Application of Derivative

अध्याय 6

अवकलज के अनुप्रयोग

प्रश्नावली 6.1

प्रश्न 1. वृत्त के क्षेत्रफलन के परिवर्तन की दर इसकी त्रिज्या r के सापेक्ष ज्ञात कीजिए जबकि

(i) $r = 3$ सेमी है। (ii) $r = 4$ सेमी है।

हल मान लीजिए कि A वृत्त का क्षेत्रफल निरूपित करता है जब वृत्त की त्रिज्या r है, तब $A = \pi r^2$

अब, क्षेत्रफल के परिवर्तन की दर इसकी त्रिज्या r के सापेक्ष हो जाती है।

$$\frac{dA}{dr} = \frac{d}{dr}(\pi r^2) = 2\pi r$$

(i) जब $r = 3$ सेमी, $\left(\frac{dA}{dr}\right)_{r=3} = 2\pi(3) = 6\pi$ सेमी^{2} प्रति सेमी

इसलिए, वृत्त का क्षेत्रफल 6 सेमी^{2}/सेमी की दर से परिवर्तित हो रहा है। जब इसकी त्रिज्या 3 सेमी है।

(ii) जब $r = 4$ सेमी, $\left(\frac{dA}{dr}\right)_{r=4} = 2\pi(4) = 8\pi$ सेमी^{2}/सेमी

इसलिए जब वृत्त की त्रिज्या 4 सेमी हो, तो वृत्त का क्षेत्रफल 8 सेमी^{2}/सेमी की दर से परिवर्तित हो रहा है।

प्रश्न 2. एक घन का आयतन 8 सेमी^{3}/से की दर से बढ़ रहा है। पृष्ठ क्षेत्रफल किस दर से बढ़ रहा है, जबकि इसके कोर की लंबाई 12 सेमी है?

(a) सूत्र $V = a^3$ का अवकलन करके घन की कोर की दर परिवर्तन ज्ञात कीजिए।

(b) पृष्ठ क्षेत्रफल तथा घन, के मध्य संबंध का अवकलन करके $\frac{da}{dt}$ का प्रयोग कीजिए।

हल मान लीजिए कि घन के कोर की लंबाई x है, आयतन V है और पृष्ठ क्षेत्रफल S है।

$\therefore$ $V = x^3$ और $S = 6x^2$ ($\because$ वर्ग के 6 वर्ग फलक होते हैं जिसकी प्रत्येक भुजा x है।)

जहाँ, x समय t का फलन है।

यह दिया गया है कि $\frac{dV}{dt} = 8$ सेमी^{3}/से

तब, शृंखला नियम का प्रयोग करने पर,

$$8 = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(x^3) = 3x^2\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{8}{3x^2} \quad \ldots(i)$$

अब, $$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}(6x^2) = 12x\frac{dx}{dt}$$

$\Rightarrow$ $$\frac{dS}{dt} = 12x\left(\frac{8}{3x^2}\right) = \frac{32}{x}$$ [समी (i) से]

जब $x = 12$ सेमी, $\frac{dS}{dt} = \frac{32}{12}$ सेमी^{2}/से $\Rightarrow$ $\frac{dS}{dt} = \frac{8}{3}$ सेमी^{2}/से

अतः यदि घन के कोर की लंबाई 12 सेमी है, तब पृष्ठ क्षेत्रफल $\frac{8}{3}$ सेमी^{2}/से की दर से बढ़ रहा है।

प्रश्न 3. एक वृत्त की त्रिज्या समान रूप से 3 सेमी/से की दर से बढ़ रही है। ज्ञात कीजिए कि वृत्त का क्षेत्रफल किस दर से बढ़ रहा है जब त्रिज्या 10 सेमी है?

हल मान लीजिए कि t समय पर वृत्त की त्रिज्या r है और वृत्त का क्षेत्रफल A है,

वृत्त A का क्षेत्रफल = πr^2

अब, समय t के सापेक्ष क्षेत्रफल A के परिवर्तन की दर इस प्रकार दी जाती है।

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}(\pi r^2) = 2\pi r\frac{dr}{dt}$$ (श्रृंखला नियम से)

यह दिया गया है कि वृत्त की त्रिज्या 3 सेमी/से की दर से बढ़ रही है।

$\therefore$ अतः $\frac{dr}{dt} = 3$ सेमी/से $\qquad \frac{dA}{dt} = 2\pi r(3) = 6\pi r$ सेमी^{2}/से

इसलिए, जब $r = 10$ सेमी; $\qquad \frac{dA}{dt} = 6\pi(10) = 60\pi$ सेमी^{2}/से

अतः, जब वृत्त की त्रिज्या 10 सेमी है, तो वृत्त का क्षेत्रफल 60π सेमी^{2}/से की दर से बढ़ रहा है।

प्रश्न 4. एक परिवर्तनशील घन की कोर 3 सेमी/से की दर से बढ़ रही है। घन का आयतन किस दर से बढ़ रहा है, जबकि कोर 10 सेमी लंबी है?

हल मान लीजिए घन की कोर की लंबाई x है, और आयतन V है, तब $V = x^3$

$\therefore$ समय के सापेक्ष आयतन के परिवर्तन की दर,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(x^3) = 3x^2\frac{dx}{dt}$$ (श्रृंखला नियम से)

यह दिया गया है कि घन की कोर 3 सेमी/से की दर से बढ़ रही है।

$\therefore$ $\qquad \frac{dx}{dt} = 3$ सेमी/से $\quad \therefore \quad \frac{dV}{dt} = 3x^2(3) = 9x^2$ सेमी^{3}/से

इसलिए, जब $x = 10$ सेमी, $\frac{dV}{dt} = 9 \times (10)^2 = 900$

अतः जब कोर की लंबाई 10 सेमी है, तो घन का आयतन 900 सेमी^{3}/से की दर से बढ़ रहा है।

प्रश्न 5. एक स्थिर झील में एक पत्थर डाला जाता है ओर तरगें वृत्तों में 5 सेमी/से की गति से चलती हैं। जब वृत्ताकार तरंग की त्रिज्या 8 सेमी है, तो उस क्षण, तंरग द्वारा घिरा हुआ क्षेत्रफल किस दर से बढ़ रहा है?

वृत्त का क्षेत्रफल और इसकी त्रिज्या के मध्य सूत्र $A = \pi r^2$ का अनुप्रयोग कीजिए।

अब, समय t के सापेक्ष दोनों ओर का अवकलन करके अभीष्ट परिणाम ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि वृत्ताकार तरंग की त्रिज्या r है और क्षेत्रफल A है।

तब, $A = \pi r^2$

इसलिए समय (t) के सापेक्ष क्षेत्रफल (A) के परिवर्तन की दर इस प्रकार दी जाती है।

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}(\pi r^2) \quad \Rightarrow \quad \frac{dA}{dt} = 2\pi r\frac{dr}{dt} \qquad \text{(शृंखला नियम से)}$$

यह दिया गया है कि तरंगें 5 सेमी/से की गति से वृत्तों में चलती हैं।

$$\therefore \quad \frac{dr}{dt} = 5 \text{ सेमी/से} \quad \therefore \quad \frac{dA}{dt} = 2\pi r \times 5 = 10\pi r \text{ सेमी}^2\text{/से}$$

इसलिए, जब $r = 8$ सेमी, $\frac{dA}{dt} = 10\pi(8) = 80\pi$ सेमी^{2}/से

अत: जब वृत्ताकार तरंग की त्रिज्या 8 सेमी है। तरंग द्वारा घिरा हुआ क्षेत्रफल 80π सेमी^{2}/से की दर से बढ़ रहा है।

प्रश्न 6. एक वृत्त की त्रिज्या 0.7 सेमी/से की दर से बढ़ रही है। इसकी परिधि की वृद्धि की दर क्या है जब $r = 4.9$ सेमी है?

वृत्त की परिधि और त्रिज्या के मध्य सूत्र $c = 2\pi r$ का अनुप्रयोग कीजिए।

अब, समय t के सापेक्ष दोनों ओर का अवकलन करके अभीष्ट परिणाम ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए समय (t) पर वृत्त की त्रिज्या r है और इसकी परिधि c है।

तब, $c = 2\pi r$

परिधि की वृद्धि की दर, $\frac{dc}{dt} = 2\pi\frac{dr}{dt}$ (t के सापेक्ष अवकलन करने पर, शृंखला नियम द्वारा)

जहाँ, $\frac{dr}{dt}$ त्रिज्या की वृद्धि की दर है।

$$\therefore \quad \frac{dr}{dt} = 0.7 \text{ सेमी/से}$$

$$\frac{dc}{dt} = 2\pi(0.7) \text{ सेमी/से} = 1.4\pi \text{ सेमी/से} \qquad \left(\because \frac{dr}{dt} = 0.7 \text{ सेमी/से, दिया है}\right)$$

$\therefore$ अत:, परिधि की वृद्धि की दर $1.4\,\pi$ सेमी/से है।

प्रश्न 7. एक आयत की लंबाई x, 5 सेमी/मिनट की दर से घट रही है और चौड़ाई y, 4 सेमी/मिनट की दर से बढ़ रही है। जब $x = 8$ सेमी और $y = 6$ सेमी है, तब आयत के (a) परिमाप (b) क्षेत्रफल के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि किसी समय t पर, आयत की लंबाई, चौड़ाई, परिमाप और क्षेत्रफल क्रमशः x, y, P और A है, तब $P = 2(x + y)$ और $A = xy$ ...(i)

आयत का परिमाप = 2(लंबाई + चौड़ाई) और क्षेत्रफल = लंबाई × चौड़ाई

यह दिया है कि $\frac{dx}{dt} =$ 5 सेमी/मिनट (-ve चिन्ह दर्शाता है कि लंबाई घट रही है)

और $\frac{dy}{dt} = 4$ सेमी/मिनट

(a) अब, $P = 2(x + y)$

t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

परिमाप के परिवर्तन की दर $\frac{dP}{dt} = 2\left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\right)$

$= 2(-5 + 4)$ सेमी/मिनट $= -2$ सेमी/मिनट $\left(\because \frac{dx}{dt} = -5 \text{ और } \frac{dy}{dt} = 4\right)$

अतः, आयत का परिमाप 2 सेमी/मिनट की दर से घट (-ve चिन्ह) रहा है।

(b) यहाँ, आयत का क्षेत्रफल $A = xy$,

t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

क्षेत्रफल के परिवर्तन की दर $\frac{dA}{dt} = x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt}$

$\Rightarrow \quad \frac{dA}{dt} = 8 \times 4 + 6 \times (-5) \quad \left(\because \frac{dx}{dt} = \quad 5 \text{ और } \frac{dy}{dt} = 4\right)$

$= 32 - 30 = 2$ सेमी^{2}/मिनट

अतः, आयत का क्षेत्रफल 2 सेमी^{2}/मिनट की दर से बढ़ रही है।

नोट *यदि परिवर्तन की दर बढ़ रही है, तो हम (+ ve चिन्ह) लेते हैं ओर यदि परिवर्तन की दर घट रही है, तो हम (− ve चिन्ह) लेते हैं।*

प्रश्न 8. एक गुब्बारा जो सदैव गोलाकार रहता है, एक पंप द्वारा 900 सेमी^{3} प्रति सेकण्ड गैस भरकर फुलाया जाता है। गुब्बारे की त्रिज्या के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए जब त्रिज्या 15 सेमी है।

हल मान लीजिए कि किसी समय t पर गुब्बारे की त्रिज्या r है और आयतन V है, तब गुब्बारे का आयतन $V = \left(\frac{4}{3}\right)\pi r^3$

गुब्बारे को एक पंप द्वारा 900 सेमी^{3} प्रति सेकण्ड गैस भरकर फुलाया जाता है।

दिया है, समय t के सापेक्ष आयतन के परिवर्तन की दर 900 सेमी^{2}/से है

t के सापेक्ष आयतन (V) का अवकलन करने पर आयतन के परिवर्तन की दर $\frac{dV}{dt} = \left(\frac{4}{3}\pi\right)\left(3r^2\frac{dr}{dt}\right)$ है जब $r = 15$ सेमी, तो $900 = \left(\frac{4}{3}\pi\right)\left\{3 \times (15)^2\frac{dr}{dt}\right\}$

$$\Rightarrow \quad \frac{dr}{dt} = \frac{900}{3 \times (15)^2} \times \frac{3}{4\pi}$$

⇒ त्रिज्या (r) के परिवर्तन की दर

$$\frac{dr}{dt} = \frac{900}{4\pi \times (15)^2} = \frac{225}{\pi \times 225} \; ; \quad \frac{dr}{dt} = \frac{1}{\pi} \text{ सेमी/से}$$

अत: जब गुब्बारे की त्रिज्या 15 सेमी है, तो गुब्बारे की त्रिज्या $\frac{1}{\pi}$ सेमी/से की दर से बढ़ रही है।

प्रश्न 9. एक गुब्बारा जो सदैव गोलाकार रहता है, की त्रिज्या परिवर्तनशील है। त्रिज्या के सापेक्ष आयतन के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए जब त्रिज्या 10 सेमी है।

हल मान लीजिए कि गोलाकार गुब्बारे की त्रिज्या r और आयतन V है।

तब, $r = 10$ सेमी और $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

त्रिज्या r के सापेक्ष आयतन के परिवर्तन की दर $\frac{dV}{dr} = \left(\frac{4}{3}\pi\right)3r^2$ (r के सापेक्ष अवकलन करने पर)

$$= 4\pi r^2 = 4\pi(10)^2 = 400\pi \qquad (\because r = 10 \text{ सेमी})$$

अत: गुब्बारे का आयतन 400π सेमी^{3}/सेमी की दर से बढ़ रहा है।

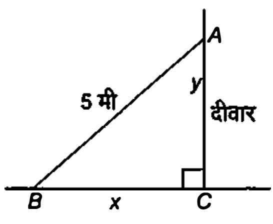
प्रश्न 10. एक 5 मी लंबी सीढ़ी दीवार के सहारे झुकी है। सीढ़ी का नीचे का सिरा, जमीन के अनुदिश, दीवार से दूर 2 सेमी/से की दर से खींचा जाता है। दीवार पर इसकी ऊँचाई किस दर से घट रही है जबकि सीढी के नीचे का सिरा दीवार से 4 मी दूर है?

सीढ़ी, जो दीवार के सहारे झुकी होती है, समकोण त्रिभुज का निर्माण करती है। सीढ़ी की लंबाई = त्रिभुज का कर्ण, त्रिभुज का आधार = सीढ़ी के पाद से दीवार की दूरी,

त्रिभुज की ऊँचाई = सीढ़ी के ऊपरी भाग से जमीन की दूरी

समीकरण बनाने के लिए पाइथागोरस प्रमेय का अनुप्रयोग करें और तब अवकलन करें।

हल मान लीजिए $AB = 5$ मी सीढ़ी की लंबाई है और y दीवार की ऊँचाई है जिस पर सीढ़ी झुकी है और सीढ़ी का पाद B पर है, जहाँ से C की दूरी (दीवार से) x है।



दिया गया है कि सीढ़ी का नीचे का सिरा जमीन के अनुदिश, दीवार से दूर 2 सेमी/से की दर से खींचा जाता है।

$\therefore \qquad \frac{dx}{dt} = 2$ सेमी/से

जैसा कि हम जानते हैं कि ΔABC समकोण त्रिभुज है, इसलिए पाइथागोरस प्रमेय द्वारा,

$$x^2 + y^2 = 5^2 \qquad \ldots(i)$$

जब $x = 4$, तब $\qquad y^2 = 5^2 - 4^2 \Rightarrow y = \sqrt{25 - 16} \quad \Rightarrow \quad y = 3$ मी

समी (i) को समय (t) के सापेक्ष दोनों ओर का अवकलन करने पर,

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = 0$$

$\Rightarrow \qquad 4 \times 2 + 3 \times \frac{dy}{dt} = 0 \qquad \left(\because \; x = 4 \text{ और } \frac{dx}{dt} = 2\right)$

$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{-8}{3}$

$\Rightarrow$ दीवार पर सीढ़ी की ऊँचाई $\frac{dy}{dt} = \frac{-8}{3}$ सेमी/से की दर से घट रही है।

(ऋणात्मक चिन्ह यह दर्शाता है कि दीवार पर सीढ़ी की ऊँचाई $\frac{8}{3}$ सेमी/से की दर से घट रही है)

प्रश्न 11. **एक कण वक्र $6y = x^3 + 2$ के अनुगत गति कर रहा है। वक्र पर उन बिंदुओं को ज्ञात कीजिए जबकि x -निर्देशांक की तुलना में y -निर्देशांक 8 गुना तीव्रता से बदल रहा है।**

समय (t) के सापेक्ष x-निर्देशांक और y-निर्देशांक के परिवर्तन की दर $\frac{dx}{dt}$ और $\frac{dy}{dt}$ है और $\frac{dy}{dt} = 8\frac{dx}{dt}$ का अनुप्रयोग कीजिए।

हल दिया है, $6y = x^3 + 2$ और $\frac{dy}{dt} = 8\frac{dx}{dt}$

t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$6\frac{dy}{dt} = 3x^2\frac{dx}{dt} \Rightarrow 6 \times 8\frac{dx}{dt} = 3x^2\frac{dx}{dt}$$

$\Rightarrow \qquad 3x^2 = 48 \Rightarrow x^2 = 16, x = \pm 4$

जब $x = 4$, तब $6y = (4)^3 + 2 \Rightarrow 6y = 64 + 2 \Rightarrow y = \frac{66}{6} = 11$

जब $x = -4$, तब $6y = (-4)^3 + 2 \Rightarrow 6y = -64 + 2$

$\Rightarrow \qquad y = \frac{-62}{6} = \frac{-31}{3}$

अतः वक्र पर बिंदु (4, 11) और $\left(-4, \frac{-31}{3}\right)$ हैं।

प्रश्न 12. **हवा के एक बुलबुले की त्रिज्या $\frac{1}{2}$ सेमी/से की दर से बढ़ रही है। बुलबुले का आयतन किस दर से बढ़ रहा है, जबकि त्रिज्या 1 सेमी है?**

हल हवा का बुलबुला गोले के आकार का है।

मान लीजिए कि बुलबुले की त्रिज्या r है और गोले का आयतन V है।

दिया है किसी समय t पर तब त्रिज्या के परिवर्तन की दर, $\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2}$ सेमी/से और $r = 1$ सेमी

अब, गोले का आयतन, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

आयतन की बढ़ती दर,

$$\frac{dV}{dt} = \left(\frac{4}{3}\pi\right)\left(3r^2\frac{dr}{dt}\right) = 4\pi r^2\frac{dr}{dt} = 4\pi(1)^2\frac{1}{2} \qquad \left(r = 1 \text{ और } \frac{dr}{dt} = \frac{1}{2}\right)$$

$$= 2\pi \text{ सेमी}^3\text{/से}$$

अतः, बुलबुले का आयतन 2π सेमी^{3}/से की दर से बढ़ रहा है।

प्रश्न 13. एक गुब्बारा, जो सदैव गोलाकार रहता है, का परिवर्तनशील व्यास $\frac{3}{2}(2x+1)$ है। x के सापेक्ष आयतन के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए।

गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi$ (त्रिज्या)^3 सूत्र का अनुप्रयोग करके गोले के आयतन $= \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\text{व्यास}}{2}\right)^3$ का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए।

हल दिया है, गुब्बारे का व्यास $= \frac{3}{2}(2x+1)$

$\therefore$ त्रिज्या $= \frac{\text{व्यास}}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}(2x+1)\right] = \frac{3}{4}(2x+1)$

$\therefore$ $V = \frac{4}{3}\pi(\text{त्रिज्या})^3 = \frac{4}{3}\pi\left[\frac{3}{4}(2x+1)\right]^3 \Rightarrow V = \frac{9\pi}{16}(2x+1)^3$

आयतन के परिवर्तन की दर के लिए, x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dV}{dx} = \frac{9\pi}{16} \times 3(2x+1)^2 \times 2 = \frac{27\pi}{8}(2x+1)^2$$

अतः, आयतन के परिवर्तन की दर $\frac{27\pi}{8}(2x+1)^2$ है।

प्रश्न 14. एक पाइप से रेत 12 सेमी^{2}/से की दर से गिर रही है। गिरती रेत जमीन पर एक ऐसा शंकु बनाती है जिसकी ऊँचाई सदैव आधारा की त्रिज्या का छठा भाग है। रेत से बने शंकु की ऊँचाई किस दर से बढ़ रही है जबकि ऊँचाई 4 सेमी है?

हल मान लीजिए कि त्रिज्या r, ऊँचाई h और आयतन V है।

यह दिया है, $\frac{dV}{dt} = 12$ सेमी^{3}/से और $h = \frac{1}{6}r \Rightarrow r = 6h$

अब, $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(6h)^2 h = 12\pi h^3$

t के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{dV}{dt} = (12\pi)\left(3h^2\frac{dh}{dt}\right) = 36\pi h^2\frac{dh}{dt}$

$\therefore$ $$12 = 36\pi(4)^2\frac{dh}{dt} \qquad \left(\because h = 4 \text{ सेमी और } \frac{dV}{dt} = 12 \text{ सेमी/से}\right)$$

$\Rightarrow$ $$\frac{dh}{dt} = \frac{12}{36\pi \times 16} = \frac{1}{48\pi} \text{ सेमी/से}$$

अतः जब ऊँचाई 4 सेमी है, तो रेत से बने शंकु की ऊँचाई $\frac{1}{48\pi}$ सेमी/से की दर से बढ़ रही है।

प्रश्न 15. **एक वस्तु की x इकाइयों के उत्पादन से संबंधित कुल लागत $c(x)$ (₹ में) $c(x) = 0.007x^3 - 0.003x^2 + 15x + 4000$ से प्रदत्त है।**

सीमांत लागत ज्ञात कीजिए, जबकि 17 इकाइयों का उत्पादन किया गया है।

सीमांत लागत परिणाम के सापेक्ष कुल लागत के परिवर्तन की दर है।

हल सीमांत लागत $= \frac{dc}{dt}$

$$\frac{dc}{dt} = 0.007(3x^2) - 0.003(2x) + 15 = 0.021x^2 - 0.006x + 15$$

जब $x = 17$, सीमांत लागत $= 0.021(17)^2 - 0.006(17) + 15$

$= 0.021(289) - 0.006(17) + 15 = 6.069 - 0.102 + 15 = 20.967$

अतः जब 17 इकाइयों का उत्पादन किया गया है, तो सीमांत लागत ₹ 20.967 है।

प्रश्न 16. **किसी उत्पाद की x इकाइयों के विक्रय से प्राप्त कुल आय $R(x)$ रुपयों में $R(x) = 13x^2 + 26x + 15$ से प्रदत्त है। सीमांत आय ज्ञात कीजिए जब $x = 7$ है।**

सीमांत आय इकाइयों की संख्या के विक्रय के सापेक्ष कुल आय के परिवर्तन की दर है।

हल सीमांत आय $= \frac{dR}{dx} = \frac{d}{dx}(13x^2 + 26x + 15) = 13 \times 2x + 26 = 26x + 26$

जब $x = 7$, तो सीमांत आय $= 26(7) + 26 = 182 + 26 = 208$;

अतः सीमांत आय ₹ 208 है।

निर्देश (प्र.सं. 17-18) निम्नलिखित प्रश्नों में सही उत्तर का चयन कीजिए।

प्रश्न 17. **एक वृत्त की त्रिज्या $r = 6$ सेमी है, r के सापेक्ष क्षेत्रफल में परिवर्तन की दर है**

(a) 10π (b) 12π (c) 8π (d) 11π

हल (b) यदि वृत्त की त्रिज्या r और वृत्त का क्षेत्रफल A है तब $A = \pi r^2$

r के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$

$r = 6$ रखने पर, $\frac{dA}{dr} = 2\pi(6) = 12\pi$ सेमी^{2}/सेमी

अतः, r के सापेक्ष क्षेत्रफल में परिवर्तन की दर 12 सेमी^{2}/सेमी है।

प्रश्न 18. एक उत्पाद की x इकाइयों के विक्रय से प्राप्त कुल आय रुपयों में $R(x) = 3x^2 + 36x + 5$ से प्रदत्त है। जब $x = 15$ है तो सीमांत आय है:

(a) 116 (b) 96 (c) 90 (d) 126

हल (b) दिया है, $R(x) = 3x^2 + 36x + 5$

$\therefore$ सीमांत आय $= \frac{dR}{dx}$; $\frac{dR}{dx} = 3 \times 2x + 36 = 6x + 36$

जब $x = 15$, तो सीमांत आय $= 6 \times 15 + 36 = 126$

अत: सीमांत आय = ₹ 126

प्रश्नावली 6.2

प्रश्न 1. सिद्ध कीजिए R पर $f(x) = 3x + 17$ से प्रदत्त फलन निरंतर वर्धमान है।

जब $f(x)$ वर्धमान है, तब $f'(x) \geq 0$ और जब $f(x)$ निरंतर वर्धमान है, तब $f'(x) > 0$

हल मान लीजिए कि R में, x_1 और x_2 कोई दो संख्याएँ हैं, जहाँ $x_1 < x_2$

तब, $f(x) = 3x + 17 \Rightarrow f(x_1) = 3x_1 + 17$

और $f(x_2) = 3x_2 + 17$ [$\because f(x) = 3x + 17$, दिया है]

अब, हम देखते हैं कि $f(x_1) < f(x_2)$ अत: R पर f निरंतर वर्धमान है।

वैकल्पिक विधि

दिया है, $f(x) = 3x + 17$, x के सापेक्ष अवकलन करने पर $f'(x) = 3 > 0$

अत: R के प्रत्येक अन्तराल पर फलन निरंतर वर्धमान है।

प्रश्न 2. सिद्ध कीजिए कि R पर $f(x) = e^{2x}$ से प्रदत्त फलन निरंतर वर्धमान है।

हल मान लीजिए R पर, x_1 और x_2 दो संख्याएँ हैं

जहाँ, $x_1 < x_2$

दिया है, $f(x) = e^{2x}$

तब, $x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_2 \Rightarrow e^{2x_1} < e^{2x_2} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

अत: R पर f निरंतर वर्धमान है।

वैकल्पिक विधि

दिया है, $f(x) = e^{2x}$

x के सापेक्ष दोनों ओर का अवकलन करने पर, $\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}(e^{2x}) = f'(x) = 2e^{2x}$

(i) जब $x > 0$, तब $2e^{2x} = 2\left[1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \ldots\right] > 0 \quad \therefore \; f'(x) > 0$

(ii) जब $x = 0$, तब $2e^{2x} = 2 \times 1 = 2$; $\quad 2 > 0 \;\therefore\; f'(x) > 0$

(iii) जब $x < 0$, तब $2e^{2x} = 2e^{2(-z)}$; $\;2e^{-2z} = \frac{2}{e^{2z}}$

$$= \frac{2}{\left[1 + 2z + \frac{(2z)^2}{2!} + \ldots\right]} > 0 \;\therefore\; f'(x) > 0$$

अतः, x के प्रत्येक मान के लिए, $f'(x) > 0$

इसलिए $f(x)$, R पर निरंतर वर्धमान फलन है।

प्रश्न 3. सिद्ध कीजिए $f(x) = \sin x$ से प्रदत्त फलन

(i) $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में निरंतर वर्धमान है **(ii) $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ में निरंतर ह्रासमान है**

(iii) $(0, \pi)$ में न तो वर्धमान है और न ही ह्रासमान है।

$f(x)$ अंतराल (a, b) में निरंतर वर्धमान है, यदि $f'(x) > 0$ और अंतराल (a, b) में निरंतर ह्रासमान है, यदि $f'(x) < 0$

हल दिया गया फलन $f(x) = \sin x$ है।

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$f'(x) = \cos x$$

(i) अतः प्रत्येक $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ के लिए $\cos x > 0$ $\;(\because \cos x$ प्रथम चतुर्थांश में धनात्मक है)

$$f'(x) > 0$$

इसलिए, f, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में निरंतर वर्धमान है।

(ii) अतः, प्रत्येक $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ के लिए $\cos x < 0$ $\;(\because \cos x$ द्वितीय चतुर्थांश में ऋणात्मक है)

$$\Rightarrow \quad f'(x) < 0$$

इसलिए, f, $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ में निरंतर ह्रासमान है।

(iii) जब $x \in (0, \pi)$ हम देखते हैं कि $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में $f'(x) > 0$ और $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ में $f'(x) < 0$

इसलिए $f'(x)$, $(0, \pi)$ में धनात्मक और ऋणात्मक है।

इसलिए $(0, \pi)$ में $f(x)$ न तो वर्धमान है और न ही ह्रासमान है।

प्रश्न 4. अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = 2x^2 - 3x$ से प्रदत्त फलन f

(i) निरंतर वर्धमान (ii) निरंतर ह्रासमान

हल दिया है, $f(x) = 2x^2 - 3x$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $f'(x) = 4x - 3$

$f'(x) = 0$ रखने पर,

$$4x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3/4$$

बिंदु $x = 3/4$, वास्तविक रेखा को दो अलग अंतराल में विभाजित करती है, जो $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$ और $\left(\frac{3}{4}, \infty\right)$ है।

अंतराल	$f'(x)$ का चिन्ह	$f(x)$ की प्रकृति
$\left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$	(–) ऋणात्मक	निरंतर ह्रासमान
$\left(\frac{3}{4}, \infty\right)$	(+) धनात्मक	निरंतर वर्धमान

अत: $f(x)$, $\left(\frac{3}{4}, \infty\right)$ में निरंतर वर्धमान है और $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$ में निरंतर ह्रासमान है।

प्रश्न 5. अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7$ से प्रदत्त फलन f

(i) निरंतर वर्धमान है। (ii) निरंतर ह्रासमान है।

हल दिया है, $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

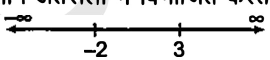
$$f'(x) = \frac{d}{dx}(2x^3 - 3x^2 - 36x + 7) = 2 \times 3x^2 - 3 \times 2x - 36 \times 1 + 0$$

$$= 6x^2 - 6x - 36\,;\quad f'(x) = 6(x-3)(x+2)$$

$$f'(x) = 0 \text{ रखने पर, } 6(x-3)(x+2) = 0$$

$x = 3$ और $x = -2$ जोकि वास्तविक रेखा को तीन अंतरालों में विभाजित करता है।

जोकि $(-\infty, -2)$, $(-2, 3)$ और $(3, \infty)$ है।



अंतराल	$f'(x)$ का चिन्ह	$f(x)$ की प्रकृति
$(-\infty, -2)$	(–)(–) = + ve ($\because x < -2$ अर्थात x के –3,–4,–5, ... इन मानों के लिए $(x-3)$ और $(x-2)$ दोनों ऋणात्मक होंगे।	निरंतर वर्धमान
$(-2, 3)$	(–)(+) = – ve ($\because 3 > x > -2$ अर्थात x के, 1,2,0,–1,... इन मानों के लिए $(x-3)$ ऋणात्मक और $(x+2)$ धनात्मक होंगे।	निरंतर ह्रासमान
$(3, \infty)$	(+)(+) = + ve ($\because x > 3$ अर्थात, x के , 4,5,6, ... इन मानों के लिए $(x-3)$ और $(x+2)$ दोनों धनात्मक होंगे।	निरंतर वर्धमान

इसलिए, दिया गया फलन f अंतराल $(-\infty, -2)$ में और $(3, \infty)$ में निरंतर वर्धमान है जबकि फलन f अंतराल $(-2, 3)$ में निरंतर ह्रासमान है।

प्रश्न 6. अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें निम्नलिखित फलन f निरंतर वर्धमान या ह्रासमान है

(i) $f(x) = x^2 + 2x + 5$ (ii) $f(x) = 10 - 6x - 2x^2$

(iii) $f(x) = -2x^3 - 9x^2 - 12x + 1$ (iv) $f(x) = 6 - 9x - x^2$

(v) $f(x) = (x+1)^3 (x-3)^3$

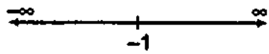
हल (i) मान लीजिए कि $f(x) = x^2 + 2x - 5$

$\therefore$ $$f'(x) = 2x + 2 = 0$$ (x के सापेक्ष अवकलन करने पर)

$f'(x) = 0$ रखने पर,

$\Rightarrow$ $$2x = -2, x = -1$$

$x = -1$ वास्तविक रेखा को दो अंतराल $(-\infty, -1)$ और $(-1, \infty)$ में विभाजित करती है



अंतराल	$f(x)$ का चिन्ह	$f(x)$ की प्रकृति
$(-\infty, -1)$	$-$ve	निरंतर ह्रासमान
$(-1, \infty)$	$+$ ve	निरंतर वर्धमान

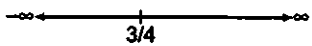
अतः जब $x > -1$ तो $f(x)$ निरंतर वर्धमान है और जब $x < -1$, तो $f(x)$ निरंतर ह्रासमान है

(ii) मान लीजिए $f(x) = 10 - 6x - 2x^2$

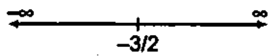
$\Rightarrow$ $$f'(x) = 0 - 6 - 2 \cdot 2x = -6 - 4x$$

$f'(x) = 0$ रखने पर,

$$-6 - 4x = 0, \Rightarrow x = \frac{-3}{2}$$



जो वास्तविक रेखा को दो अंतराल $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$ और $\left(-\frac{3}{2}, \infty\right)$ में विभाजित करता है।



अंतराल	$f(x)$ का चिन्ह	$f(x)$ की प्रकृति
$\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$	- ve	निरंतर वर्धमान
$\left(-\frac{3}{2}, \infty\right)$	- ve	निरंतर ह्रासमान

इसलिए, $x < -\frac{3}{2}$ के लिए f निरंतर वर्धमान है और $x > -\frac{3}{2}$ के लिए f निरंतर ह्रासमान है

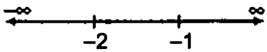
(iii) दिया है, $f(x) = -2x^3 - 9x^2 - 12x + 1$

$$\Rightarrow \qquad f'(x) = -2 \cdot 3x^2 - 9 \cdot 2x - 12 = -6x^2 - 18x - 12$$

$f'(x) = 0$ रखने पर, $-6x^2 - 18x - 12 = 0$

$$\Rightarrow \qquad -6(x+2)(x+1) = 0$$

$\Rightarrow x = -2, -1$ जोकि वास्तविक रेखा को तीन अंतराल $(-\infty, -2), (-2, -1)$ और $(-1, \infty)$ में विभाजित करता है।



अंतराल	$f'(x)$ का चिन्ह	$f(x)$ की प्रकृति
$(-\infty, -2)$	$(-)(-)(-) = -$ ve	निरंतर ह्रासमान
$(-2, -1)$	$(-)(-)(+) = +$ ve	निरंतर वर्धमान
$(-1, \infty)$	$(-)(+)(+) = -$ ve	निरंतर ह्रासमान

इसलिए, $-2 < x < -1$ पर $f(x)$ निरंतर वर्धमान है और $x < -2$ और $x > -1$ में $f(x)$ निरंतर ह्रासमान है

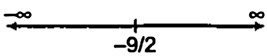
(iv) दिया गया है, $f(x) = 6 - 9x - x^2$

$$\Rightarrow \qquad f'(x) = -9 - 2x,$$

अब, $f'(x) = 0$ रखने पर,

$$-9 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{-9}{2}$$

जोकि वास्तविक रेखा को दो अलग अंतराल $\left(-\infty, -\frac{9}{2}\right)$ और $\left(\frac{-9}{2}, \infty\right)$ में विभाजित करती है।



अंतराल	$f'(x)$ का चिन्ह	$f(x)$ की प्रकृति
$\left(-\infty, \frac{-9}{2}\right)$	+ ve	निरंतर वर्धमान
$\left(\frac{-9}{2}, \infty\right)$	+ ve	निरंतर ह्रासमान

इसलिए, जब $x < -\frac{9}{2}$, तो $f(x)$ निरंतर वर्धमान है और जब $x > -\frac{9}{2}$, तो $f(x)$ निरंतर ह्रासमान है।

(v) दिया है, $f(x) = (x+1)^3 (x-3)^3$

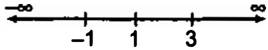
x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$f'(x) = (x+1)^3 \cdot 3(x-3)^2 + (x-3)^3 \cdot 3(x+1)^2 \cdot 1$$

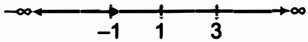
$$= 3(x-3)^2 (x+1)^2 \{(x+1)+(x-3)\}$$

$$= 3(x-3)^2(x+1)^2(2x-2) = 6(x-3)^2(x+1)^2(x-1)$$

अब, $f'(x) = 0$ रखने पर, $x = -1, 1, 3$



जोकि वास्तविक रेखा को चार अलग अंतराल $(-\infty, -1), (-1, 1), (1, 3)$ और $(3, \infty)$ में विभाजित करता है।



अंतराल	$f'(x)$ का चिन्ह	$f(x)$ की प्रकृति
$-\infty < x < -1$	$(-)(-)(-) = -$ve	निरंतर ह्रासमान
$-1 < x < 1$	$(+)(+)(-) = -$ve	निरंतर ह्रासमान
$1 < x < 3$	$(+)(+)(+) = +$ ve	निरंतर वर्धमान
$3 < x < \infty$	$(+)(+)(+) = +$ ve	निरंतर वर्धमान

इसलिए, $(1, 3)$ और $(3, \infty)$ पर $f(x)$ निरंतर वर्धमान है और $(-\infty, -1)$ तथा $(-1, 1)$ पर $f(x)$ निरंतर ह्रासमान है।

प्रश्न 7. सिद्ध कीजिए कि $y = \log(1+x) - \dfrac{2x}{2+x}, x > -1$, अपने संपूर्ण प्रांत में एक वर्धमान फलन है।

यदि संपूर्ण प्रांत में $y' > 0$ हो, तो y अपने संपूर्ण प्रांत में एक वर्धमान फलन है।

हल दिया है, $y = \log(1+x) - \dfrac{2x}{(2+x)}$

अवकलन करने पर, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dx}\left[\log(1+x) - \dfrac{2x}{2+x}\right]$

$$= \frac{1}{1+x} - \frac{(2+x)\frac{d}{dx}(2x) - 2x\frac{d}{dx}(2+x)}{(2+x)^2}$$

$$= \frac{1}{1+x} - \frac{4+2x-2x}{(2+x)^2} = \frac{1}{1+x} - \frac{4}{(2+x)^2} = \frac{(2+x)^2 - 4(1+x)}{(1+x)(2+x)^2}$$

$$= \frac{4+x^2+4x-4-4x}{(1+x)(2+x)^2} = \frac{x^2}{(1+x)(2+x)^2}$$

जब $x \in (-1, \infty)$, तब $\dfrac{x^2}{(2+x)^2} > 0$ और $(1+x) > 0 \quad \therefore \quad y' > 0$ जब $x > -1$

अतः, y अपने संपूर्ण $(x > -1)$ प्रांत में एक वर्धमान फलन है।

प्रश्न 8. x के उन मानों को ज्ञात कीजिए जिनके लिए $y = [x(x-2)]^2$ एक वर्धमान फलन है।

हल दिया है, $y = [x(x-2)]^2 = [x^2 - 2x]^2$

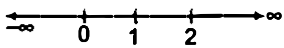
x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = 2(x^2 - 2x)\frac{d}{dx}(x^2 - 2x)$$

$$= 2(x^2 - 2x)(2x - 2) = 4x(x-2)(x-1)$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \text{ रखने पर, } x = 0, 1 \text{ और } 2$$

जोकि वास्तविक रेखा को चार अलग अंतराल $(-\infty, 0), (0, 1), (1, 2)$ और $(2, \infty)$ में विभाजित करता है



अंतराल	$y'(x)$ का चिन्ह	$y(x)$ की प्रकृति
$-\infty, 0$	$(-)(-)(-) = -ve$	निरंतर ह्रासमान
$(0, 1)$	$(+)(-)(-) = +ve$	निरंतर वर्धमान
$(1, 2)$	$(+)(-)(+) = -ve$	निरंतर ह्रासमान
$(2, \infty)$	$(+)(+)(+) = +ve$	निरंतर वर्धमान

इसलिए, $(0, 1)$ और $(2, \infty)$ पर $y(x)$ वर्धमान फलन है।

प्रश्न 9. सिद्ध कीजिए कि $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ में $y = \frac{4\sin\theta}{(2+\cos\theta)} - \theta$, θ का एक वर्धमान फलन है।

हल दिया है, $y = \frac{4\sin\theta}{(2+\cos\theta)} - \theta$

θ के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\left[\frac{4\sin\theta}{(2+\cos\theta)} - \theta\right]$$

$$y' = \frac{(2+\cos\theta)\frac{d}{d\theta}(4\sin\theta) - 4\sin\theta\frac{d}{d\theta}(2+\cos\theta)}{(2+\cos\theta)^2} - 1$$

$$= \frac{4\cos\theta(2+\cos\theta) - 4\sin\theta(-\sin\theta)}{(2+\cos\theta)^2} - 1$$

$$= \frac{8\cos\theta + 4\cos^2\theta + 4\sin^2\theta}{(2+\cos\theta)^2} - 1$$

$$= \frac{8\cos\theta + 4(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}{(2+\cos\theta)^2} - 1 = \frac{8\cos\theta + 4}{(2+\cos\theta)^2} - 1$$

$$= \frac{8\cos\theta + 4 - (2+\cos\theta)^2}{(2+\cos\theta)^2} = \frac{8\cos\theta + 4 - 4 - \cos^2\theta}{(2+\cos\theta)^2} - 4\cos\theta$$

$$\therefore \quad y' = \frac{dy}{d\theta} = \frac{4\cos\theta - \cos^2\theta}{(2+\cos\theta)^2} = \frac{\cos\theta(4-\cos\theta)}{(2+\cos\theta)^2}$$

अंतराल $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ में, $\cos\theta > 0, \therefore 4 > \cos\theta \Rightarrow (4-\cos\theta) > 0$

$\therefore \cos\theta(4-\cos\theta) \geq 0$ और $(2+\cos\theta)^2 > 0 \Rightarrow \frac{\cos\theta(4-\cos\theta)}{(2+\cos\theta)^2} \geq 0 \Rightarrow \frac{dy}{d\theta} \geq 0$

अतः, दिया गया फलन अंतराल $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ में वर्धमान है।

प्रश्न 10. सिद्ध कीजिए कि लघुगणकीय फलन $(0, \infty)$ में निरंतर वर्धमान फलन है।

हल माना कि $f(x) = \log x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

जब $x \in (0, \infty)$, तो $f'(x) > 0$, इसलिए, $(0, \infty)$ में $f(x)$ निरंतर वर्धमान है।

प्रश्न 11. सिद्ध कीजिए कि $(-1, 1)$ में $f(x) = x^2 - x + 1$ में प्रदत्त फलन न तो वर्धमान है और न ही ह्रासमान है।

हल दिया है, $f(x) = x^2 - x + 1 \Rightarrow f'(x) = 2x - 1$

अब, $f'(x) = 0$ रखने पर, $x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{2}$ दिए गए अंतराल को दो अंतरालों $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ तथा $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ में विभाजित करता है।

अंतराल	$f(x)$ का चिन्ह	$f(x)$ की प्रकृति
$\left(-1, \frac{1}{2}\right)$	- ve	निरंतर ह्रासमान
$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$	+ ve	निरंतर वर्धमान

$\therefore$ संपूर्ण अंतराल $(-1, 1)$ में $f'(x)$ का समान चिन्ह नहीं है।

अतः अंतराल $(-1, 1)$ में $f(x)$ न तो वर्धमान है और न ह्रासमान है।

प्रश्न 12. निम्नलिखित में कौन-से फलन $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में निरंतर ह्रासमान है?

(i) $\cos x$ (ii) $\cos 2x$ (iii) $\cos 3x$ (iv) $\tan x$

हल (i) मान लीजिए $f(x) = \cos x$, तब $f'(x) = -\sin x$, अतः अंतराल $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में, $f'(x) < 0$

इसलिए, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ पर $f(x)$ निरंतर ह्रासमान है।

(ii) मान लीजिए कि $f(x) = \cos 2x \Rightarrow f'(x) = -2\sin 2x$ अतः अंतराल $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में

$f'(x) < 0$

क्योंकि $\sin 2x$ प्रथम चतुर्थांश में या द्वितीय चतुर्थांश में होगा जोकि एक धनात्मक मान देगा। इसलिए, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में $f(x)$ निरंतर ह्रासमान है।

(iii) मान लीजिए कि $f(x) = \cos 3x \Rightarrow f'(x) = -3\sin 3x$ अतः अंतराल $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ में

$f'(x) < 0$, इसलिए, $\sin 3x$ प्रथम चतुर्थांश में या द्वितीय चतुर्थांश मे होगा जो एक धनात्मक मान देगा।

इसलिए, $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ में $f(x)$ निरंतर ह्रासमान है।

जब $x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$, तब $f'(x) > 0$

क्योंकि $\sin 3x$ तृतीय चतुर्थांश में होगा।

इसलिए, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ पर $f(x)$ निरंतर ह्रासमान नहीं है।

(iv) मान लीजिए $f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = \sec^2 x$

अंतराल $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में $f'(x) > 0$

इसलिए, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ पर $f(x)$ निरंतर ह्रासमान नहीं है।

प्रश्न 13. निम्नलिखित अंतरालों में से किस अंतराल में $f(x) = x^{100} + \sin x - 1$ द्वारा प्रदत्त फलन f निरंतर ह्रासमान है?

(i) $(0, 1)$ (ii) $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ (iii) $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (iv) इनमें से कोई नहीं

हल (*d*) दिया है, $f(x) = x^{100} + \sin x - 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 100x^{99} + \cos x$

(i) अंतराल $(0, 1)$ में, $\cos x > 0$ और $100x^{99} > 0 \quad \therefore f'(x) > 0$

$\because \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में, $\cos x > 0$ या $(0, 1.57)$ में $\cos x > 0$

$\therefore (0, 1)$ में $\cos x > 0$

इसलिए, अंतराल $(0, 1)$ में फलन f निरंतर वर्धमान है।

(ii) अंतराल $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ में, $\cos x < 0$ और $100x^{99} > 0$ और $100x^{99} > \cos x$

$\therefore$ $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ में $f'(x) > 0$

इसलिए, अंतराल $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ में फलन f निरंतर वर्धमान है।

(iii) अंतराल $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में, $\cos x > 0$ और $100x^{99} > 0$ $\therefore 100x^{99} + \cos x > 0$

$\Rightarrow$ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में $f'(x) > 0$

इसलिए, अंतराल $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में f निरंतर वर्धमान है।

अतः दिए हुए अंतराल में फलन f निरंतर ह्रासमान नहीं है।

प्रश्न 14. a का वह न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए अंतराल (1, 2) में $f(x) = x^2 + ax + 1$ से प्रदत्त फलन निरंतर वर्धमान है।

सबसे पहले, हम $f'(x)$ ज्ञात करते हैं, तब $1<x<2$ के लिए, $f'(x) > 0$ रखकर a का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $f(x) = x^2 + ax + 1 \Rightarrow f'(x) = 2x + a$

अंतराल (1, 2) में, $1 < x < 2 \Rightarrow 2 < 2x < 4$

$$\Rightarrow \qquad (2 + a) < (2x + a) < (4 + a)$$

अतः $f(x)$ निरंतर वर्धमान फलन है, तब $(2 + a) > 0$ $\quad [(2x + a) > (2 + a)$ के लिए, $f'(x) > 0]$

$\therefore$ $(2 + a) > 0 \Rightarrow a > -2$ इसलिए, a का न्यूनतम मान $a = -2$

प्रश्न 15. मान लीजिए [−1, 1] से असंयुक्त एक अंतराल I हो, तो सिद्ध कीजिए कि I में $f(x) = x + \frac{1}{x}$ से प्रदत्त फलन f, निरंतर वर्धमान है।

हल दिया है, $f(x) = x + \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$ (x के सापेक्ष अवकलन करने पर)

अतः अंतराल (−1, 1) से असंयुक्त है। इसलिए, यदि $x < -1$, तब $f'(x) > 0$

यदि $x > 1$, तब $f'(x) > 0$

अतः अंतराल I में $f(x)$ निरंतर वर्धमान है।

प्रश्न 16. सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = \log \sin x$, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में निरंतर वर्धमान और $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ में निरंतर ह्रासमान है।

हल दिया है, $f(x) = \log(\sin x)$

$\Rightarrow \qquad f'(x) = \dfrac{1}{\sin x}(\cos x) = \cot x \qquad$ (x के सापेक्ष अवकलन करने पर)

अंतराल $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ में, $f'(x) = \cot x > 0$

क्योंकि $\cot x$ प्रथम चतुर्थांश में धनात्मक होता है।

$\therefore \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ में f निरंतर वर्धमान है।

अंतराल $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ में, $f'(x) = \cot x < 0$

क्योंकि $\cot x$ द्वितीय चतुर्थांश में ऋणात्मक है।

$\therefore \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ पर f निरंतर ह्रासमान है।

प्रश्न 17. सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = \log|\cos x|\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ में निरंतर वर्धमान और $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ में निरंतर ह्रासमान है।

हल दिया है, $\qquad f(x) = \log(\cos x)$

$\Rightarrow \qquad f'(x) = \dfrac{1}{\cos x}.(-\sin x) = -\tan x \quad$ (x के सापेक्ष अवकलन करने पर)

अंतराल $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ में, $\tan x > 0 \qquad$ ($\because \tan x$ प्रथम चतुर्थांश में है)

$\Rightarrow \qquad -\tan x < 0 \qquad$ ($\because \tan x$ प्रथम चतुर्थांश में है)

$\therefore \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ में $f'(x) < 0,$

अतः $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ में f निरंतर ह्रासमान है।

अब अंतराल $\left(\dfrac{2}{\pi}, \pi\right)$ में $\tan x < 0$

$\Rightarrow \qquad -\tan x > 0 \qquad$ ($\because \tan x$ द्वितीय चतुर्थांश में है)

$\therefore \qquad \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ में $f'(x) > 0,$

इसलिए, $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ में f निरंतर वर्धमान है।

प्रश्न 18. सिद्ध कीजिए कि R में दिया गया फलन $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 100$ वर्धमान है।

हल दिया है, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 100$

$\Rightarrow$ $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$ (x के सापेक्ष अवकलन करने पर)

$\Rightarrow$ $f'(x) = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x - 1)^2$

$x \in R$ में $(x-1)^2 > 0$, क्योंकि एक पूर्ण वर्ग ऋणात्मक नहीं हो सकता है।

अतः R पर $f'(x) > 0$ इसलिए, दिया गया फलन f वर्धमान फलन है।

प्रश्न 19. निम्नलिखित में से किस अंतराल में $y = x^2 e^{-x}$ वर्धमान है?

(a) $(-\infty, \infty)$ (b) $(-2, 0)$ (c) $(2, \infty)$ (d) $(0, 2)$

हल (d) दिया है, $y = x^2 e^{-x}$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = x^2 e^{-x}(-1) + e^{-x}(2x) = xe^{-x}(-x + 2) = x(2 - x)e^{-x}$$

वर्धमान फलन के लिए, $\frac{dy}{dx} > 0 \Rightarrow xe^{-x}(2 - x) > 0$

$\Rightarrow$ $x > 0$ या $2 - x > 0 \Rightarrow x > 0$ या $-x > -2 \Rightarrow x > 0$ या $x < -2$

क्योंकि e^{-x} शून्य नहीं हो सकता है, इसलिए फलन अंतराल $(0, 2)$ में वर्धमान है।

प्रश्नावली 6.3

प्रश्न 1. वक्र $y = 3x^4 - 4x$ के $x = 4$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए।

वक्र में किसी बिंदु पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $\frac{dy}{dx}$ द्वारा दिया जाता है। किसी विशेष बिंदु पर प्रवणता ज्ञात करने के लिए उस बिंदु का मान $\frac{dy}{dx}$ में रखें।

हल दिया गया वक्र है, $y = 3x^4 - 4x$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\Rightarrow$ $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(3x^4 - 4x)$$

$\Rightarrow$ $$\frac{dy}{dx} = 3 \times 4x^3 - 4 \times 1 = 12x^3 - 4$$

$\therefore x = 4$ पर, स्पर्श रेखा की प्रवणता,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=4} = 12 \times (4)^3 - 4 = 764$$

प्रश्न 2. वक्र $y = \frac{x-1}{x-2}, x \neq 2$ के $x = 10$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए।

हल दिया गया वक्र, $y = \frac{x-1}{x-2}$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-2)\frac{d}{dx}(x-1) - (x-1)\frac{d}{dx}(x-2)}{(x-2)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(x-2) \times 1 - (x-1) \times 1}{(x-2)^2} \frac{x-2-x+1}{(x-2)^2} \quad \text{(शेषफल नियम से)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{(x-2)^2}$$

$x = 10$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=10} = \frac{-1}{(10-2)^2} = \frac{-1}{(8)^2} = \frac{-1}{64}$

अतः $x = 10$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $-\frac{1}{64}$ है।

प्रश्न 3. वक्र $y = x^3 - x + 1$ की स्पर्श रेखा की प्रवणता उस बिंदु पर ज्ञात कीजिए जिसका x -निर्देशांक 2 है।

हल दिया गया वक्र, $y = x^3 - x + 1$ है

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 1$$

$\therefore$ बिंदु $x = 2$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=2} = 3(2)^2 - 1 = 11$

इसलिए, $x = 2$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता 11 है।

प्रश्न 4. वक्र $y = x^3 - 3x + 2$ की स्पर्श रेखा की प्रवणता उस बिंदु पर ज्ञात कीजिए जिसका x -निर्देशांक 3 है।

हल दिया गया वक्र $y = x^3 - 3x + 2$ है।

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3$$

$\therefore$ बिंदु $x = 3$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता,

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=3} = 3 \times (3)^2 - 3 = 24$$

अतः $x = 3$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता 24 है।

प्रश्न 5. वक्र $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$ के $\theta = \frac{\pi}{4}$ पर अभिलंब की प्रवणता ज्ञात कीजिए।

(i) यह प्राचलिक समीकरण है, पहले $\frac{dx}{d\theta}$ और $\frac{dy}{d\theta}$ ज्ञात करें।

(ii) अब, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \times \frac{dx}{d\theta}$ का अनुप्रयोग करके वक्र की स्पर्श रेखा की प्रवणता $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करें।

(iii) वक्र पर अभिलंब की प्रवणता किसी बिंदु पर $\frac{-dx}{dy}$ के मान द्वारा दी जाती है।

हल दिया है, $x = a\cos^3\theta$ और $y = a\sin^3\theta$

θ के सापेक्ष x और y दोनों का अवकलन करने पर,

$$\frac{dx}{d\theta} = 3a\cos^2\theta(-\sin\theta) = -3a\cos^2\theta\sin\theta$$

और
$$\frac{dy}{d\theta} = 3a\sin^2\theta\cos\theta$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{3a\sin^2\theta\cos\theta}{-3a\cos^2\theta\sin\theta} \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$$

अत: बिंदु $\theta = \frac{\pi}{4}$ पर अभिलंब की प्रवणता,

$$\frac{-dx}{dy} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{-1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\theta=\frac{\pi}{4}}} = \frac{-1}{-\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{-1}{-1} = 1$$

प्रशन 6. $\theta = \frac{\pi}{2}$ पर वक्र $x = 1 - a\sin\theta$, $y = b\cos^2\theta$ के अभिलंब की प्रवणता ज्ञात कीजिए।

हल दिया गया है, $x = 1 - a\sin\theta$ और $y = b\cos^2\theta$

θ के सापेक्ष x और y दोनों का अवकलन करने पर,

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(1 - a\sin\theta) = -a\cos\theta \quad \text{और} \quad \frac{dy}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(b\cos^2\theta)$$

$$= 2b\cos\theta(-\sin\theta) = -2b\cos\theta\sin\theta$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{-2b\cos\theta\sin\theta}{-a\cos\theta} = \frac{2b}{a}\sin\theta$$

$\therefore \quad \theta = \frac{\pi}{2}$ पर अभिलंब की प्रवणता,

$$-\frac{dx}{dy} = \frac{-1}{dy/dx} = \frac{-1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(\theta=\pi/2)}} = \frac{-1}{\frac{2b}{a}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{-a}{2b}$$

प्रश्न 7. **वक्र $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$ पर बिंदुओं को ज्ञात कीजिए जिन पर स्पर्श रेखाएँ x अक्ष के समांतर है। वक्र पर स्पर्श रेखाएँ x अक्ष के समांतर है जब स्पर्श रेखा की प्रवणता 0 है**

हल वक्र का समीकरण है $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$ ...(i)

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x - 9$$

अतः स्पर्श रेखा x अक्ष के समांतर है, तब स्पर्श रेखा की प्रवणता 0 है या हम कह सकते है कि,

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

$\Rightarrow \quad 3x^2 - 6x - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3(x^2 - 2x - 3) = 0$

$\Rightarrow \quad (x - 3)(x + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3, -1$

जब $x = 3$, तब समी (i) से,

$$y = 3^3 - (3).(3)^2 - 9 \cdot 3 + 7$$
$$y = 27 - 27 - 27 + 7 = -20$$

जब $x = -1$, तब समी (i) से,

$$y = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 7$$
$$y = -1 - 3 + 9 + 7 = 12$$

अतः बिंदुओं $(3, -20)$ और $(-1, 12)$ जिन पर स्पर्श रेखाएँ x- अक्ष के समांतर हैं।

प्रश्न 8. **वक्र $y = (x - 2)^2$ पर एक बिंदु ज्ञात कीजिए जिस पर स्पर्श रेखा, बिंदुओं (2, 0) और (4, 4) को मिलाने वाली रेखा के समांतर है।**

बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा, स्पर्श रेखा के समांतर होती है। यदि इसकी स्पर्श रेखा की प्रवणता, बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा की प्रवणता के बराबर हों।

हल यदि स्पर्श रेखा बिंदुओं (2, 0) और (4, 4) को मिलाने वाली रेखा के समांतर है, तो स्पर्श रेखा की प्रवणता = दोनों बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा की प्रवणता

बिंदु (2, 0) और (4, 4) को मिलाने वाली रेखा की प्रवणता

$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 0}{4 - 2} = \frac{4}{2} = 2 \qquad \text{...(i)}$$

वक्र $\quad y = (x - 2)^2$

अब, दिए गए वक्र पर स्पर्श रेखा की प्रवणता बिंदु (x, y) पर इस प्रकार दी जाती है,

$$\frac{dy}{dx} = 2(x - 2)$$

अब, समी (i) से, $\quad 2(x - 2) = 2$

$\Rightarrow \quad x - 2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 3$

जब $\quad x = 3$, तब $y = (3 - 2)^2 = 1$ [वक्र का समीकरण $y = (x - 2)^2$]

अतः आवश्यक बिंदु (3, 1) है।

प्रश्न 9. वक्र $y = x^3 - 11x + 5$ पर उस बिंदु को ज्ञात कीजिए जिस पर स्पर्श रेखा $y = x - 11$ है।

वक्र पर स्पर्श रेखा की प्रवणता = वक्र की प्रवणता का प्रयोग कीजिए।

हल वक्र का समीकरण $y = x^3 - 11x + 5$ ...(i)

रेखा $y = mx + c$ से दी गई रेखा, $y = x - 11$

तुलना करने पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $m = 1$ है।

अब, दिए गए वक्र के बिंदु (x, y) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता, $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 11$

$$\Rightarrow \quad 3x^2 - 11 = 1\left(m = \frac{dy}{dx} = 1\right) \Rightarrow 3x^2 - 11 = 1 \Rightarrow 3x^2 = 12$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

जब $x = 2$, तब समी (i) से, $y = (+2)^3 - 11 \times 5 + 5 = -9$

जब $x = -2$, तब समी (i) से, $y = (-2)^3 - 11(2) + 5 = 19$ अतः बिंदु $(2, -9)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण $y - (-9) = 1(x - 2)$ या $y = x - 11$

जबकि बिंदु $(-2, 19)$ रेखा $y = x - 11$ को संतुष्ट नहीं करता है।

प्रश्न 10. प्रवणता -1 वाली सभी रेखाओं का समीकरण ज्ञात कीजिए जो वक्र $y = \frac{1}{x-1}, x \neq -1$ को स्पर्श करती है।

हल दिए गए वक्र का समीकरण $y = \frac{1}{x-1}, x \neq 1$ ...(i)

किसी बिंदु (x, y) पर दिए गए वक्र की स्पर्श रेखा की प्रवणता, $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{(x-1)^2}$

स्पर्श रेखा, जिसकी प्रवणता $= -1$ है, $-1 = \frac{-1}{(x-1)^2}$

$$\Rightarrow \quad (x-1)^2 = 1 \Rightarrow x - 1 = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \pm 1 = 2, 0$$

जब $x = 2$, तब समी (i) से, $y = \frac{1}{2-1} = 1$

जब $x = 0$, तब समी (i) से, $y = \frac{1}{0-1} = -1$

इसलिए, दिए गए वक्र की स्पर्श रेखा, जिसकी प्रवणता -1 है, पर बिंदु $(2, 1)$ और $(0, -1)$ हैं।

$\therefore$ $(2, 1)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण $y - 1 = -1(x - 2)$ या $x + y - 3 = 0$

और $(0, -1)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण, $y - (-1) = -1(x - 0)$ या $x + y + 1 = 0$

अतः आवश्यक रेखाओं का समीकरण $x + y - 3 = 0$ और $x + y + 1 = 0$ है।

प्रश्न 11. प्रवणता 2 वाली सभी रेखाओं का समीकरण ज्ञात कीजिए जो वक्र $y = \frac{1}{x-3}, x \neq 3$ को स्पर्श करती है।

हल दिए गए वक्र की समीकरण है, $y = \frac{1}{x-3}, x \neq 3$

किसी बिंदु (x, y) पर दिए गए वक्र की स्पर्श रेखा की प्रवणता इस प्रकार दी जाती है,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{(x-3)^2}$$

स्पर्श रेखा, जिसकी प्रवणता 2 है, के लिए; $2 = \frac{-1}{(x-3)^2} \Rightarrow 2(x-3)^2 = -1$

$\Rightarrow$ $(x-3)^2 = \frac{-1}{2}$ जोकि असंभव है

जैसा कि किसी वास्तविक संख्या का वर्ग ऋणात्मक नहीं हो सकता है।

अतः दिए गए वक्र पर प्रवणता 2 वाली कोई स्पर्श रेखा नहीं है।

प्रश्न 12. प्रवणता 0 वाली सभी रेखाओं का समीकरण ज्ञात कीजिए जो वक्र $y = \frac{1}{x^2 - 2x + 3}$ को स्पर्श करती है।

हल दिए गए वक्र का समीकरण है, $y = \frac{1}{x^2 - 2x + 3}$ ...(i)

दिए गए वक्र के किसी बिंदु (x, y) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{(x^2 - 2x + 3)^2} \frac{d}{dx}(x^2 - 2x + 3) = \frac{-(2x-2)}{(x^2 - 2x + 3)^2} = \frac{-2(x-1)}{(x^2 - 2x + 3)^2}$$

अतः शून्य प्रवणता वाली स्पर्श रेखाओं के लिए $\frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow$ $\frac{-2(x-1)}{(x^2 - 2x + 3)^2} = 0 \Rightarrow -2(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1$

जब $x = 1$, तो समी (i) से, $y = \frac{1}{1^2 - 2 \times 1 + 3} = \frac{1}{2}$

दिए गए वक्र के बिंदु $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ पर स्पर्श रेखा जिनकी प्रवणता 0 है, का समीकरण निम्न है।

$$y - \frac{1}{2} = 0(x-1) \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

अतः, आवश्यक रेखा का समीकरण $y = \frac{1}{2}$ है।

प्रश्न 13. वक्र $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ पर उन बिंदुओं को ज्ञात कीजिए जिन पर स्पर्श रेखाएँ

(i) x –अक्ष के समांतर है (ii) y –अक्ष के समांतर है

हल दिए गए वक्र का समीकरण है, $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ ...(i)

$\Rightarrow$ x के सापेक्ष दोनों ओर का अवकलन करने पर,

$$\frac{2x}{9}+\frac{1}{16}\left(2y\frac{dy}{dx}\right)=0 \Rightarrow \frac{y}{8}\frac{dy}{dx}=\frac{-2x}{9} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-16x}{9y} \quad \text{...(ii)}$$

(i) स्पर्श रेखाएँ, जो x-अक्ष के समांतर है, के लिए,

$$\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \frac{-16x}{9x}=0 \Rightarrow x=0$$

$\Rightarrow$ जब $x=0$, तब समी (i) से, $\frac{0^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1 \Rightarrow y^2=16$

$\Rightarrow$ $y=\pm 4$

अतः वक्र (i) के बिंदु (0, 4) और (0, – 4) पर, स्पर्श रेखाएँ x -अक्ष के समांतर हैं

(ii) स्पर्श रेखाएँ, जो y-अक्ष के समांतर है, के लिए $\frac{dx}{dy}=0$

$\Rightarrow$ $-\frac{9y}{16x}=0 \Rightarrow y=0$

जब $y=0$, तब समी (i) से, $\frac{x^2}{9}+\frac{0^2}{16}=1$

$$x^2=9 \Rightarrow x=\pm 3$$

अतः वक्र (i) के बिंदु (3, 0) और (–3, 0) पर स्पर्श रेखा y - अक्ष के समांतर है।

प्रश्न 14. दिए वक्रों के निर्दिष्ट बिंदुओं पर स्पर्श रेखा और अभिलंब के समीकरण ज्ञात कीजिए

(i) $y=x^4-6x^3+13x^2-10x+5$ के (0, 5) पर

(ii) $y=x^4-6x^3+13x^2-10x+5$ के (1,3) पर

(iii) $y=x^3$ के (1,1) पर,

(iv) $y=x^2$ के (0, 0) पर

(v) $x=\cos t$, $y=\sin t$ के $t=\frac{\pi}{4}$ पर

हल (i) दिए गए वक्र का समीकरण है, $y=x^4-6x^3+13x^2-10x+5$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{dy}{dx}=4x^3-18x^2-10+26x$

$\therefore$ बिंदु (0, 5) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता है

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(0,5)}=0-0+0-10=-10$$

इसलिए, बिंदु (0, 5) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता –10 है। अब, स्पर्श रेखा का समीकरण

$$y-5=-10(x-0) \Rightarrow 10x+y-5=0$$

पुनः बिंदु (0, 5) पर अभिलंब की प्रवणता

$$\frac{-1}{(0, 5) \text{ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता}} = \frac{-1}{10} = \frac{1}{10}$$

इसलिए, बिंदु (0, 5) पर अभिलंब का समीकरण, $y - 5 = \frac{1}{10}(x - 0)$

$\Rightarrow \quad x - 10y + 50 = 0$

(ii) दिए गए वक्र का समीकरण है, $y = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 10x + 5$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 18x^2 + 26x - 10$$

$\therefore$ बिंदु (1, 3) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1, 3)} = 4 - 18 + 26 - 10 = 2$

इसलिए, बिंदु (1, 3) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता 2 है, अब स्पर्श रेखा का समीकरण,

$$y - 3 = 2(x - 1) \Rightarrow y - 3 = 2x - 2$$

$\Rightarrow \quad y = 2x + 1$

पुनः (1, 3) पर अभिलंब की प्रवणता,

$$\frac{-1}{(1, 3) \text{ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता}} = \frac{-1}{2}$$

अतः अभिलंब का समीकरण,

$$y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow 2y - 6 = -x + 1 \Rightarrow x + 2y - 7 = 0$$

(iii) दिए गए वक्र का समीकरण है, $y = x^3$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{dy}{dx} = 3x^2$

$\therefore$ बिंदु (1, 1) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1, 1)} = 3(1)^2 = 3$

इसलिए, बिंदु (1, 1) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता 3 है और स्पर्श रेखा का समीकरण

$$y - 1 = 3(x - 1) \Rightarrow y - 1 = 3x - 3 \Rightarrow y = 3x - 2$$

पुनः बिंदु (1, 1) पर, अभिलंब की प्रवणता,

$$\frac{-1}{(1, 1) \text{ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता}} = \frac{-1}{3}$$

इसलिए बिंदु (1, 1) पर, अभिलंब का समीकरण

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 1) \Rightarrow 3y - 3 = -x + 1 \Rightarrow x + 3y - 4 = 0$$

(iv) दिए गए वक्र का समीकरण है, $y = x^2$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$\therefore$ बिंदु (0, 0) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(0,0)} = 2 \times 0 = 0$

अतः बिंदु (0, 0) पर स्पर्श रेखा का समीकरण

$$y - 0 = 0(x - 0) \Rightarrow y = 0$$

बिंदु (0, 0) पर अभिलंब की प्रवणता,

$$\frac{-1}{\text{(0, 0) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता}} = \frac{-1}{0}$$

जोकि अपरिभाषित है।

इसलिए, $(x_0, y_0) = (0, 0)$ पर अभिलंब का समीकरण $x = x_0 = 0$ है।

(v) दिए गए वक्र का समीकरण है,

$$x = \cos t,\ y = \sin t \qquad \ldots\text{(i)}$$

$$x = \cos\frac{\pi}{4},\ y = \sin\frac{\pi}{4} \qquad \left(t = \frac{\pi}{4} \text{ रखने पर}\right)$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}},\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dx}{dt} = -\sin t,\ \frac{dy}{dt} = \cos t,\ \therefore\ \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\cot t$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=\frac{\pi}{4}} = -\cot\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

$\therefore t = \frac{\pi}{4}$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता -1 है।

इसलिए, $t = \frac{\pi}{4}$ पर दिए गए वक्र पर स्पर्श रेखा का समीकरण,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) y - \frac{1}{\sqrt{2}} = -1\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\Rightarrow\ x + y - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow x + y - \frac{2}{\sqrt{2}} = 0;\ \ x + y - \sqrt{2} = 0$$

पुनः $t = \frac{\pi}{4}$ पर अभिलंब की प्रवणता,

$$\frac{-1}{t = \frac{\pi}{4} \text{ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता}} = \frac{-1}{-1} = 1$$

इसलिए, $t = \frac{\pi}{4}$ पर दिए गए वक्र के अभिलंब का समीकरण है।

$$y - \frac{1}{\sqrt{2}} = 1\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow x - y = 0 \quad \Rightarrow x - y = 0$$

प्रश्न 15. वक्र $y = x^2 - 2x + 7$ की स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो

(i) रेखा $2x - y + 9 = 0$ के समांतर है।

(ii) रेखा $5y - 15x = 13$ पर लंब है।

(i) यदि वक्र की स्पर्श रेखा समांतर है रेखा $2x - y + 9 = 0$ से, तब इसकी प्रवणता इस रेखा की प्रवणता के बराबर होगी।

(ii) यदि वक्र की स्पर्श रेखा अभिलंब है रेखा $5y - 15x = 13$ पर, तब दोनों वक्रों की प्रवणता का गुणनफल -1 बराबर होगी।

हल दिए गए वक्र का समीकरण है, $y = x^2 - 2x + 7$ ...(i)

x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{dy}{dx} = 2x - 2$

(i) रेखा $2x - y + 9 = 0 \Rightarrow y = 2x + 9$ की तुलना रेखा $y = mx + c$ से करने पर,

$\therefore$ रेखा की प्रवणता, $m = 2$

यदि स्पर्श रेखा $2x - y + 9 = 0$ के समांतर है। तब दोनों स्पर्श रेखाओं की प्रवणता बराबर होगी

इसलिए, $\frac{dy}{dx} = m \Rightarrow 2x - 2 = 2$

$\Rightarrow$ $2x = 4 \Rightarrow x = 2$

जब $x = 2$, तब समी (i) से, $y = 2^2 - 2 \times 2 + 7 = 7$

अतः दिए गए वक्र के बिंदु $(2, 7)$ पर स्पर्श रेखओं की प्रवणता बराबर है तथा बिंदु $(2, 7)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण,

$y - 7 = 2(x - 2) \Rightarrow 2x - y + 3 = 0$

इसलिए, $y - 2x - 3 = 0$ दिए गए वक्र की स्पर्श रेखा का समीकरण जो दी गई रेखा $2x - y + 9 = 0$ के समांतर है,

(ii) दी गई रेखा का समीकरण है, $5y - 15x = 13 \Rightarrow y = 3x + \frac{13}{5}$

यह समीकरण $y = mx + c$ के प्रकार का है।

$\therefore$ रेखा की प्रवणता 3 है।

यदि स्पर्श रेखा दी गई रेखा $5y - 15x = 13$ पर अभिलंब है,

तब स्पर्श रेखा की प्रवणता $= -\frac{1}{3}$ $\left(\text{प्रवणता का गुणनफल, } m_1 \times m_2 = 1, m_2 = \frac{-1}{m_1}\right)$

$\therefore$ $2x - 2 = -\frac{1}{3} \Rightarrow 2x = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5}{6}$

जब $x = \frac{5}{6}$, तब समी (i) से,

$$y = \left(\frac{5}{6}\right)^2 - 2\left(\frac{5}{6}\right) + 7 = \frac{25}{36} - \frac{5}{3} + 7 = \frac{25 - 60 + 252}{36} = \frac{217}{36}$$

अतः बिंदु $\left(\frac{5}{6}, \frac{217}{36}\right)$ पर दिए वक्र की स्पर्श रेखा दी हुई रेखा पर अभिलंब है और स्पर्श रेखा का समीकरण,

$$y - \frac{217}{36} = \frac{-1}{3}\left(x - \frac{5}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y - \frac{217}{36} = -\frac{x}{3} + \frac{5}{18} \quad \Rightarrow 12x + 36y - 227 = 0$$

अतः $36y + 12x - 227 = 0$ दिए गए वक्र के स्पर्श रेखा का समीकरण है जोकि दी गई रेखा $5y - 15x = 13$ पर अभिलंब है।

प्रश्न 16. सिद्ध कीजिए कि वक्र $y = 7x^3 + 11$ के उन बिंदुओं पर स्पर्श रेखाएँ समांतर हैं, जहाँ $x = 2$ तथा $x = -2$ है।

हल दिए गए वक्र का समीकरण है, $y = 7x^3 + 11$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = 7 \times 3x^2 = 21x^2$$

$\because (x_0, y_0)$ पर वक्र की स्पर्श रेखा की प्रवणता, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_0, y_0)}$

$\therefore x = 2$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=2} = 21(2)^2 = 84$

$\therefore x = -2$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=-2} = 21(-2)^2 = 84$

यह पाया जाता है कि स्पर्श रेखा की प्रवणता उन बिंदुओं पर, जहाँ $x = 2$ और $x = -2$ बराबर है, अतः दोनों स्पर्श रेखा समांतर है।

प्रश्न 17. वक्र $y = x^3$ पर उन बिंदुओं को ज्ञात कीजिए जिन पर स्पर्श रेखा की प्रवणता बिंदु के y-निर्देशांक के बराबर है।

हल दिए गए वक्र का समीकरण है, $y = x^3$ ...(i)

x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{dy}{dx} = 3x^2$

किसी बिंदु (x, y) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता इस प्रकार दी जाती है $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x, y)} = 3x^2$

जब स्पर्श रेखा की प्रवणता y-अक्ष के बिंदु के बराबर हो, तब $y = 3x^2$

$\Rightarrow \quad 3x^2 = x^3$ $\quad (\because y = x^3$ दिया है)

$\Rightarrow \quad x^3(3 - x) = 0 \Rightarrow x = 0$ या $x = 3$

जब $x = 0$, तब समी (i) से, $y = 3^3 = 27$

अतः, आवश्यक बिंदु (0, 0) और (3, 27) हैं।

प्रश्न 18. वक्र $y = 4x^3 - 2x^5$ पर उन बिंदुओं को ज्ञात कीजिए जिन पर स्पर्श रेखाएँ मूलबिंदु से होकर जाती हैं।

वक्र की स्पर्श रेखा की प्रवणता ज्ञात करें और स्पर्श रेखा की सामान्य समीकरण लिखें। स्पर्श रेखा मूलबिंदु से होकर जाती है, इसलिए (0, 0) समीकरण को संतुष्ट करेगा।

हल दिए गए वक्र का समीकरण है, $y = 4x^3 - 2x^5$ ...(i)

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = 12x^2 - 10x^4$$

इसलिए, बिंदु (x, y) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $12x^2 - 10x^4$ है।

बिंदु (x, y) पर स्पर्श रेखा का समीकरण

$$Y - y = (12x^2 - 10x^4)(X - x) \quad \text{...(ii)}$$

जब स्पर्श रेखा मूलबिंदु से होकर जाती है, तब $x = y = 0$

इसलिए समी (i) से, $-y = (12x^2 - 10x^4)(-x)$

$\Rightarrow \quad y = 12x^3 - 10x^5$

और $\quad y = 4x^3 - 2x^5$

$\therefore \quad 12x^3 - 10x^5 = 4x^3 - 2x^5$

$\Rightarrow \quad 8x^5 - 8x^3 = 0 \Rightarrow x^5 - x^3 = 0$

$x^3(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, \pm 1$

जब $\quad x = 0, y = 4(0)^3 - 2(0)^5 = 0$

जब $\quad x = 1, y = 4(1)^3 - 2(1)^5 = 2$

जब $\quad x = -1, y = 4(-1)^3 - 2(-1)^5 = -2$

अतः, आवश्यक बिंदु (0, 0), (1, 2) और (−1, −2) हैं।

प्रश्न 19. वक्र $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ के उन बिंदुओं पर स्पर्श रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए, जहाँ पर वे x – अक्ष के समांतर हैं।

हल दिए गए वक्र का समीकरण है, $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ ...(i)

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} - 2 = 0 \Rightarrow 2y\frac{dy}{dx} = 2 - 2x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2(1-x)}{2y} = \frac{1-x}{y}$$

स्पर्श रेखा x -अक्ष के समांतर होने के लिए, $\frac{dy}{dx}=0$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1-x}{y}=0 \Rightarrow 1-x=0 \Rightarrow x=1$$

$x=1$ समी (i) में रखने पर,

$$1^2+y^2-2\times 1-3=0 \Rightarrow y^2-4=0$$

$$y=\pm 2$$

अत: वो बिंदु जिस पर स्पर्श रेखा x- अक्ष के समांतर $(1,2)$ और $(1,-2)$ है।

प्रश्न 20. वक्र $ay^2=x^3$ के बिंदु (am^2, am^3) पर अभिलंब का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल दिए हुए वक्र का समीकरण है, $\quad ay^2=x^3 \quad$ ...(i)

x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\quad a(2y)\frac{dy}{dx}=3x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{3x^2}{2ay}$

बिंदु (am^2, am^3) पर दिए गए वक्र की स्पर्श रेखा की प्रवणता,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(am^2,\, am^3)}=\frac{3(am^2)^2}{2a(am^3)}=\frac{3}{2}m$$

$\therefore$ (am^2,am^3) पर अभिलंब की प्रवणता, $=\frac{-1}{\frac{3m}{2}}=\frac{-2}{3m}$

$\therefore$ (am^2, am^3) पर अभिलंब का समीकरण

$$y-am^3=-\frac{2}{3m}(x-am^2)$$

$$\Rightarrow \qquad 3my-3am^4=-2x+2am^2$$

$$\Rightarrow \qquad 2x+3my-3am^4-2am^2=0$$

प्रश्न 21. वक्र $y=x^3+2x+6$ के उन अभिलंबों के समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $x+14y+4=0$ के समांतर है।

हल दिए गए वक्र का समीकरण है, $\quad y=x^3+2x+6 \quad$ ...(i)

दिए गए वक्र की स्पर्श रेखा की प्रवणता बिंदु (x, y) पर इस प्रकार दी जाती है,

$$\frac{dy}{dx}=3x^2+2$$

$\therefore$ किसी बिंदु पर (x, y) दिए गए वक्र की अभिलंब की प्रवणता

$$=\frac{-1}{\text{बिन्दु}(x, y)\text{ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता}}=\frac{-1}{3x^2+2}$$

दी गई रेखा का समीकरण है, $x + 14y + 4 = 0$

$\Rightarrow \quad y = -\frac{1}{14}x - \frac{4}{14}$ जोकि समीकरण $y = mx + c$ के प्रकार का है।

$\therefore$ दी गई रेखा की प्रवणता $= \frac{-1}{14}$

यदि अभिलंब रेखा $x + 14y + 4 = 0$ के समांतर है तब अभिलंब की प्रवणता उस रेखा की प्रवणता के बराबर होगी।

$$\therefore \quad \frac{-1}{3x^2 + 2} = \frac{-1}{14} \Rightarrow 3x^2 + 2 = 14$$

$$\Rightarrow \quad 3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

जब $\quad x = 2,\ y = 8 + 4 + 6 = 18$

जब $\quad x = -2,\ y = -8 - 4 + 6 = -6$

इसलिए, दिए गए वक्र में दो अभिलंब है जिसकी प्रवणता $\frac{-1}{14}$ है। और बिंदु $(2, 18)$ और $(-2, -6)$ से होकर गुजरती है।

इसलिए, अभिलंब का समीकरण है जोकि बिंदु $(2, 18)$ से होकर गुजरती है।

$$y - 18 = \frac{-1}{14}(x - 2)$$

$\Rightarrow 14y - 252 = -x + 2 \Rightarrow x + 14y - 254 = 0$ और, अभिलंब का समीकरण है जोकि बिंदु $(-2, -6)$ से होकर गुजरता है।

$$y - (-6) = \frac{-1}{14}[x - (-2)] \Rightarrow y + 6 = \frac{-1}{14}(x + 2)$$

$$\Rightarrow \quad 14y + 84 = -x - 2 \Rightarrow x + 14y + 86 = 0$$

अतः दिए गए वक्र के अभिलंब के समीकरण $x + 14y - 254 = 0$ और $x + 14y + 86 = 0$ है जो दी गई रेखा $x + 1 + y + 4 = 0$ के समांतर है।

प्रश्न 22. परवलय $y^2 = 4ax$ के बिंदु $(at^2, 2at)$ पर स्पर्श रेखा और अभिलंब के समीकरण ज्ञात कीजिए।

बिंदु (x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा और अभिलंब के समीकरण,

$$y - y_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}(x - x_1) \text{ और } y - y_1 = -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}} = (x - x_1)$$

हल दिए गए परवलय का समीकरण है,

$$y^2 = 4ax \qquad \ldots(i)$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $2y\frac{dy}{dx} = 4a \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2a}{y}$

$\therefore$ बिंदु $(at^2, 2at)$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(at^2,\, 2at)} = \frac{2a}{2at} = \frac{1}{t}$

अतः बिंदु $(at^2, 2at)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण,

$$y - 2at = \frac{1}{t}(x - at^2) \Rightarrow yt - 2at^2 = x - at^2. \Rightarrow x - t\,y + at^2 = 0$$

और $(at^2, 2at)$ पर अभिलंब की प्रवणता,

$$= \frac{-1}{\text{स्पर्श रेखा की प्रवणता}} = -t$$

$\therefore (at^2, 2at)$ पर अभिलंब का समीकरण,

$$y - 2at = -t\,(x - at^2)$$

$$\Rightarrow \qquad t\,x + y - 2at - at^3 = 0$$

प्रश्न 23. सिद्ध कीजिए कि वक्र $x = y^2$ और $xy = k$ एक-दूसरे को समकोण पर काटते हैं, यदि $8k^2 = 1$ है।

जब वक्र समकोण पर कटता है, तो कटे हुए बिंदु पर स्पर्श रेखाएँ अभिलंब होते हैं, अतः उनके प्रवणताओं के गुणनफल -1 के बराबर होता है।

हल दिए गए वक्रों के समीकरण है,

$$x = y^2 \qquad \ldots\text{(i)}$$

और $$xy = k \qquad \ldots\text{(ii)}$$

दोनों वक्रों का प्रतिच्छेद बिंदु ज्ञात करने के लिए, $\frac{k}{y} = y^2$

[समी (i) से x का मान (ii) में रखने पर]

$\Rightarrow \qquad y^3 = k \Rightarrow y = k^{1/3}$

अब, y का मान समी (i) में रखने पर, $x = (k^{1/3})^2 = k^{2/3}$

$\therefore$ समी (i) और समी (ii) बिंदु $(k^{2/3}, k^{1/3})$ पर काटते हैं।

समी (i) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$1 = 2y\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$$

$\therefore$ प्रथम वक्र के बिंदु $(k^{2/3}, k^{1/3})$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $= \frac{1}{2k^{1/3}}$ $\qquad \ldots$(iii)

समी (ii) से, $\qquad y = \frac{k}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-k}{x^2}$

$\therefore$ द्वितीय वक्र के बिंदु $(k^{2/3}, k^{1/3})$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $= \frac{-k}{(k^{2/3})^2} = \frac{-k}{k^{4/3}} = \frac{-1}{k^{1/3}}$

हम जानते हैं कि दो वक्र एक-दूसरे को समकोण पर काटते हैं, यदि वक्रों की स्पर्श रेखा, कटे हुए बिंदु $(k^{2/3}, k^{1/3})$ पर एक-दूसरे पर अभिलंब हैं।

यह दर्शाता है कि स्पर्श रेखा के गुणनफल = −1 होना चाहिए।

$$\Rightarrow \qquad \left(\frac{1}{2k^{1/3}}\right)\left(-\frac{1}{k^{1/3}}\right) = -1 \Rightarrow 1 = 2k^{2/3}$$

$$\Rightarrow \qquad 1^3 = (2k^{2/3})^3 \Rightarrow 1 = 8k^2$$

अतः, दिए गए दो वक्र समकोण पर काटते हैं, यदि $8k^2 = 1$

प्रश्न 24. अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ के बिंदु (x_0, y_0) पर स्पर्श रेखा तथा अभिलंब के समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल दिए गए वक्र का समीकरण है, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ...(i)

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{2x}{a^2} - \frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{b^2x}{a^2y}$$

$\therefore$ (x_0, y_0) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता, $= \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_0, y_0)} = \frac{b^2x_0}{a^2y_0}$

अतः (x_0, y_0) पर स्पर्श रेखा का समीकरण

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{b^2x_0}{a^2y_0} \Rightarrow \frac{y_0(y - y_0)}{b^2} = (x - x_0)\frac{x_0}{a^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{yy_0}{b^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = \frac{xx_0}{a^2} - \frac{x_0^2}{a^2}$$

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} \Rightarrow \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

[$\because (x_0, y_0)$ समी (i) अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ को संतुष्ट करता है]

अब, (x_0, y_0) पर अभिलंब का समीकरण,

$$\frac{-1}{(x_0, y_0) \text{ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता}} = -\frac{a^2y_0}{b^2x_0}$$

इसलिए, (x_0, y_0) पर अभिलंब का समीकरण

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}(x-x_0)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y-y_0}{a^2 y_0} = -\frac{x-x_0}{b^2 x_0} \Rightarrow \frac{y-y_0}{a^2 y_0} + \frac{x-x_0}{b^2 x_0} = 0$$

प्रश्न 25. वक्र $y=\sqrt{3x-2}$ पर उन स्पर्श रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $4x-2y+5=0$ के समांतर है।

पहले दिए गए वक्र का $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए। जहाँ $\frac{dy}{dx}$ रेखा की प्रवणता के बराबर है। इनको हल करने पर x_1 और y_1 का मान ज्ञात कीजिए तब आवश्यक स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात करने के लिए समीकरण $y-y_1=\frac{dy}{dx}(x-x_1)$ का अनुप्रयोग कीजिए।

हल दिए हुए वक्र का समीकरण है, $y=\sqrt{3x-2}$

बिंदु (x, y) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(3x-2)^{\frac{1}{2}-1} \cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{3x-2}}$$

∵ रेखा का समीकरण $4x-2y+5=0$

$$\Rightarrow \quad y = 2x + \frac{5}{2} \qquad (y = mx + c \text{ समीकरण के प्रकार का है})$$

∴ रेखा की प्रवणता $m=2$ है।

अब, वक्र की स्पर्श रेखा, रेखा $4x-2y+5=0$ के समांतर है। इसलिए

$$\frac{3}{2\sqrt{3x-2}} = 2 \Rightarrow 3 = 4\sqrt{3x-2}$$

$$\Rightarrow \quad 3x-2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \Rightarrow 3x-2 = \frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow \quad 3x = 2 + \frac{9}{16} \Rightarrow x = \frac{41}{48}$$

अब, $x=\frac{41}{48}$, $y=\sqrt{3x-2}$ में रखने पर,

$$y = \sqrt{3\left(\frac{41}{48}\right)-2} = \sqrt{\frac{41}{16}-2}$$

$$\sqrt{\frac{41-32}{16}} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$$

∴ स्पर्श रेखा का समीकरण जो बिंदु $\left(\frac{41}{48}, \frac{3}{4}\right)$ से होकर गुजरती है जिसकी प्रवणता 2 है, इस प्रकार दिया जाता है।

$$y \quad \frac{3}{4} = 2\left(x - \frac{41}{48}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad y - \frac{3}{4} = 2x - \frac{41}{24} \Rightarrow 48x - 24y = 23$$

अतः, आवश्यक स्पर्श रेखा का समीकरण $48x - 24y = 23$ है।

निर्देश (प्र. सं. 26-27) निम्नलिखित प्रश्नों में सही उत्तर का चुनाव कीजिए।

प्रश्न 26. वक्र $y = 2x^2 + 3\sin x$ के $x = 0$ पर अभिलंब की प्रवणता है

(a) 3 (b) $\frac{1}{3}$ (c) −3 (d) $-\frac{1}{3}$

हल (d) दिए हुए वक्र का समीकरण है,

$$y = 2x^2 + 3\sin x$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = 4x + 3\cos x.$$

$x = 0$ पर दिए गए वक्र की स्पर्श रेखा की प्रवणता,

$$\frac{dy}{dx} = 4 \times 0 + 3\cos 0 = 3$$

$x = 0$ पर दिए गए वक्र के अभिलंब की प्रवणता,

$$= \frac{-1}{\text{स्पर्श रेखा की प्रवणता}} = -\frac{1}{3}$$

प्रश्न 27. किस बिंदु पर $y = x + 1$, वक्र $y^2 = 4x$ की स्पर्श रेखा है?

(a) (1,2) (b) (2, 1) (c) (1, −2) (d) (−1, 2)

हल (a) दिए गए वक्र का समीकरण है, $y^2 = 4x$ ...(i)

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$2y\frac{dy}{dx} = 4 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{4}{2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{y}$$

∴ बिंदु (x, y) पर दिए गए वक्र की स्पर्श रेखा की प्रवणता

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{y}$$

$\Rightarrow$ दी गई रेखा $y = x + 1$ है $\quad (\because y = mx + c)$

$\therefore$ रेखा की प्रवणता, $m = 1$

रेखा $y = x + 1$ दिए गए वक्र की स्पर्श रेखा है, यदि रेखा की प्रवणता स्पर्श रेखा की प्रवणता के बराबर हो।

और रेखा वक्र को अवश्य काटती हो।

इसलिए, $\frac{2}{y} = 1 \Rightarrow y = 2$ है

$y = 2$ समी (i) में रखने पर, $2^2 = 4x \Rightarrow x = 1$

अत: बिंदु (1, 2) पर रेखा $y = x + 1$ दिए गए वक्र की स्पर्श रेखा है।

प्रश्नावली 6.4

प्रश्न 1. अवकलन का प्रयोग करके निम्नलिखित में से प्रत्येक का सन्निकट मान दशमलव के तीन स्थानों तक ज्ञात कीजिए।

(i) $\sqrt{25.3}$ (ii) $\sqrt{49.5}$ (iii) $\sqrt{0.6}$ (iv) $(0.009)^{1/3}$

(v) $(0.999)^{1/10}$ (vi) $(15)^{1/4}$ (vii) $(26)^{1/3}$ (viii) $(255)^{1/4}$

(ix) $(82)^{1/4}$ (x) $(401)^{1/4}$ (xi) $(0.0037)^{1/2}$ (xii) $(26.57)^{1/3}$

(xiii) $(81.5)^{1/4}$ (xiv) $(3.968)^{3/2}$ (xv) $(32.15)^{1/5}$

सर्वप्रथम, दिए गए संख्या को दो भागों में इस प्रकार विभक्त करें कि पहले भाग को x और दूसरे को Δx मानकर $f(x + \Delta x) \simeq f(x) + \Delta x f'(x)$ का अनुप्रयोग कीजिए।

हल (i) $\sqrt{25.3}$

मान लीजिए $f(x) = \sqrt{x}$.

पुन: मान लीजिए $x = 25$ और $\Delta x = 0.3$

$$\therefore \qquad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

अब, $f(x + \Delta x) \simeq f(x) + \Delta x f'(x)$

$$\Rightarrow \qquad \sqrt{x + \Delta x} \simeq \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \Delta x$$

$$\Rightarrow \qquad \sqrt{25.3} \simeq \sqrt{25} + \frac{0.3}{2\sqrt{25}} = 5 + \frac{0.3}{10} = 5.03 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{25.3} \simeq 5.03$$

(ii) $\sqrt{49.5}$

मान लीजिए $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

पुन: मान लीजिए $x = 49$ और $\Delta x = 0.5$

अब $\qquad f(x + \Delta x) \simeq f(x) + \Delta x f'(x)$

$\therefore \quad \sqrt{x+\Delta x} \simeq \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \Delta x$

$\Rightarrow \sqrt{49.5} \simeq \sqrt{49} + \frac{0.5}{2\sqrt{49}} = 7 + \frac{05}{140} = 7 + 0.036 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{49.5} \simeq 7.036$

(iii) $\sqrt{0.6}$

मान लीजिए $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

पुनः मान लीजिए $x = 0.64$ और $\Delta x = -0.04$

अब, $\quad f(x+\Delta x) \simeq f(x) + \Delta x f'(x)$

$\Rightarrow \quad \sqrt{x+\Delta x} \simeq \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \Delta x$

$\Rightarrow \quad \sqrt{0.64 - 0.04} \simeq \sqrt{0.64} + \frac{(-0.04)}{2\sqrt{0.64}}$

$$= 0.8 - \frac{0.04}{2 \times 0.8} = 0.8 - 0.025 = 0.775$$

$\Rightarrow \quad \sqrt{0.6} \simeq 0.775$

(iv) $(0.009)^{1/3}$

मान लीजिए $f(x) = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3} x^{\ 2/3}$

पुनः मान लीजिए $x = 0.008$ और $\Delta x = 0.001$

अब, $\quad f(x+\Delta x) \simeq f(x) + \Delta x f'(x) \quad \Rightarrow \quad (x+\Delta x)^{1/3} \simeq x^{1/3} + \frac{1}{3x^{2/3}} \times \Delta x$

$\Rightarrow (0.008 + 0.001)^{1/3} \simeq (0.008)^{1/3} + \frac{0.001}{3(0.008)^{2/3}}$

$$= 02 + \frac{0.001}{3\{(02)^3\}^{2/3}} = 02 + \frac{0.001}{3 \times (02)^2} = 0.208$$

$\Rightarrow \quad (0.009)^{1/3} \simeq 0208$

(v) $(0.999)^{1/10}$

मान लीजिए $f(x) = x^{1/10}$, पुनः मान लीजिए $x = 1$ और $\Delta x = -0.001$

$$f'(x) = \frac{1}{10} x^{-9/10}$$

अब, $\quad f(x+\Delta x) \simeq f(x) + \Delta x f'(x) \Rightarrow (x+\Delta x)^{1/10} \simeq x^{1/10} + \frac{1}{10x^{9/10}} \times \Delta x$

$\Rightarrow (1 - 0.001)^{1/10} \simeq (1)^{1/10} + \frac{(-0.001)}{10(1)^{9/10}}$

$$= 1 - \frac{0.001}{10 \times 1} = 1 - 0.0001 = 0.9999$$

$\therefore \quad (0.999)^{1/10} \simeq 0.9999$

(vi) $(15)^{1/4}$

मान लीजिए $f(x) = x^{1/4}$. $\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{4}x^{-3/4}$

पुनः मान लीजिए $x = 16$ और $\Delta x = -1$

अब, $\quad f(x + \Delta x) \simeq f(x) + \Delta x f'(x)$

$$\Rightarrow (x + \Delta x)^{1/4} \simeq x^{1/4} + \frac{\Delta x}{4x^{3/4}} \quad \Rightarrow \quad (16 - 1)^{1/4} \simeq (16)^{1/4} + \frac{(-1)}{4(16)^{3/4}}$$

$$= 2 - \frac{1}{4\{(16)^{1/4}\}^3} = 2 - \frac{1}{4 \times 2^3} = 2 - 0.031 = 1.969$$

$\therefore \quad (15)^{1/4} \simeq 1.969$

(vii) $(26)^{1/3}$

मान लीजिए $\quad f(x) = x^{1/3}. \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$

पुनः मान लीजिए $x = 27$ और $\Delta x = -1$,

अब, $f(x + \Delta x) \simeq f(x) + \Delta x\, f'(x) \quad \Rightarrow \quad (x + \Delta x)^{1/3} \simeq x^{1/3} + \frac{\Delta x}{3x^{2/3}}$

$$\Rightarrow \quad (27 - 1)^{1/3} \simeq (27)^{1/3} + \frac{(-1)}{3(27)^{2/3}}$$

$$= 3 - \frac{1}{3\{(27)^{1/3}\}^2} = 3 - \frac{1}{3 \times 3^2} = 3 - 0.037 = 2.963$$

$\Rightarrow \quad (26)^{1/3} \simeq 2.963$

(viii) $(255)^{1/4}$

मान लीजिए $f(x) = x^{1/4} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{4x^{3/4}}$

पुनः मान लीजिए $x = 256$ और $\Delta x = -1, \quad f'(x) = \frac{1}{4}x^{-3/4}$

अब, $\quad f(x + \Delta x) \simeq f(x) + \Delta x f'(x) \Rightarrow (x + \Delta x)^{1/4} \simeq x^{1/4} + \frac{\Delta x}{4x^{3/4}}$

$$\Rightarrow (256 - 1)^{1/4} \simeq (256)^{1/4} + \frac{(-1)}{4(256)^{3/4}} = 4 + \frac{-1}{4\{(256)^{1/4}\}^3} = 4 - \frac{1}{4 \times 4^3}$$

$$= 4 - \frac{1}{256} = 4 - 0.004 = 3.996$$

$\Rightarrow \quad (255)^{1/4} \simeq 3.996$

(ix) $(82)^{1/4}$

मान लीजिए $f(x) = x^{1/4} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{4}x^{-3/4}$

पुनः मान लीजिए $x = 81$ और $\Delta x = 1$

अब, $f(x+\Delta x) \simeq f(x) + \Delta x\, f'(x) \;\Rightarrow\; (x+\Delta x)^{1/4} \simeq x^{1/4} + \dfrac{\Delta x}{4x^{3/4}}$

$$\Rightarrow (81+1)^{1/4} \simeq (81)^{1/4} + \frac{1}{4(81)^{3/4}} = 3 + \frac{1}{4\{(81)^{1/4}\}^3} = 3 + \frac{1}{4 \times 3^3}$$

$$= 3 + \frac{1}{108} = 3 + 0.009 = 3.009$$

$$\Rightarrow \qquad (82)^{1/4} \simeq 3.009$$

(x) $(401)^{1/2}$

मान लीजिए $f(x) = \sqrt{x}, \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

पुन: मान लीजिए $x = 400$ और $\Delta x = 1$

अब, $f(x+\Delta x) \simeq f(x) + \Delta x f'(x)$

$$\Rightarrow \sqrt{x+\Delta x} \simeq \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \Delta x$$

$$\Rightarrow \sqrt{400+1} \simeq \sqrt{400} + \frac{1}{2\sqrt{400}} = 20 + \frac{1}{2 \times 20} = 20 + 0.025 = 20.025$$

$$\Rightarrow \qquad \sqrt{401} \simeq 20.025$$

(xi) $(0.0037)^{1/2}$

मान लीजिए $f(x) = \sqrt{x}, \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

पुन: मान लीजिए $x = 0.0036$ और $\Delta x = 0.0001$

अब $\qquad f(x+\Delta x) \simeq f(x) + \Delta x\, f'(x)$

$$\Rightarrow \qquad \sqrt{x+\Delta x} \simeq \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \Delta x$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{0.0036 + 0.0001} \simeq \sqrt{0.0036} + \frac{0.0001}{2\sqrt{0.0036}}$$

$$= 0.06 + \frac{0.0001}{2 \times 0.06} = 0.06 + 0.0008 = 0.0608$$

$$\Rightarrow \qquad \sqrt{0.0037} \simeq 0.0608$$

(xii) $(26.57)^{1/3}$

मान लीजिए $f(x) = x^{1/3}, \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{3}x^{-2/3} = \dfrac{1}{3x^{2/3}}$

पुन: मान लीजिए $x = 27$ और $\Delta x = -0.43$

अब $\qquad f(x+\Delta x) \simeq f(x) + \Delta x f'(x)$

$$\Rightarrow \qquad (x+\Delta x)^{1/3} \simeq x^{1/3} + \frac{1}{3x^{2/3}} \times \Delta x$$

$$\Rightarrow \qquad (27 - 0.43)^{1/3} \simeq (27)^{1/3} + \frac{(-0.43)}{3(27)^{2/3}}$$

$$= 3 - \frac{0.43}{3 \times 9} = 3 - \frac{0.43}{27} = 3 - 0.016 = 2.984$$

$\Rightarrow \quad (26.57)^{1/3} \simeq 2.984$

(xiii) $(81.5)^{1/4}$

मान लीजिए $f(x) = x^{1/4} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{4}x^{-3/4} = \frac{1}{4x^{3/4}}$

पुनः मान लीजिए $x = 81$ और $\Delta x = 0.5$

अब, $f(x + \Delta x) \simeq f(x) + \Delta x\, f'(x) \Rightarrow (x + \Delta x)^{1/4} \simeq x^{1/4} + \frac{1}{4x^{3/4}} \times \Delta x$

$$\Rightarrow \quad (81 + 0.5)^{1/4} \simeq (81)^{1/4} + \frac{0.5}{4(81)^{3/4}}$$

$$= 3 + \frac{0.5}{4 \times 3^3} = 3 + \frac{0.5}{108} = 3 + 0.0046 = 3.0046$$

$\Rightarrow \quad (81.5)^{1/4} \simeq 3.0046$

(xiv) $(3.968)^{3/2}$

मान लीजिए $f(x) = x^{3/2} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

पुनः मान लीजिए $x = 4$ और $\Delta x = -0.032$

अब, $f(x + \Delta x) \simeq f(x) + \Delta x f'(x)$

$$\Rightarrow \quad (x + \Delta x)^{3/2} \simeq x^{3/2} + \Delta x\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)$$

$$\Rightarrow \quad (4 - 0.032)^{3/2} \simeq (4)^{3/2} + \frac{3(-0.032)}{2}\sqrt{4} = 8 - 0.096 = 7.904$$

$\Rightarrow \quad (3.968)^{3/2} \simeq 7.904$

(xv) $(32.15)^{1/5}$

मान लीजिए $f(x) = x^{1/5} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{5}x^{-4/5} = \frac{1}{5x^{4/5}}$

पुनः मान लीजिए $x = 32$ और $\Delta x = 0.15$

अब, $f(x + \Delta x) \simeq f(x) + \Delta x\, f'(x)$

$$\Rightarrow (x + \Delta x)^{1/5} \simeq x^{1/5} + \frac{1}{5x^{4/5}} \times \Delta x \Rightarrow \quad (32.15)^{1/5} \simeq (32)^{1/5} + \frac{0.15}{5(32)^{4/5}}$$

$$= 2 + \frac{0.15}{5 \times 2^4} = 2 + \frac{0.15}{80}$$

$$= 2 + 0.0019 = 2.0019$$

$\Rightarrow \quad (32.15)^{1/5} \simeq 2.0019$

प्रश्न 2. $f(2.01)$ का सन्निकटमान ज्ञात कीजिए जहाँ $f(x) = 4x^2 + 5x + 2$ है।

हल माना लीजिए $f(x) = 4x^2 + 5x + 2 \Rightarrow f'(x) = 8x + 5$

पुनः मान लीजिए $x = 2$ और $\Delta x = 0.01$

और $f(x + \Delta x) \simeq f(x) + \Delta x f'(x)$

$\therefore$ $f(x + \Delta x) \simeq (4x^2 + 5x + 2) + (8x + 5)\Delta x$

$\Rightarrow$ $f(2 + 0.01) \simeq (4 \times 2^2 + 5 \times 2 + 2) + (8 \times 2 + 5)(0.01)$ $(x = 2, \Delta x = 0.01)$

$= 28 + 21 \times 0.01 = 28.21$

$\Rightarrow$ $f(2.01) \simeq 28.21$

प्रश्न 3. $f(5.001)$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए जहाँ $f(x) = x^3 - 7x^2 + 15$ है।

सबसे पहले संख्या 5.001 का इस प्रकार तोड़े कि $x = 5$ और $\Delta x = 0.001$ और $f(x + \Delta x) \simeq f(x) + \Delta x\, f'(x)$ का अनुप्रयोग करें।

हल मान लीजिए $f(x) = x^3 - 7x^2 + 15$

$\Rightarrow$ $f'(x) = 3x^2 - 14x$

माना कि $x = 5$ और $\Delta x = 0.001$

और $f(x + \Delta x) \simeq f(x) + \Delta x\, f'(x)$

इसलिए $f(x + \Delta x) \simeq (x^3 - 7x^2 + 15) + \Delta x\,(3x^2 - 14x)$

$\Rightarrow$ $f(5.001) \simeq (5^3 - 7 \times 5^2 + 15) + (3 \times 5^2 - 14 \times 5)(0.001)$

$(\because x = 5, \Delta x = 0.001)$

$= 125 - 175 + 15 + (75 - 70)(0.001) = -35 + (5)(0.001)$

$= -35 + 0.005 = -34.995$

प्रश्न 4. x मी भुजा वाले घन की भुजा में 1% वृद्धि के कारण घन के आयतन में होने वाला सन्निकट परिवर्तन ज्ञात कीजिए।

घन की भुजा x और आयतन के मध्य सूत्र $v = x^3$ का अवकलन करें ताकि $\frac{dV}{dx}$ ज्ञात करें सकें और तब $\Delta V = \left(\frac{dV}{dx}\right)\Delta x$ का अनुप्रयोग करके आयतन में होने वाला सन्निकट परिवर्तन ज्ञात कीजिए।

हल x भुजा वाले घन का आयतन $V = x^3$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\Rightarrow$ $\frac{dV}{dx} = 3x^2$

अब, आयतन में परिवर्तन $\Delta V = \left(\frac{dV}{dx}\right)\Delta x = (3x^2)\Delta x$

$= 3x^2\,(0.01x) = 0.03x^3$ $(\Delta x = x$ का $1\% = 0.01x)$

$= 0.03\,x^3$ मी^{3}

प्रश्न 5. x मी भुजा वाले घन की भुजा में 1% ह्रास के कारण घन के पृष्ठ क्षेत्रफल में होने वाले सन्निकट परिवर्तन ज्ञात कीजिए।

घन के पृष्ठ क्षेत्रफल के सूत्र $S = 6x^2$ का अनुप्रयोग तथा अवकलन करने पर, परिणाम ज्ञात होता है।

हल हम जानते हैं कि घन का पृष्ठ क्षेत्रफल इस प्रकार दिया जाता है

$$S = 6x^2$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\Rightarrow \quad \frac{dS}{dx} = 12x$$

अब, पृष्ठ क्षेत्रफल में परिवर्तन $\Delta S = \left(\frac{dS}{dx}\right)\Delta x = (12x)\Delta x = 12x(-0.01)x$

(जैसा कि $\Delta x = x$ का $-1\% = -0.01x$)

$$= -0.12\, x^2 \text{ मी}^2$$

अतः घन का पृष्ठ क्षेत्रफल में सन्निकट परिवर्तन $0.12x^2$ मी^{2} है।

प्रश्न 6. एक गोले की त्रिज्या 7 मी मापी जाती है जिसमें 0.02 मी की त्रुटि है। इसके आयतन के परिकलन में सन्निकट त्रुटि ज्ञात कीजिए।

गोले की त्रिज्या और आयतन V के मध्य सूत्र $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ का अनुप्रयोग करें, तब r के सापेक्ष अवकलन करें और $\Delta V = \left(\frac{dV}{dr}\right)\Delta r$ का अनुप्रयोग करके आयतन V का सन्निकट परिवर्तन ज्ञात करें।

हल मान लीजिए की गोले की त्रिज्या r है और त्रिज्या मापन में त्रुटि Δr है।

तब, $r = 7$ मी और $\Delta r = 0.02$ मी

अब, गोले का आयतन $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dV}{dr} = \left(\frac{4}{3}\pi\right)(3r^2) = 4\pi r^2$$

$$\therefore \quad \Delta V = \left(\frac{dV}{dr}\right)\Delta r = (4\pi r^2)\Delta r$$

$$\Delta V = 4\pi \times 7^2 \times 0.02 = 3.92\,\pi \text{ मी}^3$$

$$\Delta V = 3.92\,\pi \text{ मी}^3$$

अतः आयतन के परिकलन में सन्निकट त्रुटि $3.92\,\pi$ मी^{3} है।

प्रश्न 7. एक गोले की त्रिज्या 9 मी मापी जाती है जिसमें 0.03 सेमी की त्रुटि है। इसके पृष्ठ क्षेत्रफल के परिकलन में सन्निकट त्रुटि ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि गोले की त्रिज्या r है और त्रिज्या मापन में त्रुटि Δr है।

तब, $r = 9$ मी और $\Delta r = 0.03$ मी

अब गोले की पृष्ठ क्षेत्रफल, $S = 4\pi r^2$

$\Rightarrow \qquad \dfrac{dS}{dr} = 8\pi r$

अतः, $\qquad \Delta S = \left(\dfrac{dS}{dr}\right)\Delta r = (8\pi r)\,\Delta r$

$\Delta S = 8\pi \times 9 \times 0.03 = 2.16\,\pi$ मी^{2}

अतः पृष्ठ क्षेत्रफल के परिकलन में सन्निकट त्रुटि 2.16π मी^{2} है।

प्रश्न 8. यदि $f(x) = 3x^2 + 15x + 5$ तो $f(3.02)$ का सन्निकटमान है

(a) 47.66 (b) 57.66 (c) 67.66 (d) 77.66

हल (d) मान लीजिए $f(x) = 3x^2 + 15x + 5 \Rightarrow f'(x) = 6x + 15$

पुनः मान लीजिए $x = 3$ और $\Delta x = 0.02$

और $\qquad f(x + \Delta x) \simeq f(x) + \Delta x\, f'(x)$.

$\Rightarrow \qquad f(x + \Delta x) \simeq (3x^2 + 15x + 5) + (6x + 15)\Delta x$

$\Rightarrow \qquad f(3.02) \simeq 3 \times 3^2 + 15 \times 3 + 5 + (6 \times 3 + 15)(0.02) \qquad (x = 3, \Delta x = 0.02)$

$= 27 + 45 + 5 + (18 + 15)(0.02) = 77 + 33(0.02) = 77 + 0.66$

$\Rightarrow \qquad f(3.02) \simeq 77.66$

इसलिए $f(3.02)$ का सन्निकट मान 77.66 है।

प्रश्न 9. भुजा में 3% वृद्धि के कारण भुजा x के घन के आयतन में सन्निकटमान परिवर्तन है

(a) $0.06x^3$ मी^{3} (b) $0.6x^3$ मी^{3} (c) $0.09x^3$ मी^{3} (d) $0.9x^3$ मी^{3}

हल (c) मान लीजिए कि x भुजा वाले घन का आयतन V इस प्रकार दिया जाता है

$$V = x^3$$

$\Rightarrow x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\dfrac{dV}{dx} = 3x^2$

पुनः मान लीजिए $\qquad \Delta x = 0.03x$

अब, आयतन में परिवर्तन, $\qquad \Delta V = \left(\dfrac{dV}{dx}\right)\Delta x$

$= (3x^2)\Delta x = (3x^2)(0.03x) \qquad (\Delta x = 0.03x)$

$= 0.09x^3$ मी^{3}

इसलिए घन के आयतन में सन्निकट परिवर्तन है

$= 0.09\, x^3$

प्रश्नावली 6.5

प्रश्न 4. निम्नलिखित दिए गए फलनों के उच्चतम या निम्नतम मान, यदि कोई हो तो ज्ञात कीजिए।

(a) $f(x) = (2x-1)^2 + 3$ (b) $f(x) = 9x^2 + 12x + 2$

(c) $f(x) = -(x-1)^2 + 10$ (d) $g(x) = x^3 + 1$

हल (a) दिया गया फलन $f(x) = (2x-1)^2 + 3$

यह पाया जाता है कि प्रत्येक $x \in R$ के लिए $(2x-1)^2 \geq 0$

(क्योंकि, यह प्रत्येक वास्तविक x संख्या का पूर्ण वर्ग है।)

इसलिए, प्रत्येक $x \in R$ के लिए $f(x) = (2x-1)^2 + 3 \geq 3$

f का न्यूनतम मान के लिए,

$$2x - 1 = 0$$

$$\therefore \quad 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ निम्नतम मान फलन $f = f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(2 \times \frac{1}{2} - 1\right)^2 + 3 = 3$

x के किसी मान के लिए, $f(x)$ का मान हमेशा 3 से बड़ा होगा, इसलिए फलन f का कोई विशेष उच्चतम मान नहीं है।

(b) दिया गया फलन $f(x) = 9x^2 + 12x + 2 = 9x^2 + 12x + 4 - 2$

[पूर्ण वर्ग बनाने के लिए हम 2 जोड़ते और घटाते हैं]

$$= (9x^2 + 6x + 6x + 4) - 2$$

$$= [(3x)^2 + 2 \times 3x \times 2 + (2)^2]2$$

$$= [(3x+2)(3x+2)] - 2$$

$$= (3x+2)^2 - 2$$

यह पाया जाता है कि प्रत्येक $x \in R$ के लिए $(3x+2)^2 \geq 0$

इसलिए प्रत्येक $x \in R$ के लिए $f(x) = (3x+2)^2 - 2 \geq -2$

f का न्यूनतम मान ज्ञात करने के लिए

$$3x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2}{3}$$

$\therefore$ f का न्यूनतम मान $f = f\left(\frac{-2}{3}\right) = \left(3 \times \frac{-2}{3} + 2\right)^2 - 2 = -2$

x के प्रत्येक मान के लिए $f(x) \geq -2$ है इसलिए फलन f का विशेष उच्चतम मान नहीं है।

(c) दिया गया फलन $f(x) = -(x-1)^2 + 10$

यह पाया जाता है कि प्रत्येक $x \in R$ के लिए $(x-1)^2 \geq 0$

$\Rightarrow$ प्रत्येक $x \in R$ के लिए, $-(x-1)^2 \leq 0$

$\Rightarrow$ प्रत्येक $x \in R$ के लिए, $f(x) = -(x-1)^2 + 10 \leq 10$

f का उच्चतम मान तभी ज्ञात किया जा सकता है जब $(x-1) = 0$ हो

या $(x-1)=0 \Rightarrow x=1$

$\therefore$ x के प्रत्येक मान के लिए, $f=f(1)=-(1-1)^2+10=10$

$\therefore$ x के प्रत्येक मान के लिए $f(x)\le 10$, अतः फलन f का कोई विशेष न्यूनतम मान नहीं है।

(d) दिया गया फलन $g(x)=x^3+1$

यह पाया जाता है कि जब x का मान बढ़ाया जाता है तो $g(x)$ का मान बढ़ता है और $g(x)$ को उतना बड़ा बनाया जा सकता है जितना हम चाहते हैं। इसलिए $g(x)$ को उतना मान नहीं है। इसी प्रकार, $g(x)$ को जितना छोटा बनाया जा सकता है जितना कि हम चाहते हैं। इसलिए $g(x)$ का न्यूनतम मान नहीं है।

वैकल्पिक विधि

यहाँ, $g(x)=x^3+1$, $g'(x)=3x^2$, $g''(x)=6x$

उच्चतम या निम्नतम मान के लिए, $g'(x)=0$

$\Rightarrow$ $3x^2=0 \Rightarrow x=0$

$x=0$ पर, $g''(0)=6\times 0=0$

अतः $x=0$ पर $g(x)$ ना ही उच्चतम है और ना ही न्यूनतम है।

प्रश्न 2. **निम्नलिखित दिए गए फलनों के उच्चतम या निम्नतम मान, यदि कोई हो, तो ज्ञात कीजिए।**

(a) $f(x)=|x+2|-1$ (b) $g(x)=-|x+1|+3$ (c) $h(x)=\sin(2x)+5$
(d) $f(x)=|\sin 4x+3|$ (e) $h(x)=x+1, x\in(-1,1)$

हल (a) दिया गया फलन $f(x)=|x+2|-1$

हम जानते हैं कि प्रत्येक $x\in R$ के लिए, $|x+2|\ge 0$

इसलिए, प्रत्येक $x\in R$ के लिए, $f(x)=|x+2|-1\ge -1$

f का न्यूनतम मान तभी ज्ञात किया जा सकता है जब $|x+2|=0$.

अर्थात् $|x+2|=0 \Rightarrow x=-2$

$\therefore$ f का न्यूनतम मान $=f(-2)=|-2+2|-1=0-1=-1$

इसलिए, $f(x)$ का न्यूनतम मान -1 है लेकिन $x=2$ पर कोई उच्चतम मान नहीं है।

नोट *फलन का मापांक मान हमेशा* ≥ 0

(b) दिया गया फलन $g(x)=-|x+1|+3$

हम जानते हैं कि प्रत्येक $x\in R$ के लिए, $|x+1|\ge 0$

$\Rightarrow$ प्रत्येक $x\in R$ के लिए, $-|x+1|\le 0$

$\Rightarrow$ प्रत्येक $x\in R$ के लिए, $-|x+1|+3\le 3$

g का उच्चतम मान तभी ज्ञात किया जा सकता
जब $|x+1|=0$ या $x=-1$

अर्थात् $\quad |x+1| = 0 \Rightarrow x = -1$

$\therefore$ g का उच्चतम मान $= g(-1) = |-1+1| + 3 = 3$

इसलिए, $g(x)$ का उच्चतम मान $x = -1$ पर 3 है लेकिन $g(x)$ का कोई निम्नतम मान नहीं है।

(c) दिया गया फलन $h(x) = \sin 2x + 5$

हम जानते हैं कि $-1 \le \sin x \le 1$

$\Rightarrow \quad -1 \le \sin 2x \le 1$

$\Rightarrow \quad -1 + 5 \le \sin 2x + 5 \le 1 + 5$

$\Rightarrow \quad 4 \le \sin 2x + 5 \le 6$

इसलिए, $h(x)$ का उच्चतम मान 6 है और न्यूनतम मान 4 है।

(d) दिया गया फलन $f(x) = |\sin 4x + 3|$

हम जानते हैं कि $-1 \le \sin 4x \le 1 \Rightarrow -1 + 3 \le \sin 4x + 3 \le 1 + 3$

$\Rightarrow \quad 2 \le \sin 4x + 3 \le 4$

इसलिए $f(x)$ का उच्चतम मान 4 है और न्यूनतम मान 2 है।

(e) दिया गया फलन $h(x) = x + 1, -1 < x < 1$

अब, $\quad -1 < x < 1 \Rightarrow -1 + 1 < x + 1 < 1 + 1 \Rightarrow 0 < x + 1 < 2$

यहाँ, बिंदु (0,2) पर f का न ही उच्चतम और न ही न्यूनतम मान है।

वैकल्पिक विधि

प्रत्येक $x \in (-1, 1)$ के लिए $h'(x) = 1$ विद्यमान है

और प्रत्येक $x \in (-1, 1)$ के लिए $h'(x) \ne 0$

$\therefore h(x)$ खुले अंतराल में परिभाषित है।

इसलिए, कोई ऐसा बिन्दु नहीं है जिस पर $h(x)$ का उच्चतम और न्यूनतम मान है।

प्रश्न 3. निम्नलिखित फलनों के स्थानीय उच्चतम या निम्नतम, यदि कोई हों तो, ज्ञात कीजिए तथा स्थानीय उच्चतम या स्थानीय निम्नतम मान, जैसी स्थिति हो, भी ज्ञात कीजिए।

(i) $f(x) = x^2$ $\quad$ (ii) $g(x) = x^3 - 3x$

(iii) $h(x) = \sin x + \cos x, \ 0 < x < \frac{\pi}{2}$ $\quad$ (iv) $f(x) = \sin x - \cos x, \ 0 < x < 2\pi$

(v) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 15$ $\quad$ (vi) $g(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}, x > 0$

(vii) $g(x) = \frac{1}{x^2 + 2}$ $\quad$ (viii) $f(x) = x\sqrt{1-x}, \ x > 0$

स्थानीय उच्चतम या स्थानीय न्यूनतम ज्ञात करने के लिए द्वितीय अवकलन परिक्षण करें। प्रथम अवकलन को शून्य के बराबर रखकर मान ज्ञात करें और उस मान के लिए द्वितीय अवकलन की जाँच करें। यदि मान शून्य से बड़ा हो, तो बिंदु स्थानीय निम्नतम होगी, यदि मान शून्य से छोटा हो, तो बिंदु स्थानीय उच्चतम होगा। इस प्रकार दिए गए फलन में x का मान रखकर स्थानीय उच्चतम और स्थानीय निम्नतम ज्ञात किया जा सकता है।

हल (i) दिया गया फलन $f(x) = x^2$

$\therefore x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$f'(x) = 2x$ और पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $f''(x) = 2$

उच्चतम और न्यूनतम के लिए, $f'(x) = 0$ रखने पर,

$\therefore \qquad 2x = 0 \Rightarrow x = 0$

इसलिए, $x = 0$ केवल वह बिंदु है जिस पर f का स्थानीय उच्चतम या स्थानीय निम्नतम बिंदु हो सकता है।

अब, $\qquad f''(0) = 2 > 0 \qquad$ (जो कि धनात्मक है)

इसलिए, द्वितीय अवकलन परीक्षण द्वारा $x = 0$, f के स्थानीय न्यूनतम का बिंदु है और $x = 0$ पर f का स्थानीय न्यूनतम मान $f(0) = x^2 = 0^2 = 0$

(ii) दिया गया फलन $g(x) = x^3 - 3x$

$\therefore \qquad g'(x) = 3x^2 - 3$ और $g''(x) = 6x$

न्यूनतम और उच्चतम के लिए $g'(x) = 0$ रखने पर,

$\therefore \qquad 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

$x = -1$ पर, $\qquad g''(-1) = 6(-1) = -6 < 0$

अतः $x = -1$ पर g का स्थानीय उच्चतम मान है तथा $x = -1$ पर g का स्थानीय उच्चतम मान $g(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = -1 + 3 = 2$

$x = 1$ पर, $\qquad g''(1) = 6 \times 1 = 6 > 0$

$\therefore \; x = 1$ पर का स्थानीय न्यूनतम है और स्थानीय न्यूनतम मान $= g(1)$

$$= 1^3 - 3 \times 1 = 1 - 3 = -2$$

(iii) दिया गया फलन $h(x) = \sin x + \cos x,\ 0 < x < \frac{\pi}{2}$

$\therefore \; h'(x) = \cos x - \sin x$ और $h''(x) = -\sin x - \cos x$

न्यूनतम और उच्चतम मान के लिए $h'(x) = 0$ रखने पर,

$\Rightarrow \sin x = \cos x \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = 1 \Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$x = \frac{\pi}{4}$ पर, $h''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} < 0$

इसलिए, द्वितीय अवकलन परीक्षण द्वारा $x = \frac{\pi}{4}$ स्थानीय उच्चतम के मान का बिंदु है,

$\therefore$ स्थानीय उच्चतम मान $h\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

(iv) दिया गया फलन $f(x) = \sin x - \cos x$

$0 < x < 2\pi$

$\therefore \qquad f'(x) = \cos x + \sin x$ और $f''(x) = -\sin x + \cos x$

न्यूनतम और उच्चतम के लिए $f'(x) = 0$ रखने पर,

$$\Rightarrow \qquad \cos x + \sin x = 0 \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = -1 \Rightarrow \tan x = -1$$

$$\Rightarrow \qquad x = \pi - \frac{\pi}{4}, 2\pi - \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}; x \in (0, 2\pi)$$

$\therefore \frac{3\pi}{4}$ और $\frac{7\pi}{4}$ पर स्थानीय उच्चतम और स्थानीय निम्नतम हो सकता है।

$$x = \frac{3\pi}{4} \text{ पर, } f''\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\sin\frac{3\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{4}$$

$$= -\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$[\because \sin(\pi - \theta) = \sin\theta$ और $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta]$

$$= -\sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} < 0$$

$\therefore x = \frac{3\pi}{4}$ उच्चतम का बिंदु है।

$$x = \frac{3\pi}{4} \text{ पर उच्चतम मान} = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\frac{3\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{4}$$

$$= \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\text{तथा } x = \frac{7\pi}{4} \text{ पर, } f''\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\sin\frac{7\pi}{4} + \cos\frac{7\pi}{4}$$

$$= -\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} > 0$$

$\therefore \qquad x = \frac{7\pi}{4}$ न्यूनतम का बिंदु है।

$\therefore \; x = \frac{7\pi}{4}$ पर न्यूनतम मान

$$f\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \sin\frac{7\pi}{4} - \cos\frac{7\pi}{4} = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -\sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

(v) दिया गया फलन $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 15$

$$\Rightarrow \qquad f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \quad \text{तथा} \quad f''(x) = 6x - 12$$

उच्चतम और न्यूनतम के लिए $f'(x) = 0$ रखने पर,

$$\Rightarrow \qquad 3x^2 - 12x + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3(x^2 - 4x + 3) = 0$$

$\Rightarrow \qquad 3(x^2 - 3x - x + 3) = 0 \qquad \Rightarrow \quad 3[x(x-3) - 1(x-3)] = 0$

$\Rightarrow \qquad 3(x-1)(x-3) = 0 \qquad \Rightarrow \quad x = 1$ या $x = 3$

$x = 1$ पर, $\qquad f''(1) = 6 \times 1 - 12 = 6 - 12 = -6 < 0$

$\therefore x = 1$ उच्चतम का बिंदु है।

उच्चतम मान $= f(1) = (1)^3 - 6(1)^2 + 9(1) + 15 = 1 - 6 + 9 + 15 = 19$

$x = 3$ पर, $f''(3) = 6 \times 3 - 12 = 18 - 12 = 6 > 0$

$x = 3$ न्यूनतम का बिंदु है।

$\therefore$ न्यूनतम मान $= f(3) = 3^3 - 6 \times 3^2 + 9 \times 3 + 15$

$= 27 - 54 + 27 + 15 = 15$

(vi) दिया गया फलन $\quad g(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}, \ x > 0$

$\Rightarrow \qquad g'(x) = \frac{1}{2} + 2\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2}$

और $\qquad g''(x) = -2(-2)x^{-3} = \frac{4}{x^3}$

उच्चतम और न्यूनतम मान के लिए, $g'(x) = 0$ रखने पर,

$\Rightarrow \qquad \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2}{x^2}$

$\Rightarrow \qquad x^2 = 4 \Rightarrow x = 2, -2 \quad \Rightarrow x = 2 \qquad$ [$\because x > 0$ दिया है]

$x = 2$ पर, $\qquad g''(2) = \frac{4}{2^3} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} > 0$

$\therefore \ x = 2$ न्यूनतम का बिंदु है।

न्यूनतम मान, $\qquad g(2) = \frac{2}{2} + \frac{2}{2} = 1 + 1 = 2$

(vii) दिया गया फलन है $g(x) = \frac{1}{x^2 + 2}$

अब, $g(x) = (x^2 + 2)^{-1} \Rightarrow g'(x) = -1(x^2 + 2)^{-1-1} \times 2x = \frac{-2x}{(x^2 + 2)^2}$

$\Rightarrow \qquad g''(x) = \frac{(x^2 + 2)^2 \cdot (-2) - (-2x) \cdot 2(x^2 + 2) \cdot 2x}{(x^2 + 2)^4}$

$= \frac{-2(x^2 + 2)^2 + 8x^2(x^2 + 2)}{(x^2 + 2)^4} \quad \frac{(x^2 + 2)(-2x^2 - 4 + 8x^2)}{(x^2 + 2)^4}$

$= \frac{6x^2 - 4}{(x^2 + 2)^3} = \frac{2(3x^2 - 2)}{(x^2 + 2)^3}$

न्यूनतम और उच्चतम मान के लिए $g'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2x}{(x^2 + 2)^2} = 0 \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0$

$x = 0$ पर, $\qquad g''(0) = \dfrac{2[3(0)^2 - 2]}{[(0)^2 + 2]^3} = \dfrac{-4}{8} = -\dfrac{1}{2} < 0$

$\therefore$ $x = 0$ उच्चतम का बिंदु है तथा उच्चतम मान, $g(0) = \dfrac{1}{(0)^2 + 2} = \dfrac{1}{2}$

(viii) दिया गया फलन $f(x) = x\sqrt{1 - x}$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{x(-1)}{2\sqrt{1-x}} + \sqrt{1-x} = \frac{-x + 2(1-x)}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2 - 3x}{2\sqrt{1-x}}$$

$$\Rightarrow \quad f''(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{1-x}(-3) - (2-3x)\left(\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}\right)}{(1-x)}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{1-x}(-3) - (2-3x)\left(\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}\right)}{2(1-x)} = \frac{-6(1-x) + (2-3x)}{4(1-x)^{3/2}}$$

$$= \frac{3x - 4}{4(1-x)^{3/2}}$$

उच्चतम और न्यूनतम के लिए $f'(x) = 0$ रखने पर,

$$\therefore \qquad \frac{2 - 3x}{2\sqrt{1-x}} = 0 \Rightarrow 2 - 3x = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$x = \dfrac{2}{3}$ पर, $\qquad f''\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{3\left(\dfrac{2}{3}\right) - 4}{4\left(1 - \dfrac{2}{3}\right)^{3/2}} = \dfrac{2 - 4}{4\left(\dfrac{1}{3}\right)^{3/2}} = \dfrac{-1}{2\left(\dfrac{1}{3}\right)^{3/2}} < 0$

$\therefore$ $x = \dfrac{2}{3}$ उच्चतम का बिंदु है।

तथा उच्चतम मान $= f\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{2}{3}\sqrt{1 - \dfrac{2}{3}} = \dfrac{2}{3} \times \sqrt{\dfrac{1}{3}} = \dfrac{2}{3\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$

प्रश्न 4. सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित फलनों का उच्चतम या निम्नतम मान नहीं है।

(a) $f(x) = e^x$ $\qquad$ (b) $g(x) = \log x$ $\qquad$ (c) $h(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

हल (a) दिया गया फलन है $f(x) = e^x$

$$\Rightarrow \qquad f'(x) = e^x$$

अब, यदि $f'(x) = 0$, तब $e^x = 0$ लेकिन x के किसी भी मान के लिए चरघातांकी फलन शून्य नहीं हो सकता है।

इसलिए, यहाँ $x \in R$ इस प्रकार विद्यमान नहीं है कि $f'(x) = 0$

अत: फलन f का कोई उच्चतम और न्यूनतम मान नहीं है।

(b) दिया गया फलन $g(x) = \log x$

$$\Rightarrow \qquad g'(x) = \frac{1}{x}$$

क्योंकि $\log x$ धनात्मक संख्या x के लिए परिभाषित है, तब प्रत्येक x के लिए $g'(x) > 0$

$\because x \in R$ इस प्रकार विद्यमान नहीं है कि $g'(x) = 0$ अतः फलन g का कोई उच्चतम और न्यूनतम मान नहीं है।

(c) दिया गया फलन $h(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

$$\Rightarrow \qquad h'(x) = 3x^2 + 2x + 1$$

अब, $h'(x) = 0$ रखने पर,

$$\Rightarrow \qquad 3x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 3 \times 1}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{6} \qquad \left[x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ के प्रयोग से}\right]$$

$$\Rightarrow x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}\, i}{6} = \frac{2(-1 \pm \sqrt{2}\, i)}{6} \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{2}\, i}{3} \notin R$$

$\therefore$ $x \in R$ इस प्रकार विद्यमान नहीं है कि $h'(x) = 0$

अतः फलन h का कोई उच्चतम और न्यूनतम मान नहीं है।

प्रश्न 5. प्रदत्त अंतरालों में निम्नलिखित फलनों के निरपेक्ष उच्चतम मान और निरपेक्ष निम्नतम मान ज्ञात कीजिए।

(a) $f(x) = x^3,\ x \in [-2, 2]$ (b) $f(x) = \sin x + \cos x,\ x \in [0, \pi]$

(c) $f(x) = 4x - \frac{1}{2}x^2,\ x \in \left[-2, \frac{9}{2}\right]$ (d) $f(x) = (x-1)^2 + 3,\ x \in [-3, 1]$

बंद अंतराल में फलन का उच्चतम और निम्नतम मान फलन का निरपेक्ष उच्चतम और निरपेक्ष निम्नतम मान कहलाता है।

निरपेक्ष न्यूनतम और निरपेक्ष उच्चतम मान ज्ञात करने के लिए स्थानीय निम्नतम और स्थानीय उच्चतम के कुछ नियमों का अनुसरण करना होगा।

हल (a) दिया गया फलन है $f(x) = x^3$

$$\Rightarrow \qquad f'(x) = 3x^2$$

उच्चतम और न्यूनतम के लिए $f'(x) = 0$ रखने पर,

$$\Rightarrow \qquad 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \in [-2, 2]$$

अब, हम बिन्दु $x = 0$ और अंतराल $[-2, 2]$ के अंत बिंदुओं पर f का मान ज्ञात करते हैं।

$x = 0$ पर, $\qquad f(0) = 0^3 = 0$

$x = -2$ पर, $\qquad f(-2) = (-2)^3 = -8$

$x = 2$ पर, $\qquad f(2) = (2)^3 = 8$

इसलिए $x = 2$ पर निरपेक्ष उच्चतम मान 8 है और $x = -2$ पर निरपेक्ष न्यूनतम मान -8 है।

(b) दिया गया फलन $f(x) = \sin x + \cos x$

$\Rightarrow \qquad f'(x) = \cos x - \sin x$

उच्चतम और न्यूनतम के लिए $f'(x) = 0$ रखने पर,

$\Rightarrow \quad \cos x - \sin x = 0 \Rightarrow \dfrac{\sin x}{\cos x} = 1 \Rightarrow \quad \tan x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} \in [0, \pi]$

अब हम बिंदु $x = \dfrac{\pi}{4}$ और अंतराल $[0, \pi]$ के अंत बिंदुओं पर f का मान ज्ञात करते हैं।

$x = \dfrac{\pi}{4}$ पर, $\qquad f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\dfrac{\pi}{4} + \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$x = 0$ पर, $\qquad f(0) = \sin 0 + \cos 0 = 0 + 1 = 1$

$x = \pi$ पर, $\qquad f(\pi) = \sin\pi + \cos\pi = 0 - 1 = -1$

इसलिए $x = \dfrac{\pi}{4}$ पर निरपेक्ष उच्चतम मान $\sqrt{2}$ है और $x = \pi$ पर निरपेक्ष निम्नतम मान -1 है।

(c) दिया गया फलन $f(x) = 4x - \dfrac{1}{2}x^2 \Rightarrow \quad f'(x) = 4 - \dfrac{1}{2}(2x) = 4 - x$

उच्चतम और न्यूनतम मान के लिए $f'(x) = 0$ रखने पर,

$4 - x = 0 \qquad \Rightarrow \quad x = 4 \in \left[-2, \dfrac{9}{2}\right]$

अब, हम $x = 4$ और अंतराल $\left[-2, \dfrac{9}{2}\right]$ के अंत बिन्दुओं पर f का मान ज्ञात करते हैं।

$x = 4$ पर, $\qquad f(4) = 4(4) - \dfrac{1}{2}(4)^2 = 16 - 8 = 8$

$x = -2$ पर, $\qquad f(-2) = 4(-2) - \dfrac{1}{2}(-2)^2 = -8 - 2 = -10$

$x = \dfrac{9}{2}$ पर, $\qquad f\left(\dfrac{9}{2}\right) = 4\left(\dfrac{9}{2}\right) - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{9}{2}\right)^2 = 18 - \dfrac{81}{8} = \dfrac{63}{8} = 7.875$

इसलिए, $x = 4$ पर निरपेक्ष उच्चतम मान 8 है और $x = -2$ पर निरपेक्ष न्यूनतम मान -10 है।

(d) दिया गया फलन $f(x) = (x-1)^2 + 3$

$\therefore \qquad f'(x) = 2(x-1)$

उच्चतम और न्यूनतम मान के लिए $f'(x) = 0$ रखने पर,

$\Rightarrow \qquad 2(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1$

अब, हम अंतराल $[-3, 1]$ के अंत बिंदुओं पर f का मान ज्ञात करते हैं।

$x = 1$ पर, $\qquad f(1) = (1-1)^2 + 3 = 3$

$x = -3$ पर, $\qquad f(-3) = (-3-1)^2 + 3 = 19$

$\because$ $x = -3$ पर निरपेक्ष उच्चतम मान 19 है और $x = -1$ पर निरपेक्ष न्यूनतम मान 3 है

प्रश्न 6. **यदि लाभ फलन $p(x) = 41 - 72x - 18x^2$ से प्रदत्त है तो किसी कंपनी द्वारा अर्जित उच्चतम लाभ ज्ञात कीजिए।**

दिए गए समीकरण का अवकलन कीजिए और $\frac{dp}{dx} = 0$ रखकर x का मान ज्ञात कीजिए तथा प्राप्त x के लिए $\frac{d^2p}{dx^2}$ की जाँच कीजिए यदि x के किसी विशेष मान के लिए $\frac{d^2y}{dx^2}$ ऋणात्मक है, तब x का मान दिए गए समीकरण में रखने पर उच्चतम मान प्राप्त होता है।

हल दिया गया लाभ फलन

$$p(x) = 41 - 72x - 18x^2$$

x के सापेक्ष अवकन करने पर,

$$p'(x) = -72 - 36x = -36(2 + x)$$

पुन: x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$p''(x) = -36$$

और फिर x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $p''(x) = -36$

उच्चतम और न्यूनतम मान के लिए, $p'(x) = 0$

$\Rightarrow$ $-36(2 + x) = 0$

$\Rightarrow$ $x + 2 = 0$

$\Rightarrow$ $x = -2$

$x = -2$ पर, $p''(-2) = -36 < 0$

$\therefore$ $x = -2$ उच्चतम का बिंदु है।

तथा उच्चतम लाभ, $p(-2) = 41 - 72(-2) - 18(-2)^2 = 41 + 144 - 72 = 113$

प्रश्न 7. **अंतराल [0, 3] पर $3x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 48x + 25$ के उच्चतम मान और निम्नतम मान ज्ञात कीजिए।**

हल मान लीजिए कि $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 48x + 25$

$\Rightarrow$ $f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 24x - 48 = 12(x^3 - 2x^2 + 2x - 4)$

$= 12\{x^2(x-2) + 2(x-2)\} = 12(x-2)(x^2 + 2)$

उच्चतम और न्यूनतम मान के लिए $f'(x) = 0$ रखने पर,

$\Rightarrow$ $12(x-2)(x^2 + 2) = 0$

$\Rightarrow$ यदि $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \in [0, 3]$

और यदि, $x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = -2$

$\Rightarrow$ $x = \sqrt{-2}$

इसलिए, केवल $x = 2$ वास्तविक मूल हैं जोक क्रांतिक बिन्दु माना जाता है।

अब हम $x = 2$ और अंतराल [0, 3] के अंत बिन्दुओं पर f का मान ज्ञात करते हैं।

$x = 2$ पर, $\quad f(2) = 3 \times 2^4 - 8 \times 2^3 + 12 \times 2^2 - 48 \times 2 + 25$

$$= 48 - 64 + 48 - 96 + 25 = -39$$

$x = 0$ पर, $\quad f(0) = 0 - 0 + 0 - 0 + 25 = 25$

$x = 3$ पर, $\quad f(3) = 3 \times 3^4 - 8 \times 3^3 + 12 \times 3^2 - 48 \times 3 + 25$

$$= 243 - 216 + 108 - 144 + 25 = 16$$

इसलिए हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि $x = 0$ f पर का निरपेक्ष उच्चतम मान 25 है और $x = 2$ पर निरपेक्ष निम्नतम मान -39 है।

प्रश्न 8. अंतराल $[0, 2\pi]$ के किन बिन्दुओं पर $\sin 2x$ अपना उच्चतम मान प्राप्त करता है?

हल माना कि $f(x) = \sin 2x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2\cos 2x$

उच्चतम और न्यूनतम मान के लिए $f'(x) = 0$ रखने पर

$\Rightarrow \quad 2\cos 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos 2x = 0$

$\Rightarrow \quad 2x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

इसलिए हम $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ और अंतराल $[0, 2\pi]$ के अंत बिंदु पर f का मान ज्ञात करते हैं।

$x = 0$ पर, $\quad f(0) = \sin(2 \times 0) = 0$

$x = 2\pi$ पर, $\quad f(2\pi) = \sin(2 \times 2\pi) = 0$

$x = \frac{\pi}{4}$ पर, $\quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2 \times \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

$x = \frac{3\pi}{4}$ पर, $\quad f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(2 \times \frac{3\pi}{4}\right) = \sin\frac{3\pi}{2} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$

$x = \frac{5\pi}{4}$ पर, $\quad f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \sin\left(2 \times \frac{5\pi}{4}\right) = \sin\frac{5\pi}{2} = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

$x = \frac{7\pi}{4}$ पर, $\quad f\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \sin\left(2 \times \frac{7\pi}{4}\right) = \sin\frac{7\pi}{2} = \sin\left(2\pi + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin\frac{3\pi}{2} = -1$

इसलिए हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि अन्तराल $[2, \pi]$ में f का निरपेक्ष उच्चतम मान 1 है जो $x = \frac{\pi}{4}$ और $x = \frac{5\pi}{4}$ पर घटित होता है।

प्रश्न 9. फलन $\sin x + \cos x$ का उच्चतम मान क्या है?

हल मान लीजिए $f'(x) = \sin x + \cos x$

$\Rightarrow \quad f' = \cos x - \sin x$

और $\quad f'' = -\sin x - \cos x = -(\sin x + \cos x)$

उच्चतम और न्यूनतम मान के लिए $f'(x) = 0$ रखने पर

$\Rightarrow \quad \cos x - \sin x = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin x = \cos x$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin x}{\cos x} = 1 \quad \Rightarrow \quad \tan x = 1$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \dots\dots\dots$$

अब, $f''(x)$ ऋणात्मक होगा जब $(\sin x + \cos x)$ घनात्मक है या जब $\sin x$ और $\cos x$ दोनों घनात्मक होंगे और हम जानते हैं कि $\sin x$ और $\cos x$ दोनों प्रथम चतुर्थांश में घनात्मक हैं।

तब, $f''(x)$ ऋणात्मक होगा, जब $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

इसलिए, $x = \frac{\pi}{4}$ पर,

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\left(\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} < 0$$

$\therefore$ द्वितीय अवकलन परीक्षण द्वारा, $x = \frac{\pi}{4}$ पर f उच्चतम है और f का उच्चतम मान $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ है।

प्रश्न 10. अंतराल [1, 3] में $2x^3 - 24x + 107$ का महत्तम मान ज्ञात कीजिए। इसी फलन का अंतराल [−3, −1] में भी महत्तम मान ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि $f(x) = 2x^3 - 24x + 107$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = 6x^2 - 24 = 6(x^2 - 4) = 6(x+2)(x-2)$$

उच्चतम और न्यूनतम के लिए $f'(x) = 0$ रखने पर,

$$\Rightarrow \quad 6(x+2)(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = 2, -2$$

हम पहले अंतराल [1, 3] पर विचार करते हैं। इसलिए हमें $x = 2 \in [1, 3]$ और अंतराल [1, 3] के अंत बिन्दुओं पर f का मान ज्ञात करते हैं।

$x = 1$ पर, $\quad f(1) = 2 \times 1^3 - 24 \times 1 + 107 = 85$

$x = 2$ पर, $\quad f(2) = 2 \times 2^3 - 24 \times 2 + 107 = 75$

$x = 3$ पर, $\quad f(3) = 2 \times 3^3 - 24 \times 3 + 107 = 89$

इसलिए अन्तराल [1, 3] में $f(x)$ की निरपेक्ष उच्चतम मान 89 है। अंतराल जो $x = 3$ पर घटित होता है।

अब, हम अंतराल [−3, −1] पर विचार करते हैं।

इसलिए हमें क्रांतिक बिन्दु $x = -2 \in [-3, -1]$ और अंतराल [−3, −1] के अंत बिन्दुओं पर f का मान ज्ञात करना है।

$x = -1$ पर, $\quad f(-1) = 2(-1)^3 - 24(-1) + 107 = -2 + 24 + 107 = 129$

$x = -2$ पर, $\quad f(-2) = 2(-2)^3 - 24(-2) + 107 = -16 + 48 + 107 = 139$

$x = -3$ पर, $\quad f(-3) = 2(-3)^3 - 24(-3) + 107 = -54 + 72 + 107 = 125$

इसलिए अंतराल $[-3, -1]$ पर $f(x)$ का निरपेक्ष उच्चतम मान 139 है जोकि $x = -2$ पर घटित होता है।

प्रश्न 11. **यदि दिया है कि अंतराल $[0, 2]$ में $x = 1$ पर फलन $x^4 - 62x^2 + ax + 9$ उच्चतम मान प्राप्त करता है, तो a का मान ज्ञात कीजिए।**

हल मान लीजिए कि $f(x) = x^4 - 62x^2 + ax + 9$

$\Rightarrow \quad f'(x) = 4x^3 - 124x + a$

यह दिया है कि अंतराल $[0, 2]$ पर फलन f उच्चतम मान $x = 1$ पर प्राप्त करता है।

$f'(1) = 0$

$\Rightarrow \quad 4 \times 1^3 - 124 \times 1 + a = 0$

$\Rightarrow \quad 4 - 124 + a = 0 \Rightarrow a = 120$

इसलिए a का मान 120 है।

प्रश्न 12. **$[0, 2\pi]$ पर $x + \sin 2x$ का उच्चतम और निम्नतम मान ज्ञात कीजिए।**

हल माना $\quad f(x) = x + \sin 2x, \Rightarrow \quad f'(x) = 1 + 2\cos 2x$

उच्चतम और न्यूनतम मान के लिए $f'(x) = 0$ रखने पर,

$\Rightarrow \quad 1 + 2\cos 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos 2x = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad \cos 2x = -\cos\frac{\pi}{3} = \cos\frac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow \quad \cos 2x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right), \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right),$

$\cos\left(3\pi - \frac{\pi}{3}\right), \cos\left(3\pi + \frac{\pi}{3}\right)$

($\because$ हम जानते हैं कि $\cos x$ द्वितीय और तृतीय चतुर्थांश में ऋणात्मक होता है।)

तब, $\quad 2x = 2n \pm \frac{2\pi}{3}, n \in Z$

$\Rightarrow \quad 2x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}$

$\Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \in [0, 2\pi]$

तब, हम क्रांतिक बिन्दुओं $x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ और अंतराल $[0, 2\pi]$ के अंत बिन्दुओं पर f का मान ज्ञात करते हैं।

$x = 0$ पर, $\quad f(0) = 0 + \sin 0 = 0$

$x=\dfrac{\pi}{3}$ पर, $\quad f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\pi}{3}+\sin\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}+\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$x=\dfrac{2\pi}{3}$ पर, $\quad f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=\dfrac{2\pi}{3}+\sin\dfrac{4\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3}-\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$x=\dfrac{4\pi}{3}$ पर, $\quad f\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)=\dfrac{4\pi}{3}+\sin\dfrac{8\pi}{3}=\dfrac{4\pi}{3}+\sin\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{4\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$x=\dfrac{5\pi}{3}$ पर, $\quad f\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)=\dfrac{5\pi}{3}+\sin\dfrac{10\pi}{3}=\dfrac{5\pi}{3}-\sin\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{5\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$x=2\pi$ पर, $\quad f(2\pi)=2\pi+\sin 4\pi=2\pi+0=2\pi$

इसलिए $x=2\pi$ पर f का उच्चतम मान 2π है और $x=0$ पर f का न्यूनतम मान 0 है।

प्रश्न 13. ऐसी दो संख्याएँ ज्ञात कीजिए, जिनका योग 24 है और जिनका गुणनफल उच्चतम हों।

सब पहले हम दो संख्या x और $(24-x)$ मानते हैं फिर हम $y=x(24-x)$ मानते हैं। अब अवकलन का अनुप्रयोग करके दोनों संख्या ज्ञात करते हैं।

हल मान लीजिए पहली संख्या x है, तब दूसरी संख्या $(24-x)$ है।

($\because$ दो संख्याओं का योग 24 है)

यदि y दो संख्याओं का गुणनफल को दर्शाता है तो

$$y=x(24-x)=24x-x^2$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx}=24-2x \quad \text{और} \quad \frac{d^2y}{dx^2}=-2$$

अब $\quad \dfrac{dy}{dx}=0$ रखने पर

$\Rightarrow \quad 24-2x=0$

$\therefore \quad x=12$

$x=12$ पर, $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2}=-2<0$

इसलिए संख्याओं का गुणनफल उच्चतम होगा जब संख्या $x=12$ होगी और $24-12=12$

इसलिए संख्याएँ 12 और 12 है।

प्रश्न 14. ऐसी दो घन संख्याएँ x और y ज्ञात कीजिए ताकि $x+y=60$ और xy^3 उच्चतम हो।

सर्वप्रथम हम मानते हैं कि $P=xy^3$ और फिर P को एक संख्या के क्रम में घटाते हैं। द्वितीय अनुकलन परीक्षण द्वारा संख्याएँ ज्ञात की जाती हैं।

हल मान लीजिए कि दो संख्याएँ x, y हैं और $P=xy^3$ है।

दिया है $\quad x+y=60 \quad \Rightarrow \quad x=60-y$

अब, x का मान P में रखने पर

$$P = (60 - y)y^3 \quad \Rightarrow \quad P = 60y^3 - y^4$$

y के सापेक्ष दो बार अवकलन करने पर,

$$\frac{dP}{dy} = 180y^2 - 4y^3$$

और $$\frac{d^2P}{dy^2} = 360y - 12y^2$$

उच्चतम मान के लिए, $\frac{dP}{dy} = 0$

$\Rightarrow$ $$180y^2 - 4y^3 = 0 \Rightarrow 4y^2 (45 - y) = 0$$

$\Rightarrow y = 0, 45$ लेकिन $y \neq 0$, इसलिए $y = 45$

$y = 45$ पर, $$\left(\frac{d^2P}{dy^2}\right)_{y=45} = 360 \times 45 - 12 \times (45)^2$$

$$= 16200 - 24300 = -8100 < 0$$

$\Rightarrow$ P का स्थानीय उच्चतम मान $y = 45$ पर है।

$\therefore$ द्वितीय अवकलन परीक्षण द्वारा P का स्थानीय उच्चतम मान $y = 45$ पर है। इसलिए फलन xy^3 उच्चतम होगा जब $y = 45$ और $x = 60 - 45 = 15$ $x = 15$

इसलिए, आवश्यक संख्याएँ है 15 और 45 हैं।

प्रश्न 15. वह संख्याएँ x और y ज्ञात कीजिए जिनका योग 35 हो और गुणनफल x^2y^5 उच्चतम हो।

हल मान लीजिए कि संख्याएँ x तथा y हैं और $P = x^2y^5$ तब $x + y = 35$

$\Rightarrow$ $$x = 35 - y, \quad \therefore \quad P = (35 - y)^2\ y^5$$

y के सापेक्ष दो बार अवकलन करने पर,

$$\frac{dP}{dy} = (35 - y)^2\ 5y^4 + y^5\ 2(35 - y)(-1)$$

$$= y^4 (35 - y)[5(35 - y) - 2y] = y^4 (35 - y)(175 - 5y - 2y)$$

$$= y^4 (35 - y)(175 - 7y) = (35y^4 - y^5)(175 - 7y)$$

और $$\frac{d^2P}{dy^2} = (35y^4 - y^5)(-7) + (175 - 7y)(4 \times 35 \times y^3 - 5y^4)$$

$$= -7y^4 (35 - y) + 7(25 - y) \times 5y^3 (28 - y)$$

$$= -7y^4 (35 - y) + 35y^3 (25 - y)(28 - y)$$

उच्चतम मान के लिए $\frac{dP}{dy} = 0$ रखने पर,

$\Rightarrow$ $$y^4 (35 - y)(175 - 7y) = 0 \Rightarrow y = 0, 35 - y = 0, 175 - 7y = 0$$

$\Rightarrow$ $$y = 0, y = 25, y = 35$$

जब $y = 0, x = 35 - 0 = 35$ और गुणनफल x^2y^5 शून्य हो जाएगा।

जब $y = 35$ और $x = 35 - 35 = 0$ तो पुनः गुणनफल x^2y^5 शून्य हो जाएगा।

$\therefore$ $y = 0$ और $y = 35$, y के असंभव मान हैं।

जब $y = 25$, तो

$$\left(\frac{d^2P}{dy^2}\right)_{y=25} = -7 \times (25)^4 \times (35-25) + 35 \times (25)^3 \times (25-25)(28-25)$$

$$= -7 \times 390625 \times 10 + 35 \times 15625 \times 0 \times 3$$

$$= -27343750 + 0$$

$$= -27343750 < 0$$

$\therefore$ द्वितीय अवकलन परीक्षण द्वारा, P उच्चतम होगा

जब $\qquad y = 25$ और $x = 35 - 25 = 10$

इसलिए आवश्यक संख्याएँ 10 और 25 हैं।

प्रश्न 16. ऐसी दो धन संख्याएँ ज्ञात कीजिए, जिनका योग 16 हो और जिनके घनों का योग निम्नतम हो।

हल मान लीजिए कि एक संख्या x है और दूसरी संख्या $(16 - x)$ है।

इन संख्याओं के घनों का योग S द्वारा दर्शाया जाता है।

तब $\qquad S = x^3 + (16 - x)^3$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dS}{dx} = 3x^2 + 3(16-x)^2(-1) = 3x^2 - 3(16-x)^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2S}{dx^2} = 6x + 6(16-x) = 96$$

न्यूनतम मान के लिए $\frac{dS}{dx} = 0$ रखने पर,

$$\Rightarrow \quad 3x^2 - 3(16-x)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - (256 + x^2 - 32x) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 32x = 256$$

$$\Rightarrow \quad x = 8$$

$x = 8$ पर, $\qquad \left(\frac{d^2S}{dx^2}\right)_{x=8} = 96 > 0$

$\therefore$ द्वितीय अवकलन परीक्षण द्वारा $x = 8$, S का स्थानीय न्यूनतम मान है। संख्याओं के घनों का योग निम्नतम होगा जब संख्या 8 और $16 - 8 = 8$ होगी।

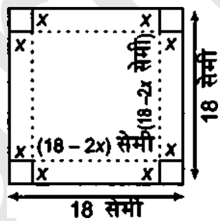
अतः आवश्यक संख्याएँ 8 और 8 हैं।

प्रश्न 17. 18 सेमी भुजा के टिन के किसी वर्गाकार टुकड़े के प्रत्येक कोने पर एक वर्ग काटकर तथा इस प्रकार बनें टिन के फलकों को मोड़कर ढक्कन रहित एक संदूक बनाना है। काटे जाने वाले वर्ग की भुजा कितनी होगी जिससे संदूक का आयतन उच्चतम हो।

सर्वप्रथम वर्गाकार टुकड़े का आकार बनाएँ और वर्गाकार टुकड़े की भुजा और आयतन V के मध्य सूत्र का प्रयोग करें।

अवकतन करके $\frac{dV}{dx} = 0$ रखकर, बिन्दु ज्ञात करें और द्वितीय अवकतन परीक्षण का प्रयोग करके वर्ग की भुजा ज्ञात करें।

हल मान लीजिए कि वर्ग की काटे जाने वाली भुजा x है तथा $(0 < x < 9)$ है, तब संदूक की लम्बाई और चौड़ाई $(18-2x)$ और $(18-2x)$ होगी तथा ऊँचाई x होगी। मान लीजिए कि टिन के फलकों को मोड़ कर ढक्कन रहित संदूक का आयतन V है।



$$\therefore \quad V = x(18-2x)(18-2x)$$
$$= 4x(9-x)^2 = 4x(81 + x^2 - 18x)$$
$$= 4(x^3 - 18x^2 + 81x)$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dV}{dx} = 4(3x^2 - 36x + 81) = 12(x^2 - 12x + 27)$$

x के सापेक्ष पुनः अवकलन करने पर

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 12(2x - 12) = 24(x-6)$$

उच्चतम मान के लिए $\frac{dV}{dx} = 0$ रखने पर, $12(x^2 - 12x + 27) = 0$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 12x + 27 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-3)(x-9) = 0 \Rightarrow x = 3, 9$$

लेकिन $x = 9$ असंभव है। अतः $x = 3$ है।

$$\because \quad 2x = 2 \times 9 = 18$$

जोकि वर्गाकार टुकड़े की भुजा के बराबर है।

$$x = 3 \text{ पर, } \left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x=3} = 24(3-6) = -72 < 0$$

$\therefore$ द्वितीय अवकलन परीक्षण द्वारा $x = 3$ उच्चतम बिंदु है। इसलिए, यदि हम 3 सेमी प्रत्येक कोने से वर्गाकार टिन को काटते हैं और बचे टिन से संदूक बनाते हैं, तब हमें प्राप्त संदूक का आयतन उच्चतम मिलेगा।

प्रश्न 18. 45 सेमी × 24 सेमी की टिन की आयताकार चादर के कोनों पर वर्ग काटकर तथा इस प्रकार बनें टिन के फलकों को मोड़कर ढक्कन रहित एक संदूक बनाना है। काटे जाने वाले वर्ग की भुजा कितनी होगी जिससे संदूक का आयतन उच्चतम हो।

हल मान लीजिए कि काटे जाने वाली वर्ग की भुजा x सेमी संदूक की ऊँचाई है, तब लंबाई $45 - 2x$ और चौड़ाई $24 - 2x$ होगी।

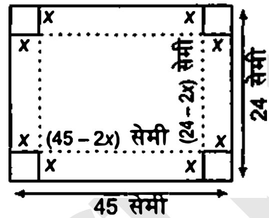
माना संदूक का आयतन V है।

$\therefore \qquad V = x(24-2x)(45-2x)$

$\Rightarrow \qquad V = x(4x^2 - 138x + 1080) = 4x^3 - 138x^2 + 1080x$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dV}{dx} = 12x^2 - 276x + 1080$$



पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 24x - 276$$

उच्चतम मान के लिए $\frac{dV}{dx} = 0$ रखने पर,

$\Rightarrow \qquad 12x^2 - 276x + 1080 = 0$

$\Rightarrow \qquad x^2 - 23x + 90 = 0$

$\Rightarrow \qquad (x-18)(x-5) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 5, 18$

यह संभव नहीं है कि 18 सेमी भुजा वाले वर्ग को प्रत्येक कोने से काटा जाए।

इसलिए, x, 18 के बराबर नहीं हो सकता है।

$x = 5$ पर, $\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x=5} = 24 \times 5 - 276 = 120 - 276 = -156 < 0$

$\therefore$ द्वितीय अवकलन परीक्षण द्वारा, $x = 5$ उच्चतम बिंदु है।

अतः काटे जाने वाली वर्ग की भुजा 5 सेमी होगी जिससे संदूक का आयतन उच्चतम होगा।

प्रश्न 19. सिद्ध कीजिए कि एक दिए वृत के अंतर्गत सभी आयतों में वर्ग का क्षेत्रफल उच्चतम होता है।

आयत का विकर्ण वृत्त के व्यास के बराबर होगा। इसलिए आयत का क्षेत्रफल वृत्त के त्रिज्या के क्रम में लिखकर हल कीजिए।

हल मान लीजिए कि $ABCD$ एक आयत है जोकि वृत्त के अंतर्गत है जिसकी त्रिज्या r और केंद्र O है।

पुनः मान लीजिए कि $\angle CEB = \theta$

तब $\qquad EC = 2r$ तथा $EB = 2r\cos\theta$

और $\qquad BC = 2r\sin\theta$

मान लीजिए कि आयत $ABCD$ का क्षेत्रफल A है।

तब, $\qquad A = EB \times BC = 4r^2 \sin\theta \cos\theta = 2r^2 \sin 2\theta$

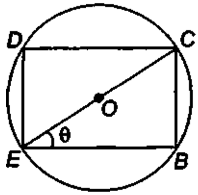
इसलिए, $\qquad A = 2r^2 \sin 2\theta$

$\therefore \qquad \frac{dA}{d\theta} = 4r^2 \cos 2\theta, \quad \frac{d^2A}{d\theta^2} = -8r^2 \sin 2\theta$

अब $\frac{dA}{d\theta} = 0$ रखने पर,

$\Rightarrow \quad 4r^2 \cos 2\theta = 0 \Rightarrow \cos 2\theta = 0 \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2}$ अर्थात् $\theta = \frac{\pi}{4}$

$\theta = \frac{\pi}{4}$ पर, $\left(\frac{d^2A}{d\theta^2}\right)_{\theta=\frac{\pi}{4}} = -8r^2 \sin\frac{\pi}{2} = -8r^2 < 0$



$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}$ उच्चतम बिंदु है।

इसलिए, जब $\theta = \frac{\pi}{4}$ हो, तो क्षेत्रफल उच्चतम होगा

$\therefore \qquad EB = 2r\cos\frac{\pi}{4} = r\sqrt{2}$

और $\qquad BC = 2r\sin\frac{\pi}{4} = r\sqrt{2}$

इसलिए, $EB = BC$ और इसलिए $BCDE$ एक वर्ग है।

प्रश्न 20. सिद्ध कीजिए कि प्रदत्त पृष्ठ एवं महत्तम आयतन के बेलन की ऊँचाई, आधार के व्यास के बराबर होती है।

हमारे पास दो स्वतंत्र राशियाँ r और h हैं। इसलिए हम एक राशि का विलोपन करते हैं। इसके लिए हम h का मान ज्ञात करते हैं जोकि r और s के क्रम में हो और इसका मान आयतन में रखते हैं, तब फिर हम द्वितीय अवकलन परीक्षण करते हैं।

हल मान लीजिए कि r और h बेलन की त्रिज्या और ऊँचाई हैं।
तब, बेलन का पृष्ठ क्षेत्रफल

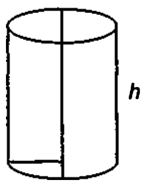
$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh \qquad \text{(दिया है)}$$

$$\Rightarrow \quad 2\pi rh = S - 2\pi r^2 \Rightarrow h = \frac{S - 2\pi r^2}{2\pi r} \qquad \ldots(i)$$

और $$V = \pi r^2 h \qquad \ldots(ii)$$

समी (i) से h का मान समी (ii) में रखने पर,

$$V = \pi r^2\left(\frac{S - 2\pi r^2}{2\pi r}\right) = \frac{Sr}{2} - \pi r^3 \qquad \ldots(iii)$$



r के सापेक्ष समी (iii) का अवकलन करने पर,

$$\frac{dV}{dr} = \frac{S}{2} - 3\pi r^2$$

अब उच्चतम और निम्नतम मान के लिए $\frac{dV}{dr} = 0$ रखने पर

$$\Rightarrow \quad \frac{S}{2} - 3\pi r^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad S = 6\pi r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{S}{6\pi} \qquad \ldots(iv)$$

अब, $$\frac{d^2V}{dr^2} = -6\pi r$$

$r^2 = \frac{S}{6\pi}$ पर, $\left(\frac{d^2V}{dr^2}\right)_{r=\sqrt{\frac{S}{6\pi}}} = -6\pi\left(\sqrt{\frac{S}{6\pi}}\right) < 0$

द्वितीय अवकलन परीक्षण द्वारा, जब $r^2 = \frac{S}{6\pi}$ होगा, तो आयतन उच्चतम होगा।

जब $r^2 = \frac{S}{6\pi} \Rightarrow S = 6\pi r^2$

तब, $h = \frac{6\pi r^2}{2\pi}\left(\frac{1}{r}\right) - r = 3r - r = 2r$

इसलिए, जब ऊँचाई आधार के व्यास के बराबर होगी, तो आयतन उच्चतम होगा।

प्रश्न 21. 100 सेमी^{3} **आयतन वाले डिब्बे सभी बंद बेलनाकार (लंबवृत्तीय) डिब्बों में से न्यूनतम पृष्ठ क्षेत्रफल वाले डिब्बों की विमाएँ ज्ञात कीजिए।**

यहाँ दो स्वतन्त्र राशियाँ r तथा h हैं। ∵ यहाँ पृष्ठ क्षेत्रफल न्यूनतम है। इसलिए सूत्र $V = \pi r^2 h$ का प्रयोग करके h का मान r के पदों में ज्ञात कीजिए और फिर h का मान पृष्ठ क्षेत्रफल के सूत्र में रखकर द्वितीय अवकलन परीक्षण लागू कीजिए।

हल मान लीजिए कि r बेलनाकार डिब्बे के आधार कि त्रिज्या है और h इसकी ऊँचाई है। पुनः मान लीजिए कि इसकी पृष्ठ क्षेत्रफल S और आयतन V है। तब, $V = 100$ सेमी^{3} (दिया है)

$\Rightarrow \qquad \pi r^2 h = 100$

$\Rightarrow \qquad h = \frac{100}{\pi r^2} \qquad \ldots(i)$

और $\qquad S = 2\pi r^2 + 2\pi rh \qquad \ldots(ii)$

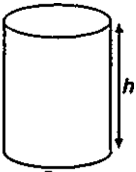
समी (i) से h का मान समी (ii) में रखने पर,

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{100}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{200}{r} \qquad \ldots(iii)$$

समी (iii) को r के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dS}{dr} = 4\pi r - \frac{200}{r^2} \qquad \ldots(iv)$$

अब, उच्चतम और न्यूनतम मान के लिए $\frac{dS}{dr} = 0$ रखने पर,



डिब्बा

$\Rightarrow \qquad 4\pi r = \frac{200}{r^2}$

$\Rightarrow \qquad r^3 = \frac{200}{4\pi} \Rightarrow r = \left(\frac{50}{\pi}\right)^{1/3}$

समी (iv) को r के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2S}{dr^2} = 4\pi + \frac{400}{r^3}$$

$r = \left(\frac{50}{\pi}\right)^{1/3}$ पर, $\frac{d^2S}{dr^2} = \frac{400}{\left(\frac{50}{\pi}\right)} + 4\pi = \frac{400}{50} \times \pi + 4\pi = 8\pi + 4\pi = 12\pi > 0$

$\therefore$ द्वितीय अवकलन परीक्षण द्वारा, पृष्ठ क्षेत्रफल न्यूनतम तब होगा। जब बेलन की त्रिज्या $\left(\frac{50}{\pi}\right)^{1/3}$ हो, इसलिए S न्यूनतम होगा, जब $r = \left(\frac{50}{\pi}\right)^{1/3}$ हो।

r का मान समी (i) में रखने पर,

$$h = \frac{100}{\pi\left(\frac{50}{\pi}\right)^{2/3}} = 2\left(\frac{50}{\pi}\right)\left(\frac{50}{\pi}\right)^{-2/3} = 2\left(\frac{50}{\pi}\right)^{1/3} \text{ सेमी}$$

प्रश्न 22. **एक 28 सेमी लंबे तार को दो टुकड़ों में विपक्त किया जाना है। एक टुकड़ें से वर्ग तथा दूसरे से वृत्त बनाया जाना है। दोनों टुकड़ों की लंबाई कितनी होनी चाहिए जिससे वर्ग एवं वृत्त का सम्मिलित क्षेत्रफल न्यूनतम हो?**

हल मान लीजिए की तार का टुकड़ा जो वृत्त के आकार में बनाया जाता है उसकी लंबाई x सेमी है। इसलिए दूसरे टुकड़ें की लंबाई जो वर्ग के आकार में बनाया जाता है $(28 - x)$ सेमी होगी।

अब, वृत्त की त्रिज्या $= \frac{\text{परिधि}}{2\pi} = \frac{x}{2\pi}$

$\therefore$ वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi\,(\text{त्रिज्या})^2 = \pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = \frac{x^2}{4\pi}$

और वर्ग की प्रत्येक भुजा की लंबाई $= \frac{\text{परिमाप}}{4} = \frac{28 - x}{4}$

$\therefore$ वर्ग का क्षेत्रफल $= (\text{भुजा})^2 = \left(\frac{28 - x}{4}\right)^2 = \frac{(28 - x)^2}{16}$

पुनः मान लीजिए कि $f(x)$ दोनों आकारों के क्षेत्रफल का योग है। तब,

$$f(x) = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{(28 - x)^2}{16} \quad \ldots(i)$$

समी (i) का x के सापेक्ष दो बार अवकलन करने पर

$$f'(x) = \frac{2x}{4\pi} + \frac{2\,(28 - x)\,(-1)}{16} = \frac{x}{2\pi} - \frac{28 - x}{8}$$

और $$f''(x) = \frac{1}{2\pi} - \frac{(-1)}{8} = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{8}$$

अब $f'(x) = 0$ रखने पर,

$\Rightarrow \quad \frac{x}{2\pi} - \frac{28 - x}{8} = 0 \Rightarrow 4x - \pi\,(28 - x) = 0$

$\Rightarrow \quad 4x + \pi x - 28\pi = 0 \Rightarrow x\,(4 + \pi) = 28\pi$

$\Rightarrow \quad x = \frac{28\pi}{4 + \pi}$

और x के इस मान के लिए

$$f''(x) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{8} > 0$$

$\therefore f(x)$ का स्थानीय न्यूनतम मान $x = \frac{28\pi}{4+\pi}$ पर प्राप्त होता है।

अतः (0, 28) में सतत् फलन f का एक और केवल एक बिन्दु लगातार

$$\frac{28\pi}{4+\pi} \in (0, 28) \text{ है।}$$

इसलिए $x = \frac{28\pi}{4+\pi}$ के लिए $f(x)$ निरपेक्ष न्यूनतम मान है।

इसलिए वृत्तीय टुकड़े की लंबाई $\frac{28\pi}{4+\pi}$ मी है।

और वर्ग के टुकड़े की लंबाई $28 - \frac{28\pi}{4+\pi} = \frac{112}{4+\pi}$ सेमी है।

प्रश्न 23. सिद्ध कीजिए कि R त्रिज्या के गोले के अंतर्गत विशालतम शंकु का आयतन, गोले के आयतन का $\frac{8}{27}$ होता है।

हल मान लीजिए कि $OC = x, CQ = r$

अब $\quad OA = R$ (दिया है)

शंकु की ऊँचाई $= h = x + R$

$\therefore$ शंकु का आयतन $= V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ...(i)

अब समकोण ΔOCQ में

$$OC^2 + CQ^2 = OQ^2$$

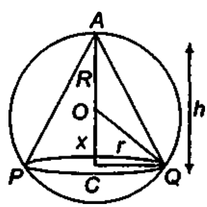
$$\Rightarrow \quad x^2 + r^2 = R^2$$

$$\Rightarrow \quad r^2 = R^2 - x^2 \quad \text{...(ii)}$$

समी (i) और (ii) से h और r का मान V में रखने पर,

$$V = \frac{1}{3}\pi(R^2 - x^2)(x + R) \quad [\because h = x + R] \quad \text{...(iii)}$$

समी (iii) को x के सापेक्ष अवकलन करने पर,



$$\frac{dV}{dx} = \frac{1}{3}\pi[(R^2 - x^2) - 2x(x + R)]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dV}{dx} = \frac{\pi}{3}[R^2 - x^2 - 2x^2 - 2xR]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dV}{dx} = \frac{\pi}{3}(R^2 - 2xR - 3x^2)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dV}{dx} = \frac{\pi}{3}(R-3x)(R+x) \qquad \ldots(iv)$$

उच्चतम मान के लिए $\frac{dV}{dx} = 0$ रखने पर,

$$\Rightarrow \qquad \frac{\pi}{3}(R-3x)(R+x) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad x = \frac{R}{3} \text{ या } x = -R \quad \Rightarrow \quad x = \frac{R}{3}$$ ($\because x$ ऋणात्मक नहीं हो सकता है)

x के सापेक्ष समी (iv) का अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{\pi}{3}[(-3)(R+x) + (R-3x)] = \frac{\pi}{3}(-2R-6x) = -\frac{\pi}{3}(2R+6x)$$

$x = \frac{R}{3}$ पर, $\quad \frac{d^2V}{dx^2} = \frac{-\pi}{3}\left(2R + \frac{6R}{3}\right) = -\frac{4\pi}{3}R < 0$

$\therefore V$ का स्थानीय उच्चतम मान $x = \frac{R}{3}$ पर हैं

अब x का मान समी (iii) में रखने पर,

$$V = \frac{\pi}{3}\left(R^2 - \frac{R^2}{9}\right)\left(R + \frac{R}{3}\right)$$

$$= \frac{\pi}{3} \cdot \frac{8R^2}{9} \cdot \frac{4R}{3} = \frac{8}{27}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$$

$\Rightarrow \qquad V = \frac{8}{27} \times$ गोले का आयतन $\qquad$ इति सिद्धम्

प्रश्न 24. सिद्ध कीजिए कि न्यूनतम पृष्ठ का तथा दिए आयतन के लम्ब वृत्तीय शंकु की ऊँचाई, आधार की त्रिज्या की $\sqrt{2}$ गुनी होती है।

हल मान लीजिए कि शंकु की ऊँचाई h, आधार की त्रिज्या r, आयतन V और पृष्ठ क्षेत्रफल S है, तब $\quad V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \quad \Rightarrow \quad 3V = \pi r^2 h$

$$\Rightarrow \qquad 9V^2 = \pi^2 r^4 h^2 \Rightarrow h^2 = \frac{9V^2}{\pi^2 r^4} \qquad \ldots(i)$$

और $\qquad S = \pi r l \quad \Rightarrow \quad S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2} \qquad (\because l = \sqrt{h^2 + r^2})$

$$\Rightarrow \qquad S^2 = \pi^2 r^2 (r^2 + h^2) = \pi^2 r^2\left(\frac{9V^2}{\pi^2 r^4} + r^2\right)$$ [समी (i) से]

$$\Rightarrow \qquad S^2 = \frac{9V^2}{r^2} + \pi^2 r^4 \qquad \ldots(ii)$$

जब S न्यूनतम है, तो S^2 भी न्यूनतम है।

अब, $$\frac{d}{dr}(S^2) = -\frac{18V^2}{r^3} + 4\pi^2 r^3 \quad \ldots(iii)$$

न्यूनतम मान के लिए, $\frac{d}{dr}(S^2) = 0$ रखने पर

$$\Rightarrow \quad -\frac{18V^2}{r^3} + 4\pi^2 r^3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 18V^2 = 4\pi^2 r^6 \quad \Rightarrow \quad 9V^2 = 2\pi^2 r^6 \quad \ldots(iv)$$

समी (iii) का r के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2}{dr^2}(S^2) = \frac{54V^2}{r^4} + 12\pi^2 r^2$$

$9V^2 = 2\pi^2 r^6$ पर, $$\frac{d^2}{dr^2}(S^2) = \frac{54}{r^4}\left(\frac{2\pi^2 r^6}{9}\right) + 12\,\pi^2 r^2$$

$$= \frac{12\pi^2 r^6}{r^4} + 12\pi^2 r^2 = 24\pi^2 r^2 > 0$$

इस प्रकार S^2 और S न्यूनतम होंगे जब $9V^2 = 2\pi^2 r^6$

समी (i) में $9V^2 = 2\pi^2 r^6$ मान रखने पर,

$$2\pi^2 r^6 = \pi^2 r^4 h^2$$

$$\Rightarrow \quad 2r^2 = h^2 \Rightarrow h = \sqrt{2}r$$

इस प्रकार लंबवृत्तीय शंकु की ऊँचाई आधार की त्रिज्या की $\sqrt{2}$ गुनी होती है।

प्रश्न 25. सिद्ध कीजिए कि दी हुई तिर्यक ऊँचाई और महत्तम आयतन वाले शंकु का अर्द्धशीर्ष कोण $\tan^{-1}\sqrt{2}$ होता है।

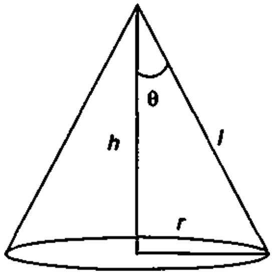
हल मान लीजिए कि शंकु का अर्द्धशीर्ष कोण θ है।

इसलिए $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

पुनः मान लीजिए शंकु की त्रिज्या r, ऊँचाई h और तिर्यक ऊँचाई l है।

अब, $r = l\sin\theta$ तथा $h = l\cos\theta$

हम जानते हैं शंकु $V = \frac{\pi}{3} r^2 h$



$\Rightarrow \qquad V = \frac{1}{3}\pi(l^2\sin^2\theta)(l\cos\theta) = \frac{1}{3}\pi l^3\sin^2\theta\cos\theta$

θ के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{l^3\pi}{3}[\sin^2\theta(-\sin\theta) + \cos\theta(2\sin\theta\cos\theta)]$$

$$= \frac{l^3\pi}{3}(-\sin^3\theta + 2\sin\theta\cos^2\theta)$$

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = \frac{l^3\pi}{3}(-3\sin^2\theta\cos\theta + 2\cos^3\theta - 4\sin^2\theta\cos\theta)$$

$$= \frac{l^3\pi}{3}(2\cos^3\theta - 7\sin^2\theta\cos\theta)$$

अधिकतम मान के लिए $\frac{dV}{d\theta} = 0$ रखने पर,

$\Rightarrow \qquad \sin^3\theta = 2\sin\theta\cos^2\theta \Rightarrow \tan^2\theta = 2 \quad \Rightarrow \quad \tan\theta = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \tan^{-1}\sqrt{2}$

जब $\theta = \tan^{-1}\sqrt{2}$, तब $\tan^2\theta = 2$

या $\qquad \sin^2\theta = 2\cos^2\theta$

तब, $\qquad \frac{d^2V}{d\theta^2} = \frac{l^3\pi}{3}(2\cos^3\theta - 14\cos^3\theta) = -4\pi l^3\cos^3\theta < 0$ जब $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore$ द्वितीय अवकलन परीक्षण द्वारा जब $\theta = \tan^{-1}\sqrt{2}$ हो, तो आयतन V उच्चतम होगा।

अतः दिए गए तिर्यक ऊँचाई और महत्तम आयतन वाले शंकु का अर्द्धशीर्ष कोण $\tan^{-1}\sqrt{2}$.

प्रश्न 26. सिद्ध कीजिए कि दिए हुए पृष्ठ और महत्तम आयतन वाले लम्बवृत्तीय शंकु का अर्द्धशीर्ष कोण $\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ होता है।

हल दिया है कि लम्बवृत्तीय शंकु का सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल, $S = \pi rl + \pi r^2$

$\Rightarrow \qquad S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2} + \pi r^2 \qquad [\because l = \sqrt{r^2 + h^2}]$

$\Rightarrow \qquad \frac{S}{\pi r} - r = \sqrt{r^2 + h^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{S^2}{\pi^2 r^2} - \frac{2S}{\pi} = h^2$

$\Rightarrow \qquad h = \sqrt{\frac{S^2}{\pi^2 r^2} - \frac{2S}{\pi}}, \qquad \left(\because \frac{S^2}{\pi^2 r^2} > \frac{2S}{\pi}\right) \qquad \ldots(i)$

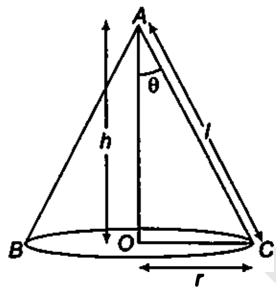
और $\qquad$ आयतन, $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{\frac{S^2}{\pi^2 r^2} - \frac{2S}{\pi}}$

$\Rightarrow \qquad V = \frac{r}{3}\sqrt{S^2 - 2S\pi r^2}, r^2 < \frac{S}{2\pi}$ अर्थात् $0 < r < \sqrt{\frac{S}{2\pi}}$

अतः V उच्चतम है, इसलिए V^2 उच्चतम है।

अब, $$V^2 = \frac{S^2r^2}{9} - \frac{2S\pi r^4}{9}, 0 < r < \sqrt{\frac{S}{2\pi}}$$

∴ $$\frac{d}{dr}(V^2) = \frac{2rS^2}{9} - \frac{8S\pi r^3}{9}$$



और $$\frac{d^2}{dr^2}(V^2) = \frac{2S^2}{9} - \frac{24S\pi r^2}{9}$$

उच्चतम मान के लिए $\frac{dV}{dr} = 0$ रखने पर,

⇒ $$\frac{2rS^2}{9} - \frac{8S\pi r^3}{9} = 0$$

⇒ $$r^2 = \frac{S}{4\pi}$$

⇒ $$r = \sqrt{\frac{S}{4\pi}}$$

यहाँ $r = \sqrt{\frac{S}{4\pi}}$ के लिए $\frac{d^2(V^2)}{dr^2} < 0$

V^2 उच्चतम है इसलिए जब $r = \sqrt{\frac{S}{4\pi}}$ हो, तो V उच्चतम है।

समी (i) से $$h = \sqrt{\frac{S^2}{\pi^2r^2} - \frac{2S}{\pi}} = \sqrt{\frac{S^2(4\pi)}{\pi^2S} - \frac{2S}{\pi}} = \sqrt{\frac{2S}{\pi}}$$

यदि θ शंकु का अर्द्धशीर्ष कोण है जब आयतन उच्चतम है, तब समकोण ΔAOC में

$$\sin\theta = \frac{r}{\sqrt{r^2 + h^2}} = \frac{\sqrt{\frac{S}{4\pi}}}{\sqrt{\frac{S}{4\pi} + \frac{2S}{\pi}}} = \frac{1}{\sqrt{1+8}}$$

अर्थात् $$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$$

निर्देश (प्र. सं. 27-29) निम्नलिखित प्रश्नों में सही उत्तर चुनिए।

प्रश्न 27. वक्र $x^2 = 2y$ पर (0, 5) से न्यूनतम दूरी पर स्थित बिंदु है

(a) $(2\sqrt{2}, 4)$
(b) $(2\sqrt{2}, 0)$
(c) (0, 0)
(d) (2, 2)

सबसे पहले वक्र पर कोई बिंदु (x, y) माने और तब, दो बिंदुओं के बीच की दूरी के सूत्र का अनुप्रयोग करें।

हल (a) मान लीजिए $x^2 = 2y$ पर बिंदु (x, y) से बिंदु (0, 5) के बीच की दूरी d है,

तब $$d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-5)^2} = \sqrt{x^2 + (y-5)^2} \quad \ldots(i)$$

$$= \sqrt{2y + (y-5)^2} \quad (x^2 = 2y \text{ रखने पर})$$

$$d = \sqrt{2y + y^2 - 10y + 25} = \sqrt{y^2 - 8y + 4^2 + 9} = \sqrt{(y-4)^2 + 9}$$

d न्यूनतम होगा जब $(y-4)^2 = 0$ हो या $y = 4$

जब $y = 4$, तब $x^2 = 2 \times 4$

$\Rightarrow$ $x = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$

$\therefore$ बिंदुओं $(2\sqrt{2}, 4)$ और $(-2\sqrt{2}, 4)$ दिए गए वक्र पर बिंदु (0, 5) से न्यूनतम दूरी पर हैं।

प्रश्न 28. x के सभी वास्तविक मान लीजिऐं के लिए $\dfrac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$ का न्यूनतम मान है

(a) 0
(b) 1
(c) 3
(d) $\dfrac{1}{3}$

हल (d) मान लीजिए $y = \dfrac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+x+x^2)(-1+2x) - (1-x+x^2)(1+2x)}{(1+x+x^2)^2}$$

$$= \frac{-1+2x-x+2x^2-x^2+2x^3-1-2x+x+2x^2-x^2-2x^3}{(1+x+x^2)^2}$$

$$= \frac{-2+2x^2-2x^2+2x^2}{(1+x+x^2)^2} = \frac{2x^2-2}{(1+x+x^2)^2} = \frac{2(x^2-1)}{(1+x+x^2)^2}$$

अब $\dfrac{dy}{dx} = 0$ रखने पर $\Rightarrow$ $x^2 = 1$

$\Rightarrow$ $x = \pm 1$

अब, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{2\,[(1+x+x^2)^2\,(2x) - (x^2-1)(2)(1+x+x^2)(1+2x)]}{(1+x+x^2)^4}$

$$= \frac{4\,(1+x+x^2)\,[\,(1+x+x^2)\,x - (x^2-1)(1+2x)]}{(1+x+x^2)^4}$$

$$= \frac{4\,(x+x^2+x^3-x^2-2x^3+1+2x)}{(1+x+x^2)^3} \quad \frac{4\,(1+3x-x^3)}{(1+x+x^2)^3}$$

$x = 1$ पर, $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=1} = \dfrac{4[1+3(1)-1^3]}{(1+1+1^2)^3} = \dfrac{4(3)}{3^3} = \dfrac{4}{9} > 0$

$x = -1$ पर, $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=-1} = \dfrac{4[1+3(-1)-(-1)^3]}{[1+(-1)+(-1)^2]^3} = \dfrac{4(1-3+1)}{(1-1+1)^3} = 4(-1) = -4 < 0$

$\therefore$ द्वितीय अवकलन परीक्षण द्वारा $x = 1$ पर f न्यूनतम होगा और न्यूनतम मान

$$y = \frac{1-1+1}{1+1+1} = \frac{1}{3}$$

प्रश्न 29. $[x(x-1)+1]^{1/3}$, $0 \le x \le 1$ **का उच्चतम मान है**

(a) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{1/3}$ (b) $\dfrac{1}{2}$

(c) 1 (d) 0

हल (c) मान लीजिए कि $f(x) = [x(x-1)+1]^{1/3} = (x^2-x+1)^{1/3}$, $\quad 0 \le x \le 1$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x^2-x+1)^{\frac{1}{3}-1}(2x-1) = \frac{1(2x-1)}{3\,(x^2-x+1)^{2/3}}$$

अब, $f'(x) = 0$ रखने पर, $\Rightarrow\; 2x-1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2} \in [0, 1]$

इसलिए, $x = \dfrac{1}{2}$ क्रांतिक बिंदु है।

अब, बिंदु $x = \dfrac{1}{2}$ और अंतराल $[0, 1]$ के अंत बिंदुओं पर f का मान ज्ञात करते हैं।

$x = 0$ पर, $\quad f(0) = (0-0+1)^{1/3} = 1$

$x = 1$ पर, $\quad f(1) = (1-1+1)^{1/3} = 1$

$x = \dfrac{1}{2}$ पर, $\quad f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} + 1\right)^{1/3} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{1/3}$

$\therefore\; f(x)$ का उच्चतम मान 1, $x = 0, 1$ पर है

विविध प्रश्नावली

प्रश्न 1. अवकलन का प्रयोग करके निम्नलिखित में से प्रत्येक का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए।

(i) $\left(\frac{17}{81}\right)^{1/4}$ (ii) $(33)^{-1/5}$

$f(x+\Delta x) \simeq f(x) + \Delta x\, f'(x)$ का अनुप्रयोग करके सन्निकट मान ज्ञात कीजिए।

हल

(i) मान लीजिए कि $f(x) = x^{1/4} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{4}x^{-3/4}$

अतः मान लीजिए $x = \frac{16}{81}$ और $\Delta x = \frac{1}{81}$

अब, $f'(x+\Delta x) \simeq f(x) + \Delta x\, f'(x)$

$$\Rightarrow (x+\Delta x)^{1/4} \simeq x^{1/4} + \frac{1}{4x^{3/4}} \times \Delta x$$

$$\Rightarrow \left(\frac{16}{81}+\frac{1}{81}\right)^{1/4} \simeq \left(\frac{16}{81}\right)^{1/4} + \frac{\frac{1}{81}}{4\left(\frac{16}{81}\right)^{3/4}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{17}{81}\right)^{1/4} \simeq \frac{2}{3} + \frac{1}{81\times 4\times\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{2}{3}+\frac{1}{96} = \frac{65}{96}$$

अतः, $\left(\frac{17}{81}\right)^{1/4} \simeq 0.677$

(ii) मान लीजिए $f(x) = x^{-1/5} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{5}x^{-6/5}$

अतः मान लीजिए $x = 32$ और $\Delta x = 1$

अब, $f(x+\Delta x) \simeq f(x) + \Delta x\, f'(x)$

$$\Rightarrow (x+\Delta x)^{-1/5} \simeq x^{-1/5} - \frac{1}{5x^{6/5}}\Delta x$$

$$\Rightarrow (33)^{-1/5} \simeq (32)^{-1/5} - \frac{1}{5(32)^{6/5}}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{5\times 2^6} = 0.5 - \frac{1}{320} = 0.5 - 0.003$$

$$\Rightarrow (33)^{-1/5} \simeq 0.497$$

अतः $(33)^{-1/5}$ का सन्निकट मान 0.497 है।

प्रश्न 2. सिद्ध कीजिए कि $f(x) = \frac{\log x}{x}$ द्वारा प्रदत्त फलन $x = e$ पर उच्चतम है।

हल मान लीजिए $f(x) = \frac{\log x}{x}$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$f'(x) = \frac{x\left(\frac{1}{x}\right) - (\log x)\cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

पुनः अवकलन करने पर,

$$f''(x) = \frac{x^2\left(-\frac{1}{x}\right) - (1 - \log x)2x}{(x^2)^2}$$

$$= \frac{-x - 2x + 2x\log x}{x^4} = \frac{x(2\log x - 3)}{x^4} = \frac{2\log x - 3}{x^3}$$

उच्चतम मान के लिए $f'(x) = 0$ रखने पर,

$$\Rightarrow \quad \frac{1 - \log x}{x^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \log x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = e$$

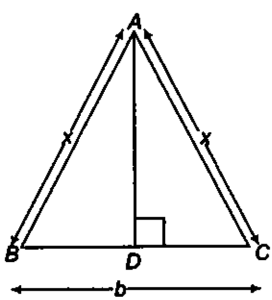
$x = e$ पर, $\quad f''(e) = \frac{2\log e - 3}{e^3} = \frac{2\cdot 1 - 3}{e^3} = \frac{-1}{e^3} < 0$

इसलिए द्वितीय अवकलन परीक्षण द्वारा $x = e$ पर, f उच्चतम है।

प्रश्न 3. किसी निश्चित आधार b के एक समद्विबाहु त्रिभुज की समान भुजाएँ 3 सेमी/से की दर से घट रही हैं। उस समय जब त्रिभुज की समान भुजाएँ आधार के बराबर हैं। उसका क्षेत्रफल कितनी तेजी से घट रहा है?

हल मान लीजिए कि ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जहाँ BC निश्चित लंबाई b का आधार है।

पुनः मान लीजिए कि ΔABC की दो बराबर भुजा x हैं



$AD \perp BC$ खींचिए।

अब, ΔADC में, पाइथागोरस प्रमेय लागू करने पर,

$$AD = \sqrt{x^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 - \frac{b^2}{4}}$$

$\therefore$ त्रिभुज का क्षेत्रफल $(A) = \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई $= \frac{b}{2}\sqrt{x^2 - \frac{b^2}{4}}$

t के सापेक्ष क्षेत्रफल A के परिवर्तन की दर,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} b \times \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2 - \frac{b^2}{4}}} \times \frac{dx}{dt} = \frac{xb}{\sqrt{4x^2 - b^2}} \frac{dx}{dt}$$

यह दिया गया है कि त्रिभुज की दो बराबर भुजाएँ 3 सेमी/से की दर से घट रही हैं।

$\therefore$ $\frac{dx}{dt} = -3$ सेमी/से (ऋणात्मक चिन्ह दर्शाता है कि भुजाएँ घट रही हैं)

$\therefore$ $\frac{dA}{dt} = \frac{-3xb}{\sqrt{4x^2 - b^2}}$ सेमी^{2}/से

जब $x = b$, तब $\frac{dA}{dt} = \frac{-3b^2}{\sqrt{3b^2}} = -\sqrt{3}b$ सेमी^{2}/से

अत: त्रिभुज की समान भुजाएँ आधार के बराबर है, तब उसका क्षेत्रफल $\sqrt{3}\,b$ सेमी^{2}/से की दर से घट रहा है।

प्रश्न 4. वक्र $y^2 = 4x$ के बिंदु $(1, 2)$ पर अभिलंब का समीकरण ज्ञात कीजिए।

सबसे पहले दिए गए वक्र का अवकलन कीजिए और फिर समीकरण

$y - y_1 = \frac{-1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}}(x - x_1)$ का प्रयोग कीजिए।

हल दिए गए वक्र का समीकरण है, $y^2 = 4x$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$2y\frac{dy}{dx} = 4 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{4}{2y} = \frac{2}{y}$$

$\therefore$ बिंदु $(1, 2)$ पर, स्पर्श रेखा की प्रवणता $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1, 2)} = \frac{2}{2} = 1$

$\therefore$ बिंदु $(1, 2)$ पर, अभिलंब की प्रवणता $= -\frac{1}{1} = -1$

$\therefore$ बिंदु (1, 2) पर, अभिलंब की समीकरण

$$y - 2 = -1(x - 1)$$

$$\Rightarrow \quad y - 2 = -x + 1 \Rightarrow x + y - 3 = 0$$

प्रश्न 5. सिद्ध कीजिए कि वक्र $x = a\cos\theta + a\theta\sin\theta$, $y = a\sin\theta - a\theta\cos\theta$ के किसी पर अभिलंब मूलबिंदु से अचर दूरी पर है।

सर्वप्रथम, वक्र के किसी बिंदु θ पर अभिलंब का समीकरण ज्ञात कीजिए और तब सूत्र $d = \dfrac{|\text{अचर}|}{\sqrt{(x \text{ का गुणांक})^2 + (y \text{ का गुणांक})^2}}$ का प्रयोग करके मूलबिंदु से अभिलंब की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल दिया गया वक्र है, $\quad x = a\cos\theta + a\theta\sin\theta,$

तथा $\quad y = a\sin\theta - a\theta\cos\theta$

θ के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dx}{d\theta} = -a\sin\theta + a(\theta\cos\theta + \sin\theta) = -a\sin\theta + a\theta\cos\theta + a\sin\theta$$

$$\frac{dx}{d\theta} = a\theta\cos\theta$$

और $\dfrac{dy}{d\theta} = a\cos\theta - a[\theta(-\sin\theta) + \cos\theta] = a\cos\theta + a\theta\sin\theta - a\cos\theta$

$$\frac{dy}{d\theta} = a\theta\sin\theta$$

बिंदु θ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dx} = \frac{a\theta\sin\theta}{a\theta\cos\theta} = \tan\theta$$

बिंदु θ पर अभिलंब की प्रवणता $= -\dfrac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{\tan\theta} = -\cot\theta$$

बिंदु (x, y) पर अभिलंब का समीकरण

$$y - (a\sin\theta - a\theta\cos\theta) = -\cot\theta\,[x - (a\cos\theta + a\theta\sin\theta)]$$

$$\Rightarrow \quad y - (a\sin\theta - a\theta\cos\theta) = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}[x - (a\cos\theta + a\theta\sin\theta)]$$

$$\Rightarrow y\sin\theta - a\sin^2\theta + a\theta\sin\theta\cos\theta$$

$$= -x\cos\theta + a\cos^2\theta + a\theta\sin\theta\cdot\cos\theta$$

$\Rightarrow \quad x\cos\theta + y\sin\theta = a(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$ $\quad (\because \sin^2 + \cos^2\theta = 1)$

$\Rightarrow \quad x\cos\theta + y\sin\theta = a$

$\Rightarrow x\cos\theta + y\sin\theta - a = 0$

अब, मूलबिंदु से अभिलंब की दूरी $= \dfrac{|-a|}{\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}}$

$\Rightarrow \quad = \dfrac{|-a|}{\sqrt{1}} = |-a|$ $\quad (\because \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1)$

जोकि θ से स्वतंत्र है। अतः मूलबिंदु से अभिलंब अचर दूरी पर है।

प्रश्न 6. अंतराल ज्ञात कीजिए जिन पर $f(x) = \dfrac{4\sin x - 2x - x\cos x}{2 + \cos x}$ से प्रदत्त फलन $f(x)$ (i) वर्धमान (ii) ह्रासमान है।

उस अंतराल में $f(x)$ वर्धमान है जहाँ $f'(x) > 0$ हो और उस अंतराल में $f(x)$ ह्रासमान है। जहाँ $f'(x) < 0$ हो।

हल दिया है, $f(x) = \dfrac{4\sin x - 2x - x\cos x}{2 + \cos x}$

$$= \frac{4\sin x - x(2 + \cos x)}{2 + \cos x} = \frac{4\sin x}{2 + \cos x} - \frac{x(2 + \cos x)}{2 + \cos x} = \frac{4\sin x}{2 + \cos x} - x$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$f'(x) = 4\left\{\frac{(2 + \cos x)\cos x - \sin x\,(0 - \sin x)}{(2 + \cos x)^2}\right\} - 1$$

$$= 4\left\{\frac{2\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(2 + \cos x)^2}\right\} - 1 \quad (\because \cos^2 x + \sin^2 x = 1)$$

$$= \frac{8\cos x + 4}{(2 + \cos x)^2} - 1 = \frac{8\cos x + 4 - (2 + \cos x)^2}{(2 + \cos x)^2}$$

$$= \frac{8\cos x + 4 - 4 - \cos^2 x - 4\cos x}{(2 + \cos x)^2} = \frac{4\cos x - \cos^2 x}{(2 + \cos x)^2} \quad \frac{\cos x(4 - \cos x)}{(2 + \cos x)^2}$$

हम जानते हैं कि $-1 \le \cos x \le 1$

$\Rightarrow \quad 4 - \cos x > 0$ और $(2 + \cos x)^2 > 0$

(i) वर्धमान के लिए

$f'(x) > 0$ जब $\cos x > 0$ $\quad$ ($\because$ प्रथम और चतुर्थ चतुर्थांश में $\cos x$ धनात्मक है)

$\therefore$ अंतराल $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ और $\left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ में $f(x)$ वर्धमान है।

(ii) ह्रासमान के लिए

$f'(x) < 0$ जब $\cos x < 0$ ($\because$ द्वितीय और तृतीय चतुर्थांश में $\cos x$ ऋणात्मक है)

$\therefore$ अंतराल $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ में $f(x)$ ह्रासमान है

प्रश्न 7. **अंतराल ज्ञात कीजिए जिन पर $f(x) = x^3 + \frac{1}{x^3}$, $x \neq 0$ से प्रदत्त फलन**

(i) वर्धमान

(ii) ह्रासमान है।

हल दिया गया है, $f(x) = x^3 + \frac{1}{x^3}$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^4}$$

(i) $f(x)$ वर्धमान है यदि $f'(x) \geq 0$

$$\Rightarrow \quad 3x^2 - \frac{3}{x^4} \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad x^6 \geq 1$$

$$\Rightarrow \quad (x^2)^3 \geq 1$$

$$\Rightarrow \quad x^2 \geq 1 \Rightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty]$$

$\therefore$ $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ में या $x < -1$ और $x > 1$ के लिए f वर्धमान है।

(ii) $f(x)$ ह्रासमान है यदि $f'(x) \leq 0$

$$\Rightarrow \quad 3x^2 - \frac{3}{x^4} \leq 0 \Rightarrow x^6 \leq 1$$

$$\Rightarrow \quad (x^2)^3 \leq 1 \Rightarrow x^2 \leq 1$$

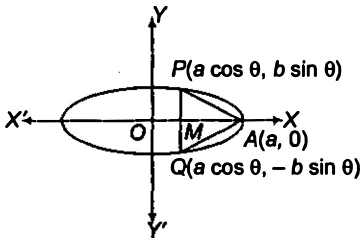
$$\Rightarrow \quad -1 \leq x \leq 1$$

$\therefore$ $-1 < x < 1$ के लिए f ह्रासमान है।

प्रश्न 8. **दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के अंतर्गत उस समद्विबाहु त्रिभुज का महत्तम क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष दीर्घ अक्ष का एक सिरा है।**

हल मान लीजिए कि दीर्घवृत्त का समीकरण $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ है, तब कोई बिंदु P दीर्घवृत्त पर $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ है।

P से $PM \perp OX$ खींचिए और इसे आगे बढ़ाकर दीर्घवृत्त से Q पर मिलाए, तब ΔAPQ एक समद्विबाहु त्रिभुज है, मान लीजिए कि S इसका क्षेत्रफल है, तब



$$S = 2 \times \frac{1}{2} \times AM \times MP = (OA - OM) \times MP$$

$$= (a - a\cos\theta) \cdot b\sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad S = ab\,(\sin\theta - \sin\theta\cos\theta) = ab\left(\sin\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)$$

θ के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dS}{d\theta} = ab\,(\cos\theta - \cos 2\theta)$$

पुनः θ के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2S}{d\theta^2} = ab\,(-\sin\theta + 2\sin 2\theta)$$

उच्चतम और निम्नतम मान के लिए $\frac{dS}{d\theta} = 0$ रखने पर,

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \cos 2\theta \quad \Rightarrow \quad 2\theta = 2\pi - \theta \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{2\pi}{3}$$

$\theta = \frac{2\pi}{3}$ पर, $\left(\frac{d^2S}{d\theta^2}\right)_{\theta = \frac{2\pi}{3}} = ab\left[-\sin\frac{2\pi}{3} + 2\sin\left(2 \times \frac{2\pi}{3}\right)\right]$

$$= ab\left[-\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$= ab\left(-\sin\frac{\pi}{3} - 2\sin\frac{\pi}{3}\right) \qquad \left[\begin{array}{l} \because \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{-\sin\pi}{3} \end{array}\right]$$

$$= ab\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{2}\right) = ab\left(\frac{-3\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{-3\sqrt{3}ab}{2} < 0$$

$\therefore$ जब $\theta = \frac{2\pi}{3}$ हो, तो S उच्चतम है

और S के उच्चतम मान $S = ab\left(\sin\frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2}\cdot 2\sin\frac{2\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{3}\right)$

$(\because \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta)$

$$= ab\left[\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$= ab\left[\sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3} \times \left(-\cos\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

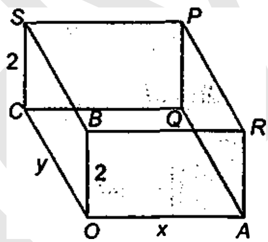
$$= ab\left(\sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}\right) = ab\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2}\right)$$

$$= ab\left(\frac{2\sqrt{3} + \sqrt{3}}{4}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}ab \text{ वर्ग इकाई}$$

अत:,समद्विबाहु त्रिभुज का उच्चतम क्षेत्रफल $\frac{3\sqrt{3}}{4}ab$ वर्ग इकाई है।

प्रश्न 9. आयताकार आधार व आयताकार दीवारों की 2 मी गहरी और 8 मी^{3} आयतन की एक बिना ढ़क्कन की टंकी का निर्माण करना है। यदि टंकी के निर्माण में आधार के लिए ₹ 70/मी^{2} और दीवारों पर ₹ 45/मी^{2} व्यय आता है, तो निम्नतम खर्च से बनी टंकी की लागत क्या है?

हल मान लीजिए टंकी की लंबाई x मी और चौड़ाई y मी है तथा टंकी की गहराई 2 मी है।



$\therefore$ टंकी का आयतन $= 2 \times x \times y$

$\Rightarrow \quad 2xy = 8$

(दिया है, टंकी का आयतन = 8 मी^{3})

$\Rightarrow \quad xy = 4 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{4}{x}$ ...(i)

पुन:, आधार का क्षेत्रफल $= xy = x \times \frac{4}{x} = 4$

तथा चार किनारों का क्षेत्रफल $= 2x + 2y + 2x + 2y = 4x + 4y = 4(x + y)$

यह दिया गया है कि टंकी के निर्माण में आधार के लिए ₹ 70/मी^{2} और दीवारों पर ₹ 45/मी^{2} व्यय आता है।

इसलिए, निर्माण का व्यय, $C = ₹[70 \times xy + 45 \times 4(x + y)]$

$$= ₹[70xy + 180(x + y)] \quad \ldots(ii)$$

समी (i) से y का मान समी (ii) में रखने पर,

$$C = 70 \times 4 + 180\left(x + \frac{4}{x}\right) = 280 + 180\left(x + \frac{4}{x}\right) \quad \ldots(iii)$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dC}{dx} = 0 + 180\left(1 - \frac{4}{x^2}\right) = 180\left(\frac{x^2 - 4}{x^2}\right)$$

निम्नतम व्यय के लिए $\frac{dC}{dx} = 0$ रखने पर,

$$\Rightarrow \quad 180\left(\frac{x^2 - 4}{x^2}\right) = 0 \Rightarrow x^2 = 4$$

$$\Rightarrow \quad x = \pm 2$$

$x = 2$ पर, $\frac{dC}{dx}$ अपना चिन्ह ऋणात्मक से घनात्मक परिवर्तित करता है।

$\therefore$ $x = 2$ पर C न्यूनतम है।

(टंकी की लंबाई ऋणात्मक नहीं हो सकती है इसलिए, हम $x = -2$ नहीं लेंगे)

$$x = 2 \text{ और } y = \frac{4}{x} = \frac{4}{2} = 2$$

इसलिए, टंकी एक 2 मी भुजा वाली घन है।

समी (iii) से निर्माण में न्यूनतम व्यय

$$= ₹\left[280 + 180\left(2 + \frac{4}{2}\right)\right] = ₹[280 + 720] = ₹1000$$

प्रश्न 10. एक वृत्त और एक वर्ग के परिमापों का योग k है, जहाँ k एक अचर है। सिद्ध कीजिए कि उनके क्षेत्रफलों का योग निम्नतम है, जब वर्ग की भुजा वृत्त की त्रिज्या की दोगुनी है।

हल मान लीजिए कि वर्ग की भुजा x और r वृत्त की त्रिज्या है।

$\therefore$ वृत्त की परिधि $= 2\pi r$ और वर्ग का परिमाप $= 4x$

दिया है, $2\pi r + 4x = k \Rightarrow x = \frac{k - 2\pi r}{4}$ ...(i)

$$\therefore \quad A = x^2 + \pi r^2 = \left(\frac{k - 2\pi r}{4}\right)^2 + \pi r^2 = \left(\frac{1}{16}\right)(k^2 - 4k\pi r + 4\pi^2 r^2) + \pi r^2$$

r के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dA}{dr} = \left(\frac{1}{16}\right)(-4k\pi + 8\pi^2 r) + 2\pi r$$

पुनः से r के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2A}{dr^2} = \frac{1}{16}(0 + 8\pi^2) + 2\pi = 2\pi + \frac{\pi^2}{2} > 0$$

उच्चतम और निम्नतम मान के लिए $\frac{dA}{dr} = 0$ रखने पर,

$$\Rightarrow \qquad 2\pi r \quad \frac{4k\pi}{16} + \frac{8\pi^2 r}{16} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad r\left(2\pi + \frac{\pi^2}{2}\right) = \frac{k\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \qquad r = \frac{\left(\frac{k\pi}{4}\right)}{2\pi + \frac{\pi^2}{2}} = \frac{k}{8 + 2\pi} \qquad \ldots\text{(ii)}$$

अब, $\left(\frac{d^2A}{dr^2}\right)_{\left(r = \frac{k}{8+2\pi}\right)}$ = धनात्मक

$\therefore$ जब $r = \frac{k}{8 + 2\pi}$ हो, तो A निम्नतम होगा

और इसे समी (i) में रखने पर,

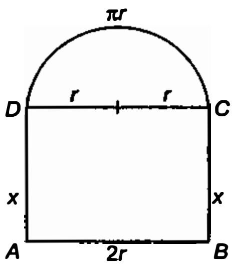
$$x = \frac{k - 2\pi r}{4} = \frac{1}{4}\left(k - 2\pi \times \frac{k}{8 + 2\pi}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{8k + 2\pi k - 2\pi k}{8 + 2\pi}\right)$$

$$= \frac{2k}{8 + 2\pi} = 2\left(\frac{k}{8 + 2\pi}\right) = 2r \qquad \text{[समी (ii) से]}$$

इसलिए, जब वर्ग की भुजा वृत्त की त्रिज्या की दोगुनी हो, तो उनके क्षेत्रफलों का योग निम्नतम होगा।

प्रश्न 11. किसी आयत के ऊपर बने अर्द्धवृत्त के आकार वाली खिड़की है। खिड़की का संपूर्ण परिमाप 10 मी है। पूर्णतया खुली खिड़की से अधिकतम प्रकाश आने के लिए खिड़की की विमाएँ ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि अर्द्धवृत्त की त्रिज्या $= r$



$\therefore$ आयत की एक भुजा $= 2r$ और दूसरी भुजा $= x$

$\therefore P =$ परिमाप $= 10$ (दिया है)

$$\Rightarrow \qquad 2x + 2r + \frac{1}{2}(2\pi r) = 10$$

$$\Rightarrow \qquad 2x = 10 - r(\pi + 2) \qquad \ldots\text{(i)}$$

पुनः मान लीजिए कि A दर्शाया गया चित्र का क्षेत्रफल है

$\therefore$ $A =$ अर्द्धवृत्त का क्षेत्रफल + आयत का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}\pi r^2 + 2rx$$

$\Rightarrow$ $$A = \frac{1}{2}(\pi r^2) + r[10 - r(\pi + 2)]$$ [समी (i) से]

$$= \frac{1}{2}(\pi r^2) + 10r - r^2\pi - 2r^2 = 10r - \frac{\pi r^2}{2} - 2r^2$$

r के सापेक्ष दो बार अवकलन करने पर,

$$\frac{dA}{dr} = 10 - \pi r - 4r \quad \ldots(ii)$$

और $$\frac{d^2A}{dr^2} = -\pi - 4 \quad \ldots(iii)$$

उच्चतम और निम्नतम मान के लिए $\frac{dA}{dr} = 0$ रखने पर,

$\Rightarrow$ $$10 - \pi r - 4r = 0 \quad \Rightarrow \quad 10 = (4 + \pi)r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{10}{4 + \pi}$$

समी (iii) में $r = \frac{10}{4 + \pi}$ रखने पर, $\frac{d^2A}{dr^2} =$ ऋणात्मक

इसलिए, जब $r = \frac{10}{4 + \pi}$ हो, तो A का स्थानीय मान उच्चतम होगा।

$\therefore$ अर्द्धवृत्त की त्रिज्या $= \frac{10}{4 + \pi}$ हो, तो ...(iv)

और आयत की एक भुजा $= 2r = 2r = \frac{2 \times 10}{4 + \pi} = \frac{20}{4 + \pi}$

समी (i) द्वारा आयत की दूसरी भुजा

$$x = \frac{1}{2}[10 - r(\pi + 2)] = \frac{1}{2}\left[10 - \left(\frac{10}{\pi + 4}\right)(\pi + 2)\right]$$ [समी (iv) से]

$$= \frac{10\pi + 40 - 10\pi - 20}{2(\pi + 4)}; \quad x = \frac{20}{2(\pi + 4)} = \frac{10}{\pi + 4}$$

प्रकाश उच्चतम होगा जब क्षेत्रफल उच्चतम है। इसलिए, खिड़की की विमाएँ निम्न हैं

लंबाई $= 2r = \frac{20}{\pi + 4}$, चौड़ाई $= x = \frac{10}{\pi + 4}$

प्रश्न 12. त्रिभुज की भुजाओं से a और b दूरी पर त्रिभुज के कर्ण पर स्थित एक बिंदु है। सिद्ध कीजिए कि कर्ण की न्यूनतम लंबाई $\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ है।

हल मान लीजिए समकोण ΔABC के कर्ण AC में P एक बिंदु इस प्रकार है कि

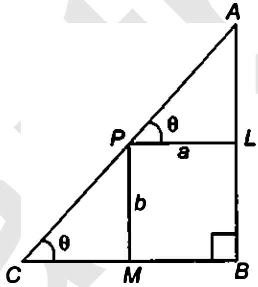
$$PL \perp AB = a \text{ और } PM \perp BC = b$$

पुनः मान लीजिए $\angle APL = \angle ACB = \theta$

$$AP = a\sec\theta,\ PC = b\operatorname{cosec}\theta$$

पुनः मान लीजिए कि कर्ण की लंबाई l है, तब

$$l = AP + PC \quad \Rightarrow \quad l = a\sec\theta + b\operatorname{cosec}\theta,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$



θ के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dl}{d\theta} = a\sec\theta\tan\theta - b\operatorname{cosec}\theta\cot\theta$$

उच्चतम और निम्नतम मान के लिए $\frac{dl}{d\theta} = 0$ रखने पर

$$\Rightarrow \quad a\sec\theta\tan\theta = b\operatorname{cosec}\theta\cot\theta$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a\sin\theta}{\cos^2\theta} = \frac{b\cos\theta}{\sin^2\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta} = \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow \quad \tan^3\theta = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad \tan\theta = \left(\frac{b}{a}\right)^{1/3}$$

अब, $\frac{d^2l}{d\theta^2} = a(\sec\theta \times \sec^2\theta + \tan\theta \times \sec\theta\tan\theta)$

$$- b[\operatorname{cosec}\theta(-\operatorname{cosec}^2\theta) + \cot\theta(-\operatorname{cosec}\theta\cot\theta)]$$

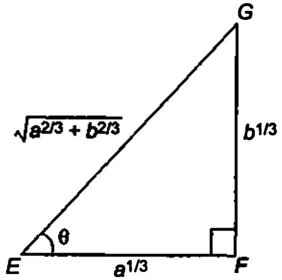
$$= a\sec\theta(\sec^2\theta + \tan^2\theta) + b\operatorname{cosec}\theta(\operatorname{cosec}^2\theta + \cot^2\theta)$$

चूँकि $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ है इसलिए त्रिकोणमितीय अनुपात धनात्मक होंगे

और $\quad a > 0,\ b > 0$

$\therefore \quad \frac{d^2l}{d\theta^2}$ धनात्मक है।

$\Rightarrow$ जब $\tan\theta = \left(\frac{b}{a}\right)^{1/3}$ हो, तो l न्यूनतम है।



$\therefore$ l का न्यूनतम मान $= a\sec\theta + b\operatorname{cosec}\theta$

$$= a\frac{\sqrt{a^{2/3} + b^{2/3}}}{a^{1/3}} + b\frac{\sqrt{a^{2/3} + b^{2/3}}}{b^{1/3}}$$

$$= \sqrt{a^{2/3} + b^{2/3}}\,(a^{2/3} + b^{2/3}) = (a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$$

$$\left[\because \Delta EFG \text{ में, } \sec\theta = \frac{\sqrt{a^{2/3} + b^{2/3}}}{a^{1/3}} \text{ तथा } \operatorname{cosec}\theta = \frac{\sqrt{a^{2/3} + b^{2/3}}}{b^{1/3}} \right]$$

प्रश्न 13. उन बिंदुओं को ज्ञात कीजिए जिन पर $f(x) = (x-2)^4\ (x+1)^3$ द्वारा प्रदत्त फलन f का,

(i) स्थानीय उच्चतम बिंदु है।

(ii) स्थानीय निम्नतम बिंदु है।

(iii) नति परिवर्तन बिंदु है।

(i) यदि किसी बिंदु पर $f'(x)$ अपना चिन्ह ऋणात्मक से धनात्मक में परिवर्तित करता है, तब $f(x)$ उस बिंदु पर स्थानीय निम्नतम का बिंदु है।

(ii) यदि किसी बिंदु पर $f'(x)$ अपना चिन्ह धनात्मक से ऋणात्मक में परिवर्तित करता है, तब $f(x)$ उस बिंदु पर स्थानीय उच्चतम का बिंदु है।

(iii) यदि किसी बिंदु पर $f'(x)$ अपना चिन्ह परिवर्तन नहीं करता है, तब $f(x)$ उस बिंदु पर नति परिवर्तन है।

हल दिया गया समीकरण है, $\quad f(x) = (x-2)^4\ (x+1)^3$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$f'(x) = (x-2)^4\ 3(x+1)^2 + (x+1)^3\ 4(x-2)^3$$
$$= (x-2)^3\ (x+1)^2\ \{3(x-2) + 4(x+1)\} = (x-2)^3\ (x+1)^2\ (7x-2)$$

अत: $f'(x)$ प्रांत के प्रत्येक बिंदु पर विद्यमान है।

उच्चतम और निम्नतम मान के लिए $f'(x) = 0$ रखने पर,

$\Rightarrow \quad (x-2)^3\ (x+1)^2\ (7x-2) = 0$

$\Rightarrow \quad x = 2, -1, \dfrac{2}{7}$

$x = 2$ पर,

$f'(x)$	$(x-2)^3$	$(x+1)^2$	$(7x\quad 2)$	परिणाम
x किंचित < 2	$-$ ve	+ ve	+ ve	$-$ ve
x किंचित > 2	+ ve	+ ve	+ ve	+ ve

$\therefore$ $f'(x)$ ऋणात्मक से धनात्मक चिन्ह बदलता है अत: $x = 2$ पर स्थानीय निम्नतम होगा।

$x = -1$ पर,

$f'(x)$	$(x-2)^3$	$(x+1)^2$	$(7x-2)$	परिणाम
x किंचित < -1	$-$ ve	+ ve	$-$ ve	+ ve
x किंचित > -1	$-$ ve	+ ve	$-$ ve	+ ve

$\therefore f'(x)$ अपना चिन्ह नहीं बदलता है अतः $x = -1$ पर नति परिवर्तन होगा।

$x = \frac{2}{7}$ पर,

$f'(x)$	$(x-2)^3$	$(x+1)^2$	$(7x-2)$	परिणाम
x किंचित $< \frac{2}{7}$	$-$ve	$+$ ve	$-$ve	$+$ ve
x किंचित $> \frac{2}{7}$	$-$ve	$+$ ve	$+$ ve	$-$ve

$\therefore f'(x)$ अपना चिन्ह धनात्मक से ऋणात्मक में बदलता है। इसलिए, $x = 2/7$ स्थानीय उच्चतम का बिंदु है। इसलिए, हम कह सकते हैं कि x का मान -1 पर बदल रहा है $x = -1$ तथा $f'(x)$ अपना चिन्ह नहीं बदलता है।

प्रश्न 14. $f(x) = \cos^2 x + \sin x, x \in [0, \pi]$ द्वारा प्रदत्त फलन f का निरपेक्ष उच्चतम और निम्नतम मान ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $f(x) = \cos^2 x + \sin x, x \in [0, \pi]$

अब, $$f'(x) = 2\cos x(-\sin x) + \cos x$$
$$= -2\sin x\cos x + \cos x$$

उच्चतम और निम्नतम मान के लिए $f'(x) = 0$ रखने पर,

$$\Rightarrow \quad -2\sin x\cos x + \cos x = 0$$

$$\Rightarrow \quad \cos x(-2\sin x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \cos x = 0 \text{ या } \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$$

निरपेक्ष उच्चतम और निरपेक्ष निम्नतम मान के लिए, हम

$f(0), f\left(\frac{\pi}{6}\right), f\left(\frac{\pi}{2}\right), f(\pi)$ ज्ञात करते हैं

$x = 0$ पर, $\quad f(0) = \cos^2 0 + \sin 0 = 1^2 + 0 = 1$

$x = \frac{\pi}{6}$ पर, $\quad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\frac{\pi}{6} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{4} = 1.25$

$x = \frac{\pi}{2}$ पर, $\quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\frac{\pi}{2} = 0^2 + 1 = 1$

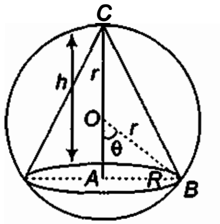
$x = \pi$ पर, $\quad f(\pi) = \cos^2\pi + \sin\pi = (-1)^2 + 0 = 1$

अतः f का निरपेक्ष उच्चतम मान 1.25 है जो $x=\frac{\pi}{6}$ पर घटित हो रहा है और निरपेक्ष निम्नतम मान 1 है जो $x=0, \frac{\pi}{2}$ और π पर घटित हो रहा है।

प्रश्न 15. **सिद्ध कीजिए कि एक r त्रिज्या के गोले के अंतर्गत उच्चतम आयतन के लंबवृत्तीय शंकु की ऊँचाई $\frac{4r}{3}$ है।**

हल मान लीजिए कि शंकु की त्रिज्या R और ऊँचाई h है।

$$\therefore \qquad OA = h - r$$



अब ΔOAB में, $\quad r^2 = R^2 + (h-r)^2$

$$\Rightarrow \qquad r^2 = R^2 + h^2 + r^2 - 2rh \Rightarrow R^2 = 2rh - h^2$$

शंकु का आयतन $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

$$= \frac{1}{3}\pi h(2rh - h^2) = \frac{1}{3}\pi(2rh^2 - h^3)$$

h के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dV}{dh} = \frac{1}{3}\pi(4rh - 3h^2)$$

उच्चतम और निम्नतम मान के लिए $\frac{dV}{dh}=0$ रखने पर

$$\Rightarrow \qquad 4rh = 3h^2 \quad \Rightarrow \quad 4r = 3h$$

$$\therefore \qquad h = \frac{4r}{3} \qquad (h \neq 0)$$

अब, $\quad \frac{d^2V}{dh^2} = \frac{1}{3}\pi(4r - 6h)$

$h = \frac{4r}{3}$ पर, $\left(\frac{d^2V}{dh^2}\right)_{h=\frac{4r}{3}} = \frac{1}{3}\pi\left(4r - 6 \times \frac{4r}{3}\right) = \frac{\pi}{3}(4r - 8r) = \frac{-4r\pi}{3} < 0$

जब $h = \frac{4r}{3}$ हो, तो V उच्चतम होगा।

अतः शंकु का आयतन उच्चतम होगा। जब $h = \frac{4r}{3}$ जोकि शंकु की ऊँचाई है।

प्रश्न 16. मान लीजिए $[a, b]$ पर परिभाषित एक फलन f इस प्रकार है। कि सभी $x \in (a, b)$ के लिए $f'(x) > 0$ है, तो सिद्ध कीजिए कि (a, b) पर f एक वर्धमान फलन है।

हल दिया है, $[a, b]$ पर, $f'(x) > 0$

$\therefore [a, b]$ पर, f एक अवकलनीय फलन है और प्रत्येक अवकलनीय फलन सतत् होता है। इसलिए f, $[a, b]$ पर सतत् है।

मान लीजिए कि $x_1, x_2 \in [a, b]$ और $x_2 > x_1$, तब लेगरेन्ज के औसत मान प्रमेय द्वारा, एक $c \in [a, b]$ इस प्रकार है कि

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$\Rightarrow \quad f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(c)$

$\Rightarrow \quad f(x_2) - f(x_1) > 0$ जैसा कि $x_2 > x_1$

और $\quad f'(x) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$

$\therefore$ $x_1 < x_2$ के लिए $\quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$

इसलिए (a, b) पर f वर्धमान फलन है।

प्रश्न 17. सिद्ध कीजिए कि एक R त्रिज्या के गोले के अंतर्गत अधिकतम आयतन के बेलन की ऊँचाई $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ है। अधिकतम आयतन भी ज्ञात कीजिए।

h ऊँचाई और r त्रिज्या वाले बेलन का चित्र बनाएँ जोकि R त्रिज्या के गोले के अंतर्गत है। अब, आयतन V को R और h के पदों में लिखकर द्वितीय अवकलन परीक्षण करके आवश्यक परिणाम सिद्ध कीजिए।

हल मान लीजिए कि गोले के अंतर्गत बेलन की लंबाई h है और x व्यास है। तब,

$$h^2 + x^2 = (2R)^2 \quad \Rightarrow \quad h^2 + x^2 = 4R^2 \quad \text{...(i)}$$

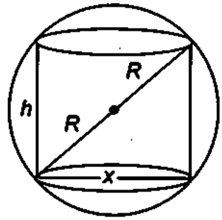
बेलन का आयतन = π (त्रिज्या)$^2 \times$ ऊँचाई

$\Rightarrow \quad V = \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 \cdot h = \frac{1}{4}\pi x^2 h$

$\Rightarrow \qquad V = \frac{1}{4}\pi h(4R^2 - h^2)$ ...(ii)

[समी (i) से, $x^2 = 4R^2 - h^2$]

$\Rightarrow \qquad V = \pi R^2 h - \frac{1}{4}\pi h^3$



h के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dV}{dh} = \pi R^2 - \frac{3}{4}\pi h^2 = \pi\left(R^2 - \frac{3}{4}h^2\right)$$

$\frac{dV}{dh} = 0$ रखने पर $\Rightarrow R^2 = \frac{3}{4}h^2 \Rightarrow h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$

तथा $\qquad \frac{d^2V}{dh^2} = -\frac{3}{4}\times 2\pi h$

$h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ पर, $\qquad \frac{d^2V}{dh^2} = -\frac{3}{4}\times 2\pi\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right) = -\sqrt{3}\pi R =$ ऋणात्मक

$\Rightarrow$ जब $h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ हो, तो v उच्चतम है

तथा $h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ पर उच्चतम आयतन

$$V = \frac{1}{4}\pi\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)\left(4R^2 - \frac{4R^2}{3}\right)$$ [समी (ii) से]

$$= \frac{\pi R}{2\sqrt{3}}\left(\frac{8R^2}{3}\right) = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}} \text{ वर्ग इकाई}$$

इसलिए, जब $h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ है, तब बेलन का आयतन उच्चतम होगा।

प्रश्न 18. सिद्ध कीजिए कि अर्द्धशीर्ष कोण α और ऊँचाई h के लंबवृत्तीय शंकु के अंतर्गत अधिकतम आयतन के बेलन की ऊँचाई, शंकु के ऊँचाई की एक-तिहाई है और बेलन का अधिकतम आयतन $\frac{4}{27}\pi h^3 \tan^2\alpha$ है।

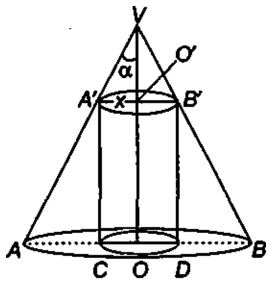
हल मान लीजिए कि VAB शंकु की ऊँचाई h, अर्द्धशीर्ष कोण α है और मान लीजिए कि $A'B'DC$ बेलन के आधार की त्रिज्या x है जोकि शंकु के अंतर्गत है, तब OO' बेलन की ऊँचाई है जहाँ

$$OO' = VO - VO' = h - x\cot\alpha$$

बेलन का आयतन $\qquad V = \pi x^2(h - x\cot\alpha)$ ...(i)

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dV}{dx} = 2\pi xh - 3\pi x^2\cot\alpha$$



उच्चतम या न्यूनतम मान के लिए $\frac{dV}{dx} = 0$ रखने पर

$$\Rightarrow \quad 2\pi xh - 3\pi x^2 \cot\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2h}{3}\tan\alpha \qquad (\because x \neq 0)$$

अब $$\frac{d^2V}{dx^2} = 2\pi h - 6\pi x \cot\alpha$$

$$x = \frac{2h}{3}\tan\alpha \text{ पर, } \frac{d^2V}{dx^2} = \pi(2h - 4h) = -2\pi h < 0$$

$\Rightarrow$ जब $x = \frac{2h}{3}\tan\alpha$ हो, तो V उच्चतम होगा।

अब, $OO' = h - x\cot\alpha = h - \frac{2h}{3} = \frac{h}{3}$

$\therefore$ बेलन का उच्चतम आयतन

$$V = \pi\left(\frac{2h}{3}\tan\alpha\right)^2\left(h - \frac{2h}{3}\right) = \frac{4}{27}\pi h^3 \tan^2\alpha$$

निर्देश (प्र. सं.19-24) निम्नलिखित प्रश्नों के सही उत्तर चुनिए।

प्रश्न 19. एक 10 मी त्रिज्या के बेलनाकार टंकी में 314 मी^{3}/घंटा की दर से गेहूँ भरा जाता है। भरे गए गेहूँ की गहराई की वृद्धि दर है

(a) 1 मी^{3}/घंटा
(b) 0.1 मी^{3}/घंटा
(c) 1.1 मी^{3}/घंटा
(d) 0.5 मी^{3}/घंटा

हल (a) मान लीजिए कि किसी समय t घंटे पर, बेलन में गेहूँ की गहराई h मी है, तब गेहूँ का आयतन V मी^{3} है

$$\therefore \quad V = \pi r^2 h = \pi(10)^2 h = 100\pi h$$

t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dV}{dt} = 100\pi\frac{dh}{dt} \quad \Rightarrow \quad 314 = 100\pi\frac{dh}{dt} \qquad \left(\text{दिया है, } \frac{dV}{dt} = 314\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dh}{dt} = \frac{314}{100(3.14)} = 1\text{मी}^3/\text{घंटा}$$

$\therefore$ गेहूँ की गहराई 1मी^{3}/घंटा की दर से बढ़ रही है।

प्रश्न 20. वक्र $x = t^2 + 3t - 8$, $y = 2t^2 - 2t - 5$ के बिंदु (2, −1) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता है

(a) $\frac{22}{7}$ (b) $\frac{6}{7}$

(c) $\frac{7}{6}$ (d) $\frac{-6}{7}$

हल (b) दिया है, $x = t^2 + 3t - 8$ और $y = 2t^2 - 2t - 5$ ...(i)

t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\therefore \quad \frac{dx}{dt} = 2t + 3 \text{ और } \frac{dy}{dt} = 4t - 2$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} = \frac{4t - 2}{2t + 3}$$

दिया गया बिंदु (2, −1) है।

$x = 2$ पर, समी (i) से, $2 = t^2 + 3t - 8 \Rightarrow t^2 + 3t - 10 = 0$

$$\Rightarrow \quad (t + 5)(t - 2) = 0 \Rightarrow t = 2 \text{ या } t = -5$$

$y = -1$ पर, समी (i) से, $-1 = 2t^2 - 2t - 5 \Rightarrow 2t^2 - 2t - 4 = 0$

$$\Rightarrow \quad (t - 2)(t + 1) = 0 \Rightarrow t = 2 \text{ या } t = -1$$

t का उभयनिष्ठ मान 2 है।

$\therefore$ बिंदु (2, −1) पर दिए गए वक्र की स्पर्श रेखा की प्रवणता है

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=2} = \frac{4 \times 2 - 2}{2 \times 2 + 3} = \frac{8 - 2}{4 + 3} = \frac{6}{7}$$

प्रश्न 21. रेखा $y = mx + 1$, वक्र $y^2 = 4x$ की एक स्पर्श रेखा है यदि m का मान है

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) $\frac{1}{2}$

सबसे पहले दिए गए वक्र का अवकलन कीजिए और $\frac{dy}{dx}$ को रेखा y की प्रवणता के बराबर रखकर हल कीजिए।

हल (a) वक्र पर स्पर्श रेखा का समीकरण $y = mx + 1$ है।

$\therefore$ दी गई रेखा y की प्रवणता m है।

दिया गया वक्र है, $y^2 = 4x$ ...(i)

अवकलन करने पर,

$$2y\frac{dy}{dx} = 4 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2}{y}$$

यदि रेखा $y = mx + 1$ वक्र पर स्पर्श रेखा है, तब $\frac{2}{y} = m$

$$\Rightarrow \qquad y = \frac{2}{m}$$

समी (i) में y का मान रखने पर, $\quad x = \frac{y^2}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{m}\right)^2 = \frac{1}{m^2}$

$\therefore$ वह बिंदु जिस पर दी गई रेखा स्पर्श करती है $\left(\frac{1}{m^2}, \frac{2}{m}\right)$

यह बिंदु रेखा $y = mx + 1$ को अवश्य संतुष्ट करेगा।

$$\therefore \qquad \frac{2}{m} = m\left(\frac{1}{m^2}\right) + 1 \Rightarrow \frac{1}{m} = 1 \quad \Rightarrow \quad m = 1$$

प्रश्न 22. वक्र $2y + x^2 = 3$ के बिंदु (1, 1) पर अभिलंब का समीकरण है

(a) $x + y = 0$ (b) $x - y = 0$
(c) $x + y + 1 = 0$ (d) $x - y + 1 = 0$

हल (b) दिया गया वक्र है,

$$2y + x^2 = 3$$

अवकलन करने पर, $2\frac{dy}{dx} + 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -x$

$\therefore$ दिए गए बिंदु पर अभिलंब की प्रवणता

$$\frac{-1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,\,1)}} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$\therefore$ (1, 1) पर अभिलंब का समीकरण $y - 1 = 1(x - 1)$ या $x - y = 0$

प्रश्न 23. वक्र $x^2 = 4y$ का बिंदु (1, 2) से हो कर जाने वाला अभिलंब है

(a) $x + y = 3$ (b) $x - y = 3$
(c) $x + y = 1$ (d) $x - y = 1$

हल (a) दिया गया वक्र है, $x^2 = 4y$ ...(i)

मान लीजिए (x_1, y_1) वक्र (i) पर बिंदु है जिस पर अभिलंब (1, 2) से होकर गुजरता है।

$$\therefore \qquad x_1^2 = 4y_1 \qquad \text{...(ii)}$$

समी (i) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$2x = 4\frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{4} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,\,y_1)} = \frac{x_1}{2}$$

अब, बिंदु (x_1, y_1) पर अभिलंब का समीकरण

$$\therefore \quad y - y_1 = -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}}(x - x_1) \Rightarrow y - y_1 = -\frac{2}{x_1}(x - x_1) \quad \ldots\text{(iii)}$$

लेकिन यह अभिलंब (1, 2) से होकर गुजरता है।

$$2 - y_1 = -\frac{2}{x_1}(1 - x_1) \quad \Rightarrow \quad 2 - y_1 = -\frac{2}{x_1} + 2$$

$$\Rightarrow \quad y_1 = \frac{2}{x_1} \quad \ldots\text{(iv)}$$

समी (ii) और (iv) से, $x_1^2 = 4 \times \frac{2}{x_1}$

$$\Rightarrow \quad x_1^3 = 8 \Rightarrow x_1 = 2$$

समी (ii) से, $y_1 = \frac{x_1^2}{4} = \frac{2^2}{4} = 1$

वक्र (i) पर अभिलंब (1, 2) से होकर गुजरता है। $x_1 = 2$ और $y_1 = 1$ रखने पर, समी (iii) से हमें निम्न आवश्यक अभिलंब प्राप्त होता है।

$$y - 1 = -\frac{2}{2}(x - 2)$$

$$\Rightarrow \quad y - 1 = -x + 2$$

$$\Rightarrow \quad x + y - 3 = 0$$

प्रश्न 24. वक्र $9y^2 = x^3$ पर वे बिंदु जहाँ पर वक्र का अभिलंब अक्षों से समान अंतःखंड बनाता है, हैं

(a) $\left(4, \pm\frac{8}{3}\right)$ (b) $\left(4, \frac{-8}{3}\right)$

(c) $\left(4, \pm\frac{3}{8}\right)$ (d) $\left(\pm 4, \frac{3}{8}\right)$

हल (a) दिया गया वक्र है, $9y^2 = x^3$ ...(i)

अवकलन करने पर,

$$18y\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{6y} \quad \ldots\text{(ii)}$$

मान लीजिए कि समी (i) पर बिंदु (α, β) हैं जिस पर अभिलंब अक्षों से समान अंतःखंड बनाता है, तब

$$9\beta^2 = \alpha^3 \quad \ldots\text{(iii)}$$

समी (ii) से (α, β) पर अभिलंब की प्रवणता

$$= \frac{-1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(\alpha,\beta)}} = \frac{-1}{\alpha^2/(6\beta)} = \frac{-6\beta}{\alpha^2} \qquad \ldots\text{(iv)}$$

अतः वक्र का अभिलंब अक्षों से समान अंतःखंड बनाता है।

$\therefore$ अभिलंब की प्रवणता $= \tan 45°$ या $\tan 135° = \pm 1$ ...(v)

$\therefore$ समी (iv) से, $\dfrac{-6\beta}{\alpha^2} = \pm 1$

$\Rightarrow \qquad \beta = \mp \dfrac{\alpha^2}{6}$

समी (iii) में β का मान रखने पर, $9\left(\mp \dfrac{\alpha^2}{6}\right)^2 = \alpha^3$

$\Rightarrow \qquad \alpha^4 = 4\alpha^3 \Rightarrow \alpha^3(\alpha - 4) = 0$

$\Rightarrow \qquad \alpha = 0$ या $\alpha = 4$

जब $\alpha = 0, \beta = 0$, तब अभिलंब (0, 0) से होकर गुजरता है, इसका अर्थ है कि वे एक-दूसरे को कहीं नहीं काटते हैं।

$\alpha = 4$ रखने पर,

$$\beta = \mp \frac{4^2}{6} = \mp \frac{8}{3}$$