गणित

(पाठ – 3) (आव्यूह)

(कक्षा 12)

प्रश्नावली 3.1

प्रश्न 1:

आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 19 & -7 \\ 35 & -2 & \frac{5}{2} & 12 \\ \sqrt{3} & 1 & -5 & 17 \end{bmatrix}$, के लिए ज्ञात कीजिए:

(i) आव्यूह की कोटि **(ii)** अवयवों की संख्या **(iii)** अवयव $a_{13}, a_{21}, a_{33}, a_{24}, a_{23}$

उत्तर 1:

(i) आव्यूह की कोटि = पंक्तियों की संख्या × स्तंभों की संख्या = 3×4

(ii) अवयवों की संख्या = $3 \times 4 = 12$

(iii) अवयव $a_{13} = 19,\ a_{21} = 35, a_{33} = -5,\ a_{24} = 12, a_{23} = \frac{5}{2}$

प्रश्न 2:

यदि किसी आव्यूह में 24 अवयव हैं तो इसकी संभव कोटियाँ क्या हैं? यदि इसमें 13 अवयव हों तो कोटियाँ क्या होंगी?

उत्तर 2:

आव्यूह में कुल अवयव = 24

इसलिए, आव्यूह की संभव कोटियाँ निम्नलिखित हैं:

$1 \times 24, 2 \times 12, 3 \times 8, 4 \times 6, 6 \times 4, 8 \times 3, 12 \times 2$ और 24×1

यदि इसमें 13 अवयव हों तो कोटियाँ निम्नलिखित होंगी: 13×1 और 1×13

प्रश्न 3:

यदि किसी आव्यूह में 18 अवयव हैं तो इसकी संभव कोटियाँ क्या हैं? यदि इसमें 5 अवयव हों तो क्या होगा?

उत्तर 3:

आव्यूह में कुल अवयव = 18

इसलिए, आव्यूह की संभव कोटियाँ निम्नलिखित हैं:

$1 \times 18, 2 \times 9, 3 \times 6, 6 \times 3, 9 \times 2$ और 18×1

यदि इसमें 5 अवयव हों तो कोटियाँ निम्नलिखित होंगी: 5×1 और 1×5

प्रश्न 4:

एक 2×2 आव्यूह $A = [a_{ij}]$ की रचना कीजिए जिसके अवयव निम्नलिखित प्रकार से प्रकार से प्रदत्त हैं:

(i) $a_{ij} = \frac{(i+j)^2}{2}$ **(ii)** $a_{ij} = \frac{i}{j}$ **(iii)** $a_{ij} = \frac{(i+2j)^2}{2}$

उत्तर 4:

(i) यहाँ $a_{ij} = \frac{(i+j)^2}{2}$, इसलिए, आव्यूह के अवयव:

$$a_{11} = \frac{(1+1)^2}{2} = 2, \qquad a_{12} = \frac{(1+2)^2}{2} = \frac{9}{2},$$

$$a_{21} = \frac{(2+1)^2}{2} = \frac{9}{2}, \qquad a_{22} = \frac{(2+2)^2}{2} = 8,$$ इसलिए, आव्यूह $= \begin{bmatrix} 2 & \frac{9}{2} \\ \frac{9}{2} & 8 \end{bmatrix}$

(ii) यहाँ, $a_{ij} = \frac{i}{j}$, इसलिए, आव्यूह के अवयव:

$a_{11} = \frac{1}{1} = 1, \quad a_{12} = \frac{1}{2},$

$a_{21} = \frac{2}{1} = 2, \quad a_{22} = \frac{2}{2} = 1$ इसलिए, आव्यूह $= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

(iii) यहाँ $a_{ij} = \frac{(i+2j)^2}{2}$, इसलिए, आव्यूह के अवयव:

$a_{11} = \frac{(1+2)^2}{2} = \frac{9}{2}, \quad a_{12} = \frac{(1+4)^2}{2} = \frac{25}{2},$

$a_{21} = \frac{(2+2)^2}{2} = 8, \quad a_{22} = \frac{(2+4)^2}{2} = 18$ इसलिए, आव्यूह $= \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & \frac{25}{2} \\ 8 & 18 \end{bmatrix}$

प्रश्न 5:

एक 3×4 आव्यूह की रचना कीजिए जिसके अवयव निम्नलिखित प्रकार से प्रकार से प्राप्त होते हैं:

(i) $a_{ij} = \frac{1}{2}|-3i + j|$ **(ii)** $a_{ij} = 2i - j$

उत्तर 5:

(i) यहाँ $a_{ij} = \frac{1}{2}|-3i + j|$, इसलिए, आव्यूह के अवयव:

$a_{11} = \frac{1}{2}|-3+1| = 1, \quad a_{12} = \frac{1}{2}|-3+2| = \frac{1}{2}, \quad a_{13} = \frac{1}{2}|-3+3| = 0, \quad a_{14} = \frac{1}{2}|-3+4| = \frac{1}{2},$

$a_{21} = \frac{1}{2}|-6+1| = \frac{5}{2}, \quad a_{22} = \frac{1}{2}|-6+2| = 2, \quad a_{23} = \frac{1}{2}|-6+3| = \frac{3}{2}, \quad a_{24} = \frac{1}{2}|-6+4| = 1,$

$a_{31} = \frac{1}{2}|-9+1| = 4, \quad a_{32} = \frac{1}{2}|-9+2| = \frac{7}{2}, \quad a_{33} = \frac{1}{2}|-9+3| = 3, \quad a_{34} = \frac{1}{2}|-9+4| = \frac{5}{2},$

इसलिए, आव्यूह $= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & 2 & \frac{3}{2} & 1 \\ 4 & \frac{7}{2} & 3 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$

(ii) यहाँ $a_{ij} = 2i - j$, इसलिए, आव्यूह के अवयव:

$a_{11} = 2 - 1 = 1, \quad a_{12} = 2 - 2 = 0, \quad a_{13} = 2 - 3 = -1, \quad a_{14} = 2 - 4 = -2,$

$a_{21} = 4 - 1 = 3, \quad a_{22} = 4 - 2 = 2, \quad a_{23} = 4 - 3 = 1, \quad a_{24} = 4 - 4 = 0,$

$a_{31} = 6 - 1 = 5, \quad a_{32} = 6 - 2 = 4, \quad a_{33} = 6 - 3 = 3, \quad a_{34} = 6 - 4 = 2,$

इसलिए, आव्यूह $= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

प्रश्न 6:

निम्नलिखित समीकरणों से x, y तथा z के मान ज्ञात कीजिए:

(i) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ x & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & z \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} x+y & 2 \\ 5+z & xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} x+y+z \\ x+z \\ y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

उत्तर 6:

(i) $\begin{bmatrix}4 & 3\\ x & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}y & z\\ 1 & 5\end{bmatrix}$

यदि दो आव्यूह समान हैं तो उनके संगत अवयव भी समान होते हैं, इसलिए

$4 = y, \quad 3 = z$ तथा $x = 1$

(ii) $\begin{bmatrix}x+y & 2\\ 5+z & xy\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6 & 2\\ 5 & 8\end{bmatrix}$

यदि दो आव्यूह समान हैं तो उनके संगत अवयव भी समान होते हैं, इसलिए

$x + y = 6, \quad 5 + z = 5$ तथा $xy = 8$

हल करने पर, $x = 2, y = 4$ तथा $z = 0$ या $x = 4, y = 2$ तथा $z = 0$

(iii) $\begin{bmatrix}x+y+z\\ x+z\\ y+z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}9\\ 5\\ 7\end{bmatrix}$

यदि दो आव्यूह समान हैं तो उनके संगत अवयव भी समान होते हैं, इसलिए

$x + y + z = 9, \quad x + z = 5$ तथा $y + z = 7$

हल करने पर, $x = 2,\ y = 4$ तथा $z = 3$

प्रश्न 7:

समीकरण $\begin{bmatrix}a-b & 2a+c\\ 2a-b & 3c+d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 5\\ 0 & 13\end{bmatrix}$ से a, b, c तथा d के मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर 7:

यदि दो आव्यूह समान हैं तो उनके संगत अवयव भी समान होते हैं, इसलिए

$a - b = -1$ ... (1)
$2a - b = 0$ ... (2)
$2a + c = 5$ ... (3)
$3c + d = 13$ ... (4)

समीकरण (1) और (2) को हल करने पर

$$a = 1, \quad b = 2$$

a का मान समीकरण (3) में रखने पर

$$c = 3$$

c का मान समीकरण (4) में रखने पर

$$d = 4$$

प्रश्न 8:

$A = [a_{ij}]_{m\times n}$ एक वर्ग आव्यूह है यदि

(A) $m < n$ (B) $m > n$ (C) $m = n$ (D) इनमें से कोई नहीं

उत्तर 8:

एक वर्ग आव्यूह में स्तंभों की संख्या पंक्तियों की संख्या के बराबर होती है, इसलिए विकल्प (C) सही है।

प्रश्न 9:

x तथा y के प्रदत्त किन मानों के लिए आव्यूहों के निम्नलिखित युग्म समान हैं?

$\begin{bmatrix} 3x+7 & 5 \\ y+1 & 2-3x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & y-2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$

(A) $x = -\frac{1}{3}, y = 7$ (B) ज्ञात करना संभव नहीं है

(C) $y = 7, x = -\frac{2}{3}$ (D) $x = -\frac{1}{3}, y = -\frac{2}{3}$

उत्तर 9:

यहाँ, $\begin{bmatrix} 3x+7 & 5 \\ y+1 & 2-3x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & y-2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$

यदि दो आव्यूह समान हैं तो उनके संगत अवयव भी समान होते हैं,

इसलिए

$3x + 7 = 0, \quad 5 = y - 2, \quad y - 1 = 8$ तथा $2 - 3x = 4$

हल करने पर, $y = 7,\ x = -\frac{7}{2}$ तथा $x = -\frac{2}{3}$, इस प्रकार x का कोई अद्वितीय मान नहीं है। इसलिए विकल्प (B) सही है।

प्रश्न 10:

3×3 कोटि के ऐसे आव्यूहों की कुल कितनी संख्या होगी जिनकी प्रत्येक प्रविष्टि 0 या 1 है?

(A) 27 (B) 18 (C) 81 (D) 512

उत्तर 10:

3×3 कोटि के आव्यूह में अवयवों की कुल संख्या = 9

यदि प्रत्येक प्रविष्टि 0 या 1 है, तो प्रत्येक अवयव के लिए क्रमचय = 2

इसलिए अवयवों के लिए कुल क्रमचय = $2^9 = 512$

इसलिए विकल्प (D) सही है।

गणित

(पाठ – 3) (आव्यूह)
(कक्षा 12)
प्रश्नावली 3.2

प्रश्न 1:
मान लीजिए कि $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, तो निम्नलिखित ज्ञात कीजिए:
(i) $A + B$ **(ii)** $A - B$ **(iii)** $3A - C$
(iv) AB **(v)** BA

उत्तर 1:
(i) $A + B$
$= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 & 4+3 \\ 3-2 & 2+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$

(ii) $A - B$
$= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-1 & 4-3 \\ 3+2 & 2-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$

(iii) $3A - C$
$= 3\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 9 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6+2 & 12-5 \\ 9-3 & 6-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$

(iv) AB
$= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times1+4\times(-2) & 2\times3+4\times5 \\ 3\times1+2\times(-2) & 3\times3+2\times5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 26 \\ -1 & 19 \end{bmatrix}$

(v) BA
$= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times2+3\times3 & 1\times4+3\times2 \\ -2\times2+5\times3 & -2\times4+5\times2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 10 \\ 11 & 2 \end{bmatrix}$

प्रश्न 2:
निम्नलिखित को परिकलित कीजिए:
(i) $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ **(ii)** $\begin{bmatrix} a^2+b^2 & b^2+c^2 \\ a^2+c^2 & a^2+b^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2ab & 2bc \\ -2ac & -2ab \end{bmatrix}$
(iii) $\begin{bmatrix} -1 & 4 & -6 \\ 8 & 5 & 16 \\ 2 & 8 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 7 & 6 \\ 8 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ **(iv)** $\begin{bmatrix} cos^2x & sin^2x \\ sin^2x & cos^2x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} sin^2x & cos^2x \\ cos^2x & sin^2x \end{bmatrix}$

उत्तर 2:
(i) $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+a & b+b \\ -b+b & a+a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 0 & 2a \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} a^2+b^2 & b^2+c^2 \\ a^2+c^2 & a^2+b^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2ab & 2bc \\ -2ac & -2ab \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} a^2+b^2+2ab & b^2+c^2+2bc \\ a^2+c^2-2ac & a^2+b^2-2ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a+b)^2 & (b+c)^2 \\ (a-c)^2 & (a-b)^2 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} -1 & 4 & -6 \\ 8 & 5 & 16 \\ 2 & 8 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 7 & 6 \\ 8 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+12 & 4+7 & -6+6 \\ 8+8 & 5+0 & 16+5 \\ 2+3 & 8+2 & 5+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 11 & 0 \\ 16 & 5 & 21 \\ 5 & 10 & 9 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} cos^2x & sin^2x \\ sin^2x & cos^2x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} sin^2x & cos^2x \\ cos^2x & sin^2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos^2x+sin^2x & sin^2x+cos^2x \\ sin^2x+cos^2x & cos^2x+sin^2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

प्रश्न 3:

निदर्शित गुणनफल परिकलित कीजिए:

(i) $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ **(ii)** $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ **(iii)** $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ **(v)** $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(vi) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

उत्तर 3:

(i) $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \times a + b \times b & a \times (-b) + b \times a \\ -b \times a + a \times b & -b \times (-b) + a \times a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & b^2 + a^2 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 2 & 1 \times 3 & 1 \times 4 \\ 2 \times 2 & 2 \times 3 & 2 \times 4 \\ 3 \times 2 & 3 \times 3 & 3 \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 \times 1 + (-2) \times 2 & 1 \times 2 + (-2) \times 3 & 1 \times 3 + (-2) \times 1 \\ 2 \times 1 + 3 \times 2 & 2 \times 2 + 3 \times 3 & 2 \times 3 + 3 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -4 & 1 \\ 8 & 13 & 9 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2 \times 1 + 3 \times 0 + 4 \times 3 & 2 \times (-3) + 3 \times 2 + 4 \times 0 & 2 \times 5 + 3 \times 4 + 4 \times 5 \\ 3 \times 1 + 4 \times 0 + 5 \times 3 & 3 \times (-3) + 4 \times 2 + 5 \times 0 & 3 \times 5 + 4 \times 4 + 5 \times 5 \\ 4 \times 1 + 5 \times 0 + 6 \times 3 & 4 \times (-3) + 5 \times 2 + 6 \times 0 & 4 \times 5 + 5 \times 4 + 6 \times 5 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 14 & 0 & 42 \\ 18 & -1 & 56 \\ 22 & -2 & 70 \end{bmatrix}$

(v) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2 \times 1 + 1 \times (-1) & 2 \times 0 + 1 \times 2 & 2 \times 1 + 1 \times 1 \\ 3 \times 1 + 2 \times (-1) & 3 \times 0 + 2 \times 2 & 3 \times 1 + 2 \times 1 \\ -1 \times 1 + 1 \times (-1) & -1 \times 0 + 1 \times 2 & -1 \times 1 + 1 \times 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

(vi) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3 \times 2 + (-1) \times 1 + 3 \times 3 & 3 \times (-3) + (-1) \times 0 + 3 \times 1 \\ -1 \times 2 + 0 \times 1 + 2 \times 3 & -1 \times (-3) + 0 \times 0 + 2 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

प्रश्न 4:

यदि $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\5 & 0 & 2\\1 & -1 & 1\end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\4 & 2 & 5\\2 & 0 & 3\end{bmatrix}$ तथा $C = \begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\0 & 3 & 2\\1 & -2 & 3\end{bmatrix}$, तो $(A+B)$ तथा $(B-C)$ परिकलित कीजिए। साथ ही सत्यापित कीजिए कि $A+(B-C) = (A+B)-C$.

उत्तर 4:

$$A + B = \begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\5 & 0 & 2\\1 & -1 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\4 & 2 & 5\\2 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1+3 & 2-1 & -3+2\\5+4 & 0+2 & 2+5\\1+2 & -1+0 & 1+3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 1 & -1\\9 & 2 & 7\\3 & -1 & 4\end{bmatrix}$$

$$B - C = \begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\4 & 2 & 5\\2 & 0 & 3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\0 & 3 & 2\\1 & -2 & 3\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}3-4 & -1-1 & 2-2\\4-0 & 2-3 & 5-2\\2-1 & 0-(-2) & 3-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & -2 & 0\\4 & -1 & 3\\1 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

$$LHS = A + (B-C) = \begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\5 & 0 & 2\\1 & -1 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1 & -2 & 0\\4 & -1 & 3\\1 & 2 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & -3\\9 & -1 & 5\\2 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$RHS = (A+B) - C = \begin{bmatrix}4 & 1 & -1\\9 & 2 & 7\\3 & -1 & 4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\0 & 3 & 2\\1 & -2 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & -3\\9 & -1 & 5\\2 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

इसप्रकार, $A + (B-C) = (A+B) - C = \begin{bmatrix}0 & 0 & -3\\9 & -1 & 5\\2 & 1 & 1\end{bmatrix}$

प्रश्न 5:

यदि $A = \begin{bmatrix}\frac{2}{3} & 1 & \frac{5}{3}\\\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3}\\\frac{7}{3} & 2 & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix}\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 1\\\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5}\\\frac{7}{5} & \frac{6}{5} & \frac{2}{5}\end{bmatrix}$ तो $3A - 5B$ परिकलित कीजिए।

उत्तर 5:

$$3A - 5B = 3\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & 1 & \frac{5}{3}\\\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3}\\\frac{7}{3} & 2 & \frac{2}{3}\end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix}\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 1\\\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5}\\\frac{7}{5} & \frac{6}{5} & \frac{2}{5}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}2 & 3 & 5\\1 & 2 & 4\\7 & 6 & 2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2 & 3 & 5\\1 & 2 & 4\\7 & 6 & 2\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}2-2 & 3-3 & 5-5\\1-1 & 2-2 & 4-4\\7-7 & 6-6 & 2-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} = O$$

प्रश्न 6:

सरल कीजिए, $cos\theta \begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} + sin\theta \begin{bmatrix} sin\theta & -cos\theta \\ cos\theta & sin\theta \end{bmatrix}$

उत्तर 6:

$cos\theta \begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} + sin\theta \begin{bmatrix} sin\theta & -cos\theta \\ cos\theta & sin\theta \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} cos^2\theta & sin\theta cos\theta \\ -sin\theta cos\theta & cos^2\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} sin^2\theta & -sin\theta cos\theta \\ sin\theta cos\theta & sin^2\theta \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} cos^2\theta + sin^2\theta & sin\theta cos\theta - sin\theta cos\theta \\ -sin\theta cos\theta + sin\theta cos\theta & cos^2\theta + sin^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

प्रश्न 7:

X तथा Y ज्ञात कीजिए यदि

(i) $X + Y = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ तथा $X - Y = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

(ii) $2X + 3Y = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ तथा $3X + 2Y = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

उत्तर 7:

(i) $X + Y = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ ... (1)

तथा $X - Y = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ... (2)

समीकरण (1) और (2) को जोड़ने पर

$2X = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

समीकरण (1) में X का मान रखने पर

$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + Y = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow Y = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(ii) $2X + 3Y = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ ... (1)

तथा $3X + 2Y = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ ... (2)

समीकरण (1) को 3 से और (2) को 2 से गुणा करके घटाने पर

$3(2X + 3Y) - 2(3X + 2Y) = 3\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow 6X + 9Y - 6X - 4Y = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 12 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow 5Y = \begin{bmatrix} 2 & 13 \\ 14 & -10 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow Y = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{13}{5} \\ \frac{14}{5} & -2 \end{bmatrix}$

समीकरण (1) में Y का मान रखने पर

$$2X + \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{13}{5} \\ \frac{14}{5} & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 2X = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \frac{39}{5} \\ \frac{42}{5} & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - \frac{6}{5} & 3 - \frac{39}{5} \\ 4 - \frac{42}{5} & 0 - 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{24}{5} \\ -\frac{22}{5} & 6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{12}{5} \\ -\frac{11}{5} & 3 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 8:

X यदि $Y = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ तथा $2X + Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

उत्तर 8:

$$2X + Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 2X + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \left[\because Y = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\right]$$

$$\Rightarrow 2X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 9:

x तथा y ज्ञात कीजिए यदि $2\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$

उत्तर 9:

$$2\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 2x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 + y & 6 + 0 \\ 0 + 1 & 2x + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$$

यदि दो आव्यूह समान हैं तो उनके संगत अवयव भी समान होते हैं, इसलिए

$2 + y = 5$ तथा $2x + 2 = 8$

$\Rightarrow y = 3$ तथा $x = 3$

प्रश्न 10:

प्रदत्त समीकरण को x, y, z तथा t के लिए हल कीजिए यदि

$$2\begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

उत्तर 10:

$2\begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2x & 2z \\ 2y & 2t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 15 \\ 12 & 18 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2x+3 & 2z-3 \\ 2y+0 & 2t+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 15 \\ 12 & 18 \end{bmatrix}$

यदि दो आव्यूह समान हैं तो उनके संगत अवयव भी समान होते हैं, इसलिए

$2x+3=9, 2z-3=15, 2y=12$ तथा $2t+6=18$

$\Rightarrow x=3, z=9, y=6$ तथा $t=6$

प्रश्न 11:

यदि $x\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$ है, तो x तथा y के मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर 11:

$x\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2x \\ 3x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2x-y \\ 3x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$

यदि दो आव्यूह समान हैं तो उनके संगत अवयव भी समान होते हैं, इसलिए

$2x-y=10$ तथा $3x+y=5$

दोनों समीकरणों को जोड़ने पर

$5x=15$

$\Rightarrow x=3$

x का मान $3x+y=5$ में रखने पर

$3(3)+y=5 \quad \Rightarrow y=-4$

प्रश्न 12:

यदि $3\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{bmatrix}$ है, तो x, y, z तथा w के मानों को ज्ञात कीजिए।

उत्तर 12:

$3\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3x & 3y \\ 3z & 3w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+4 & 6+x+y \\ -1+z+w & 2w+3 \end{bmatrix}$

यदि दो आव्यूह समान हैं तो उनके संगत अवयव भी समान होते हैं, इसलिए

$3x=x+4, 3y=6+x+y, 3z=-1+z+w$ तथा $3w=2w+3$

$\Rightarrow x=2, \quad y=4, \quad z=1$ तथा $w=3$

प्रश्न 13:

यदि $F(x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $F(x)F(y) = F(x+y)$

उत्तर 13:

LHS $= F(x)F(y)$

$$= \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos y & -\sin y & 0 \\ \sin y & \cos y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos x \cos y - \sin x \sin y + 0 & -\cos x \sin y - \sin x \cos y + 0 & 0+0+0 \\ \sin x \cos y + \cos x \sin y + 0 & -\sin x \sin y + \cos x \cos y + 0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+0+0+ & 0+0+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(x+y) & -\sin(x+y) & 0 \\ \sin(x+y) & \cos(x+y) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = F(x+y) = \text{RHS}$$

प्रश्न 14:

दर्शाइए कि

(i) $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

उत्तर 14:

(i) $LHS = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 5 \times 2 + (-1) \times 3 & 5 \times 1 + (-1) \times 4 \\ 6 \times 2 + 7 \times 3 & 6 \times 1 + 7 \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 33 & 34 \end{bmatrix}$$

$RHS = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2 \times 5 + 1 \times 6 & 2 \times (-1) + 1 \times 7 \\ 3 \times 5 + 4 \times 6 & 3 \times (-1) + 4 \times 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 5 \\ 39 & 25 \end{bmatrix}$$

इसलिए, $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

(ii) $LHS = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 \times (-1) + 2 \times 0 + 3 \times 2 & 1 \times 1 + 2 \times (-1) + 3 \times 3 & 1 \times 0 + 2 \times 1 + 3 \times 4 \\ 0 \times (-1) + 1 \times 0 + 0 \times 2 & 0 \times 1 + 1 \times (-1) + 0 \times 3 & 0 \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 4 \\ 1 \times (-1) + 1 \times 0 + 0 \times 2 & 1 \times 1 + 1 \times (-1) + 0 \times 3 & 1 \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 8 & 14 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$RHS = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -1 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 1 & -1 \times 2 + 1 \times 1 + 0 \times 1 & -1 \times 3 + 1 \times 0 + 0 \times 0 \\ 0 \times 1 + (-1) \times 0 + 1 \times 1 & 0 \times 2 + (-1) \times 1 + 1 \times 1 & 0 \times 3 + (-1) \times 0 + 1 \times 0 \\ 2 \times 1 + 3 \times 0 + 4 \times 1 & 2 \times 2 + 3 \times 1 + 4 \times 1 & 2 \times 3 + 3 \times 0 + 4 \times 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 6 & 11 & 6 \end{bmatrix}$$

इसलिए, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

प्रश्न 15:

यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ है, तो $A^2 - 5A + 6I$, का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर 15:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \times 2 + 0 \times 2 + 1 \times 1 & 2 \times 0 + 0 \times 1 + 1 \times (-1) & 2 \times 1 + 0 \times 3 + 1 \times 0 \\ 2 \times 2 + 1 \times 2 + 3 \times 1 & 2 \times 0 + 1 \times 1 + 3 \times (-1) & 2 \times 1 + 1 \times 3 + 3 \times 0 \\ 1 \times 2 + (-1) \times 2 + 0 \times 1 & 1 \times 0 + (-1) \times 1 + 0 \times (-1) & 1 \times 1 + (-1) \times 3 + 0 \times 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 9 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

इसलिए, $A^2 - 5A + 6I$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 9 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 9 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & 0 & 5 \\ 10 & 5 & 15 \\ 5 & -5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 - 10 + 6 & -1 - 0 + 0 & 2 - 5 + 0 \\ 9 - 10 + 0 & -2 - 5 + 6 & 5 - 15 + 0 \\ 0 - 5 + 0 & -1 + 5 + 0 & -2 - 0 + 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & -10 \\ -5 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 16:

यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $A^3 - 6A^2 + 7A + 2I = 0$

उत्तर 16:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\times1+0\times0+2\times2 & 1\times0+0\times2+2\times0 & 1\times2+0\times1+2\times3 \\ 0\times1+2\times0+1\times2 & 0\times0+2\times2+1\times0 & 0\times2+2\times1+1\times3 \\ 2\times1+0\times0+3\times2 & 2\times0+0\times2+3\times0 & 2\times2+0\times1+3\times3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 2 & 4 & 5 \\ 8 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 2 & 4 & 5 \\ 8 & 0 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5\times1+0\times0+8\times2 & 5\times0+0\times2+8\times0 & 5\times2+0\times1+8\times3 \\ 2\times1+4\times0+5\times2 & 2\times0+4\times2+5\times0 & 2\times2+4\times1+5\times3 \\ 8\times1+0\times0+13\times2 & 8\times0+0\times2+13\times0 & 8\times2+0\times1+13\times3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 21 & 0 & 34 \\ 12 & 8 & 23 \\ 34 & 0 & 55 \end{bmatrix}$$

इसलिए, $LHS = A^3 - 6A^2 + 7A + 2I$

$$= \begin{bmatrix} 21 & 0 & 34 \\ 12 & 8 & 23 \\ 34 & 0 & 55 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 2 & 4 & 5 \\ 8 & 0 & 13 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 21 & 0 & 34 \\ 12 & 8 & 23 \\ 34 & 0 & 55 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 30 & 0 & 48 \\ 12 & 24 & 30 \\ 48 & 0 & 78 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 & 14 \\ 0 & 14 & 7 \\ 14 & 0 & 21 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 21-30+7+2 & 0-0+0+0 & 34-48+14+0 \\ 12-12+0+0 & 8-24+14+2 & 23-30+7+0 \\ 34-48+14+0 & 0-0+0+0 & 55-78+21+2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O \;\; = RHS$$

प्रश्न 17:

यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ तथा $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ एवं $A^2 = kA - 2I$ हो, तो k ज्ञात कीजिए।

उत्तर 17:

दिया है: $A^2 = kA - 2I$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3\times3+(-2)\times4 & 3\times(-2)+(-2)\times(-2) \\ 4\times3+(-2)\times4 & 4\times(-2)+(-2)\times(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3k & -2k \\ 4k & -2k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3k-2 & -2k \\ 4k & -2k-2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 4k = 4 \qquad \Rightarrow k = 1$$

प्रश्न 18:

यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & -\tan\frac{\alpha}{2} \\ \tan\frac{\alpha}{2} & 0 \end{bmatrix}$ तथा I कोटि 2 का एक तत्समक आव्यूह है। तो सिद्ध कीजिए कि $I + A = (I - A)\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

उत्तर 18:

$\text{LHS} = I + A$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\tan\frac{\alpha}{2} \\ \tan\frac{\alpha}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\tan\frac{\alpha}{2} \\ \tan\frac{\alpha}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$\text{RHS} = (I - A)\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

$$= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\tan\frac{\alpha}{2} \\ \tan\frac{\alpha}{2} & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tan\frac{\alpha}{2} \\ -\tan\frac{\alpha}{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha + \tan\frac{\alpha}{2}\sin\alpha & -\sin\alpha + \tan\frac{\alpha}{2}\cos\alpha \\ -\tan\frac{\alpha}{2}\cos\alpha + \sin\alpha & \tan\frac{\alpha}{2}\sin\alpha + \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha + \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sin\alpha & -\sin\alpha + \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\cos\alpha \\ -\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\cos\alpha + \sin\alpha & \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sin\alpha + \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha + \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sin\alpha & -\sin\alpha + \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\cos\alpha \\ -\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\cos\alpha + \sin\alpha & \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sin\alpha + \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}} & \frac{-\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}} \\ \frac{-\cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}} & \frac{\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\cos\left(\alpha - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}} & \frac{-\sin\left(\alpha - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}} \\ \frac{\sin\left(\alpha - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}} & \frac{\cos\left(\alpha - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\tan\frac{\alpha}{2} \\ \tan\frac{\alpha}{2} & 1 \end{bmatrix} = LHS$$

प्रश्न 19:

किसी व्यापर संघ के पास 30,000 रुपयों का कोष है जिसे दो भिन्न-भिन्न प्रकार के बांडों में निवेशित करना है। प्रथम बांड पर 5% वार्षिक तथा द्वितीय बांड पर 7% वार्षिक ब्याज प्राप्त होता है। आव्यूह गुणन के प्रयोग द्वारा यह निर्धारित कीजिए कि 30,000 रुपयों के कोष को दो प्रकार के बांडों में निवेश करने के लिए किस प्रकार बाँटें जिससे व्यापार संघ को प्राप्त कुल वार्षिक ब्याज

(a) ₹1800 हो।　　　　**(b)** ₹2000 हो।

उत्तर 19:

माना प्रथम बांड पर निवेश की गई राशि = ₹x

इसलिए, द्वितीय बांड पर निवेश की गई राशि = ₹$(30000 - x)$

(a) यदि कुल वार्षिक ब्याज ₹1800 हो।

बांडों में निवेश (रुपयों में)	वार्षिक ब्याज दर	वार्षिक ब्याज (रुपयों में)
$[x \quad 30000 - x]$	$\begin{bmatrix} 5\% \\ 7\% \end{bmatrix}$	$[1800]$

हल करने पर $x \times 5\% + (30000 - x) \times 7\% = 1800$

$\Rightarrow \frac{5x}{100} + \frac{7}{100}(30000 - x) = 1800$

$\Rightarrow 5x + 210000 - 7x = 180000$

$\Rightarrow -2x = -30000$

$\Rightarrow x = 15000$

इसलिए, प्रथम बांड पर निवेश की गई राशि = ₹15000

तथा द्वितीय बांड पर निवेश की गई राशि = ₹15000

(b) यदि कुल वार्षिक ब्याज ₹2000 हो।

बांडों में निवेश (रुपयों में)	वार्षिक ब्याज दर	वार्षिक ब्याज (रुपयों में)
$[x \quad 30000 - x]$	$\begin{bmatrix} 5\% \\ 7\% \end{bmatrix}$	$[2000]$

हल करने पर $x \times 5\% + (30000 - x) \times 7\% = 2000$

$\Rightarrow \frac{5x}{100} + \frac{7}{100}(30000 - x) = 2000$

$\Rightarrow 5x + 210000 - 7x = 200000$

$\Rightarrow -2x = -10000$

$\Rightarrow x = 5000$

इसलिए, प्रथम बांड पर निवेश की गई राशि = ₹5000

तथा द्वितीय बांड पर निवेश की गई राशि = ₹25000

प्रश्न 20:

किसी स्कूल की पुस्तकों की दुकान में 10 दर्जन रसायन विज्ञान, 8 दर्जन भौतिक विज्ञान तथा 10 दर्जन अर्थशास्त्र की पुस्तकें हैं। इन पुस्तकों का विक्रय मूल्य क्रमशः ₹80, ₹60 तथा ₹40 प्रति पुस्तक है। आव्यूह बीजगणित के प्रयोग द्वारा ज्ञात कीजिए कि सभी पुस्तकों को बेचने से दुकान को कुल कितनी धनराशि प्राप्त होगी।

उत्तर 20:

पुस्तकों की संख्या (रसायन, भौतिक, अर्थशास्त्र)	विक्रय मूल्य प्रति पुस्तक	कुल धनराशि (रुपयों में)
$\begin{bmatrix}120 & 96 & 120\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}80\\60\\40\end{bmatrix}$	$[x]$

हल करने पर

$120 \times 80 + 96 \times 60 + 120 \times 40 = x$

$\Rightarrow x = 9600 + 5760 + 4800$

$\Rightarrow x = 20160$

अतः, सभी पुस्तकों को बेचने से दुकान को कुल धनराशि ₹20160 प्राप्त होगी।

मान लीजिए कि X, Y, Z, W तथा P क्रमंशः $2 \times n, 3 \times k, 2 \times p, n \times 3$ तथा $p \times k$ कोटियों के आव्यूह हैं। नीचे दिए प्रश्न संख्या 21 तथा 22 में सही उत्तर चुनिए।

प्रश्न 21:

PY + WY के परिभाषित होने के लिए n, k तथा p पर क्या प्रतिबंध होगा?

(A) $k = 3, p = n$ (B) k स्वेच्छ है, $p = 2$

(C) p स्वेच्छ है, $k = 3$ (D) $k = 2, p = 3$

उत्तर 21:

P की कोटि = $p \times k$ तथा Y की कोटि = $3 \times k$ है।

इसलिए, PY के परिभाषित होने के लिए, $k = 3$ होना चाहिए। इस प्रकार PY की कोटि $p \times k$ है।

W की कोटि = $n \times 3$ तथा Y की कोटि = $3 \times k$ है।

कोटि के अनुसार, WY परिभाषित है तथा इसकी कोटि $n \times k$ है।

PY + WY के परिभाषित होने के लिए, PY तथा WY की कोटि बराबर होनी चाहिए।

$\Rightarrow p \times k = n \times k \quad \Rightarrow p = n$

अतः, विकल्प (A) सही है।

प्रश्न 22:

यदि $n = p$, तो आव्यूह $7X - 5Z$ की कोटि है।

(A) $p \times 2$ (B) $2 \times n$ (C) $n \times 3$ (D) $p \times n$

उत्तर 22:

आव्यूहों को जोड़ने या घटाने पर उनकी कोटि समान रहती है।

इसलिए, $7X - 5Z$ की कोटि = X की कोटि = Z की कोटि = $2 \times n$

अतः, विकल्प (B) सही है।

गणित

(पाठ – 3) (आव्यूह)

(कक्षा 12)

प्रश्नावली 3.3

प्रश्न 1:

निम्नलिखित आव्यूहों में से प्रत्येक का परिवर्त ज्ञात कीजिए:

(i) $\begin{bmatrix} 5 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$ **(ii)** $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ **(iii)** $\begin{bmatrix} -1 & 5 & 6 \\ \sqrt{3} & 5 & 6 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

उत्तर 1:

(i) माना $A = \begin{bmatrix} 5 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$ अतः $A' = \begin{bmatrix} 5 & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$

(ii) माना $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ अतः $B' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

(iii) माना $C = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 6 \\ \sqrt{3} & 5 & 6 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ अतः $C' = \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} & 2 \\ 5 & 5 & 3 \\ 6 & 6 & -1 \end{bmatrix}$

प्रश्न 2:

यदि $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ हैं तो सत्यापित कीजिए कि

(i) $(A+B)' = A' + B'$ **(ii)** $(A-B)' = A' - B'$

उत्तर 2:

(i) $(A+B)$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-4 & 2+1 & 3-5 \\ 5+1 & 7+2 & 9+0 \\ -2+1 & 1+3 & 1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 3 & -2 \\ 6 & 9 & 9 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

इसलिए $(A+B)' = \begin{bmatrix} -5 & 6 & -1 \\ 3 & 9 & 4 \\ -2 & 9 & 2 \end{bmatrix}$ ... (1)

$$A' + B' = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}' + \begin{bmatrix} -4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}'$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & 9 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-4 & 5+1 & -2+1 \\ 2+1 & 7+2 & 1+3 \\ 3-5 & 9+0 & 1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 6 & -1 \\ 3 & 9 & 4 \\ -2 & 9 & 2 \end{bmatrix} \quad ...(2)$$

समीकरण (1) और (2) से,

$$(A+B)' = A' + B'$$

(ii) $(A-B)$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+4 & 2-1 & 3+5 \\ 5-1 & 7-2 & 9-0 \\ -2-1 & 1-3 & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 4 & 5 & 9 \\ -3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

इसलिए $(A-B)' = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 8 & 9 & 0 \end{bmatrix}$ ... (1)

$$A' - B' = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}' - \begin{bmatrix} -4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}'$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & 9 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+4 & 5-1 & -2-1 \\ 2-1 & 7-2 & 1-3 \\ 3+5 & 9-0 & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 8 & 9 & 0 \end{bmatrix} \quad \ldots (2)$$

समीकरण (1) और (2) से,

$$(A+B)' = A' + B'$$

प्रश्न 3:

यदि $A' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ हैं तो सत्यापित कीजिए कि

(i) $(A+B)' = A' + B'$ **(ii)** $(A-B)' = A' - B'$

उत्तर 3:

(i) $A' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ [क्योंकि $(A')' = A$]

$$(A+B) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-1 & -1+2 & 0+1 \\ 4+1 & 2+2 & 1+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

इसलिए $(A+B)' = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ ... (1)

$$A' + B' = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}' + \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}'$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-1 & 4+1 \\ -1+2 & 2+2 \\ 0+1 & 1+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \ldots (2)$$

समीकरण (1) और (2) से,

$$(A+B)' = A' + B'$$

(ii) $A' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ [क्योंकि $(A')' = A$]

$$(A-B) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+1 & -1-2 & 0-1 \\ 4-1 & 2-2 & 1-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

इसलिए $(A-B)' = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ ... (1)

$$A' - B' = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}' - \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}'$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+1 & 4-1 \\ -1-2 & 2-2 \\ 0-1 & 1-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \ldots (2)$$

समीकरण (1) और (2) से,

$$(A-B)' = A' - B'$$

प्रश्न 4:

यदि $A' = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ हैं तो $(A+2B)'$ ज्ञात कीजिए।

उत्तर 4:

$(A+2B) = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2-2 & 3+0 \\ 1+2 & 2+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

इसलिए $\quad (A+2B)' = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

प्रश्न 5:

A तथा B आव्यूहों के लिए सत्यापित कीजिए कि $(AB)' = B'A'$, जहाँ

(i) $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ **(ii)** $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

उत्तर 5:

(i) दिया है: $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

इसलिए, $AB = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times(-1) & 1\times 2 & 1\times 1 \\ -4\times(-1) & -4\times 2 & -4\times 1 \\ 3\times(-1) & 3\times 2 & 3\times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -8 & -4 \\ -3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$

इसलिए $AB' = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -3 \\ 2 & -8 & 6 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} \quad \ldots(1)$

$B' = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ तथा $A' = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$

इसलिए, $B'A' = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1\times 1 & -1\times(-4) & -1\times 3 \\ 2\times 1 & 2\times(-4) & 2\times 3 \\ 1\times 1 & 1\times(-4) & 1\times 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1 & 4 & -3 \\ 2 & -8 & 6 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} \quad \ldots(2)$

समीकरण (1) और (2) से,

$$(AB)' = B'A'$$

(ii) दिया है: $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

इसलिए, $AB = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\times 1 & 0\times 5 & 0\times 7 \\ 1\times 1 & 1\times 5 & 1\times 7 \\ 2\times 1 & 2\times 5 & 2\times 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 7 \\ 2 & 10 & 14 \end{bmatrix}$

इसलिए $AB' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & 7 & 14 \end{bmatrix} \quad \ldots(1)$

$B' = [1 \quad 5 \quad 7]' = \begin{bmatrix}1\\5\\7\end{bmatrix}$ तथा $A' = \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}' = [0 \quad 1 \quad 2]$

इसलिए, $B'A' = \begin{bmatrix}1\\5\\7\end{bmatrix}[0 \quad 1 \quad 2] = \begin{bmatrix}1\times0 & 1\times1 & 1\times2\\5\times0 & 5\times1 & 5\times2\\7\times0 & 7\times1 & 7\times2\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\0 & 5 & 10\\0 & 7 & 14\end{bmatrix}$ ... (2)

समीकरण (1) और (2) से,

$$(AB)' = B'A'$$

प्रश्न 6:

(i) यदि $A = \begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\-\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$ हो तो सत्यापित कीजिए कि $A'A = I$

(ii) यदि $A = \begin{bmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha\\-\cos\alpha & \sin\alpha\end{bmatrix}$ हो तो सत्यापित कीजिए कि $A'A = I$

उत्तर 6:

(i) $A = \begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\-\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix} \Rightarrow A' = \begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$

इसलिए $A'A = \begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\-\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}\cos^2\alpha + \sin^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha\\\sin\alpha\cos\alpha - \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = I$

अतः, $A'A = I$

(ii) $A = \begin{bmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha\\-\cos\alpha & \sin\alpha\end{bmatrix} \Rightarrow A' = \begin{bmatrix}\sin\alpha & -\cos\alpha\\\cos\alpha & \sin\alpha\end{bmatrix}$

इसलिए $A'A = \begin{bmatrix}\sin\alpha & -\cos\alpha\\\cos\alpha & \sin\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha\\-\cos\alpha & \sin\alpha\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}\sin^2\alpha + \cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha - \cos\alpha\sin\alpha\\\cos\alpha\sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha + \sin^2\alpha\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = I$

अतः, $A'A = I$

प्रश्न 7:

(i) सिद्ध कीजिए कि आव्यूह $A = \begin{bmatrix}1 & -1 & 5\\-1 & 2 & 1\\5 & 1 & 3\end{bmatrix}$ एक सममित आव्यूह है।

(ii) सिद्ध कीजिए कि आव्यूह $A = \begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\-1 & 0 & 1\\1 & -1 & 0\end{bmatrix}$ एक विषम सममित आव्यूह है।

उत्तर 7:

(i) $A = \begin{bmatrix}1 & -1 & 5\\-1 & 2 & 1\\5 & 1 & 3\end{bmatrix} \Rightarrow A' = \begin{bmatrix}1 & -1 & 5\\-1 & 2 & 1\\5 & 1 & 3\end{bmatrix}' = \begin{bmatrix}1 & -1 & 5\\-1 & 2 & 1\\5 & 1 & 3\end{bmatrix} = A$

$\Rightarrow A' = A$, इसलिए आव्यूह $A = \begin{bmatrix}1 & -1 & 5\\-1 & 2 & 1\\5 & 1 & 3\end{bmatrix}$ एक सममित आव्यूह है।

(ii) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}' = -\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = -A$

$\Rightarrow A' = -A$, इसलिए आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ एक विषम सममित आव्यूह है।

प्रश्न 8:

आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ के लिए सत्यापित कीजिए कि

(i) $(A + A')$ एक सममित आव्यूह है।

(ii) $(A - A')$ एक विषम सममित आव्यूह है।

उत्तर 8:

(i) दिया है: $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow A' = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

इसलिए, $(A + A') = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 11 \\ 11 & 14 \end{bmatrix}$

$(A + A')' = \begin{bmatrix} 2 & 11 \\ 11 & 14 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 2 & 11 \\ 11 & 14 \end{bmatrix} = A$

$\Rightarrow (A + A')' = (A + A')$, इसलिए आव्यूह $(A + A')$ एक सममित आव्यूह है।

(ii) $(A - A') = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$(A - A')' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}' = -\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -A$

$\Rightarrow (A + A')' = -(A + A')$, इसलिए आव्यूह $(A - A')$ एक विषम सममित आव्यूह है।

प्रश्न 9:

यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$ तो $\frac{1}{2}(A + A')$ तथा $\frac{1}{2}(A - A')$ ज्ञात कीजिए।

उत्तर 9:

दिया है: $A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A' = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{bmatrix}$

इसलिए, $\frac{1}{2}(A + A') = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{bmatrix}\right)$

$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

तथा, $\frac{1}{2}(A - A') = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{bmatrix}\right)$

$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 2a & 2b \\ -2a & 0 & 2c \\ -2b & -2c & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$

प्रश्न 10:

निम्नलिखित आव्यूहों को एक सममित आव्यूह तथा एक विषम सममित आव्यूह के योगफल के रूप में व्यक्त कीजिए:

(i) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

उत्तर 10:

(i) दिया है: $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

इसलिए, $A = \frac{1}{2}(A + A') + \frac{1}{2}(A - A')$

माना, $P = \frac{1}{2}(A + A')$ तथा $Q = \frac{1}{2}(A - A')$

$$P = \frac{1}{2}(A + A') = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$P' = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = P$$

$\Rightarrow P$ एक सममित आव्यूह है।

$$Q = \frac{1}{2}(A - A') = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q' = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = -Q$$

$\Rightarrow Q$ एक विषम सममित आव्यूह है।

इसप्रकार, $A = P + Q = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

(ii) दिया है: $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

इसलिए, $A = \frac{1}{2}(A + A') + \frac{1}{2}(A - A')$

माना, $P = \frac{1}{2}(A + A')$ तथा $Q = \frac{1}{2}(A - A')$

$$P = \frac{1}{2}(A + A') = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 12 & -4 & 4 \\ -4 & 6 & -2 \\ 4 & -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$P' = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} = P$$

$\Rightarrow P$ एक सममित आव्यूह है।

$$Q=\frac{1}{2}(A-A')=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}6&-2&2\\-2&3&-1\\2&-1&3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6&-2&2\\-2&3&-1\\2&-1&3\end{bmatrix}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$Q'=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}'=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=-Q$$

$\Rightarrow Q$ एक विषम सममित आव्यूह है।

इसप्रकार, $A=P+Q=\begin{bmatrix}6&-2&2\\-2&3&-1\\2&-1&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

(iii) दिया है: $A=\begin{bmatrix}3&3&-1\\-2&-2&1\\-4&-5&2\end{bmatrix}$

इसलिए, $A=\frac{1}{2}(A+A')+\frac{1}{2}(A-A')$

माना, $P=\frac{1}{2}(A+A')$ तथा $Q=\frac{1}{2}(A-A')$

$$P=\frac{1}{2}(A+A')=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}3&3&-1\\-2&-2&1\\-4&-5&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&-2&-4\\3&-2&-5\\-1&1&2\end{bmatrix}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}6&1&-5\\1&-4&-4\\-5&-4&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&1/2&-5/2\\1/2&-2&-2\\-5/2&-2&2\end{bmatrix}$$

$$P'=\begin{bmatrix}3&1/2&-5/2\\1/2&-2&-2\\-5/2&-2&2\end{bmatrix}'=\begin{bmatrix}3&1/2&-5/2\\1/2&-2&-2\\-5/2&-2&2\end{bmatrix}=P$$

$\Rightarrow P$ एक सममित आव्यूह है।

$$Q=\frac{1}{2}(A-A')=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}3&3&-1\\-2&-2&1\\-4&-5&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&-2&-4\\3&-2&-5\\-1&1&2\end{bmatrix}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&5&3\\-5&0&6\\-3&-6&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&5/2&3/2\\-5/2&0&3\\-3/2&-3&0\end{bmatrix}$$

$$Q'=\begin{bmatrix}0&5/2&3/2\\-5/2&0&3\\-3/2&-3&0\end{bmatrix}'=\begin{bmatrix}0&-5/2&-3/2\\5/2&0&-3\\3/2&3&0\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}0&5/2&3/2\\-5/2&0&3\\-3/2&-3&0\end{bmatrix}=-Q$$

$\Rightarrow Q$ एक विषम सममित आव्यूह है।

इसप्रकार, $A=P+Q=\begin{bmatrix}3&1/2&-5/2\\1/2&-2&-2\\-5/2&-2&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&5/2&3/2\\-5/2&0&3\\-3/2&-3&0\end{bmatrix}$

(iv) दिया है: $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

इसलिए, $A = \frac{1}{2}(A + A') + \frac{1}{2}(A - A')$

माना, $P = \frac{1}{2}(A + A')$ तथा $Q = \frac{1}{2}(A - A')$

$P = \frac{1}{2}(A + A') = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

$P' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = P$

$\Rightarrow P$ एक सममित आव्यूह है।

$Q = \frac{1}{2}(A - A') = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

$Q' = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = -Q$

$\Rightarrow Q$ एक विषम सममित आव्यूह है।

इसप्रकार, $A = P + Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

प्रश्न संख्या 11 तथा 12 में सही उत्तर चुनिए:

प्रश्न 11:

यदि A तथा B समान कोटि के सममित आव्यूह हैं तो AB − BA एक

(A) विषम सममित आव्यूह है
(B) सममित आव्यूह
(C) शून्य आव्यूह है
(D) तत्समक आव्यूह है।

उत्तर 11:

$(AB - BA)' = (AB)' - (BA)'$ $[\because (X - Y)' = X' - Y']$

$= B'A' - A'B'$ $[\because (XY)' = Y'X']$

$= BA - AB$ $[\because$ दिया है: $A' = A,\ B' = B]$

$= -(AB - BA)$

$\Rightarrow (AB - BA)' = -(AB - BA),$

इसलिए आव्यूह (AB − BA) एक विषम सममित आव्यूह है। अतः, विकल्प (A) सही है।

प्रश्न 12:

यदि $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ तो $A + A' = I$ यदि α का मान है

(A) $\frac{\pi}{6}$
(B) $\frac{\pi}{3}$
(C) π
(D) $\frac{3\pi}{2}$

उत्तर 12:

दिया है: $A + A' = I \Rightarrow \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2\cos\alpha & 0 \\ 0 & 2\cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow 2\cos\alpha = 1 \quad \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$

अतः, विकल्प (B) सही है।

गणित

(पाठ – 3) (आव्यूह)

(कक्षा 12)

प्रश्नावली 3.4

प्रश्न संख्या 1 से 17 तक के आव्यूहों के व्युत्क्रम, यदि उनका अस्तित्व है, तो प्रारंभिक रूपांतरण के प्रयोग से ज्ञात कीजिए:

प्रश्न 1: $\begin{bmatrix}1 & -1\\2 & 3\end{bmatrix}$

उत्तर 1:

माना, $A = \begin{bmatrix}1 & -1\\2 & 3\end{bmatrix}$ इसलिए, $A = IA$ जहाँ $I = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ है।

$\Rightarrow \begin{bmatrix}1 & -1\\2 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}A$

$\Rightarrow \begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\-2 & 1\end{bmatrix}A$ $[R_2 \to R_2 - 2R_1$ द्वारा$]$

$\Rightarrow \begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\-2/5 & 1/5\end{bmatrix}A$ $\left[R_2 \to \frac{1}{5}R_2\right.$ द्वारा$\left.\right]$

$\Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3/5 & 1/5\\-2/5 & 1/5\end{bmatrix}A$ $[R_1 \to R_1 + R_2$ द्वारा$]$

अतः, $A^{-1} = \begin{bmatrix}3/5 & 1/5\\-2/5 & 1/5\end{bmatrix}$

प्रश्न 2: $\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$

उत्तर 2:

माना, $A = \begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$ इसलिए, $A = IA$ जहाँ $I = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ है।

$\Rightarrow \begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}A$

$\Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}A$ $[R_1 \to R_1 - R_2$ द्वारा$]$

$\Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 2\end{bmatrix}A$ $[R_2 \to R_2 - R_1$ द्वारा$]$

अतः, $A^{-1} = \begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 2\end{bmatrix}$

प्रश्न 3: $\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 7\end{bmatrix}$

उत्तर 3:

माना, $A = \begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 7\end{bmatrix}$ इसलिए, $A = IA$ जहाँ $I = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ है।

$\Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}A$

$\Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\-2 & 1\end{bmatrix}A$ $[R_2 \to R_2 - 2R_1$ द्वारा$]$

$\Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7 & -3\\-2 & 1\end{bmatrix}A$ $[R_2 \to R_2 - 3R_1$ द्वारा$]$

अतः, $A^{-1} = \begin{bmatrix}7 & -3\\-2 & 1\end{bmatrix}$

प्रश्न 4: $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

उत्तर 4:

माना, $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ इसलिए, $A = IA$ जहाँ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ है।

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$ [$R_1 \rightarrow 3R_1 - R_2$ द्वारा]

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -15 & 6 \end{bmatrix} A$ [$R_2 \rightarrow R_2 - 5R_1$ द्वारा]

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} A$ [$R_2 \rightarrow -\frac{1}{3} R_2$ द्वारा]

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} A$ [$R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2$ द्वारा]

अतः, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

प्रश्न 5: $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$

उत्तर 5:

माना, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ इसलिए, $A = IA$ जहाँ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ है।

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$ [$R_1 \rightarrow 4R_1 - R_2$ द्वारा]

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -28 & 8 \end{bmatrix} A$ [$R_2 \rightarrow R_2 - 7R_1$ द्वारा]

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} A$ [$R_2 \rightarrow \frac{1}{4} R_2$ द्वारा]

अतः, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$

प्रश्न 6: $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

उत्तर 6:

माना, $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ इसलिए, $A = IA$ जहाँ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ है।

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$ [$R_1 \rightarrow R_1 - R_2$ द्वारा]

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} A$ [$R_2 \rightarrow R_2 - R_1$ द्वारा]

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} A$ [$R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2$ द्वारा]

अतः, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

प्रश्न 7: $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

उत्तर 7:

माना, $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ इसलिए, $A = IA$ जहाँ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ है।

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$ $[R_1 \to 2R_1 - R_2$ द्वारा$]$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -10 & 6 \end{bmatrix} A$ $[R_2 \to R_2 - 5R_1$ द्वारा$]$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} A$ $\left[R_2 \to \frac{1}{2} R_2\right.$ द्वारा$\left.\right]$

अतः, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

प्रश्न 8: $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

उत्तर 8:

माना, $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ इसलिए, $A = IA$ जहाँ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ है।

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$ $[R_1 \to R_1 - R_2$ द्वारा$]$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} A$ $[R_2 \to R_2 - 3R_1$ द्वारा$]$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} A$ $[R_1 \to R_1 - R_2$ द्वारा$]$

अतः, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

प्रश्न 9: $\begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

उत्तर 9:

माना, $A = \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ इसलिए, $A = IA$ जहाँ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ है।

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$ $[R_1 \to R_1 - R_2$ द्वारा$]$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} A$ $[R_2 \to R_2 - 2R_1$ द्वारा$]$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -10 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} A$ $[R_1 \to R_1 - 3R_2$ द्वारा$]$

अतः, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -10 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

प्रश्न 10: $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

उत्तर 10:

माना, $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ इसलिए, $A = IA$ जहाँ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ है।

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$ $[R_1 \to 3R_1 + 2R_2$ द्वारा$]$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 12 & 9 \end{bmatrix} A$ $[R_2 \to R_2 + 4R_1$ द्वारा$]$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3/2 \end{bmatrix} A$ $\left[R_2 \to \frac{1}{6} R_2\right.$ द्वारा$\left.\right]$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 2 & 3/2 \end{bmatrix} A$ $[R_1 \to R_1 - R_2$ द्वारा$]$

अतः, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 2 & 3/2 \end{bmatrix}$

प्रश्न 11: $\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

उत्तर 11:

माना, $A = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ इसलिए, $A = IA$ जहाँ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ है।

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$ $[R_1 \to R_1 - R_2$ द्वारा$]$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} A$ $[R_2 \to R_2 - R_1$ द्वारा$]$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} A$ $\left[R_2 \to \frac{1}{2} R_2\right.$ द्वारा$\left.\right]$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} A$ $[R_1 \to R_1 - 4R_2$ द्वारा$]$

अतः, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$

प्रश्न 12: $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

उत्तर 12:

माना, $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ इसलिए, $A = IA$ जहाँ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ है।

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} A$ $[R_2 \to R_2 + 3R_1$ द्वारा$]$

यहाँ, बाएँ पक्ष के आव्यूह की द्वितीय पंक्ति के सभी अवयव शून्य हैं। अतः, A^{-1} का अस्तित्व नहीं है।

प्रश्न 13: $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

उत्तर 13:

माना, $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ इसलिए, $A = IA$ जहाँ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ है।

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$ [$R_1 \to R_1 + R_2$ द्वारा]

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} A$ [$R_2 \to R_2 + R_1$ द्वारा]

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} A$ [$R_1 \to R_1 + R_2$ द्वारा]

अतः, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

प्रश्न 14: $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

उत्तर 14:

माना, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ इसलिए, $A = IA$ जहाँ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ है।

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} A$ [$R_2 \to R_2 - 2R_1$ द्वारा]

यहाँ, बाएँ पक्ष के आव्यूह की द्वितीय पंक्ति के सभी अवयव शून्य हैं। अतः, A^{-1} का अस्तित्व नहीं है।

प्रश्न 15: $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

उत्तर 15:

माना, $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ इसलिए, $A = IA$ जहाँ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ है।

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$ [$R_1 \to R_1 + R_2 - R_3$ द्वारा]

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$ [$R_2 \to R_2 - 2R_1$ द्वारा]

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & -5 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -3 & 4 \end{bmatrix} A$ [$R_3 \to R_3 - 3R_1$ द्वारा]

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} A$ [$R_2 \leftrightarrow R_3$ द्वारा]

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3/5 & 3/5 & -4/5 \\ 2/5 & 1/5 & -2/5 \end{bmatrix} A \quad \left[R_2 \to -\tfrac{1}{5}R_2, R_3 \to -\tfrac{1}{5}R_3 \text{ द्वारा}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1/5 & 1/5 & 0 \\ 2/5 & 1/5 & -2/5 \end{bmatrix} A \quad [R_2 \to R_2 - 2R_3 \text{ द्वारा}]$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6/5 & 4/5 & -1 \\ -1/5 & 1/5 & 0 \\ 2/5 & 1/5 & -2/5 \end{bmatrix} A \quad [R_1 \to R_1 - R_2 \text{ द्वारा}]$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/5 & 0 & 3/5 \\ -1/5 & 1/5 & 0 \\ 2/5 & 1/5 & -2/5 \end{bmatrix} A \quad [R_1 \to R_1 - 4R_3 \text{ द्वारा}]$$

अतः, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2/5 & 0 & 3/5 \\ -1/5 & 1/5 & 0 \\ 2/5 & 1/5 & -2/5 \end{bmatrix}$

प्रश्न 16: $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

उत्तर 16:

माना, $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ इसलिए, $A = IA$ जहाँ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ है।

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 9 & -11 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \quad [R_2 \to R_2 + 3R_1 \text{ द्वारा}]$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 9 & -11 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \quad [R_3 \to R_3 - 2R_1 \text{ द्वारा}]$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 9 & -11 \\ 0 & 0 & 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -15 & 1 & 9 \end{bmatrix} A \quad [R_3 \to 9R_3 + R_2 \text{ द्वारा}]$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 9 & -11 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -3/5 & 1/25 & 9/25 \end{bmatrix} A \quad \left[R_3 \to \tfrac{1}{25}R_3 \text{ द्वारा}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -18/5 & 36/25 & 99/25 \\ -3/5 & 1/25 & 9/25 \end{bmatrix} A \quad [R_2 \to R_2 + 11R_3 \text{ द्वारा}]$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/5 & 4/25 & 11/25 \\ -3/5 & 1/25 & 9/25 \end{bmatrix} A \quad \left[R_2 \to \tfrac{1}{9}R_2 \text{ द्वारा}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/5 & 2/25 & 18/25 \\ -2/5 & 4/25 & 11/25 \\ -3/5 & 1/25 & 9/25 \end{bmatrix} A \quad [R_1 \to R_1 + 2R_3 \text{ द्वारा}]$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2/5 & -3/5 \\ -2/5 & 4/25 & 11/25 \\ -3/5 & 1/25 & 9/25 \end{bmatrix} A \qquad [R_1 \to R_1 - 3R_2 \text{ द्वारा}]$$

अतः, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2/5 & -3/5 \\ -2/5 & 4/25 & 11/25 \\ -3/5 & 1/25 & 9/25 \end{bmatrix}$

प्रश्न 17: $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

उत्तर 17:

माना, $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ इसलिए, $A = IA$ जहाँ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ है।

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \qquad [R_1 \to 3R_1 - R_2 \text{ द्वारा}]$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 6 & 15 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -15 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \qquad [R_2 \to R_2 - 5R_1 \text{ द्वारा}]$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 6 & 15 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -15 & 6 & 0 \\ 15 & -6 & 6 \end{bmatrix} A \qquad [R_3 \to 6R_3 - R_2 \text{ द्वारा}]$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 6 & 15 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -15 & 6 & 0 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix} A \qquad \left[R_3 \to \tfrac{1}{3} R_3 \text{ द्वारा}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -90 & 36 & -30 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix} A \qquad [R_2 \to R_2 - 15R_3 \text{ द्वारा}]$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix} A \qquad \left[R_2 \to \tfrac{1}{6} R_2 \text{ द्वारा}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & -7 & 6 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix} A \qquad [R_1 \to R_1 + 3R_3 \text{ द्वारा}]$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix} A \qquad [R_1 \to R_1 + R_2 \text{ द्वारा}]$$

अतः, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

प्रश्न 18:

आव्यूह A तथा B एक दूसरे के व्युत्क्रम होंगे केवल यदि

(A) $AB = BA$ (B) $AB = BA = 0$

(C) $AB = 0, BA = I$ (D) $AB = BA = I$

उत्तर 18:

हम जानते हैं कि $AA^{-1} = I$, इसलिए, $AB = BA = I$, अतः, विकल्प (D) सही है।

गणित

(पाठ – 3) (आव्यूह)

(कक्षा 12)

अध्याय 3 पर विविध प्रश्नावली

प्रश्न 1:

मान लीजिए कि $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ हो तो दिखाइए कि सभी $n \in N$ के लिए $(aI + bA)^n = a^nI + na^{n-1}bA$, जहाँ I कोटि 2 का तत्समक आव्यूह है।

उत्तर 1:

यहाँ, $\mathrm{P}(n): (aI + bA)^n = a^nI + na^{n-1}bA$,

इसलिए, $\mathrm{P}(1): (aI + bA)^1 = aI + bA$

अतः, परिणाम $n = 1$ के लिए सत्य है।

माना, परिणाम $n = k$ के लिए सत्य है। इसलिए, , $\mathrm{P}(k): (aI + bA)^k = a^kI + na^{k-1}bA$

अब हमें सिद्ध करना है कि परिणाम $n = k + 1$ के लिए भी सत्य है। अर्थात

$\mathrm{P}(k + 1): (aI + bA)^{k+1} = a^{k+1}I + (k + 1)a^kbA$

$\mathrm{LHS} = (aI + bA)^{k+1}$

$= (aI + bA)^k(aI + bA)$

$= (a^kI + na^{k-1}bA)(aI + bA)$ $\quad$ $\left[\text{क्योंकि } (aI + bA)^{k+1} = a^kI + na^{k-1}bA\right]$

$= a^{k+1}I^2 + a^kIbA + na^kIbA + na^{k-1}b^2A^2$

$= a^{k+1}I + (k + 1)a^kbA$ $\quad$ $\left[\text{क्योंकि } A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O\right]$

$= \mathrm{RHS}$

अतः, परिणाम $n = k + 1$ के लिए भी सत्य है। गणितीय आगमन के सिद्धांत से प्रमाणित होता है कि $(aI + bA)^n = a^nI + na^{n-1}bA$, समस्त प्राकृत संख्याओं n के लिए सत्य है।

प्रश्न 2:

यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, तो सिद्ध कीजिए कि $A^n = \begin{bmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{bmatrix}, n \in N$

उत्तर 2:

यहाँ, $P(n): A^n = \begin{bmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{bmatrix}$,

इसलिए, $P(1): A^1 = \begin{bmatrix} 3^0 & 3^0 & 3^0 \\ 3^0 & 3^0 & 3^0 \\ 3^0 & 3^0 & 3^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = A$

अतः, परिणाम $n = 1$ के लिए सत्य है।

माना, परिणाम $n = k$ के लिए सत्य है। इसलिए, , $P(k): A^k = \begin{bmatrix} 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \\ 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \\ 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \end{bmatrix}$

अब हमें सिद्ध करना है कि परिणाम $n = k + 1$ के लिए भी सत्य है। अर्थात

$P(k + 1): A^{k+1} = \begin{bmatrix} 3^k & 3^k & 3^k \\ 3^k & 3^k & 3^k \\ 3^k & 3^k & 3^k \end{bmatrix}$

$\mathrm{LHS} = A^{k+1} = A^kA$

$= \begin{bmatrix} 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \\ 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \\ 3^{k-1} & 3^{k-1} & 3^{k-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 3^{k-1}+3^{k-1}+3^{k-1} & 3^{k-1}+3^{k-1}+3^{k-1} & 3^{k-1}+3^{k-1}+3^{k-1} \\ 3^{k-1}+3^{k-1}+3^{k-1} & 3^{k-1}+3^{k-1}+3^{k-1} & 3^{k-1}+3^{k-1}+3^{k-1} \\ 3^{k-1}+3^{k-1}+3^{k-1} & 3^{k-1}+3^{k-1}+3^{k-1} & 3^{k-1}+3^{k-1}+3^{k-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3.3^{k-1} & 3.3^{k-1} & 3.3^{k-1} \\ 3.3^{k-1} & 3.3^{k-1} & 3.3^{k-1} \\ 3.3^{k-1} & 3.3^{k-1} & 3.3^{k-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3^k & 3^k & 3^k \\ 3^k & 3^k & 3^k \\ 3^k & 3^k & 3^k \end{bmatrix}$$

$= \text{RHS}$

अतः, परिणाम $n = k + 1$ के लिए भी सत्य है। गणितीय आगमन के सिद्धांत से प्रमाणित होता है कि $A^n = \begin{bmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{bmatrix}$, समस्त प्राकृत संख्याओं n के लिए सत्य है।

प्रश्न 3:

यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, तो सिद्ध कीजिए कि $A^n = \begin{bmatrix} 1+2n & -4n \\ n & 1-2n \end{bmatrix}$, जहाँ n एक धन पूर्णांक है।

उत्तर 3:

यहाँ, $P(n): A^n = \begin{bmatrix} 1+2n & -4n \\ n & 1-2n \end{bmatrix}$,

इसलिए, $P(1): A^1 = \begin{bmatrix} 1+2(1) & -4(1) \\ 1 & 1-2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = A$

अतः, परिणाम $n = 1$ के लिए सत्य है।

माना, परिणाम $n = k$ के लिए सत्य है। इसलिए, , $P(k): A^k = \begin{bmatrix} 1+2k & -4k \\ k & 1-2k \end{bmatrix}$

अब हमें सिद्ध करना है कि परिणाम $n = k + 1$ के लिए भी सत्य है। अर्थात

$$P(k+1): A^{k+1} = \begin{bmatrix} 1+2(k+1) & -4(k+1) \\ k+1 & 1-2(k+1) \end{bmatrix}$$

$\text{LHS} = A^{k+1} = A^k A$

$$= \begin{bmatrix} 1+2k & -4k \\ k & 1-2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3+6k-4k & -4-8k+4k \\ 3k+1-2k & -4k-1+2k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+(2k+2) & -4k-4 \\ k+1 & 1-(2k+2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+2(k+1) & -4(k+1) \\ k+1 & 1-2(k+1) \end{bmatrix}$$

$= \text{RHS}$

अतः, परिणाम $n = k + 1$ के लिए भी सत्य है। गणितीय आगमन के सिद्धांत से प्रमाणित होता है कि $A^n = \begin{bmatrix} 1+2n & -4n \\ n & 1-2n \end{bmatrix}$, समस्त प्राकृत संख्याओं n के लिए सत्य है।

प्रश्न 4:

यदि A तथा B सममित आव्यूह हैं तो सिद्ध कीजिए कि $AB - BA$ एक विषम सममित आव्यूह है।

उत्तर 4:

$(AB - BA)' = (AB)' - (BA)'$ $\quad [\because (X - Y)' = X' - Y']$

$= B'A' - A'B'$ $\quad [\because (AB)' = B'A']$

$= BA - AB$ $\quad [\because$ दिया है: $A' = A,\ B' = B]$

$= -(AB - BA)$

$\Rightarrow (AB - BA)' = -(AB - BA),$

इसलिए, आव्यूह (AB − BA) एक विषम सममित आव्यूह है।

प्रश्न 5:

सिद्ध कीजिए कि आव्यूह $B'AB$ सममित अथवा विषम सममित है यदि A सममित अथवा विषम सममित है।

उत्तर 5:

यदि A सममित आव्यूह है। तब $A' = A$

यहाँ, $(B'AB)' = (AB)'(B')'$ $\quad [\because (AB)' = B'A']$

$= (AB)'B$ $\quad [\because (B')' = B]$

$= B'A'B$ $\quad [\because (AB)' = B'A']$

$= B'AB$ $\quad [\because$ दिया है: $A' = A]$

$\Rightarrow (B'AB)' = B'AB,$

इसलिए, आव्यूह $B'AB$ एक सममित आव्यूह है।

यदि A विषम सममित आव्यूह है। तब $A' = -A$

यहाँ, $(B'AB)' = (AB)'(B')'$ $\quad [\because (AB)' = B'A']$

$= (AB)'B$ $\quad [\because (B')' = B]$

$= B'A'B$ $\quad [\because (AB)' = B'A']$

$= -B'AB$ $\quad [\because$ दिया है: $A' = -A]$

$\Rightarrow (B'AB)' = -B'AB,$

इसलिए, आव्यूह $B'AB$ एक विषम सममित आव्यूह है।

प्रश्न 6:

x, y तथा z के मानों को ज्ञात कीजिए, यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 0 & 2y & z \\ x & y & -z \\ x & -y & z \end{bmatrix}$ समीकरण $A'A = I$ को संतुष्ट करता है।

उत्तर 6:

दिया है: $A'A = I$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2y & z \\ x & y & -z \\ x & -y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2y & z \\ x & y & -z \\ x & -y & z \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2y & z \\ x & y & -z \\ x & -y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{x} & x \\ 2y & y & -y \\ z & -z & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0+4y^2+z^2 & 0+2y^2-z^2 & 0-2y^2+z^2 \\ 0+2y^2-z^2 & x^2+y^2+z^2 & x^2-y^2-z^2 \\ 0-2y^2+z^2 & x^2-y^2-z^2 & x^2+y^2+z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

यदि दो आव्यूह समान हैं तो उनके संगत अवयव भी समान होते हैं, इसलिए

$4y^2 + z^2 = 1,\quad 2y^2 - z^2 = 0$ तथा $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

हल करने पर, $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, y = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$ तथा $z = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

प्रश्न 7:

x के किस मान के लिए $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ x \end{bmatrix} = O$ है?

उत्तर 7:

दिया है: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ x \end{bmatrix} = O$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1+4+1 & 2+0+0 & 0+2+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ x \end{bmatrix} = O$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ x \end{bmatrix} = O$$

$\Rightarrow [0+4+4x] = [0]$

$\Rightarrow 4+4x = 0 \quad \Rightarrow x = -1$

प्रश्न 8:

यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ हो तो सिद्ध कीजिए कि $A^2 - 5A + 7I = O$ है।

उत्तर 8:

$LHS = A^2 - 5A + 7I$

$= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 9-1 & 3+2 \\ -3-2 & -1+4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 8-15+7 & 5-5+0 \\ -5+5+0 & 3-10+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O = RHS$

प्रश्न 9:

यदि $\begin{bmatrix} x & -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = O$ हो तो x का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर 9:

दिया है: $\begin{bmatrix} x & -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = O$

$$[x \quad -5 \quad -1]\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 2 & 1\\2 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\4\\1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [x+0-2 \quad 0-10+0 \quad 2x-5-3]\begin{bmatrix}x\\4\\1\end{bmatrix} = O$$

$$\Rightarrow [x-2 \quad -10 \quad 2x-8]\begin{bmatrix}x\\4\\1\end{bmatrix} = O$$

$$\Rightarrow [x^2-2x-40+2x-8] = [0]$$

$$\Rightarrow x^2 = 48$$

$$\Rightarrow x = \pm 4\sqrt{3}$$

प्रश्न 10:

एक निर्माता तीन प्रकार की वस्तुएँ x, y तथा z का उत्पादन करता है जिन का वह दो बाजारों में विक्रय करता है। वस्तुओं की वार्षिक बिक्री नीचे सूचित (निदर्शित) है:

बाज़ार	उत्पादन		
	x	y	z
I	10,000	2,000	18,000
II	6,000	20,000	8,000

(a) यदि x, y तथा z की प्रत्येक इकाई का विक्रय मूल्य क्रमशः ₹2.50, ₹1.50 तथा ₹1.00 है तो प्रत्येक बाज़ार में कुल आय (Revenue), आव्यूह बीजगणित की सहायता से ज्ञात कीजिए।

(b) यदि उपर्युक्त तीन वस्तुओं की प्रत्येक इकाई की लागत (Cost) क्रमशः ₹2.00, ₹1.00 तथा 50 पैसे है तो कुल लाभ (Gross profit) ज्ञात कीजिए।

उत्तर 10:

(a) यदि x, y तथा z की प्रत्येक इकाई का विक्रय मूल्य क्रमशः ₹2.50, ₹1.50 तथा ₹1.00 है तो

$$\begin{array}{ll} & \text{वस्तुएँ} \\ & \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{array}{l}\text{बाजार I}\\ \text{बाजार II}\end{array} & \begin{bmatrix}10000 & 2000 & 18000\\ 6000 & 20000 & 8000\end{bmatrix}\end{array} \qquad \begin{array}{c}\text{विक्रय मूल्य}\\ \begin{bmatrix}₹2.50\\ ₹1.50\\ ₹1.00\end{bmatrix}\end{array}$$

प्रत्येक बाज़ार में कुल आय

$$= \begin{bmatrix}10000 & 2000 & 18000\\ 6000 & 20000 & 8000\end{bmatrix}\begin{bmatrix}₹2.50\\ ₹1.50\\ ₹1.00\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}₹25000 + ₹3000 + ₹18000\\ ₹15000 + ₹30000 + ₹8000\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}₹46000\\ ₹53000\end{bmatrix}$$

अतः, बाज़ार I में कुल आय ₹46000 तथा बाज़ार II में कुल आय ₹53000 है।

(b) यदि x, y तथा z की प्रत्येक इकाई की लागत क्रमशः ₹2.00, ₹1.00 तथा 50 पैसे है तो

$$\begin{array}{ll} & \text{वस्तुएँ} \\ & \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{array}{l}\text{बाजार I}\\ \text{बाजार II}\end{array} & \begin{bmatrix}10000 & 2000 & 18000\\ 6000 & 20000 & 8000\end{bmatrix}\end{array} \qquad \begin{array}{c}\text{लागत}\\ \begin{bmatrix}₹2.00\\ ₹1.00\\ ₹0.50\end{bmatrix}\end{array}$$

प्रत्येक बाज़ार में कुल लागत

$$= \begin{bmatrix}10000 & 2000 & 18000\\ 6000 & 20000 & 8000\end{bmatrix}\begin{bmatrix}₹2.00\\ ₹1.00\\ ₹0.50\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}₹20000 + ₹2000 + ₹9000\\ ₹12000 + ₹20000 + ₹4000\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}₹31000\\ ₹36000\end{bmatrix}$$

बाज़ार I में कुल आय ₹46000 तथा कुल लागत ₹31000 है।
अतः, कुल लाभ = आय – लागत = ₹46000 – ₹31000 = ₹15000
बाज़ार II में कुल आय ₹53000 तथा कुल लागत ₹36000 है।
अतः, कुल लाभ = आय – लागत = ₹53000 – ₹36000 = ₹17000

प्रश्न 11:

आव्यूह X ज्ञात कीजिए, यदि $X\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-7 & -8 & -9\\2 & 4 & 6\end{bmatrix}$ है।

उत्तर 11:

माना, $X = \begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$

इसलिए, $X\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-7 & -8 & -9\\2 & 4 & 6\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-7 & -8 & -9\\2 & 4 & 6\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix}a+4b & 2a+5b & 3a+6b\\c+4d & 2c+5d & 3c+6d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-7 & -8 & -9\\2 & 4 & 6\end{bmatrix}$

यदि दो आव्यूह समान हैं तो उनके संगत अवयव भी समान होते हैं, इसलिए

$a + 4b = -7, \quad 2a + 5b = -8, c + 4d = 2$ तथा $2c + 5d = 4$

हल करने पर, $a = 1, b = -2, c = 2$ तथा $d = 0$

इसलिए, $X = \begin{bmatrix}1 & -2\\2 & 0\end{bmatrix}$

प्रश्न 12:

यदि A तथा B समान कोटि के वर्ग आव्यूह इस प्रकार हैं कि $AB = BA$ है तो गणितीय आगमन द्वारा सिद्ध कीजिए कि $AB^n = B^nA$ होगा। इसके अतिरिक्त सिद्ध कीजिए कि समस्त $n \in N$ के लिए $(AB)^n = A^nB^n$ होगा।

उत्तर 12:

यहाँ, $P(n): AB^n = B^nA$,
इसलिए, $P(1): AB = BA$
अतः, परिणाम $n = 1$ के लिए सत्य है।
माना, परिणाम $n = k$ के लिए सत्य है। इसलिए, , $P(k): AB^k = B^kA$
अब हमें सिद्ध करना है कि परिणाम $n = k + 1$ के लिए भी सत्य है। अर्थात
$P(k+1): AB^{k+1} = B^{k+1}A$
LHS = AB^{k+1}
$= AB^kB$
$= B^kAB$ $\quad$ [क्योंकि $AB^k = B^kA$]
$= B^kBA$ $\quad$ [क्योंकि $AB = BA$]
$= B^{k+1}A =$ RHS
अतः, परिणाम $n = k + 1$ के लिए भी सत्य है। गणितीय आगमन के सिद्धांत से प्रमाणित होता है कि $AB^n = B^nA$, समस्त प्राकृत संख्याओं n के लिए सत्य है।
यदि $(AB)^n = A^nB^n$

यहाँ, $P(n): (AB)^n = A^n B^n$, इसलिए, $P(1): (AB)^1 = A^1 B^1$
अतः, परिणाम $n = 1$ के लिए सत्य है।
माना, परिणाम $n = k$ के लिए सत्य है। इसलिए, , $P(k): (AB)^k = A^k B^k$
अब हमें सिद्ध करना है कि परिणाम $n = k + 1$ के लिए भी सत्य है। अर्थात
$P(k+1): (AB)^{k+1} = A^{k+1} B^{k+1}$
$\text{LHS} = (AB)^{k+1}$
$= (AB)^k AB$
$= A^k B^k AB$ [क्योंकि $(AB)^k = A^k B^k$]
$= A^k AB^k B$ [क्योंकि $AB = BA$]
$= A^{k+1} B^{k+1} = \text{RHS}$
अतः, परिणाम $n = k + 1$ के लिए भी सत्य है। गणितीय आगमन के सिद्धांत से प्रमाणित होता है कि $(AB)^n = A^n B^n$, समस्त प्राकृत संख्याओं n के लिए सत्य है।

निम्नलिखित प्रश्नों में सही उत्तर चुनिए:

प्रश्न 13:

यदि $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{bmatrix}$ इस प्रकार है कि $A^2 = I$, तो

(A) $1 + \alpha^2 + \beta\gamma = 0$ (B) $1 - \alpha^2 + \beta\gamma = 0$
(C) $1 - \alpha^2 - \beta\gamma = 0$ (D) $1 + \alpha^2 - \beta\gamma = 0$

उत्तर 13:

दिया है: $A^2 = I$
$\Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha^2 + \beta\gamma & \alpha\beta - \beta\alpha \\ \alpha\gamma - \alpha\gamma & \beta\gamma + \alpha^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
तुलना करने पर, $\alpha^2 + \beta\gamma = 1$, अतः, विकल्प (C) सही है।

प्रश्न 14:

यदि एक आव्यूह सममित तथा विषम सममित दोनों ही है तो:

(A) A एक विकर्ण आव्यूह है। (B) A एक शून्य आव्यूह है।
(C) A एक वर्ग आव्यूह है। (D) इनमें से कोई नहीं।

उत्तर 14:

एक शून्य आव्यूह ही सममित तथा विषम सममित दोनों प्रकार का होता है।
अतः, विकल्प (B) सही है।

प्रश्न 15:

यदि A एक वर्ग आव्यूह इस प्रकार है कि $A^2 = A$, तो $(I + A)^3 - 7A$ बराबर है:

(A) A (B) $I - A$ (C) I (D) $3A$

उत्तर 15:

$(I + A)^3 - 7A = I^3 + A^3 + 3I^2A + 3IA^2 - 7A$
$= I + A^2A + 3IA + 3IA^2 - 7A$ [क्योंकि $I^3 = I^2 = I$]
$= I + AA + 3A + 3IA - 7A$ [क्योंकि $A^2 = A$]
$= I + A + 3A + 3A - 7A = I$ [क्योंकि $IA = A$]
अतः, विकल्प (C) सही है।