.16} = 0$$

$$5(x-0.16) = 3x$$

$$\therefore 5x - 3x = 0.8$$

$$\text{या } 2x = 0.8 \text{ m}$$

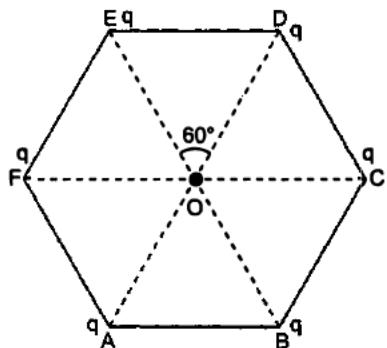
$$x = 0.4 \text{ m}$$

$$x = 40 \text{ cm}$$

अतः $5 \times 10^{-8} \text{ C}$ से ऋणावेश की ओर। उत्तर

प्रश्न 2.2. 10 cm भुजा वाले एक समषट्खुज के प्रत्येक शीर्ष पर $5\mu\text{C}$ का आवेश है। खट्खुज के केंद्र पर विभव परिकलित कीजिए।

हल : माना ABCDEF एक समषट्खुज है, जिसकी भुजा 10cm है तथा इसका केन्द्र O है।



$$\because \text{पट्खुज के प्रत्येक शीर्ष पर आवेश} = q \\ = 5\mu\text{C} = 5 \times 10^{-6} \text{ C}$$

$$AB = BC = CD = DE = EF$$

$$\text{तथा भुजा} = FA = 10 \text{ cm} = 0.10 \text{ m}$$

\therefore समषट्खुज में सभी त्रिखुज समत्रिखुज हैं।

$$\therefore OA = OB = OC = OD = OE \\ = OF = AB = 0.10 \text{ m}$$

$$\therefore V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^6 \frac{q_i}{r_i}$$

$$\therefore V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q}{r} \times 6$$

$$\text{या} \quad V = \frac{6 \times 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2 \text{ C}^{-2} \times 5 \times 10^{-6} \text{ C}}{0.1 \text{ m}}$$

$$\text{या} \quad V = 270 \times 10^3 \times 10 \text{ V}$$

$$\text{या} \quad V = 2.7 \times 10^6 \text{ V}$$

अतः खट्खुज के केंद्र पर विभव

$$= 2.7 \times 10^6 \text{ V} \quad \text{उत्तर}$$

प्रश्न 2.3. 6 cm की दूरी पर अवस्थित दो बिन्दुओं A एवं B पर दो आवेश $2\mu\text{C}$ तथा $-2\mu\text{C}$ रखे हैं।

(a) निकाय के सम विभव पृष्ठ की पहचान कीजिए।

(b) इस पृष्ठ के प्रत्येक बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की दिशा क्या है?

हल : (a) $\because A$ एवं B पर दो आवेश $2\mu\text{C}$ और $-2\mu\text{C}$ रखे हैं।

$$\text{तथा} \quad AB = 6 \text{ cm} = 0.06 \text{ m}$$

दो दिए गए आवेशों के निकाय का सम विभव पृष्ठ A एवं B को मिलाने वाली रेखा के अभिलम्ब पर है।

पृष्ठ, AB के मध्य-बिन्दु C से गुजरता है।

$$\therefore \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2 \times 10^{-6} \text{ C}}{0.03 \text{ m}} + \frac{(-2 \times 10^{-6} \text{ C})}{0.03 \text{ m}} \right] = 0$$

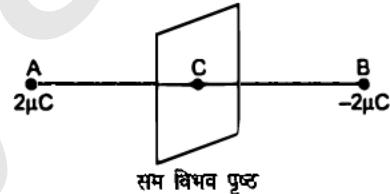
इस प्रकार, इस पृष्ठ के प्रत्येक बिन्दु पर समान विभव है और वह शून्य है।

अतः यह एक सम विभव पृष्ठ है।

अतः AB के अभिलम्बवत् एवं इसके मध्य-बिन्दु से होकर जाने वाले तल के प्रत्येक बिन्दु पर विभव शून्य है।

उत्तर

(b) चूंकि विद्युत क्षेत्र सदैव + से - आवेश की ओर कार्य करता है। इस प्रकार यहाँ विद्युत क्षेत्र धनावेशित (+) बिन्दु A से ऋणावेशित (-) बिन्दु B की ओर कार्य करता है तथा यह सम विभव पृष्ठ के अभिलम्ब है।



अतः पृष्ठ के प्रत्येक बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र तल के अभिलम्ब AB दिशा में है।

उत्तर

प्रश्न 2.4. 12 cm त्रिज्या वाले एक गोलीय चालक के पृष्ठ पर $16 \times 10^{-7} \text{ C}$ का आवेश एक समान रूप से वितरित है :

(a) गोले के अन्दर,

(b) गोले के ठीक बाहर,

(c) गोले के केंद्र से 18 cm पर अवस्थित, किसी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र क्या होगा?

हल : \because चालक पर आवेश $q = 16 \times 10^{-7} \text{ C}$

तथा गोलीय चालक की त्रिज्या $r = 12 \text{ cm} = 0.12 \text{ m}$

(a) \because गोलीय चालक का दिया गया आवेश उसके पृष्ठ पर रहता है।

\therefore गोलीय चालक के अन्दर विद्युत-क्षेत्र शून्य है।

$$\therefore \phi = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\text{या } \phi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$\therefore q = 0$ चालक के भीतर

$$\therefore \phi = 0$$

$$\text{या } E \cdot ds = 0$$

$$\text{या } E = 0$$

अतः गोले के अंदर विद्युत क्षेत्र शून्य है। उत्तर

(b) गोले के ठीक बाहर एक बिन्दु पर अर्थात् पृष्ठ के एक बिन्दु पर, आवेश को गोले के केन्द्र पर संकेन्द्रित माना जा सकता है।

$$\therefore E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$$

$$\therefore E = \frac{9 \times 10^9 \text{ Nm}^2 \text{ C}^{-2} \times 16 \times 10^{-7} \text{ C}}{(0.12 \text{ m})^2}$$

$$\text{या } E = \frac{9 \times 16 \times 10^2}{144 \times 10^{-2}} \text{ NC}^{-1}$$

$$\text{या } E = \frac{14.4 \times 10^2}{14.4 \times 10^{-3}} \text{ NC}^{-1}$$

$$\text{या } E = 10^5 \text{ NC}^{-1}$$

अतः गोले के ठीक बाहर विद्युत क्षेत्र 10^5 NC^{-1} है। उत्तर

(c) गोले के केन्द्र से बिन्दु की दूरी

$$= x = 18 \text{ cm} = 0.18 \text{ m}$$

$$\therefore E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{x^2}$$

$$\therefore E = 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2 \text{ C}^{-2} \times \frac{16 \times 10^{-7} \text{ C}}{(0.18 \text{ m})^2}$$

$$\text{या } E = \frac{14.4 \times 10^2}{3.24 \times 10^{-2}} \text{ NC}^{-1}$$

$$\text{या } E = 4.44 \times 10^4 \text{ NC}^{-1}$$

$$\text{या } E = 4.4 \times 10^4 \text{ NC}^{-1}$$

अतः गोले के केन्द्र से 18 cm पर विद्युत क्षेत्र $4.4 \times 10^4 \text{ NC}^{-1}$ है। उत्तर

प्रश्न 2.5. एक समान्तर पट्टिका संधारित्र, जिसकी पट्टिकाओं के बीच वायु है, की धारिता 8 pF ($1 \text{ pF} - 10^{-12} \text{ F}$) है। यदि पट्टिकाओं के बीच की दूरी को आधा कर दिया जाए और इनके बीच के स्थान में 6 परावैद्युतांक का एक पदार्थ कर दिया जाए, तो इसकी धारिता क्या होगी?

हल : ∵ पट्टिकाओं के बीच वायु वाले समान्तर पट्टिका से संधारित्र की धारिता $C_0 = 8 \text{ pF}$

$$\text{या } C_0 = 8 \times 10^{-12} \text{ F}$$

माना प्रत्येक पट्टिका का क्षेत्रफल = A

तथा पट्टिकाओं के बीच दूरी = d

$$\text{इस प्रकार, } C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad \dots(i)$$

पट्टिकाओं के बीच परावैद्युत पदार्थ के साथ उनके बीच

$$\text{की दूरी } d' = \frac{d}{2}$$

$$\epsilon = \epsilon_0 K$$

C = संधारित्र की परावैद्युत पदार्थ की उपस्थिति में धारिता

$$\text{तथा } K = 6$$

$$\text{इस प्रकार, } C = \frac{\epsilon A}{d}$$

$$\text{या } C = \frac{\epsilon_0 K A}{\left(\frac{d}{2}\right)}$$

$$\text{या } C = 2K \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad \dots(ii)$$

समीकरण (ii) को समीकरण (i) से भाग देने पर,

$$\frac{C}{C_0} = 2K$$

$$\text{या } C = 2KC_0$$

$$\text{या } C = 2 \times 6 \times 8 \times 10^{-12} \text{ F}$$

$$\text{या } C = 96 \times 10^{-12} \text{ F}$$

$$\text{या } C = 96 \text{ pF}$$

अतः अभीष्ट धारिता = 96 pF उत्तर

प्रश्न 2.6. 9 pF धारिता वाले तीन संधारित्रों को श्रेणीक्रम में जोड़ा गया है :

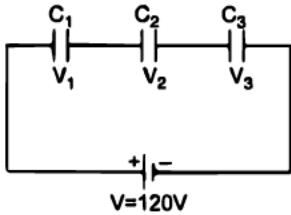
(a) संयोजन की कुल धारिता क्या है?

(b) यदि संयोजन को 120 V के संभरण (सप्लाई) से जोड़ दिया जाए, तो प्रत्येक संधारित्र पर क्या विभवांतर होगा?

हल : ∵ प्रत्येक संधारित्र की धारिता

$$C_1 = C_2 = C_3 = 9 \text{ pF} = 9 \times 10^{-12} \text{ F}$$

$$\text{संभरण विभव } V = 120 \text{ V}$$



(a) श्रेणी संयोजन की धारिता $= C_s$

श्रेणी संयोजन में कुल धारिता

$$\therefore \frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

$$\therefore \frac{1}{C_s} = \frac{1}{9 \times 10^{-12}} + \frac{1}{9 \times 10^{-12}} + \frac{1}{9 \times 10^{-12}}$$

$$\text{या } \frac{1}{C_s} = \frac{1+1+1}{9 \times 10^{-12}}$$

$$\text{या } \frac{1}{C_s} = \frac{1}{3 \times 10^{-12}}$$

$$\text{या } C_s = 3 \times 10^{-12} \text{ F} = 3 \text{ pF}$$

अतः संयोजन की कुल धारिता $= 3 \text{ pF}$ उत्तर

(b) माना संधारित्रों के विभव क्रमशः V_1, V_2 तथा V_3

हैं।

$$V_1, V_2 \text{ तथा } V_3 \text{ का योग } = V_1 + V_2 + V_3 = 120 \text{ V}$$

माना प्रत्येक संधारित्र पर q आवेश है, तब

$$q = CV \text{ से,}$$

$$V_1 = \frac{q}{C_1}$$

$$\text{इसी प्रकार, } V_2 = \frac{q}{C_2}$$

$$\text{तथा } V_3 = \frac{q}{C_3}$$

$$\therefore \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \frac{q}{C_3} = 120$$

$$[\because V_1 + V_2 + V_3 = 120 \text{ V}]$$

$$\text{या } q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) = 120 \text{ V}$$

$$\text{या } \frac{q}{3 \times 10^{-12}} = 120 \text{ V}$$

$$\text{या } q = 120 \times 3 \times 10^{-12} \text{ C}$$

$$\text{या } q = 360 \times 10^{-12} \text{ C}$$

$$\text{या } q = 0.36 \mu\text{C}$$

$$\therefore V_1 + V_2 + V_3 = \frac{q}{C}$$

$$\text{तथा } V_1 = V_2 = V_3$$

$$\therefore V_s = \frac{q}{C}$$

$$\text{या } V_s = \frac{360 \times 10^{-12} \text{ C}}{9 \times 10^{-12} \text{ F}}$$

$$\text{या } V_s = 40 \text{ V}$$

अतः प्रत्येक संधारित्र पर विभवान्तर होगा $= 40 \text{ V}$ उत्तर

प्रश्न 2.7. 2 pF, 3 pF और 4 pF धारिता वाले तीन संधारित्र पार्श्वक्रम में जोड़े गए हैं।

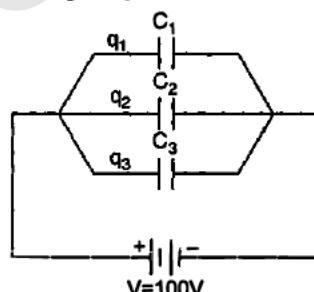
(a) संयोजन की कुल धारिता क्या है?

(b) यदि संयोजन को 100 V के संभरण से जोड़ दें, तो प्रत्येक संधारित्र पर आवेश ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल : } \therefore C_1 = 2 \text{ pF} = 2 \times 10^{-12} \text{ F}$$

$$C_2 = 3 \text{ pF} = 3 \times 10^{-12} \text{ F}$$

$$\text{तथा } C_3 = 4 \text{ pF} = 4 \times 10^{-12} \text{ F}$$



संयोजन को दिया गया विभव $= V$

(a) $C_p =$ संयोजन (समांतर) की कुल धारिता

$$C_p = C_1 + C_2 + C_3$$

$$\text{या } C_p = (2 \times 10^{-12} + 3 \times 10^{-12} + 4 \times 10^{-12}) \text{ F}$$

$$\text{या } C_p = 9 \times 10^{-12} \text{ F}$$

$$\text{या } C_p = 9 \text{ pF}$$

अतः संयोजन की कुल धारिता $= 9 \text{ pF}$ उत्तर

(b) माना संधारित्र C_1, C_2 एवं C_3 पर आवेश क्रमशः q_1, q_2 तथा q_3 हैं।

$$\therefore q = CV \text{ तथा } V = 100 \text{ V}$$

$$\therefore q_1 = C_1 V$$

$$= 2 \times 10^{-12} F \times 100 V$$

$$= 2 \times 10^{-10} C$$

$$q_2 = C_2 V$$

$$= 3 \times 10^{-12} F \times 100 V$$

$$= 3 \times 10^{-10} C$$

तथा $q_3 = C_3 V$

$$= 4 \times 10^{-12} F \times 100 V$$

$$= 4 \times 10^{-10} C$$

अतः प्रत्येक संधारित्र पर आवेश क्रमशः $2 \times 10^{-10} C$, $3 \times 10^{-10} C$ तथा $4 \times 10^{-10} C$ हैं। उत्तर

प्रश्न 2.8. पट्टिकाओं के बीच वायु वाले एक समान्तर पट्टिका संधारित्र की प्रत्येक पट्टिका का क्षेत्रफल $6 \times 10^{-3} m^2$ तथा उनके बीच की दूरी $3 mm$ है। संधारित्र की धारिता को परिकलित कीजिए। यदि इस संधारित्र को $100 V$ के संभरण से जोड़ दिया जाए, तो संधारित्र की प्रत्येक पट्टिका पर कितना आवेश होगा?

हल : ∵ समान्तर पट्टिका संधारित्र की प्रत्येक पट्टिका का क्षेत्रफल, $A = 6 \times 10^{-3} m^2$

पट्टिकाओं के बीच दूरी = $3 mm = 3 \times 10^{-3} m$

तथा $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} C^2 N^{-1} m^{-2}$

माना पट्टिकाओं के बीच वायु के साथ समान्तर पट्टिका एवं संधारित्र की धारिता = C_0

$$\therefore C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

$$\therefore C_0 = \frac{8.854 \times 10^{-12} \times 6 \times 10^{-3}}{3 \times 10^{-3}} F$$

$$\text{या } C_0 = 17.708 \times 10^{-12} F$$

$$\text{या } C_0 = 17.708 pF$$

$$\text{या } C_0 = 18 pF$$

अतः पट्टिका संधारित्र की धारिता = $18 pF$ उत्तर

संधारित्र पर लगाया गया संभरण = $V_0 = 100 V$

संधारित्र की प्रत्येक पट्टिका पर आवेश = q_0

$$\therefore q_0 = C_0 V_0$$

$$\therefore q_0 = 17.708 \times 10^{-12} \times 100 C$$

$$\text{या } q_0 = 17.708 \times 10^{-10} C$$

$$\text{या } q_0 = 17.71 \times 10^{-10} C$$

$$\text{या } q_0 = 18 \times 10^{-9} C$$

अतः संधारित्र की प्रत्येक पट्टिका पर आवेश होगा $= 18 \times 10^{-9} C$ उत्तर

प्रश्न 2.9. प्रश्न 2.8 में दिए गए संधारित्र की पट्टिकाओं के बीच यदि $3 mm$ मोटी अधक की एक शीट (उत्तर) (परावैद्युतांक = 6) रख दी जाती है, तो स्पष्ट कीजिए कि क्या होगा, जब :

(a) विभव (वोल्टेज) संभरण जुड़ा ही रहेगा।

(b) संभरण को हटा लिया जाएगा।

हल : (a) संधारित्र की वायु माध्यम के साथ धारिता

$$= C_0$$

∴ पट्टिकाओं के बीच दूरी = $d = 3 \times 10^{-3} m$

अधक (माइक्रो) की पट्टी की मोटाई

$$= t = 3 \times 10^{-3} m = d$$

पट्टी का परावैद्युतांक $K = 6$

∴ पट्टिकाओं के बीच के स्थान को अधक की पट्टी पूर्ण रूप से घेर लेती है।

तथा संधारित्र की धारिता = C

$$\therefore C = KC_0$$

$$\text{या } C = 6 \times 18 \times 10^{-12} F$$

$$\text{या } C = 108 \times 10^{-12} F$$

$$\text{या } C = 108 pF$$

इस प्रकार, अधक की पट्टी रखने के पश्चात् संधारित्र की धारिता K गुना हो जाती है।

$$\therefore \text{संधारित्र पर विभव} = 100 V$$

संधारित्र में अधक की पट्टी के साथ उसके ऊपर आवेश

$$q' = CV$$

$$\text{या } q' = 108 \times 10^{-12} \times 100 C$$

$$\text{या } q' = 108 \times 10^{-8} C$$

$$\text{अतः } q' = K C_0 V$$

$$\text{या } q' = Kq$$

$$\text{या } q' = 6 \times 18 \times 10^{-9} C$$

$$\text{या } q' = 108 \times 10^{-8} C$$

अतः पट्टिकाओं पर आवेश वायु माध्यम आवेश का K गुना हो जाता है अर्थात् जब संभरण जुड़ा रहता है और अधक की पट्टी पास्थ्यम हो, तो आवेश बढ़ जाता है। उत्तर

(b) संधारित्र की अध्रक माध्यम के साथ धारिता

$$C = KC_0$$

$$\text{या } C = 108 \times 10^{-12} \text{ F}$$

$$\text{या } C = 108 \text{ pF}$$

जब संभरण को हटा दिया जाता है (या काट दिया जाता है) अर्थात् $V = 0$, तो संधारित्र की पट्टिकाओं पर विभवांतर $V'K$ गुना कम हो जाता है।

$$\text{या } V' = \frac{100}{6} \text{ V} = 16.67 \text{ V}$$

अब C 6 गुना हो जाता है।

इस प्रकार, यदि संभरण हटाने के बाद आवेश $= q_1$

$$\text{तब } q_1 = CV'$$

$$\text{या } q_1 = KC_0 \times \frac{100}{6}$$

$$\text{या } q_1 = 6 \times 18 \times 10^{-12} \times \frac{100}{6}$$

$$\text{या } q_1 = 18 \times 10^{-10} \text{ C}$$

$$\text{या } q_1 = 18 \times 10^{-9} \text{ C}$$

अतः संधारित्र पर आवेश अध्रक माध्यम के साथ उतना ही रहेगा, जितना कि वायु माध्यम के साथ था। उत्तर

प्रश्न 2.10. 12 pF का एक संधारित्र 50 V की बैटरी से जुड़ा है। संधारित्र में कितनी स्थिरवैद्युत ऊर्जा संचित होगी?

हल : ∵ संधारित्र की धारिता,

$$C = 12 \text{ pF}$$

$$\text{या } C = 12 \times 10^{-12} \text{ F}$$

∴ संधारित्र से जुड़े संभरण की वोल्टता $V = 50 \text{ V}$

माना संधारित्र में संग्रहीत स्थिर वैद्युत ऊर्जा = U

$$\therefore U = \frac{1}{2} CV^2$$

$$\therefore U = \frac{1}{2} \times 12 \times 10^{-12} \times (50)^2 \text{ J}$$

$$\text{या } U = 6 \times 2500 \times 10^{-12} \text{ J}$$

$$\text{या } U = 150 \times 10^{-10} \text{ J}$$

$$\text{या } U = 15 \times 10^{-8} \text{ J}$$

अतः संधारित्र में स्थिर वैद्युत ऊर्जा संचित होगी
 $= 15 \times 10^{-8} \text{ J}$

प्रश्न 2.11. 200 V संभरण (सल्लाइ) से एक 500 pF के संधारित्र को आवेशित किया जाता है। फिर इसको संभरण से वियोजित कर देते हैं तथा एक अन्य 600 pF वाले अनावेशित संधारित्र से जोड़ देते हैं। इस प्रक्रिया में कितनी ऊर्जा का ह्रास होता है?

हल : ∵ संधारित्र की धारिता

$$= C_1 = 600 \text{ pF}$$

$$= 600 \times 10^{-12} \text{ F}$$

$$= 6 \times 10^{-10} \text{ F}$$

$$\text{तथा } V_1 = \text{संभरण वोल्टता} = 200 \text{ V}$$

$$\text{माना आरप्सिक संग्रहीत स्थिर वैद्युत ऊर्जा} = U_1$$

$$\text{तब } U = \frac{1}{2} CV^2$$

$$\therefore U_1 = \frac{1}{2} C_1 V_1^2$$

$$\text{या } U_1 = \frac{1}{2} \times 6 \times 10^{-10} \times (200)^2 \text{ J}$$

$$\text{या } U_1 = 12 \times 10^{-6} \text{ J}$$

$$\text{या } U_1 = 12 \mu\text{J}$$

$$\therefore \text{दूसरे संधारित्र की धारिता } C_2 = 600 \text{ pF}$$

$$= 6 \times 10^{-10} \text{ F}$$

$$\text{तथा दूसरे संधारित्र की धारिता } q_2 = 0$$

$$\text{पहले संधारित्र पर आवेश} = q_1 = C_1 V_1$$

$$\text{या } q_1 = 6 \times 10^{-10} \times 200 \text{ C}$$

$$\text{या } q_1 = 12 \times 10^{-8} \text{ C}$$

जब पहले संधारित्र को दूसरे अनावेशित संधारित्र से जोड़ दिया जाता है, तो आवेश दोनों संधारित्रों द्वारा बराबर बाँटा जाता है।

जोड़ने पर, यदि प्रत्येक संधारित्र पर आवेश = q

$$\text{तब } q = \frac{q_1 + q_2}{2}$$

$$\text{या } q = \frac{12 \times 10^{-8} + 0}{2} \text{ C}$$

$$\text{या } q = 6 \times 10^{-8} \text{ C}$$

यदि C_1 पर अंतिम स्थिर वैद्युत ऊर्जा रह जाती है = U_2

$$\text{तब } U_2 = \frac{1}{2} \times \frac{q^2}{C}$$

अतिरिक्त प्रश्न

या $U_2 = \frac{1}{2} \times \frac{(6 \times 10^{-8})^2}{6 \times 10^{-10}}$

या $U_2 = 3 \times 10^{-6} \text{ J}$

या $U_2 = 3 \mu\text{J}$

यदि प्रक्रम में ऊर्जा हास = U

तब $U = U_1 - U_2$

$\therefore U = 12 \times 10^{-6} \text{ J} - 6 \times 10^{-6} \text{ J}$

या $U = 6 \times 10^{-6} \text{ J}$

अतः इस प्रक्रिया में ऊर्जा का हास होता है
 $= 6 \times 10^{-6} \text{ J}$ उत्तर

द्वितीय विधि—

$$V_1 = \frac{1}{2} C_1 V_1^2$$

या $V_1 = \frac{1}{2} \times 6 \times 10^{-10} \times (200)^2 \text{ J}$

या $V_1 = 12 \times 10^{-6} \text{ J}$

तथा $C_2 = 6 \times 10^{-10} \text{ F}$ एवं $V_2 = 0$

माना सम्मिलित विभव = V

$$\therefore V = \frac{C_1 V_1 + C_2 V_2}{C_1 + C_2}$$

या $V = \frac{6 \times 10^{-10} \times 200 + 6 \times 10^{-10} \times 0}{6 \times 10^{-10} + 6 \times 10^{-10}} \text{ V}$

या $V = \frac{12 \times 10^{-8}}{12 \times 10^{-10}}$

या $V = 100 \text{ V}$

यदि अंतिम वैद्युत ऊर्जा = U_2 , तब

$$U_2 = \frac{1}{2} (C_1 + C_2) V^2$$

या $U_2 = \frac{1}{2} \times (6 \times 10^{-10} + 6 \times 10^{-10}) \times (100)^2 \text{ J}$

या $U_2 = 6 \times 10^{-6} \text{ J}$

स्थिर वैद्युत ऊर्जा में हास = $U_1 - U_2$

$$= 12 \times 10^{-6} \text{ J} - 6 \times 10^{-6} \text{ J}$$

$$= 6 \times 10^{-6} \text{ J}$$

अतः इस प्रक्रिया में ऊर्जा का हास होता है

$$= 6 \times 10^{-6} \text{ J}$$

उत्तर

हल : ∵ मूल बिंदु O पर आवेश = $q = 8 \text{ mC}$
 $= 8 \times 10^{-3} \text{ C}$

R से होकर P से Q पर ले जाए जाने वाला आवेश
 $q_0 = -2 \times 10^{-9} \text{ C}$

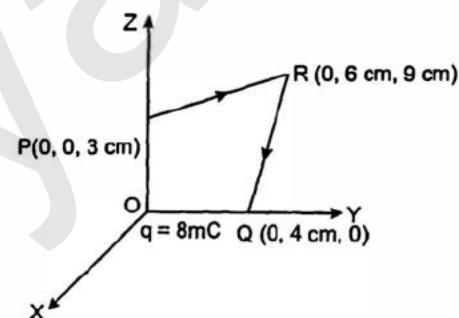
P की आरम्भिक स्थिति = $r_1 = 3\hat{k} \text{ cm}$

Q की अंतिम स्थिति = $r_2 = 4\hat{j} \text{ cm}$

$$r_1 = 3 \text{ cm} = 3 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$\text{तथा } r_2 = 4 \text{ cm} = 4 \times 10^{-2} \text{ m}$$

∴ स्थिरवैद्युत बल आरक्षी बल है।



∴ q_0 को ले जाने में किया गया कार्य पथ से स्वतन्त्र है।

अतः बिंदु R की कोई प्रासंगिकता नहीं है।

माना q_0 को P से Q पर ले जाने में किया गया कार्य = W_{PQ}

तब $W_{PQ} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_0 q \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$

∴ $W_{PQ} = 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2 \text{ C}^{-2} \times (-2 \times 10^{-9}) \text{ C}$

$$\times 8 \times 10^{-3} \text{ C} \left(\frac{1}{4 \times 10^{-2}} - \frac{1}{3 \times 10^{-2}} \right) \frac{1}{\text{m}}$$

या $W_{PQ} = -18 \times 8 \times 10^{-3} \times \left(\frac{10^2}{4} - \frac{10^2}{3} \right) \text{ J}$

या $W_{PQ} = -144 \times 10^{-3} \times 10^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) \text{ J}$

$$\text{या } W_{PQ} = -144 \times 10^{-3} \times 100 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) J$$

$$\text{या } W_{PQ} = -144 \times 10^{-1} \left(\frac{-1}{12} \right) J$$

$$\text{या } W_{PQ} = 12 J$$

अतः अभीष्ट कार्य = 12 J

उत्तर

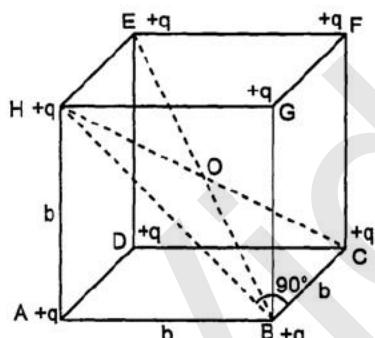
प्रश्न 2.13. b भुजा वाले एक घन के प्रत्येक शीर्ष पर q आवेश है। इस आवेश विन्यास के कारण घन के केन्द्र पर विद्युत-विभव तथा विद्युत क्षेत्र ज्ञात कीजिए।

हल : ∵ घन की भुजा = b

तथा घन के प्रत्येक शीर्ष पर आवेश = q

अब पृष्ठ $ABGH$ का विकर्ण = HB

$$\begin{aligned} &= \sqrt{AB^2 + AH^2} \\ &= \sqrt{b^2 + b^2} \\ &= b\sqrt{2} \end{aligned}$$



घन का विकर्ण

$$\begin{aligned} HC &= \sqrt{HB^2 + BC^2} \\ &= \sqrt{b^2 + b^2 + b^2} \\ &= b\sqrt{3} \\ HO &= OC = \frac{b\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

इसी प्रकार,

$$OA = OB = OE = OG = OF = OD = \frac{\sqrt{3}}{2} b$$

अर्थात् घन के प्रत्येक शीर्ष की उसके केन्द्र से दूरी $= \frac{\sqrt{3}}{2} b$ है।

अतः O से प्रत्येक आवेश की दूरी $= \frac{\sqrt{3}}{2} b$

माना O पर विद्युत विभव = V तथा विद्युत क्षेत्र E = ?

$$\therefore V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i}$$

$$\text{तथा } E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^2}$$

$$\therefore V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{OA} + \frac{q}{OB} + \frac{q}{OC} + \frac{q}{OD} + \frac{q}{OE} + \frac{q}{OF} + \frac{q}{OG} + \frac{q}{OH} \right]$$

$$\text{या } V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[q/\frac{b\sqrt{3}}{2} + q/\frac{b\sqrt{3}}{2} + \dots 8\text{ बार} \right]$$

$$\text{या } V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{8 \times 2q}{b\sqrt{3}}$$

$$\text{या } V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{16q}{b\sqrt{3}}$$

$$\text{या } V = \frac{4q}{\pi\epsilon_0 b\sqrt{3}}$$

$$\text{या } V = \frac{4q}{\sqrt{3}\pi\epsilon_0 b}$$

अतः O से प्रत्येक शीर्ष पर आवेश के कारण, विपरीत शीर्षों का विद्युत क्षेत्र परिणाम में समान; परन्तु दिशा में विपरीत है। जैसे A एवं F, B एवं E, C एवं H, D एवं G के क्षेत्र समान परन्तु विपरीत हैं।

अतः विद्युत विभव $\frac{4q}{\sqrt{3}\pi\epsilon_0 b}$ है तथा आवेशों की

सममिति के कारण O पर कुल विद्युत-क्षेत्र शून्य है। उत्तर

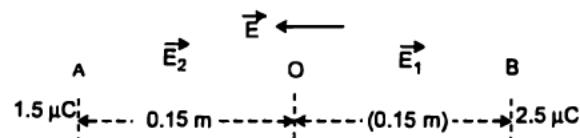
प्रश्न 2.14. $1.5\mu C$ और $2.5\mu C$ आवेश वाले दो सूक्ष्म गोले 30 cm दूर स्थित हैं।

(a) दोनों आवेशों को मिलाने वाली रेखा के मध्य बिंदु पर, और

(b) मध्य बिंदु से होकर जाने वाली रेखा के अधिलंब तल में मध्य बिंदु से 10 cm दूर स्थित किसी बिंदु पर विभव और विद्युत क्षेत्र ज्ञात कीजिए।

हल : ∵ $q_1 = 15\mu C = 15 \times 10^{-6} C$

तथा $q_2 = 25\mu C = 25 \times 10^{-6} C$



तथा दोनों आवेशों के बीच की दूरी
 $= r = 30\text{cm} = 0.30\text{m}$

माना रेखा AB का मध्य-बिन्दु O है।

(a) यदि आवेशों $15\mu C$ एवं $25\mu C$ के कारण O पर विभव क्रमशः V_1 एवं V_2 हैं, तब

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r}$$

$$V_1 = 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2 \text{ C}^{-2} \times \frac{15 \times 10^{-6} \text{ C}}{0.15 \text{ m}}$$

$$\text{या } V_1 = 9 \times 10^4 \text{ V}$$

$$\text{तथा } V_2 = 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2 \text{ C}^{-2} \times \frac{25 \times 10^{-6} \text{ C}}{0.15 \text{ m}}$$

$$\text{या } V_2 = 15 \times 10^4 \text{ V}$$

यदि दोनों आवेशों के कारण O पर कुल विभव = V

$$\text{तब } V = V_1 + V_2$$

$$\text{या } V = 9 \times 10^4 \text{ V} + 15 \times 10^4 \text{ V}$$

$$\text{या } V = 24 \times 10^4 \text{ V}$$

$$\text{या } V = 24 \times 10^5 \text{ V}$$

अब माना O पर कुल विद्युत क्षेत्र = E

यदि आवेश q_1 एवं q_2 के कारण O पर क्रमशः विद्युत क्षेत्र E_1 एवं E_2 हैं, तब

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$$

$$E_1 = 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2 \text{ C}^{-2}$$

$$\times \frac{15 \times 10^{-6} \text{ C}}{(0.15)^2 \text{ m}^2} \text{ OB के अनुदिश}$$

$$\text{तथा } E_2 = 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2 \text{ C}^{-2} \times \frac{25 \times 10^{-6} \text{ C}}{(0.15 \text{ m})^2}$$

OA के अनुदिश

$\therefore E_2 > E_1$ O पर कुल विद्युत क्षेत्र OA की ओर

$$E = E_2 - E_1$$

$$\text{या } E = 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2 \text{ C}^{-2} \times \frac{25 \times 10^{-6} \text{ C}}{(0.15)^2 \text{ m}^2}$$

$$- 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2 \text{ C}^{-2} \times \frac{15 \times 10^{-6} \text{ C}}{(0.15)^2 \text{ m}^2}$$

$$\text{या } E = \frac{9 \times 10^9 \times 10^{-6} \text{ Nm}^2 \text{ C}^{-2}}{(0.15 \text{ m})^2} (25 - 15) \text{ C}$$

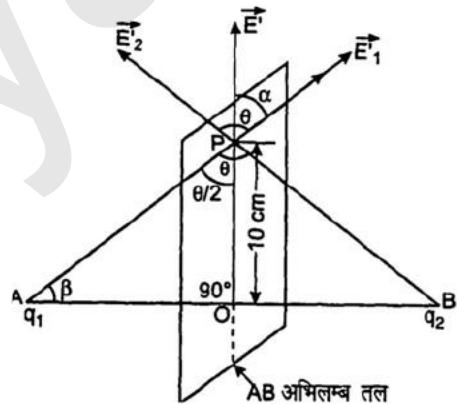
$$\text{या } E = \frac{9 \times 10^3}{15 \times 15} \times 10^4 \times 10 \text{ NC}^{-1}$$

या $E = 4.0 \times 10^5 \text{ NC}^{-1}$ OA के अनुदिश q_1 की ओर

या $E = 4.0 \times 10^5 \text{ V m}^{-1}$, $25\mu C$ से $15\mu C$ की ओर।

अतः विभव = $2.4 \times 10^5 \text{ V}$ तथा कुल विद्युत क्षेत्र = $4.0 \times 10^5 \text{ V m}^{-1}$ और आवेश $2.5\mu C$ से $1.5\mu C$ तक है।

(b) माना O में से जाने वाले AB पर अभिलम्ब तल में O से 10cm दूर बिन्दु P है।



$$AO = OB = 0.15 \text{ m}$$

$$\text{तथा } OP = 10 \text{ cm} = 0.10 \text{ m}$$

माना P पर कुल विभव = V'

समकोण त्रिभुज AOP में,

$$AP = \sqrt{AO^2 + OP^2}$$

$$\text{या } AP = \sqrt{[(0.15)^2 + (0.10)^2]} \text{ m}$$

$$\text{या } AP = 0.18 \text{ m}$$

इसी प्रकार, BP = 0.18 m

$$\text{अब } V' = V_1 + V_2$$

$$\therefore V' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1}{AP} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2}{BP}$$

या $V' = 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2 \text{ C}^{-2}$

$$\times \frac{1.5 \times 10^{-6} \text{ C}}{0.18 \text{ m}} + 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2 \text{ C}^{-2} \times \frac{2.5 \times 10^{-6} \text{ C}}{0.18 \text{ m}}$$

$$\text{या } V' = \frac{9 \times 10^9 \text{ Nm}^2 \text{ C}^{-2}}{0.18} [15 + 2.5] \times 10^{-6} \text{ C}$$

$$\text{या } V' = \frac{9 \times 10^3 \times 4}{0.18} \text{ V}$$

$$V = 2 \times 10^5 \text{ V}$$

माना q_1 एवं q_2 के कारण P पर विद्युत क्षेत्र क्रमशः E_1 एवं E_2 है।

$$\text{तब } E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1}{AP^2} AP \text{ के अनुदिश}$$

$$\text{या } E_1 = 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2 \text{ C}^{-2} \times \frac{1.5 \times 10^{-6} \text{ C}}{(0.18)^2 \text{ m}^2}$$

$$\text{या } E_1 = 0.42 \times 10^6 \text{ NC}^{-1} AP \text{ के अनुदिश}$$

$$\text{तथा } E_2 = 9 \times 10^9 \times 10^9 \text{ Nm}^2 \text{ C}^{-2} \times \frac{2.5 \times 10^{-6} \text{ C}}{(0.18 \text{ m})^2}$$

$$\text{या } E_2 = 0.69 \times 10^6 \text{ NC}^{-1}$$

$$\therefore \angle APB = \theta$$

$$\therefore \angle APO = \frac{\theta}{2}$$

अब समकोण $\triangle AOP$ में,

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{OP}{AP} = \frac{0.10}{0.18}$$

$$\text{या } \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{5}{9} = 0.556$$

$$\therefore \frac{\theta}{2} = \cos^{-1}(0.556) = 56.25^\circ$$

$$\therefore \theta = 112.5^\circ$$

यदि q_1 एवं q_2 के कारण P पर परिणामी विद्युत क्षेत्र $= E$

$$\text{तब } R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \theta}$$

$$\therefore E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1 E_2 \cos \theta}$$

$$\text{या } E = \sqrt{(0.42 \times 10^6)^2 + (0.69 \times 10^6)^2 + 2 \times 0.42 \times 0.69 \times (-0.38) \times 10^{12} \text{ NC}^{-1}}$$

[$\because \cos(12.5^\circ) = -0.38$]

$$\text{या } E = 10^6 \sqrt{(0.42)^2 + (0.69)^2 - 2 \times 0.42 \times 0.69 \times 0.38 \text{ NC}^{-1}}$$

$$\text{या } E = 10^6 \sqrt{0.1764 + 0.4761 - 0.2202} \text{ NC}^{-1}$$

$$\text{या } E = 10^6 \sqrt{0.4323} \text{ NC}^{-1}$$

$$\text{या } E = 10^6 \times 0.658 \text{ NC}^{-1}$$

$$\text{या } E = 6.58 \times 10^5 \text{ NC}^{-1}$$

$$\text{या } E = 6.6 \times 10^5 \text{ NC}^{-1}$$

$$\text{या } E = 6.6 \times 10^5 \text{ V m}^{-1}$$

अब माना E से α कोण बनाता है।

$$\therefore \tan \alpha = \frac{E_2 \sin \theta}{E_1 + E_2 \cos \theta}$$

$$\text{या } \tan \alpha = \frac{0.69 \times 10^6 \times 0.9239}{0.42 \times 10^6 + 0.69 \times 10^6 \times (-0.38)}$$

[$\because \sin \theta = \sin 42.5^\circ = 0.9239$]

$$\text{या } \tan \alpha = \frac{0.64 \times 10^6}{(0.42 - 0.26) \times 10^6}$$

$$\text{या } \tan \alpha = \frac{0.64}{0.42 - 0.26}$$

$$\text{या } \tan \alpha = \frac{0.64}{0.16}$$

$$\text{या } \tan \alpha = 4$$

$$\alpha = \tan^{-1} 4 = 75.9^\circ$$

पुनः माना $\angle PAB = \beta$

तब समकोण त्रिभुज AOP में,

$$\beta + \frac{\theta}{2} = 90^\circ$$

$$\text{या } \beta = 90^\circ - \frac{\theta}{2}$$

$$\text{या } \beta = 90^\circ - 56.25^\circ \quad [\because \theta = 112.5^\circ]$$

$$\text{या } \beta = 33.75^\circ$$

$$\text{या } \beta = 33.8^\circ$$

AB रेखा से E द्वारा बनाया कोण $= \beta + \alpha$

$$= 33.8^\circ + 75.9^\circ = 109.7^\circ$$

तथा q_1 एवं q_2 को मिलाने वाली रेखा अर्थात् AB से E द्वारा बनाया कोण $= 180^\circ - 109.7^\circ = 70.3^\circ = 70^\circ$

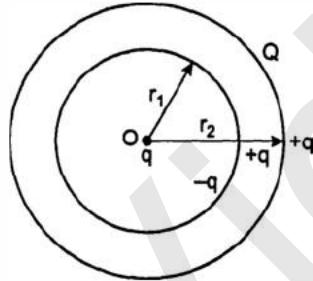
अतः विभव $= 2.0 \times 10^5 \text{ V}$ तथा नेट विद्युत क्षेत्र
 $= 6.6 \times 10^5 \text{ Vm}^{-1}$ और आवेश $2.5 \mu\text{C}$ से $1.5 \mu\text{C}$
 को मिलाने वाली रेखा से लगभग 70° के कोण की दिशा
 में है। उत्तर

प्रश्न 2.15. आंतरिक त्रिज्या r_1 तथा बाह्य त्रिज्या r_2 वाले एक गोलीय चालक स्रोत (कोश) पर Q आवेश है।

(a) खोल के केंद्र पर एक आवेश q रखा जाता है। खोल के भीतरी और बाहरी पृष्ठों पर पृष्ठ आवेश घनत्व क्या है?

(b) क्या किसी कोटर (जो आवेश विहीन है) में विद्युत क्षेत्र शून्य होता है, चाहे खोल गोलीय न होकर किसी भी अनियमित आकार का हो? स्पष्ट कीजिए।

हल : (a) चूँकि खोखले चालक को दिया गया आवेश चालक के पृष्ठ पर फैल जाता है और चालक के अंदर विद्युत क्षेत्र शून्य होता है।



इस प्रकार गोलीय खोखले गोले को दिया गया आवेश Q उसके बाहरी पृष्ठ पर फैल जाएगा। उसी खोखले गोले के केन्द्र पर अन्य आवेश q रखा जाता है और गोले की आंतरिक त्रिज्या r_1 है।

यह खोल के आंतरिक पृष्ठ पर $-q$ और बाह्य पृष्ठ पर $+q$ आवेश उत्प्रेरित करेगा, जो r_2 त्रिज्या गोले खोल के बाह्य पृष्ठ पर स्थानान्तरित हो जायेगा।

अतः बाह्य पृष्ठ पर कुल आवेश $Q+q$ होगा।

माना आंतरिक एवं बाह्य खोखले पृष्ठों के क्षेत्रफल क्रमशः A_1 एवं A_2 हैं।

$$\therefore A_1 = 4\pi r_1^2$$

$$\text{तथा } A_2 = 4\pi r_2^2$$

यदि $-q$ तथा $Q+q$ के कारण विद्युत क्षेत्र क्रमशः E_1 एवं E_2 हैं, तब

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r_1^2}$$

$$\text{तथा } E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q+q}{r_2^2}$$

माना खोल के आंतरिक एवं बाह्य पृष्ठों को आवेश घनत्व क्रमशः σ_1 तथा σ_2 हैं।

$$\therefore \sigma_1 = \epsilon_0 E_1$$

$$\text{या } \sigma_1 = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{q}{r_1^2}$$

$$\text{तथा } \sigma_2 = \epsilon_0 E_2$$

$$\text{या } \sigma_2 = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{Q+q}{r_2^2}$$

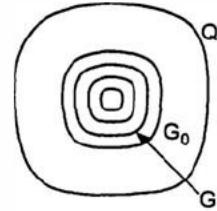
अतः खोल के भीतरी और बाहरी पृष्ठों पर पृष्ठ आवेश घनत्व क्रमशः $\frac{q}{4\pi r_1^2}$ और $\frac{(Q+q)}{4\pi r_2^2}$ हैं। उत्तर

(b) हाँ, गाउस के नियमानुसार,

$$\oint_E dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\therefore E = 0$$

किसी भी यादृच्छिक आकार के कोटर के लिए यह पर्याप्त नहीं है कि उसके लिए कोटर के अंदर $E=0$ की उपस्थिति को प्रस्तुत किया जाए, कोटर में समान ऋणात्मक तथा घनात्मक आवेश हो सकते हैं, जिससे कुल आवेश शून्य है।



अतः आवेश चालक के बाह्य पृष्ठ पर स्थित रहना चाहता है। यह परिणाम कोटर के आकार एवं आकृति से स्वतन्त्र है।

कोटर को घेरने वाले आंतरिक पृष्ठ, जिस पर कोई आवेश नहीं है, परन्तु गाउस के नियम से नेट आवेश शून्य होना चाहिए।

यादृच्छिक आकृति वाले कोटर के लिए पर्याप्त नहीं है कि यह दावा किया जाए कि उसके अन्दर विद्युत क्षेत्र शून्य होना चाहिए। कोटर पर ऋण एवं धन आवेश हो सकते हैं, जिससे कुल आवेश शून्य हो।

इस संभावना को समाप्त करने के लिए, एक बंद लूप लेते हैं, जिसका एक भाग क्षेत्र रेखाओं के अनुदिश कोटर में हो और शेष भाग चालक के अंदर हो।

चूँकि चालक के अंदर विद्युत क्षेत्र शून्य है।

यह बंद लूप पर एक परीक्षण आवेश को ले जाने में विद्युत क्षेत्र द्वारा किया गया नेट कार्य देता है।

किसी स्थिर वैद्युत क्षेत्र के लिए यह असंभव है।

अतः कोटर के अंदर क्षेत्र रेखाएँ नहीं हैं (अर्थात् कोई क्षेत्र नहीं) और चाहे उसकी कैसी भी आकृति हो चालक के भीतरी पृष्ठ पर कोई आवेश नहीं होगा। उत्तर

प्रश्न 2.16. (a) दर्शाइए कि आवेशित पृष्ठ के एक पाश्वर से दूसरे पाश्वर पर स्थिरवैद्युत क्षेत्र के अभिलंब घटक के असांतत्य होता है, जिसे

$$(E_2 - E_1) \cdot \hat{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

द्वारा व्यक्त किया जाता है, जहाँ \hat{n} एक बिंदु पर पृष्ठ के अभिलंब एकांक सदिश है तथा σ उस बिंदु पर पृष्ठ आवेश घनत्व है (\hat{n} की दिशा पाश्वर 1 से पाश्वर 2 की ओर है)।

अतः दर्शाइए कि चालक के ठीक बाहर विद्युत क्षेत्र σ/ϵ_0 है।

(b) दर्शाइए कि आवेशित पृष्ठ के एक पाश्वर से दूसरे पाश्वर पर स्थिरवैद्युत क्षेत्र का स्पर्शीय घटक संतत है।

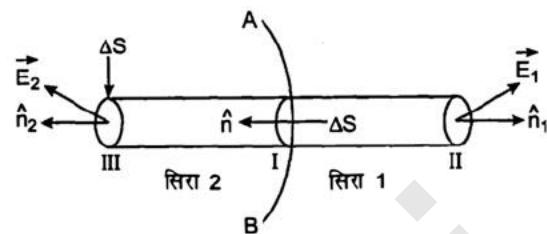
[संकेत : (a) के लिए गाउस-नियम का उपयोग कीजिए।

(b) के लिए इस सत्य का उपयोग करें कि संवृत पाश पर एक रिश्टर वैद्युत क्षेत्र द्वारा किया गया कार्य शून्य होता है।]

हल : (a) चित्रानुसार माना AB आवेशित पृष्ठ है, जिसके दो सिरे हैं। आवेशित पृष्ठ का एक छोटा-सा अवयव Δs बंद किए हुए बेलन गाउसीय पृष्ठ है।

माना $\sigma =$ पृष्ठीय आवेश घनत्व

गाउसीय बेलन द्वारा आवृत आवेश $= q = \sigma \Delta s$



गाउसीय नियम के अनुसार,

$$\oint_A dS \cdot \vec{E} = \oint_A dS \cdot \vec{E}_1 + \oint_A dS \cdot \vec{E}_2 + \oint_A dS \cdot \vec{E}_3$$

$$\text{या } \oint_A dS \cdot \vec{E} = \frac{\sigma \Delta S}{\epsilon_0}$$

$$\text{या } \oint_{II} dS \cdot \vec{E} + \oint_{III} dS \cdot \vec{E} = \frac{\sigma \Delta S}{\epsilon_0} \quad \left[\because \oint_I dS \cdot \vec{E} = 0 \right]$$

[∵ जब $\theta = 90^\circ$, ∴ $\cos \theta = 0^\circ$]

$$\text{या } E_1 \cdot \Delta s \hat{n}_1 + E_2 \cdot \Delta s \hat{n}_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Delta S$$

जहाँ $E_1 + E_2$ बेलन के भाग II एवं III है, जहाँ यह वृत्ताकार है, उस पर विद्युत क्षेत्र है।

$$\text{या } E_1 \cdot \hat{n}_1 + E_2 \cdot \hat{n}_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\text{या } E_1 \cdot (-\hat{n}_2) + E_2 \cdot (\hat{n}_2) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad [\because \hat{n}_1 = -\hat{n}_2]$$

$$\text{या } (E_2 - E_1) \cdot \hat{n}_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\text{या } (E_2 - E_1) \cdot \hat{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

(∵ $\hat{n}_1 = \hat{n}$ = एकांक सदिश 1 से 2 की ओर) ... (i)

∴ E_1 चालक के अंदर है।

∴ चालक के अंदर विद्युत क्षेत्र शून्य है।

$$\therefore E_1 = 0$$

समीकरण (i) से,

$$E_2 \cdot \hat{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\text{या } (E_1 \cdot \hat{n}) \cdot \hat{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$$

$$\text{या } E_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \hat{n} \quad [\because \hat{n} \cdot \hat{n} = 1]$$

अतः चालक के ठीक बाहर विद्युत क्षेत्र $= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \hat{n}$

इति सिद्धम्

(b) माना मूल पर बिन्दु आवेश q के क्षेत्र में $AaBb$ एक पृष्ठ है।

माना बिन्दु A तथा B के स्थिति सदिश क्रमशः r_A एवं r_B हैं।

माना बिन्दु P पर विद्युत क्षेत्र $= E$

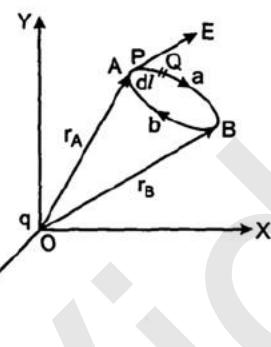
इस प्रकार, $E \cos \theta$, विद्युत क्षेत्र E का स्पर्शीय घटक है।

$$\therefore E \cdot Dl = E dl \cos \theta = (E \cos \theta) dl$$

यह सिद्ध करने के लिए कि आवेशित पृष्ठ एक ओर से दूसरी ओर $E \cos \theta$ संतत है।

हम $\oint E \cdot dl$ का मान ज्ञात करते हैं।

$AaBb$



यदि यह मान शून्य आता है, तो E का स्पर्शीय घटक संतत है।

$$\therefore \int_A^B E \cdot dl = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot q \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

$$\text{या } \int_B^A E \cdot dl = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot q \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

$$\therefore \int_{AaBbA}^{AaBbA} E \cdot dl = \int_B^A E \cdot dl + \int_B^A E \cdot dl$$

$$\text{या } \int_{AaBbA} E \cdot dl = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \cdot \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \times 0$$

$$= 0$$

अतः आवेशित पृष्ठ के एक पार्श्व से दूसरे पार्श्व पर स्थिर विद्युत क्षेत्र का स्पर्शीय घटक संतत है। इति सिद्धम्

प्रश्न 2.17. रैखिक आवेश घनत्व λ वाला एक लंबा आवेशित बेलन एक खोखले समाक्षीय चालक बेलन द्वारा घिरा है। दोनों बेलनों के बीच के स्थान में विद्युत क्षेत्र कितना है?

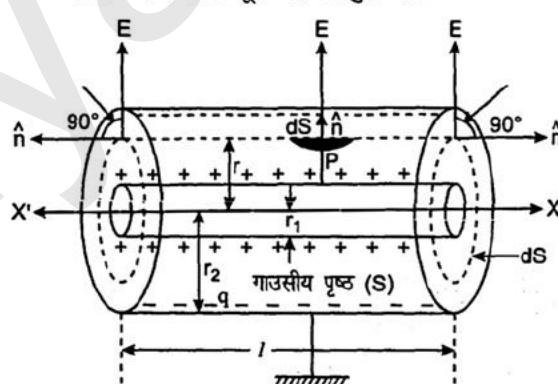
हल : दो समाक्षीय प्रत्येक / लम्बाई के दो खोखले बेलन बाह्य एवं आंतरिक त्रिज्या क्रमशः r_2 एवं r_1 ($r_2 > r_1$) को मानते हैं। आंतरिक बेलन रैखिक आवेश घनत्व λ से आवेशित है तथा r_2 त्रिज्या के बाह्य बेलन से घिरा है।

हमें दोनों बेलनों के बीच के स्थान में विद्युत क्षेत्र E ज्ञात करना है।

यदि आंतरिक बेलन पर q आवेश है, तब $q = \lambda l$ प्रेरण से खोखले बेलन पर $-q$ आवेश उत्प्रेरित होता है और इसके बाह्य पृष्ठ पर $+q$ आवेश उत्प्रेरित होता है, जो स्वयं प्राप्त होता है।

माना दोनों बेलनों के बीच के स्थान में, जिसमें E ज्ञात करना है,

XX' अक्ष से r दूरी पर बिन्दु P है।



लम्बाई l तथा r त्रिज्या का एक गाउसीय बेलन बनाते हैं। इसके पृष्ठ पर P बिन्दु स्थित हैं।

गाउसीय पृष्ठ पर आवेश $q = \lambda l$

बेलनीय समयिति के कारण बेलन के पृष्ठ के प्रत्येक बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र E एकसमान होगा।

इसके परिणाम में और बेलन पर खींचे अभिलम्ब दिशा में बाहर की ओर होंगे।

गाउसीय पृष्ठ के क्रोमीय पृष्ठ के क्षेत्रफल $q = 2\pi rl$

बिन्दु P पर क्रोमीय पृष्ठ के क्षेत्रफल का एक अवयव ds लेते हैं।

यदि dS में से विद्युत अभिवाह = $d\phi$
परिभाषानुसार,

$$d\phi = E \cdot dS$$

$$\text{या } d\phi = Eds \cos 0^\circ$$

$$\text{या } d\phi = EdS$$

[$\because E$ एवं $dS \hat{n}$ के अनुदिश हैं]

यदि सभी गाउसीय पृष्ठ में कुल विद्युत अभिवाह = ϕ ,
तब $\phi_1 = \int d\phi$
वक्र पृष्ठ

$$\text{या } \phi_1 = \oint_{2\pi rl} E \cdot dS$$

$$\text{या } \phi_1 = E \oint_{2\pi rl} dS$$

$$\text{या } \phi = 2\pi rlE$$

$\therefore E$ संपूर्ण गाउसीय पृष्ठ पर अचर है।

इसके अतिरिक्त माना गाउसीय पृष्ठ की दोनों टोपियों
में विद्युत अभिवाह = ϕ_2

$$\text{तब } \phi_2 = E \cdot dS + E \cdot dS$$

$$\text{या } \phi_2 = 2E \cdot dS$$

$$\text{या } \phi_2 = 2E \cdot \hat{n}dS = 0 \quad [\because E \perp \hat{n}]$$

यदि संपूर्ण गाउसीय पृष्ठ में से कुल विद्युत अभिवाह = ϕ

$$\text{तब } \phi = \phi_1 + \phi_2$$

$$\text{या } \phi = E \times 2\pi rl + 0$$

$$\text{या } \phi = 2E \times \pi rl$$

अब गाउस के नियमानुसार,

$$\phi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\text{या } 2E \times \pi rl = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

अतः $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$, जहाँ बेलनों के समाक्ष से बिंदु

की दूरी r है तथा क्षेत्र अक्ष के अभिलंब त्रिज्यीय है।

इति सिद्धम्

प्रश्न 2.18. एक हाइड्रोजन परमाणु में इलेक्ट्रॉन तथा प्रोटॉन लगभग 0.53 \AA दूरी पर परिबद्ध है :

(a) निकाय की स्थितिज ऊर्जा का eV में परिकलन कीजिए, जबकि प्रोटॉन से इलेक्ट्रॉन के मध्य की अनंत दूरी पर स्थितिज ऊर्जा को शून्य माना गया है।

(b) इलेक्ट्रॉन को स्वतंत्र करने में कितना न्यूनतम पार्टी करना पड़ेगा, यदि वह दिया गया है कि इसकी कक्षा में गतिज ऊर्जा (a) में प्राप्त स्थितिज ऊर्जा के परिमाण की आधी है?

(c) यदि स्थितिज ऊर्जा को 1.06 \AA पृथक्करण पर शून्य ले लिया जाए, तो उपर्युक्त (a) और (b) के उत्तर क्या होंगे?

हल : प्रोटॉन पर आवेश $q_1 = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$

इलेक्ट्रॉन पर आवेश = $q_2 = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$

तथा हाइड्रोजन परमाणु की त्रिज्या = r

$$= q_1 \text{ एवं } q_2 \text{ के बीच दूरी}$$

$$= 0.53 \text{ \AA}$$

$$= 0.53 \times 10^{-10} \text{ m}$$

(a) यदि विभव ऊर्जा को अनंत पृथक्कीकरण पर शून्य लिया जाए, तब

विभव ऊर्जा = विभवान्तर अनंता पर – विभवान्तर, r पर

$$= 0 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r}$$

$$= \frac{-9 \times 10^9 \times (1.6 \times 10^{-19})^2}{0.53 \times 10^{-10}} \text{ J}$$

$$= \frac{-9 \times 2.56 \times 10^9 \times 10^{-39}}{0.53 \times 10^{-10}} \text{ J}$$

$$= -\frac{23.04 \times 10^{-29}}{0.53 \times 10^{-10}} \text{ J}$$

$$= -43.47 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$= \frac{-43.47 \times 10^{-19}}{16 \times 10^{-19}} \text{ eV}$$

$$[\because 1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}]$$

$$= -27.17 \text{ eV}$$

$$= -27.2 \text{ eV}$$

अतः निकाय की स्थितिज ऊर्जा = -27.2 eV उत्तर

- (b) माना इलेक्ट्रॉन को स्वतंत्र करने के लिए अभीष्ट न्यूनतम कार्य = W

$$\therefore \text{कक्षा में गतिज ऊर्जा} = \frac{1}{2}$$

[भाग (a) की विभव ऊर्जा का परिमाण]

$$\therefore \text{गतिज ऊर्जा} = \frac{1}{2} \times (+27.2 \text{ eV})$$

$$= 13.6 \text{ eV}$$

[∴ संकाय की गतिज ऊर्जा सदैव धनात्मक होती है]

∴ इलेक्ट्रॉन को स्वतंत्र करने के लिए आवश्यक कार्य

$$= 0 - (-13.6 \text{ eV}) = 13.6 \text{ eV}$$

अतः इलेक्ट्रॉन को स्वतंत्र करने में न्यूनतम कार्य करना पड़ेगा = 13.6 eV उत्तर

(c) इलेक्ट्रॉन तथा प्रोटॉन के बीच पृथक्कीकरण की दूरी 106\AA पर विभव (स्थितिज ऊर्जा)

$$\begin{aligned} & -9 \times 10^9 \text{ Nm}^2 \text{ C}^{-2} \times 16 \times 10^{-19} \text{ C} \\ & \quad \times 16 \times 10^{-19} \text{ C} \\ & = \frac{-9 \times 10^9 \text{ Nm}^2 \text{ C}^{-2} \times 16 \times 10^{-19} \text{ C} \times 16 \times 10^{-19} \text{ C}}{106 \times 10^{-10} \text{ m}} \\ & = \frac{-9 \times 256 \times 10^{-29}}{106 \times 10^{-10}} \text{ J} \\ & = -9 \times 24 \times 10^{-19} \text{ J} \\ & = -13.58 \text{ eV} \\ & = -13.6 \text{ eV} \end{aligned}$$

अतः जब निकाय की विभव ऊर्जा 106\AA पर शून्य हो जाए, तब उसकी विभव स्थितिज ऊर्जा

$$\begin{aligned} & = -27.17 \text{ eV} - (-13.58 \text{ eV}) \\ & = -13.59 \text{ eV} \\ & = -13.6 \text{ eV} \end{aligned}$$

अतः विभव ऊर्जा के शून्य को स्थानान्तरित करने से इलेक्ट्रॉन को स्वतंत्र करने के लिए अभीष्ट ऊर्जा उतनी ही रहती है, जो $-(-13.6) \text{ eV} = +13.6 \text{ eV}$ है। उत्तर

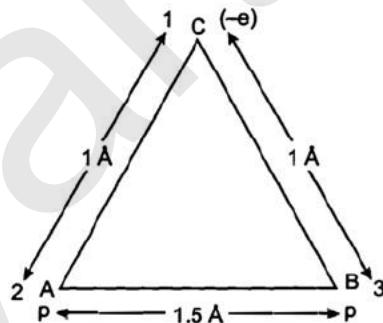
प्रश्न 2.19. यदि H_2^+ अणु के दो में से एक इलेक्ट्रॉन को हटा दिया जाए, तो हमें हाइड्रोजन आणविक आवन (H_2^+) प्राप्त होगा। (H_2^+) की निम्नतम अवस्था (ground state) में दो प्रोटॉनों के बीच की दूरी लगभग 1.5 \AA है और इलेक्ट्रॉन प्रत्येक प्रोटॉन से लगभग 1 \AA की दूरी पर है। निकाय की स्थितिज ऊर्जा ज्ञात कीजिए। स्थितिज ऊर्जा की शून्य स्थिति के चयन का उल्लेख कीजिए।

हल : ∴ इलेक्ट्रॉन पर आवेश = $q_1 = -16 \times 10^{-19} \text{ C}$

प्रत्येक प्रोटॉन पर आवेश = q_2

तथा $q_3 = +1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$

दो प्रोटॉनों अर्थात् q_2 तथा q_3 के बीच पृथक्कीकरण



$$r_{23} = 15 \text{ \AA}$$

$$r_{23} = 15 \times 10^{-10} \text{ m}$$

प्रोटॉन तथा इलेक्ट्रॉन का पृथक्कीकरण

$$= r_{12} = r_{13} = 1 \text{ \AA}$$

$$\text{या } r_{12} = 10^{-10} \text{ m}$$

यदि विभव ऊर्जा का शून्य अनंत पर लिया जाए, तब विभव (स्थितिज) ऊर्जा

$$\begin{aligned} & = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} \right] \\ & = 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2 \text{ C}^{-2} \left[\frac{-(16 \times 10^{-19})^2 \text{ C}^2}{10^{-10} \text{ m}} \right. \\ & \quad \left. + \frac{(16 \times 10^{-19})^2 \text{ C}^2}{15 \times 10^{-10} \text{ m}} + \frac{-(16 \times 10^{-19})^2 \text{ C}^2}{10^{-10} \text{ m}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 9 \times 10^9 \frac{(16 \times 10^{-19})^2}{10^{-10}} \left[-1 + \frac{1}{15} - 1 \right] \text{J} \\
 &= \frac{9 \times 10^9 \times (16 \times 10^{-19})^2}{10^{-10} \times 16 \times 10^{-19}} \left[\frac{2}{3} - 2 \right] \text{eV} \\
 &\quad [\because 1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}] \\
 &= \frac{9 \times 10^9 \times 16 \times 10^{-19}}{10^{-10}} \times \left(-\frac{4}{3} \right) \text{eV} \\
 &= -19.2 \text{ eV}
 \end{aligned}$$

विभव ऊर्जा का शून्य अनन्त पर लिया गया है।

अतः निकाय की स्थितिज ऊर्जा = -19.2 eV तथा स्थितिज ऊर्जा का शून्य अनन्त पर लिया गया है।

उत्तर

प्रश्न 2.20. a और b त्रिज्याओं वाले दो आवेशित चालक गोले एक तार द्वारा एक-दूसरे से जोड़े गए हैं। दोनों गोलों के पृष्ठों पर विद्युत क्षेत्रों में क्या अनुपात है? प्राप्त परिणाम को, यह समझने में प्रयुक्त कीजिए कि किसी एक चालक के तीक्ष्ण और नुकीले सिरों पर आवेश घनत्व, चपटे भागों की अपेक्षा अधिक क्यों होता है?

हल : ∵ चालक गोलों की त्रिज्याएँ $= a, b (a > b)$

a त्रिज्या के गोले पर आवेश $= q_1$

तथा b त्रिज्या के गोले पर आवेश $= q_2$

यदि a एवं b त्रिज्याओं के गोलों पर विभव क्रमशः V_1 तथा V_2 है, तब

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1}{a} \quad \dots(i)$$

$$\text{तथा } V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2}{b} \quad \dots(ii)$$

जब दोनों चालक गोलों को तार द्वारा आपस में जोड़ दिया जाता है, तो उनके विद्युत-विभव समान हो जाते हैं अर्थात्

$$\text{या } \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1}{a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2}{b}$$

$$\text{या } \frac{q_1}{a} = \frac{q_2}{b}$$

$$\text{या } \frac{q_1/a}{q_2/b} = 1 \quad \dots(iii)$$

अब यदि a एवं b त्रिज्याओं के गोलों के पृष्ठों पर विद्युत क्षेत्र क्रमशः E_1 एवं E_2 हों,

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1}{a^2} \quad \dots(iv)$$

$$\text{तथा } E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2}{b^2} \quad \dots(v)$$

समीकरण (iv) को समीकरण (v) से भाग करने पर,

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1}{a^2}}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2}{b^2}}$$

$$\text{या } \frac{E_1}{E_2} = \frac{q_1/a^2}{q_2/b^2}$$

$$\text{या } \frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{q_1}{a} \cdot \frac{1}{a}}{\frac{q_2}{b} \cdot \frac{1}{b}}$$

$$\text{या } \frac{E_1}{E_2} = \frac{b}{a} \cdot \frac{q_1/a}{q_2/b}$$

$$\text{या } \frac{E_1}{E_2} = \frac{b}{a} \times 1 \quad [\text{समीकरण (iii) से}]$$

$$\text{या } \frac{E_1}{E_2} = \frac{b}{a}$$

अतः पहले गोले से दूसरे चालक गोलों के क्षेत्रों का अनुपात $= \frac{b}{a}$

तीक्ष्ण भाग एक अधिक त्रिज्या के गोले के पृष्ठ को माना जा सकता है तथा नुकीला भाग एक छोटी त्रिज्या के गोले को माना जा सकता है।

$$\text{इसलिए } E \propto \frac{1}{\text{त्रिज्या}}$$

तीक्ष्ण भाग का क्षेत्र नुकीले भाग से कम होगा।

$$\therefore E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\therefore E \propto \sigma$$

अतः तीक्ष्ण एवं नुकीले भाग का पृष्ठ आवेश घनत्व अधिक होता है।

उत्तर

प्रश्न 2.21. बिंदु $(0, 0, -a)$ तथा $(0, 0, a)$ पर दो आवेश क्रमशः $-q$ और $+q$ स्थित हैं।

(a) बिंदुओं $(0, 0, z)$ और $(x, y, 0)$ पर स्थिरवैद्युत विभव क्या है?

(b) मूल बिंदु से किसी बिंदु की दूरी r पर विभव की निर्भरता ज्ञात कीजिए, जबकि $\frac{r}{a} \gg 1$ है।

(c) x -अक्ष पर बिंदु $(5, 0, 0)$ से बिंदु $(-7, 0, 0)$ तक एक परीक्षण आवेश को ले जाने में कितना कार्य करना होगा? यदि परीक्षण आवेश के उन्हीं बिंदुओं के बीच x -अक्ष से होकर न ले जाएँ, तो क्या उत्तर बदल जाएगा?

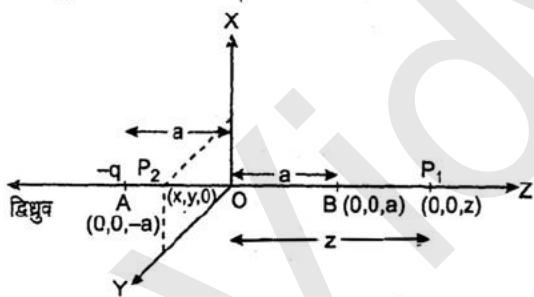
हल : (a) बिंदु $A(0, 0, -a)$ तथा $B(0, 0, a)$ पर आवेश क्रमशः $-q$ और $+q$ स्थित हैं।

विद्युत-द्विधृत की लम्बाई $= 2a$

यदि द्विधृत का वैद्युत द्विधृत आधूर्ण $= p$

तब $p = 2aq$

माना $P_1(0, 0, z)$ बिंदु पर V का मान ज्ञात करना है।
यदि द्विधृत की अक्षीय रेखा पर स्थित है।



$$\therefore V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(-q)}{AP} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{BP}$$

$$\text{या } V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z+a} \right]$$

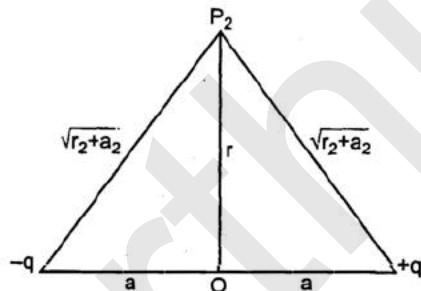
$$\text{या } V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{z+a-z+a}{(z-a)(z+a)} \right]$$

$$\text{या } V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2a}{z^2 - a^2}$$

$$\text{या } V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2aq}{(z^2 - a^2)}$$

$$\text{या } V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p}{(z^2 - a^2)}$$

अब बिंदु $P_2(x, y, 0)$, xy तल में स्थित है, जो द्विधृत अक्ष के अभिलम्ब है अर्थात् विषुवत् रेखा जिस पर द्विधृत के कारण विभव शून्य होता है, के समान्तर रेखा पर स्थित है।



$$\text{माना } OP_2 = r$$

$$\therefore r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

यदि P_2 पर विद्युत-विभव $= V'$

$$\text{तब } V' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-q}{\sqrt{r^2 + a^2}} + \frac{q}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right)$$

$$\text{या } V' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times 0$$

$$V' = 0$$

अतः द्विधृत के अक्ष पर विभव

$$= \pm \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p}{(x^2 - a^2)}$$

जहाँ $p = 2qa$ द्विधृत आधूर्ण का परिमाण है।

धनात्मक चिह्न उस समय जब बिंदु q के समीप है और ऋणात्मक चिह्न वहाँ, जहाँ बिंदु $-q$ के समीप है।

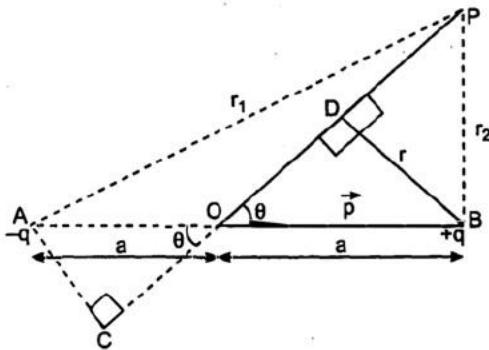
अतः अक्ष के अधितप्तवत् $(x, y, 0)$ बिंदु पर विभव शून्य है। उत्तर

(b) माना द्विधृत के केन्द्र O से बिंदु P , जहाँ विभव V ज्ञात करना है, की दूरी $= r$

माना $\angle POB = \theta$ अर्थात् OP, P से कोण θ बनाती है।

माना $-q$ एवं $+q$ से बिंदु P की दूरियाँ क्रमशः r_1 एवं r_2 हैं।

अब AC तथा BD को OP के लम्बवत् खींचते हैं।



$$\Delta ACO \text{ में, } OC = a \cos \theta$$

$$\text{तथा } \Delta BDO \text{ में, } OD = a \cos \theta$$

यदि आवेश $= -q$ तथा $+q$ के कारण P पर विभव क्रमशः V_1 एवं V_2 हैं, तब P पर कुल विभव

$$V = V_1 + V_2$$

$$\text{या } V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{-q}{AP} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{BP}$$

$$\text{या } V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-q}{r_1} + \frac{q}{r_2} \right] \quad \dots(i)$$

$$\text{जहाँ } r_1 = AP = CP = OP + OC = r + a \cos \theta$$

$$\text{तथा } r_2 = BP = DP = OP - OD = r - a \cos \theta$$

समीकरण (i) में r_1 एवं r_2 के मान रखने पर,

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{r - a \cos \theta} - \frac{q}{r + a \cos \theta} \right]$$

$$\text{या } V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(r + a \cos \theta) - (r - a \cos \theta)}{r^2 - a^2 \cos^2 \theta}$$

$$\text{या } V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2a \cos \theta}{r^2 - a^2 \cos^2 \theta}$$

$$\text{या } V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p \cos \theta}{r^2 - a^2 \cos^2 \theta} \quad [\because 2aq = p]$$

$$\text{जब } \frac{r}{a} \gg 0 \quad \text{या } r^2 \gg a^2 \cos^2 \theta \quad \text{जिसमें}$$

$a^2 \cos^2 \theta$ को नगण्य मान सकते हैं, तब

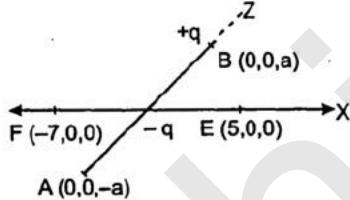
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p \cos \theta}{r^2} \quad \dots(ii)$$

अतः V की r पर निर्भरता $\frac{1}{r^2}$ प्रकार की है अर्थात्

$$V \propto \frac{1}{r^2}$$

उत्तर

(c) माना आवेश $+q (0, 0, a)$ और $-q (0, 0, -a)$ के क्षेत्र में बिंदु $E (5, 0, 0)$ से $F (-7, 0, 0)$ तक क्रमशः परीक्षण आवेश q_0 को ले जाने में किए गए कार्य W_1 एवं W_2 हैं।



$$\therefore BE = 5\hat{i} - a\hat{k} \text{ तथा } BF = -7\hat{i} - a\hat{k}$$

इसी प्रकार,

$$AE = 5\hat{i} + a\hat{k} \text{ तथा } AF = -7\hat{i} + a\hat{k}$$

$$AE = \sqrt{25+a^2} \text{ तथा } BF = \sqrt{49+a^2}$$

$$\text{या } BE = \sqrt{25+a^2} \text{ तथा } AF = \sqrt{49+a^2}$$

$$AE = \sqrt{25+a^2} \text{ तथा } AF = \sqrt{49+a^2}$$

$$\therefore W_{AB} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot q \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

$$\therefore W_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot q \left(\frac{1}{BF} - \frac{1}{BE} \right)$$

$$\text{या } W_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{49+a^2}} - \frac{1}{\sqrt{25+a^2}} \right)$$

$$\text{तथा } W_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot (-q) \left(\frac{1}{AF} - \frac{1}{AE} \right)$$

$$\text{या } W_2 = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{49+a^2}} - \frac{1}{\sqrt{25+a^2}} \right)$$

यदि कुल किया गया कार्य $= W$

$$\text{तब } W = W_1 + W_2$$

$$\text{या } W = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{49+a^2}} - \frac{1}{\sqrt{25+a^2}} - \frac{1}{\sqrt{49+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{25+a^2}} \right]$$

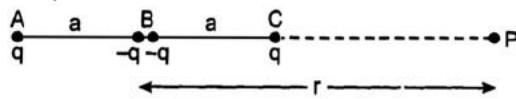
$$\text{या } W = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \times 0$$

$$\text{या } W = 0$$

नहीं, चौंक दो बिन्दुओं के बीच, किसी विद्युत क्षेत्र में किया गया कार्य, उनको मिलाने वाली रेखा से स्वतंत्र होता है।

अतः परीक्षण को किसी भी मार्ग से ले जाया जा सकता है। उत्तर

प्रश्न 2.22. नीचे दिये गये चित्र में एक आवेश विन्यास जिसे विद्युत चतुर्ध्रुवी कहा जाता है, दर्शाया गया है। चतुर्ध्रुवी के अक्ष पर स्थित किसी बिंदु के लिए r पर विभव की निर्भरता प्राप्त कीजिए, जहाँ $r/a \gg 1$ । अपने परिणाम की तुलना एक विद्युत द्विध्रुव व विद्युत एकल ध्रुव (अर्थात् किसी एकल आवेश) के लिए प्राप्त परिणामों से कीजिए।



हल : ∵ विद्युत चतुर्ध्रुवी A तथा C पर आवेशों $+q, +q$ तथा B पर आवेशों $-q$ और $-q$ से मिलकर बना है।

माना बिंदु B चतुर्ध्रुवी का केन्द्र है।

माना विद्युत चतुर्ध्रुवी के केन्द्र B से बिंदु P उसके अक्ष पर, r दूरी पर है।

$$\therefore AP = AB + BP$$

$$\text{या } AP = a + r$$

$$BP = r \text{ तथा } CP = BP - BC$$

$$\text{या } CP = r - a$$

माना चतुर्ध्रुवी के कारण बिन्दु P पर विद्युत विभव

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{q}{AP} + \frac{-q}{BP} + \frac{-q}{CP} + \frac{q}{CP} \right]$$

$$\text{या } V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{q}{r+a} - \frac{2q}{r} + \frac{q}{r-a} \right)$$

$$\text{या } V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{[r(r-a) - 2(r^2 - a^2) + r(r+a)]}{r(r^2 - a^2)}$$

$$\text{या } V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{[r^2 - ra - 2r^2 + 2a^2 + r^2 + ra]}{r(r^2 - a^2)}$$

$$\text{या } V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot q \cdot \frac{2a^2}{r(r^2 - a^2)}$$

$$\text{या } V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2q}{r} \cdot \frac{1}{\left(\frac{r^2}{a^2} - 1\right)} \quad \dots(i)$$

∴ r के लिए,

$$\frac{r}{a} \gg 1$$

$$\therefore \frac{r^2}{a^2} \gg 1$$

अतः 1 को नगण्य माना जा सकता है।

अब समीकरण (i) से,

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2q}{r} \cdot \frac{1}{\left(\frac{r^2}{a^2}\right)}$$

$$\text{या } V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2qa^2}{r^3}$$

$$\text{या } V \propto \frac{1}{r^3}$$

विद्युत द्विध्रुव की अक्षीय रेखा पर विद्युत-विभव

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{P}{r^2 - a^2}$$

जब $r \gg a$, तब

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{P}{r^2}$$

$$\text{या } V_1 \propto \frac{1}{r^2}$$

अतः एक एकल आवेश q के कारण अर्थात् एक ध्रुवी आवेश तथा r दूरी पर विभव

$$V' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r}$$

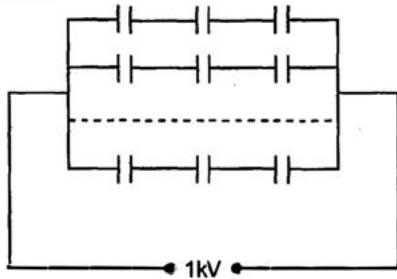
$$\text{या } V' \propto \frac{1}{r}$$

अतः अधिक या छड़े r के लिए चतुर्ध्रुवी के कारण विभव दूरी r के घन के व्युत्क्रमानुपाती जब एक द्विध्रुव के कारण दूरी r के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती तथा एक ध्रुवी के कारण दूरी r के व्युत्क्रमानुपाती होता है। उत्तर

प्रश्न 2.23. एक वैद्युत टैक्नीशियन को 1kV विभवांतर के परिपथ में $2\mu F$ संधारित्र की आवश्यकता है। $1\mu F$ के संधारित्र उसे प्रचुर संख्या में उपलब्ध हैं, जो 400V से अधिक का विभवांतर बहन नहीं कर सकते। कोई संभव विन्यास सुझाइए, जिसमें न्यूनतम संधारित्रों की आवश्यकता हो।

हल : माना टैक्नीशियन द्वारा उपयुक्त संधारित्रों की संख्या = N

माना उनको प्रत्येक n संधारित्रों वाली m पंक्तियों में लगाया गया है।



$$\therefore N = mn \quad \dots(i)$$

$$\text{प्रत्येक संधारित्र की धारिता} = C_1 = 1\mu\text{F}$$

$$\text{तथा संयोजन की अभीष्ट धारिता} = 2\mu\text{F} = C$$

$$\text{प्रत्येक संधारित्र पर अधिकतम विभवांतर} = 400\text{V}$$

सर्किट पर विभवांतर = 1000V = प्रत्येक पंक्ति पर विभवांतर

∴ जब संधारित्रों को श्रेणीक्रम में संयोजित किया जाता है, तब उन पर विभवांतर प्रत्येक पर विभवांतर का योग होता है।

$$\therefore \text{एक पंक्ति में } n \text{ संधारित्र} = 400 \times n$$

$$\therefore 400 \times n = 1000$$

$$\text{या} \quad n = \frac{1000}{400} = 2.5$$

चूंकि n पूर्णक होने चाहिए।

$$\therefore n = 3$$

$$\text{माना पंक्ति में संधारित्रों की कुल धारिता} = C$$

$$\therefore \frac{1}{C'} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 3$$

$$\text{या} \quad C' = \frac{1}{3}\mu\text{F}$$

ऐसे ही समान्तर क्रम में m पंक्तियों की कुल धारिता

$$C = m \times C'$$

$$\text{या} \quad m = \frac{C}{C'}$$

$$\text{या} \quad m = \frac{2\mu\text{F}}{\left(\frac{1}{3}\mu\text{F}\right)}$$

$$\text{या} \quad m = 2 \times \frac{3}{1} \mu\text{F}$$

$$\text{या} \quad m = 6\mu\text{F}$$

$$\therefore N = m \times n = 3 \times 6 = 18$$

अतः हमें कुल 18 संधारित्रों को 6 समान्तर पंक्तियों में इस प्रकार जोड़ना पड़ेगा कि प्रत्येक पंक्ति में 3 संधारित्र हों।

उत्तर

प्रश्न 2.24. 2F वाले समान्तर पट्टिका संधारित्र की पट्टिका का क्षेत्रफल क्या है, जबकि पट्टिकाओं का पृथक्कन 0.5 cm है? अपने उत्तर से आप यह समझ जाएँगे कि सामान्य संधारित्र μF या कम परिसर के क्यों होते हैं? तथापि विद्युत-अपघटन संधारित्रों (Electrolytic capacitors) की धारिता कहीं अधिक (0.1 F) होती है, क्योंकि चालकों के बीच अति सूक्ष्म पृथक्कन होता है।

हल : ∵ समान्तर पट्टिका संधारित्र की धारिता $= C = 2\text{F}$

इसकी पट्टिका के बीच पृथक्करण या वियोजन

$$d = 0.5\text{cm}$$

$$\text{या} \quad d = 5 \times 10^{-3} \text{m}$$

$$\text{माना पट्टिका का क्षेत्रफल} = A$$

$$\text{तथा} \quad \epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{C}^2 \text{N}^{-1} \text{m}^{-2}$$

$$\therefore C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

$$\therefore A = \frac{Cd}{\epsilon_0}$$

$$\text{या} \quad A = \frac{2 \times 5 \times 10^{-3} \text{Fm}}{8.854 \times 10^{-12} \text{C}^2 \text{N}^{-1} \text{m}^2}$$

$$\text{या} \quad A = 113 \times 10^9 \text{m}^2$$

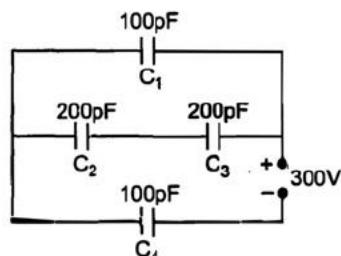
$$\text{या} \quad A = 1130 \times 10^6 \text{m}^2$$

$$\text{या} \quad A = 1130 \text{km}^2$$

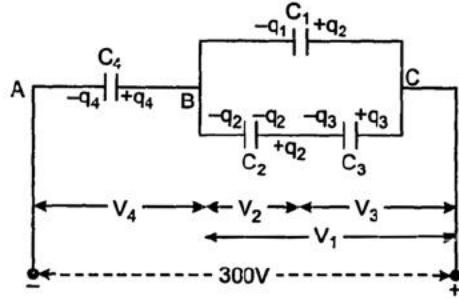
चूंकि यह क्षेत्रफल इतना बड़ा है कि इसे प्राप्त करना असंभव है। यही कारण है कि सामान्य संधारित्र 2F संधारिता से बहुत कम परिसर के होते हैं।

उत्तर

प्रश्न 2.25. चित्र के नेटवर्क (जाल) की तुल्य धारिता प्राप्त कीजिए। 300V संभरण (सप्लाई) के साथ प्रत्येक संधारित्र का आवेश व उसकी वोल्टता ज्ञात कीजिए।

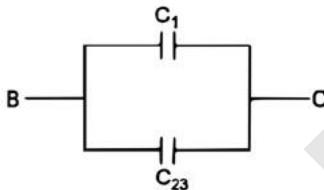


हल : माना जाल की तुल्य धारिता C है।
दिए गए जाल को निम्न चित्रानुसार पुनः बनाते हैं।



$$\therefore C_1 = C_4 = 100 \text{ pF} = 10^{-10} \text{ F}$$

तथा C_2 और C_3 श्रेणीक्रम में समायोजित हैं।
यदि श्रेणीक्रम में समायोजित C_2 एवं C_3 की तुल्य धारिता C_{23} है, तब



$$\frac{1}{C_{23}} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

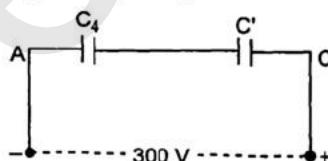
$$\text{या } \frac{1}{C_{23}} = \frac{1}{200} + \frac{1}{200}$$

$$\text{या } \frac{1}{C_{23}} = \frac{2}{200}$$

$$\text{या } \frac{1}{C_{23}} = \frac{1}{100}$$

$$\therefore C_{23} = 100 \text{ pF} = 10^{-10} \text{ F}$$

अब C_{23} एवं C_1 समान्तर समायोजन में हैं।
यदि C_{23} एवं C_1 की तुल्य धारिता C' है, तब



$$C' = C_{23} + C_1$$

$$\text{या } C' = 100 \text{ pF} + 100 \text{ pF}$$

$$\text{या } C' = 200 \text{ pF} = 2 \times 10^{-10} \text{ F}$$

अब C_4 तथा C' श्रेणीक्रम में हैं।

यदि C_4 और C' श्रेणी समायोजन की तुल्य धारिता C है, तब

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C'} + \frac{1}{C_4}$$

$$\text{या } \frac{1}{C} = \frac{1}{200} + \frac{1}{100}$$

$$\text{या } \frac{1}{C} = \frac{1+2}{200}$$

$$\text{या } \frac{1}{C} = \frac{3}{200}$$

$$\therefore C = \frac{200}{3} \text{ pF}$$

उत्तर

अब माना संधारित्रों C_1, C_2, C_3 तथा C_4 पर क्रमशः q_1, q_2, q_3 और q_4 आवेश हैं।

माना उन पर क्रमशः V_1, V_2, V_3 तथा V_4 विभव हैं।

अब चूंकि C' तथा C_4 श्रेणी क्रम में हैं।

इसलिए C' पर q_4 आवेश होगा।

$$\therefore C' \text{ पर विभव} = \frac{q_4}{C'}$$

$$\text{या } C' \text{ पर विभव} = \frac{q_4}{2 \times 10^{-10}} \text{ V}$$

$$\text{तथा } V_4 = C_4 \text{ पर विभव} = \frac{q_4}{C_4}$$

$$\text{या } V_4 = \frac{q_4}{10^{-10}} \text{ V}$$

अब C' और C_4 के श्रेणीक्रम पर 300V संधरण लगा है।

$\therefore C'$ पर विभवांतर $+C_4$ पर विभवांतर $= 300 \text{ V}$

$$\text{या } \frac{q_4}{2 \times 10^{-10}} + \frac{q_4}{10^{-10}} = 300$$

$$\text{या } \frac{q_4 + 2q_4}{2 \times 10^{-10}} = 300$$

$$\text{या } \frac{3q_4}{2 \times 10^{-10}} = 300$$

$$\therefore q_4 = \frac{300 \times 2 \times 10^{-10}}{3} \cdot C$$

$$\text{या } q_4 = 2 \times 10^{-8} C$$

$$\therefore V_4 = \frac{2 \times 10^{-8}}{10^{-10}} V \quad \left[\because V_4 = \frac{q_4}{10^{-10}} V \right]$$

(a) संधारित्र कितना स्थिरवैद्युत ऊर्जा संचित करता है?

$$\text{या} \quad V_4 = 2 \times 10^2 V$$

(b) इस ऊर्जा को पट्टिकाओं के बीच स्थिरवैद्युत क्षेत्र में संचित समझकर प्रति एकांक आयतन ऊर्जा u ज्ञात कीजिए। इस प्रकार, पट्टिकाओं के बीच विद्युत क्षेत्र E के परिमाण और u में सम्बन्ध स्थापित कीजिए।

$$\text{या} \quad V_4 = 200 V$$

$$C' \text{ पर विभवान्तर} = 300 V - V_4$$

$$= 300 V - 200 V$$

$$= 100 V$$

$$= C_1 \text{ या } C_{23} \text{ पर विभवान्तर}$$

$\because C_1$ तथा C_{23} समान्तर क्रम में हैं।

इस प्रकार, C_{23} पर विभवान्तर V

$$= C \text{ पर विभवान्तर} = C_1 \text{ पर विभवान्तर} = 100 V$$

$$\text{या} \quad V_1 = 100 V$$

$$\therefore q_1 = C_1 V_1$$

$$\text{या} \quad q_1 = 100 \times 10^{-12} \times 100 C$$

$$\text{या} \quad q_1 = 10^{-8} C$$

अब चूँकि C_2 तथा C_3 की धारिता समान है और यह श्रेणी क्रम में समायोजित है।

अतः प्रत्येक संधारित्र पर समान आवेश होना चाहिए।

$$\text{या} \quad q_2 = q_3$$

$$\text{या} \quad C_2 V_2 = C_3 V_3$$

$$\text{या} \quad V_2 = V_3 \quad [\because C_2 = C_3]$$

$$\text{तथा} \quad V_2 + V_3 = 100 V$$

$$\text{या} \quad V_2 + V_2 = 100$$

$$\text{या} \quad 2V_2 = 100 V$$

$$\therefore V_2 = \frac{100}{2} V$$

$$\text{या} \quad V_2 = 50 V$$

$$q_2 = q_3 = 200 \times 10^{-12} \times 50 C$$

$$= 10^{-8} C$$

$$\text{अतः} \quad q_1 = 10^{-8} C, q_2 = q_3 = 10^{-8} C,$$

$$q_4 = 2 \times 10^{-8} C, V_1 = 100 V,$$

$$V_2 = V_3 = 50 V$$

$$\text{तथा} \quad V_4 = 200 V \quad \text{उत्तर}$$

प्रश्न 2.26. किसी समान्तर पट्टिका संधारित्र की प्रत्येक पट्टिका का क्षेत्रफल 90 cm^2 है और उनके बीच पृथक्कन 2.5 mm है। 400 V संभरण से संधारित्र को आवेशित किया गया है।

हल : \because समान्तर पट्टिका संधारित्र की प्रत्येक पट्टिका का क्षेत्रफल $= A$

$$\therefore A = 90 \text{ cm}^2$$

$$\text{या} \quad A = 90 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$\text{पट्टिकाओं के बीच की दूरी} = d = 2.5 \text{ mm}$$

$$= 2.5 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$\text{तथा संभरण वोल्टता} = V = 400 V$$

$$(a) \text{ संधारित्र द्वारा संचित स्थिर वैद्युत ऊर्जा} = u$$

समान्तर पट्टिकाओं की धारिता $= C$

$$\therefore C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

$$\text{या} \quad C = \frac{8.854 \times 10^{-12} C^2 N^{-1} m^{-2} \times 90 \times 10^{-4} m^2}{2.5 \times 10^{-4} m^2}$$

$$\text{या} \quad C = \frac{7.97 \times 10^{-10}}{2.5} F$$

$$\text{या} \quad C = 3.186 \times 10^{-10} F$$

$$\therefore u = \frac{1}{2} C V^2$$

$$\therefore u = \frac{1}{2} \times 3.186 \times 10^{-11} F \times (400)^2 J \\ = 2.55 \times 10^{-6} J$$

अतः संधारित्र स्थिर वैद्युत ऊर्जा संचित करता है $= 2.55 \times 10^{-6} J$ उत्तर

(b) \because संधारित्र द्वारा संचित स्थिर वैद्युत ऊर्जा $= u$

$$\therefore u = \frac{1}{2} C V^2 \quad \dots(i)$$

इसे पट्टिकाओं के बीच संचित स्थिर वैद्युत क्षेत्र ऊर्जा मान सकते हैं।

समान्तर संधारित्र का आयतन

$$V = \text{पट्टिका का क्षेत्रफल} \times \text{पट्टिकाओं के बीच की दूरी}$$

$$= A \times d \quad \dots(ii)$$

संधारित्र के प्रति एकांक आयतन में संचित ऊर्जा, जिसे ऊर्जा घनत्व (σ) कहते हैं।

$$\therefore \sigma = \frac{\text{ऊर्जा}}{\text{आयतन}} = \frac{U}{V}$$

$$\text{या } \sigma = \frac{\frac{1}{2}CV^2}{Ad} \quad \dots(\text{iii})$$

$$\therefore C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

$$\text{तथा } V = \text{विभवांतर} = Ed \quad \dots(\text{iv})$$

= पट्टिकाओं के बीच विद्युत क्षेत्र का परिणाम \times दूरी समीकरणों (iii) एवं (iv) से,

$$\sigma = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon_0 A}{d} \right) \times (Ed)^2}{Ad}$$

$$\text{या } \sigma = \frac{1}{2} \times \frac{\epsilon_0 A}{d} \times \frac{E^2 d^2}{Ad}$$

$$\text{या } \sigma = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

जो σ एवं विद्युत क्षेत्र E के मध्य अभीष्ट सम्बन्ध है।

$$\therefore \sigma = \frac{\text{स्थिर वैद्युत ऊर्जा}}{\text{आयतन}} = \frac{U}{Ad}$$

$$\text{या } \sigma = \frac{2.55 \times 10^{-6}}{90 \times 10^{-4} \times 2.5 \times 10^{-3}} \text{ J m}^{-3}$$

$$\text{या } \sigma = \frac{2.55 \times 10^{-6}}{2.25 \times 10^{-5}} \text{ J m}^{-3}$$

$$\text{या } \sigma = 0.113 \text{ J m}^{-3}$$

$$\text{अतः } \sigma = 0.113 \text{ J m}^{-3} \quad \text{उत्तर}$$

प्रश्न 2.27. एक $4\mu\text{F}$ संधारित्र को 200 V संभरण (सप्लाई) से आवेशित किया गया है। फिर संभरण से हटाकर इसे एक अन्य अनावेशित $2\mu\text{F}$ के संधारित्र से जोड़ा जाता है। पहले संधारित्र की कितनी स्थिर वैद्युत ऊर्जा का ऊष्मा और वैद्युत चुम्बकीय विकिरण के रूप में हास होता है?

$$\text{हल : } \because C_1 = 4\mu\text{F} = 4 \times 10^{-6} \text{ F}$$

$$\text{तथा } V_1 = \text{संधारित्र से जुड़े संभरण का विभव} = 200\text{ V}$$

यदि C_1 द्वारा संचित प्रारम्भिक ऊर्जा = U_1

$$\text{तब } U_1 = \frac{1}{2} C_1 V_1^2$$

$$\text{या } U_1 = \frac{1}{2} \times 4 \times 10^{-6} \times (200)^2 \text{ J}$$

$$\text{या } U_1 = 8 \times 10^{-2} \text{ J}$$

जब $4\mu\text{F}$ का संधारित्र अनावेशित $2\mu\text{F}$ के संधारित्र से जोड़ा जाता है, तो संधारित्र समान्तर क्रम में होता है तथा तब तक उनमें आवेश घटता है, जब तक कि दोनों पर एक सम्प्रसित विभव नहीं हो जाता अर्थात् प्रत्येक संधारित्र पर समान विभवांतर हो जाता है।

\therefore संधारित्रों पर कुल आवेश

$$\begin{aligned} q &= C_1 V_1 + C_2 V_2 \\ &= 4 \times 10^{-6} \times 200\text{ C} + 0\text{ C} \\ &= 8 \times 10^{-4} \text{ C} \quad [\because q_2 = 0] \end{aligned}$$

माना दोनों संधारित्रों की कुल धारिता = C'

$$\begin{aligned} \therefore C' &= C_1 + C_2 \\ &= 4\mu\text{F} + 2\mu\text{F} = 6\mu\text{F} \\ &= 6 \times 10^{-6} \text{ F} \end{aligned}$$

यदि सम्प्रसित विभव = V = उभयनिष्ठ विभव, तब

$$V = \frac{\text{कुल आवेश}}{\text{कुल धारिता}}$$

$$\text{या } V = \frac{8 \times 10^{-4} \text{ C}}{6 \times 10^{-6} \text{ F}}$$

$$\text{या } V = \frac{800}{6} \text{ V} = \frac{400}{3} \text{ V}$$

यदि समायोजन में संचित अंतिम ऊर्जा = U_2

$$\text{तब } U_2 = \frac{1}{2} (C_1 + C_2) V^2$$

$$\text{या } U_2 = \frac{1}{2} \times 6 \times 10^{-6} \times \left(\frac{400}{3} \right)^2 \text{ J}$$

$$\text{या } U_2 = 3 \times 10^{-6} \times \frac{16 \times 10^4}{9} \text{ J}$$

$$\text{या } U_2 = 5.33 \times 10^{-2} \text{ J}$$

माना C , द्वारा ऊष्मा तथा वैद्युत-चुम्बकीय ऊर्जा के रूप में ऊर्जा हास = U

$$\text{तब } U = U_1 - U_2$$

$$= 8 \times 10^{-2} \text{ J} - 5.33 \times 10^{-2} \text{ J}$$

$$= 2.67 \times 10^{-2} \text{ J}$$

अतः C द्वारा ऊर्जा तथा विद्युत चुम्बकीय ऊर्जा के रूप में ऊर्जा ह्रास $= 2.67 \times 10^{-2} \text{ J}$ उत्तर

प्रश्न 2.28. दर्शाइए कि एक समान्तर पट्टिका संधारित्र की प्रत्येक पट्टिका पर बल का परिमाण $\frac{1}{2}QE$ है, जहाँ, Q संधारित्र पर आवेश है और E पट्टिकाओं के बीच विद्युत क्षेत्र का परिमाण है। घटक $\frac{1}{2}$ के मूल को समझाइए।

हल : माना समान्तर पट्टिका संधारित्र की पट्टिकाएँ P एवं P' हैं।

प्रत्येक पट्टिका का क्षेत्रफल $= A$

पट्टिकाओं के बीच की दूरी $= d$

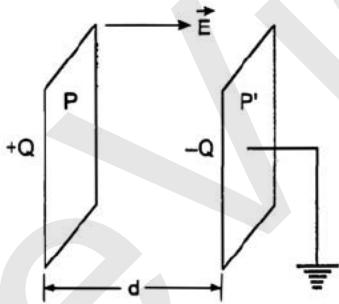
प्रत्येक पट्टिका पर आवेश परिणाम $= Q$

P से P' की ओर कार्यरत् विद्युत क्षेत्र का पट्टिकाओं के बीच परिणाम $= E$

माना पट्टिकाओं का पृष्ठ आवेश घनत्व $= \sigma$

$$\therefore E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \dots(1)$$

माना पट्टिकाओं के बीच आकर्षण के विपरीत पट्टिकाओं के बीच की दूरी को dx बढ़ा देते हैं।



यदि ऐसा करने में किया गया कार्य dW है, तब

$$dW = F dx \quad \dots(ii)$$

चूंकि किया गया यह कार्य संधारित्र की विभव ऊर्जा बढ़ता है।

इसलिए समान्तर पट्टिकाओं वाले संधारित्र की प्रति एकांक आयतन विभव ऊर्जा

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 \cdot E^2 \quad \dots(iii)$$

यदि समान्तर पट्टिका संधारित्र में पट्टिकाओं के बीच की दूरी d को dx द्वारा बढ़ाने पर उसकी विभव ऊर्जा du से बढ़ जाती है, तब

$$du = uA dx$$

$$\text{या } du = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 A dx$$

$$\text{या } du = \frac{1}{2} (\epsilon_0 E) (EA) dx$$

$$\text{या } du = \frac{1}{2} (\sigma AE) dx \quad \left[\because E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \right]$$

$$\text{या } du = \frac{1}{2} QE dx \quad \left[\because \sigma = \frac{Q}{A} \right] \quad \dots(iv)$$

समीकरणों (ii) एवं (iv) से,

$$Fd x = \frac{1}{2} QE dx$$

$$\text{या } F = \frac{1}{2} QE$$

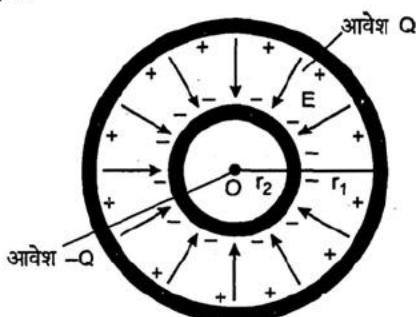
अतः घटक $\frac{1}{2}$ का भौतिक उदय इस बात में छिपा कि चालक के ठीक बाहर क्षेत्र E एवं अंदर शून्य होता है।

अतः विद्युत क्षेत्र का औसत मान अर्थात् $\frac{E}{2}$ बल में अपना योगदान करता है, जिसके विरुद्ध पट्टिकाओं को खिसकाया जाता है। उत्तर

प्रश्न 2.29. दो संकेद्री गोलीय चालकों जिनको उपयुक्त विद्युतरोधी आलंबों से उनकी स्थिति में रोका गया है, से मिलकर एक गोलीय संधारित्र बना है (चित्र)। दर्शाइए कि गोलीय संधारित्र की धारिता C इस प्रकार व्यक्त की जाती है :

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 r_1 r_2}{r_1 - r_2}$$

यहाँ r_1 और r_2 क्रमशः बाहरी तथा भीतरी गोलों की त्रिज्याएँ हैं।

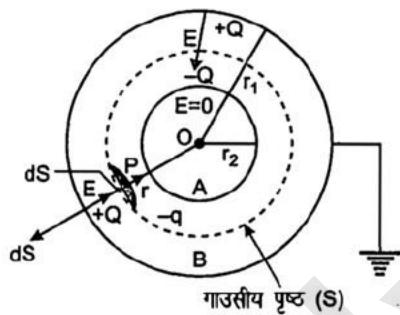


हल : एक गोलीय संधारित्र त्रिज्याओं r_1 एवं r_2 के दो समकेन्द्रीक खोखले गोलों A एवं B से मिलकर बना तब ($r_1 > r_2$) है, जिसका केन्द्र O है।

अब आंतरिक खोखले गोले A को $-Q$ आवेश दिया जाता है, तो खोल B के अतिरिक्त पृष्ठ पर $+Q$ एवं बाह्य पृष्ठ पर $-Q$ आवेश उत्पन्न होते हैं।

चूंकि खोल B को पृथक्षी से जोड़ा जाता है।

अतः $-Q$ आवेश उसमें चला जाता है। इसलिए B के बाह्य पृष्ठ पर इसका मान शून्य होता है तथा विद्युत क्षेत्र A के अंदर रहता है।



अर्थात् $r < r_2$ के लिए $E = 0$ और $r > r_1$ के लिए भी $E = 0$ है।

माना खोलों A एवं B के बीच केन्द्र O पर r त्रिज्या का गाउसीय पृष्ठ S खोचा गया है।

माना गाउसीय पृष्ठ पर बिन्दु P पर यदि विद्युत-क्षेत्र $= E$

$$\text{तब } E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \quad \dots(i)$$

त्रिज्यीय दिशा में अंदर की ओर कार्य करता है। इसके अतिरिक्त गाउसीय पृष्ठ के अंदर बंद आवेश $= -Q$

माना गाउसीय पृष्ठ के बिन्दु P पर एक क्षेत्रफल अवयव $= dS$

यदि dS में से विद्युत-अभिवाह $= d\phi$

$$\text{तब } d\phi = E \cdot dS$$

$$\text{या } d\phi = E \cdot dS \cos 180^\circ$$

$$\text{या } d\phi = -E \cdot dS$$

($\because E$ एवं dS के बीच 180° का कोण है।) ... (ii)

यदि संपूर्ण गाउसीय पृष्ठ में से विद्युत-अभिवाह $= \phi$,

$$\phi = \oint_S d\phi$$

$$\text{या } \phi = -\oint_S E \cdot dS$$

$$\text{या } \phi = -E \oint_S dS$$

$$\text{या } \phi = -E \cdot 4\pi r^2 \quad \dots(iii)$$

जहाँ $\oint_S dS = 4\pi r^2$ गाउसीय पृष्ठ का क्षेत्रफल है।

अब गाउस सिद्धान्त से,

$$\phi = \frac{-Q}{\epsilon_0}$$

$$\text{या } -E \cdot 4\pi r^2 = -\frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\text{या } E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \quad \dots(iv)$$

अब माना दो गोलीय खोलों A एवं B के बीच विभवांतर V है। यदि गोलीय संधारित्र की धारिता C है, तब

$$C = \frac{Q}{V} \quad \dots(v)$$

अब एक समांतर पट्टिका संधारित्र में पट्टिकाओं के बीच स्थान में विद्युत-क्षेत्र एकसमान E होता है तथा विभवांतर केवल Ed है, परन्तु गोलीय संधारित्र में दोनों गोलीय खोलों के बीच विद्युत क्षेत्र एकसमान नहीं होता तथा दूरी के साथ

$$E = \frac{dV}{dr}$$

$$\text{या } dV = Edr$$

इस प्रकार,

$$V = \int_A^B dV$$

$$\text{या } V = \int_A^B E \cdot dr$$

$$\text{या } V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r} \int_{r_2}^{r_1} r^{-2} dr$$

$$\text{या } V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{r^{-2+1}}{-2+1} \right]_{r_2}^{r_1}$$

$$\text{या } V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{-1}{r} \right]_{r_2}^{r_1}$$

$$\text{या } V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[-\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right]$$

$$\text{या } V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(r_1 - r_2)}{r_1 r_2} \quad \dots(\text{vi})$$

समीकरणों (v) और (vi) से,

$$C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{Q(r_1 - r_2)}{r_1 r_2}$$

$$\text{या } C = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2} \quad \text{इति सिद्धम्}$$

प्रश्न 2.30. एक गोलीय संधारित्र के भीतरी गोले की त्रिज्या 12 cm तथा बाहरी गोले की त्रिज्या 13 cm है। बाहरी गोला भू-संपर्कित है तथा भीतरी गोले पर $2.5\mu\text{C}$ का आवेश दिया गया है। संकेंद्री गोलों के बीच के स्थान पर 32 परावैद्युतांक का द्रव भरा है।

(a) संधारित्र की धारिता ज्ञात कीजिए।

(b) भीतरी गोले का विभव क्या है?

(c) इस संधारित्र की धारिता की तुलना एक 12 cm त्रिज्या वाले किसी वियुक्त गोले की धारिता से कीजिए। व्याख्या कीजिए कि गोले की धारिता इतनी कम क्यों हैं?

हल : ∵ आंतरिक गोले की त्रिज्या $= r_2$

$$\text{या } r_2 = 12\text{cm} = 12 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$\text{बाहरी गोले की त्रिज्या} = r_1$$

$$\text{या } r_1 = 13\text{cm} = 13 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$\text{आंतरिक गोले पर आवेश} = 2.5\mu\text{C} = 2.5 \times 10^{-6} \text{ C}$$

तथा दो गोलों के बीच भरे द्रव का परावैद्युतांक $= K = 32$ है।

(a) माना संधारित्र की धारिता $= C$

गोलीय संधारित्र की धारिता

$$C = 4\pi\epsilon_0 K \frac{r_1 r_2}{(r_1 - r_2)}$$

$$\text{या } C = 32 \times \frac{1}{9 \times 10^9 \text{ Nm}^2 \text{ C}^{-2}}$$

$$\times \frac{(13 \times 12)10^{-4} \text{ m}^2}{(13 - 12) \times 10^{-2} \text{ m}}$$

$$\text{या } C = \frac{32}{9 \times 10^9} \times \frac{156 \times 10^{-2} \times 10^{-2}}{1 \times 10^{-2}}$$

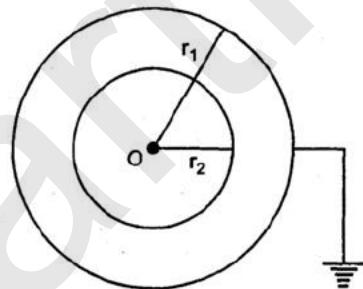
$$\text{या } C = 5.54 \times 10^{-9} \text{ F}$$

$$\text{या } C = 5.5 \times 10^{-9} \text{ F}$$

अतः संधारित्र की धारिता $= 5.5 \times 10^{-9} \text{ F}$ उत्तर

(b) माना आंतरिक गोले का विभव $= V$

चूंकि बाहरी गोले को पृथ्वी से जोड़ दिया गया है। इसलिए आंतरिक गोले का विभव ही दोनों गोलों के बीच विभवांतर है।



$$\therefore V = \frac{q}{C}$$

$$\text{या } V = \frac{2.5 \times 10^{-6} \text{ C}}{5.5 \times 10^{-9} \text{ F}}$$

$$\text{या } V = 454.5 \text{ V}$$

$$\text{या } V = 4.5 \times 10^2 \text{ V}$$

अतः भीतरी गोले का विभव $= 4.5 \times 10^2 \text{ V}$ उत्तर

(c) ∵ वियुक्त गोले की त्रिज्या $= r = 12\text{cm}$

$$\text{या } r = 12 \times 10^{-2} \text{ m}$$

माना वियुक्त गोले की धारिता $= C'$

$$\therefore C' = 4\pi\epsilon_0 r$$

$$\text{या } C' = \frac{12 \times 10^{-2}}{9 \times 10^9} \text{ F}$$

$$\text{या } C = 133 \times 10^{-11} \text{ F}$$

$$\therefore \frac{C}{C'} = \frac{5.547 \times 10^{-9} \text{ F}}{133 \times 10^{-11} \text{ F}}$$

$$= 4.17 \times 10^2 = 417$$

उत्तर

उत्तर

प्रश्न 2.31. सावधानीपूर्वक उत्तर दीजिए—

(a) दो बड़े चालक गोले जिन पर आवेश Q_1 और Q_2 हैं, एक-दूसरे के समीप लाए जाते हैं, क्या इनके बीच स्थिरवैद्युत बल का परिणाम तथ्यतः $\frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ द्वारा दर्शाया जाता है, जहाँ r इनके केन्द्रों के बीच की दूरी है।

(b) यदि कूलॉम के नियम में $1/r^3$ निर्भरता का समावेश ($1/r^2$ के स्थान पर) हो, तो क्या गाउस का नियम अभी भी सत्य होगा?

(c) स्थिर वैद्युत क्षेत्र विन्यास में एक छोटा परीक्षण आवेश किसी बिंदु पर विराम में छोड़ा जाता है। क्या यह उस बिंदु से होकर जाने वाली क्षेत्र रेखा के अनुदिश चलेगा?

(d) इलेक्ट्रॉन द्वारा एक वृत्तीय कक्षा पूरी करने में नाभिक के क्षेत्र द्वारा कितना कार्य किया जाता है? यदि कक्षा दीर्घवृत्ताकार हो, तो क्या होगा?

(e) हमें ज्ञात है कि एक आवेशित चालक के पृष्ठ के आर-पार वैद्युत क्षेत्र असंतत होता है। क्या वहाँ वैद्युत विभव भी असंतत होगा?

(f) किसी एकल चालक की धारिता से आपका क्या अभिप्राय है?

(g) एक संभावित उत्तर की कल्पना कीजिए कि पानी के परावैद्युतांक ($= 80$), अध्रक के परावैद्युतांक ($= 6$) से अधिक क्यों होता है?

हल : (a) दो आवेशों q_1 एवं q_2 के बीच स्थिर वैद्युत बल

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

जबकि दोनों आवेश q_1 एवं q_2 बिंदु आवेश हैं।

उपर्युक्त व्यंजक बड़े गोलीय चालकों के लिए सही नहीं है।

यह इसलिए है कि जब बड़े गोलों को निकट संपर्क में लाया जाता है, तो आवेश आबंटन एकसमान नहीं रहता।

उत्तर

(b) नहीं, यदि कूलम्ब के नियम की निर्भरता $\frac{1}{r^3}$ पर है,

तो गाउस का नियम लागू नहीं होता है।

उत्तर

(c) यदि E एकसमान है, तो बिन्दु पर रखा परीक्षण आवेश क्षेत्र रेखाओं के अनुदिश चलेगा तथा E के समान्तर यह छोटा परीक्षण आवेश सरल रेखा पर त्वरित होगा।

यह आवश्यक नहीं कि परीक्षण आवेश बिन्दु से गुजरने वाली क्षेत्र रेखा के अनुदिश चलेगा, क्योंकि साधारणतया क्षेत्र रेखा आवेश त्वरण न कि वेग की दिशा देती है। उत्तर

(d) दो बिन्दुओं के बीच एकांक परीक्षण आवेश को चलाने में किया गया कार्य विद्युत क्षेत्र में दोनों बिन्दुओं के बीच विद्युत-क्षेत्र के रेखा समाकलन द्वारा दिया जाता है।

$$\text{अर्थात् } \int_A^B E \cdot dI = W$$

चूंकि एक बंद पथ पर रेखा समाकलन शून्य होता है।

$$\text{अतः } \oint E \cdot dI = 0$$

इस प्रकार इलेक्ट्रॉन की संपूर्ण वृत्तीय कक्षा पर नाभिक द्वारा क्षेत्र में किया गया कार्य शून्य होगा, क्योंकि स्थिर-वैद्युत बल आरक्षी होता है, जो $\oint E \cdot dI = 0$ द्वारा प्रदर्शित है।

$$\text{अतः } W = 0$$

यही अंडाकार कक्षा के लिए सत्य है अर्थात् अण्डाकार कक्षा में $W = 0$ होता है।

(e) नहीं, किसी आवेशित चालक के पृष्ठ पर विभव असंतत नहीं होता है। वहाँ यह संतत है। E शून्य हो सकता है, परन्तु E स्थिर रहता है।

(f) एकल चालक की धारिता होती है। यह संधारित्र है, जिसकी एक पट्टिका अनंत पर है।

(g) पानी के अणु ध्रुवीय होते हैं, जबकि अध्रक के अध्रवीय, पानी के अणुओं में स्थायी द्विध्रुव आधूर्ण है।

अतः पानी का परावैद्युतांक, अध्रक आदि के परावैद्युतांक से कहीं अधिक होता है।

प्रश्न 2.32. एक बेलनाकार संधारित्र में 15 cm लम्बाई एवं त्रिज्याएँ 15 cm तथा 14 cm के दो समाक्ष बेलन हैं। बाहरी बेलन भू-संपर्कित है और भीतर बेलन को $3.5 \mu C$ का आवेश दिया गया है। निकाय की धारिता और भीतरी बेलन का विभव ज्ञात कीजिए। अंत्य प्रभाव (अर्थात् सिरों पर क्षेत्र रेखाओं का मुङ्ना) की उपेक्षा कर सकते हैं।

हल : ∵ समाक्षीय बेलन की लम्बाई = l

$$\therefore l = 15 \text{ cm} = 15 \times 10^{-2} \text{ m}$$

आंतरिक बेलन की त्रिज्या = a

$$\text{या } a = 14 \text{ cm} = 14 \times 10^{-2} \text{ m}$$

बाह्य बेलन की त्रिज्या = b

$$\text{या } b = 15\text{ cm} = 15 \times 10^{-2} \text{ m}$$

तथा आंतरिक बेलन पर आवेश = q

$$\text{या } q = 3.5\mu\text{C} = 3.5 \times 10^{-6} \text{ C}$$

माना निकाय की धारिता = C

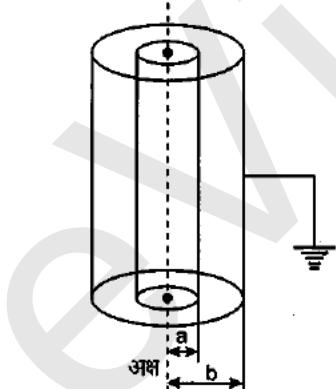
आंतरिक बेलन का विद्युत-विभव = V

बेलनाकार संधारित्र की धारिता

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{2.303 \log\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$$\begin{aligned} \text{या } C &= \frac{2 \times \frac{22}{7} \times 8.854 \times 10^{-12} \times 15 \times 10^{-2}}{2.303 \times \log\left(\frac{15 \times 10^{-2}}{14 \times 10^{-2}}\right)} \text{ F} \\ &= \frac{44 \times 8.854 \times 15 \times 10^{-14}}{7 \times 2.303 \times 0.03} \text{ F} \\ &= \frac{5.84 \times 10^{-12}}{0.48363} \text{ F} \\ &= 121 \times 10^{-10} \text{ F} \end{aligned}$$

अतः निकाय की धारिता = $12 \times 10^{-10} \text{ F}$ उत्तर
चूँकि बाह्य बेलन को पृथ्वी से जोड़ा गया है।



अतः आंतरिक बेलन का विद्युत-विभव दोनों बेलनों के बीच विभवांतर के बराबर होगा।

$$\therefore V = \frac{q}{C}$$

$$\therefore V = \frac{3.5 \times 10^{-6} \text{ C}}{121 \times 10^{-10} \text{ F}}$$

$$V = 2.89 \times 10^4 \text{ V}$$

$$\text{या } V = 2.9 \times 10^4 \text{ V}$$

अतः भीतरी बेलन का विभव = $2.9 \times 10^4 \text{ V}$ उत्तर

प्रश्न 2.33. 3 परावैद्युतांक तथा 10^7 Vm^{-1} की परावैद्युत सापर्य वाले एक पदार्थ से 1kV बोल्टता अनुपत्तांक के समांतर पट्टिका संधारित्र की अधिकतमा करनी है। परावैद्युत सापर्य वह अधिकतम विद्युत क्षेत्र है, जिसे कोई पदार्थ बिना भंग हुए अर्थात् आंशिक आयत्तन द्वारा बिना वैद्युत संचरण आरम्भ किए सहन कर सकता है। सुरक्षा की दृष्टि से क्षेत्र को कभी भी परावैद्युत सापर्य के 10% से अधिक नहीं होना चाहिए। 50 pF धारिता के लिए पट्टिकाओं का कितना न्यूनतम क्षेत्रफल होना चाहिए?

हल : ∵ पदार्थ का परावैद्युतांक $K = 3$

$$\text{निर्धारित विभव } V = 1\text{kV} = 10^3 \text{ V}$$

समांतर पट्टिका संधारित्र की धारिता

$$= C = 50 \text{ pF} = 50 \times 10^{-12} \text{ F}$$

$$\text{परावैद्युत शक्ति} = 10^7 \text{ Vm}^{-1} = E_{\max}$$

चूँकि विद्युत क्षेत्र शक्ति परावैद्युत के 10% से अधिक नहीं होनी चाहिए, तब

$$E = 10\% E_{\max}$$

$$\text{या } E = \frac{10}{100} \times 10^7 \text{ Vm}^{-1}$$

$$\text{या } E = 10^6 \text{ Vm}^{-1}$$

जहाँ E विद्युत क्षेत्र है।

माना संधारित्र आवेश सहन कर सकता है = q

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$$

संधारित्र की पट्टिका का अभीष्ट क्षेत्रफल = A

माना संधारित्र की पट्टिकाओं के बीच स्थान = d

$$\therefore E = \frac{V}{d}$$

$$\therefore d = \frac{V}{E}$$

$$\text{या } d = \frac{1000}{10^6} \text{ m}$$

$$\text{या } d = 10^{-3} \text{ m}$$

$$\text{या } q = C \times \text{निर्धारित विभव}$$

$$\begin{aligned} \text{या } q &= 50 \times 10^{-12} \text{ F} \times 10^3 \text{ V} \\ &= 5 \times 10^{-8} \text{ C} \end{aligned}$$

समान्तर पट्टिका वाले संधारित्र की धारिता:

$$C = \frac{\epsilon_0 K A}{d}$$

$$\therefore A = \frac{Cd}{\epsilon_0 K}$$

$$\text{या } A = \left(\frac{q}{V} \right) \frac{d}{\epsilon_0 K} \quad [\because q = CV]$$

$$\text{या } A = -\frac{qd}{\epsilon_0 KV}$$

$$\text{या } A = \frac{q}{\epsilon_0 K \left(\frac{V}{d} \right)}$$

$$\text{या } A = \frac{q}{\epsilon_0 KE} \quad \left[\because E = \frac{V}{d} \right]$$

q, ϵ_0, K एवं E के मान रखने पर,

$$A = \frac{5 \times 10^{-8} C}{8.854 C^2 N^{-1} m^{-2} \times 3 \times 10^6 V m^{-1}}$$

$$\text{या } A = 1.88 \times 10^{-4} m^2$$

$$\text{या } A = 1.88 cm^2$$

$$\text{या } A = 19 cm^2$$

अतः धारिता के लिए पट्टिकाओं का न्यूनतम क्षेत्रफल = $19 cm^2$ उत्तर

प्रश्न 2.34. व्यवस्थापकतः निम्नलिखित में संगत समविभव पृष्ठ का वर्णन कीजिए—

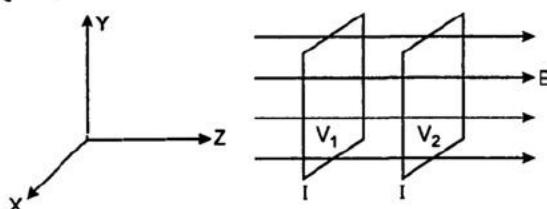
(a) z-दिशा में अचर विद्युत क्षेत्र,

(b) एक क्षेत्र जो एकसमान रूप से बढ़ता है, परन्तु एक ही दिशा (मान लीजिए z-दिशा) में रहता है।

(c) मूल बिंदु पर कोई एकल धनावेश, और

(d) एक समतल में समान दूरी पर समान्तर लम्बे आवेशित तारों से बने एकसमान जाल।

उत्तर : (a) z-दिशा में कार्यरूप स्थिर विद्युत-क्षेत्र के लिए सम-विभवतल सलग्न चित्रानुसार XY तल के समान्तर पृष्ठ होंगे।



(b) जब क्षेत्र एकसमान रूप से परिमाण में बढ़ता है और एक दिशा में (माना z-दिशा), तब समविभव पृष्ठ निश्चित विभवान्तर के अनुरूप, एक-दूसरे के निकट हो जाते हैं और XY तल के समान्तर होते हैं।

(c) मूल बिंदु पर एकल धनात्मक आवेश के लिए समविभव पृष्ठ मूल बिंदु के समकेन्द्रिक गोले होंगे, जिनका केन्द्र मूल बिंदु पर होगा।

(d) एक एकसमान जाली, जिसमें लम्बे समान्तर आवेशित समान दूरियों पर तार हों, का सम विभव जाली के निकट एक तल में समय-समय पर परिवर्ती आकृति में जाल के निकट होता है, जो धीरे-धीरे बहुत दूरी पर जाल के समान्तर पृष्ठों में बदल जाता है।

प्रश्न 2.35. किसी वान डे ग्राफ के प्रकार के जनित्र में एक गोलीय धातु कोश $15 \times 10^6 V$ का एक इलेक्ट्रोड बनाना है। इलेक्ट्रोड के परिवेश की गैस की परावैद्युत सामर्थ्य $5 \times 10^7 V m^{-1}$ है। गोलीय कोश की आवश्यक न्यूनतम त्रिज्या क्या है? (इस अभ्यास से आपको यह जान होगा कि एक छोटे गोलीय कोश से आप स्थिरवैद्युत जनित्र, जिसमें उच्च विभव प्राप्त करने के लिए कम आवेश की आवश्यकता होती है, नहीं बना सकते।)

हल : ∵ गोलीय कोश के कारण विभव = V

$$\text{या } V = 15 \times 10^6 V$$

आवेशित गोलीय कोश का विद्युत-क्षेत्र = E

$$\text{या } V = 5 \times 10^7 V m^{-1}$$

माना गोलीय कोश की त्रिज्या = r

तथा एक आवेशित कोश के कारण विद्युत-विभव एवं

विद्युत क्षेत्र

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r} \quad \dots(i)$$

$$\text{तथा } E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \quad \dots(ii)$$

जहाँ q = गोलीय कोश पर आवेश है।

समीकरण (i) को समीकरण (ii) से भाग करने पर,

$$\frac{V}{E} = r$$

$$\text{या } r = \frac{15 \times 10^6 V}{5 \times 10^7 V m^{-1}}$$

$$\text{या } r = 3 \times 10^{-1} m$$

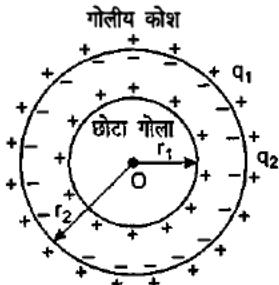
$$\text{या } r = 30 cm$$

अतः गोलीय कोश की आवश्यक न्यूनतम त्रिज्या
 $= 30 \text{ cm}$

उत्तर

प्रश्न 2.36. r_1 त्रिज्या तथा q_1 आवेश वाला एक छोटा गोला, r_2 त्रिज्या और q_2 आवेश के गोलीय खोल (कोश) से धिरा है। दर्शाइए यदि q_1 धनात्पक है, तो (जब दोनों को एक तार द्वारा जोड़ दिया जाता है) आवश्यक रूप से आवेश, गोले से खोल की तरफ ही प्रवाहित होगा, चाहे खोल पर आवेश q_2 कुछ भी हो।

हल : चूँकि r_2 और r_1 छोटे गोले और गोलीय खोल की क्रमशः त्रिज्याएँ हैं।



खोल गोले को घेरे हुए है।

$+q_1$ आवेश गोले पर है तथा $+q_2$ आवेश खोल पर। चूँकि आवेशित चालक के भीतर विद्युत क्षेत्र शून्य होता है।

गाउस के सिद्धान्त से,

$$\text{इसलिए } E = 0$$

$$\phi = \oint E \cdot dS$$

$$\text{या } \phi = \frac{q_2}{\epsilon_0}$$

[\because गोलीय खोल में $q_2 = 0$, $\therefore E = 0$ इसके अन्दर।]

चूँकि q_2 खोल के बाहरी पृष्ठ पर होना चाहिए।

अब $+q_1$ आवेश वाला गोला खोल के अन्दर बन्द है।

अतः खोल के आन्तरिक पृष्ठ पर $-q_1$ आवेश और बाहरी पृष्ठ पर $+q_1$ आवेश उत्प्रेरित होंगे।

$$\therefore \text{खोल के बाहरी पृष्ठ पर कुल आवेश} = q_2 + q_1$$

चूँकि आवेश सदैव बाहरी पृष्ठ पर रहता है।

इसलिए q_1 आवेश गोले के बाहरी पृष्ठ से खोल के बाहरी पृष्ठ की ओर उस समय प्रवाहित होगा, जब उन्हें तार से जोड़ते हैं।

उत्तर

प्रश्न 2.37. निम्न का उत्तर दीजिए—

(a) पृथ्वी के पृष्ठ के सापेक्ष वायुमण्डल की ऊपरी परत लगभग 400 kV पर है, जिसके संगत विद्युत क्षेत्र ऊँचाई बढ़ने के साथ कम होता है। पृथ्वी के पृष्ठ के समीप विद्युत क्षेत्र लगभग 100 V m^{-1} है। तब फिर जब हम घर से बाहर खुले में जाते हैं, तो हमें विद्युत आधात क्यों नहीं लगता? (घर को लोहे के पिंजरा मान लीजिए, अतः उसके अंदर कोई विद्युत क्षेत्र नहीं है!)

(b) एक व्यक्ति शाम के समय अपने घर के बाहर 2 m ऊँचा अवरोधी पट्ट रखता है, जिसके शिखर पर एक 1 m^2 क्षेत्रफल की बड़ी ऐलुमिनियम की चादर है। अगली सुबह वह यदि धातु के चादर को छूता है, तो क्या उसे विद्युत आधात लगेगा।

(c) वायु की थोड़ी-सी चालकता के कारण सारे संसार में औसतन वायुमण्डल में विसर्जन धारा 1800 A मानी जाती है। तब यथासमय वातावरण स्वयं पूर्णतः निरावेशित होकर विद्युत उदासीन क्यों नहीं हो जाता? दूसरे शब्दों में, वातावरण को कौन आवेशित रखता है?

(d) तड़ित के दौरान वातावरण की विद्युत ऊर्जा, ऊर्जा के किन रूपों में क्षयित होती है?

संकेत : पृष्ठ आवेश धनत्व = 10^{-9} cm^{-2} के अनुरूप पृथ्वी के (पृष्ठ) पर नीचे की दिशा में लगभग 100 V m^{-1} का विद्युत क्षेत्र होता है। लगभग 50 km ऊँचाई तक (जिसके बाहर यह अच्छा चालक है) वातावरण की थोड़ी-सी चालकता के कारण लगभग $+1800 \text{ C}$ का आवेश प्रति सेकण्ड समग्र रूप से पृथ्वी में पंप होता रहता है। यथापि, पृथ्वी निरावेशित नहीं होती, क्योंकि संसार में हर समय लगातार तड़ित तथा तड़ित झङ्गा होती रहती है, जो समान मात्रा में ऋणवेश पृथ्वी में पंप कर देती है।

उत्तर : (a) हमारा शरीर तथा पृथ्वी सम विभव पृष्ठ बन जाता है, जिसका अर्थ है कि पृथ्वी एवं शरीर का विभव एक ही होता है और उनमें कोई विभवान्तर नहीं होता है। इसलिए जब हम घर से बाहर खुले में आते हैं, तो बाहर की खुली वायु का प्रारम्भिक सम विभव पृष्ठ शरीर को इस प्रकार आवेशित करता है कि सिर तथा धरती एक ही विभव पर होती है। इस प्रकार शरीर में से कोई धारा प्रवाहित नहीं होती और इसीलिए हमें किसी विद्युत झटके का अनुभव नहीं होता है।

(b) हाँ, यदि वह धातु की पट्टी को अगली सुबह छूता है, तो बिजली का झटका लगेगा।

इसका कारण है कि एल्युमिनियम की पट्टी और पृथ्वी एक संधारित्र बनाती हैं, जिसमें अवरोधी पट्टी (स्लैब) एक परावैद्युत बनाती है। आवेश की नीचे की ओर वर्षा से एल्युमिनियम की पट्टी का विभव बढ़ जाता है अर्थात् 1800A की अनावेशित धारा द्वारा यह आवेशित हो जाती है, जो धारा वायुमण्डल से नीचे आ रही है। जब हम एल्युमिनियम की पट्टी को छूते हैं, तो धारा हमारे शरीर से होकर पृथ्वी में चली जाती है। यह आवेश प्रवाह एक विद्युत धारा बनाता है तथा हम झटका अनुभव करते हैं।

(c) सम्पूर्ण पृथ्वी पर लगातार वायुमण्डल तड़ित और झंझावतों से निरन्तर आवेशित होता रहता है तथा इससे सामान्य मौसम की स्थिति में सामंजस्य रहता है।

अतः वायुमण्डल वैद्युतीय रूप से तटस्थ नहीं रह सकता है।

(d) तड़ित के दौरान वायुमण्डल की विद्युत ऊर्जा प्रकाश, ऊषा तथा ध्वनि के रूप में बिजली कड़कने के साथ मिश्रित हो जाती है।