11
अध्याय

शांकव परिच्छेदन

Conic Sections

evidyarthi

प्रश्नावली 11.1

निर्देश (प्र. सं. 1 - 5) निम्नलिखित प्रश्नों में वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।

यदि वृत्त का केंद्र (h, k) तथा त्रिज्या (r) है, तब वृत्त की समीकरण निम्न होती है,

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

प्रश्न 1. केंद्र (0, 2) और त्रिज्या 2 इकाई

हल दिया है, केंद्र $=(h, k)=(0, 2)$ तथा त्रिज्या $r=2$

$\therefore$ वृत्त की समीकरण $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ के प्रयोग द्वारा,

$$(x-0)^2+(y-2)^2=2^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2+y^2+4-4y=4 \qquad [\because (a-b)^2=a^2+b^2-2ab]$$

$$\Rightarrow \quad x^2+y^2-4y=0$$

प्रश्न 2. केंद्र $(-2, 3)$ और त्रिज्या 4 इकाई

हल दिया है, केंद्र $= (h, k) = (-2, 3)$ तथा त्रिज्या $r = 4$

$\therefore$ वृत्त की समीकरण $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ के प्रयोग द्वारा,

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 4^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + 4 + 4x + y^2 + 9 - 6y = 16$$

$$[\because (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \text{ और } (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab]$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 + 4x - 6y + 13 - 16 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$$

प्रश्न 3. केंद्र $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ और त्रिज्या $\frac{1}{12}$ इकाई

हल दिया है, केंद्र $= (h, k) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ तथा त्रिज्या $r = \frac{1}{12}$

$\therefore$ वृत्त की समीकरण $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ के प्रयोग द्वारा,

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{12}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + \frac{1}{4} - 2\cdot\frac{1}{2}x + y^2 + \frac{1}{16} - 2\cdot\frac{y}{4} = \frac{1}{144} \qquad [\because (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab]$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - x - \frac{y}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{144} = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - x - \frac{y}{2} + \frac{36 + 9 - 1}{144} = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - x - \frac{y}{2} + \frac{44}{144} = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - x - \frac{y}{2} + \frac{11}{36} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 36x^2 + 36y^2 - 36x - 18y + 11 = 0$$

प्रश्न 4. केंद्र $(1, 1)$ और त्रिज्या $\sqrt{2}$ इकाई

हल दिया है, केंद्र $= (h, k) = (1, 1)$ तथा त्रिज्या $= r = \sqrt{2}$

$\therefore$ वृत्त की समीकरण $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ के प्रयोग द्वारा,

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{2})^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + 1 - 2x + y^2 + 1 - 2y = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$$

प्रश्न 5. केंद्र $(-a, -b)$ और त्रिज्या $\sqrt{a^2 - b^2}$ इकाई

हल दिया है, केंद्र $= (h, k) = (-a, -b)$ तथा त्रिज्या $r = \sqrt{a^2 - b^2}$

$\therefore$ वृत्त की समीकरण $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ के प्रयोग द्वारा,

$$(x+a)^2 + (y+b)^2 = (\sqrt{a^2 - b^2})^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + a^2 + 2ax + y^2 + b^2 + 2by = a^2 - b^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 + 2ax + 2by + 2b^2 = 0$$

निर्देश (प्र. सं. 6 - 9) निम्नलिखित प्रश्नों में वृत्त का केंद्र और त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 6. $(x+5)^2 + (y-3)^2 = 36$

हल दिए गए वृत्त समीकरण

$$(x+5)^2 + (y-3)^2 = 36 = (6)^2$$

निम्न समीकरण के साथ तुलना करने पर,

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

हम प्राप्त करते हैं, $h = -5, k = 3$ तथा $r = 6$

अतः केंद्र $= (h, k) = (-5, 3)$ तथा त्रिज्या $r = 6$

प्रश्न 7. $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 45 = 0$

हल दिए गए वृत्त की समीकरण

$$x^2 + y^2 - 4x - 8y - 45 = 0$$

निम्न समीकरण के साथ तुलना करने पर,

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

हम प्राप्त करते हैं, $2g = -4,\ 2f = -8,\ c = -45$

$\Rightarrow$ $g = -2,\ f = -4,\ c = -45$

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ का केंद्र तथा त्रिज्या क्रमशः $C(-g, -f)$ तथा $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$ हैं।

$\therefore$ केंद्र $= (-g, -f) = (2, 4)$

तथा त्रिज्या $= \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 - (-45)} = \sqrt{4 + 16 + 45} = \sqrt{65}$

प्रश्न 8. $x^2 + y^2 - 8x + 10y - 12 = 0$

हल दिए गए वृत्त की समीकरण

$$x^2 + y^2 - 8x + 10y - 12 = 0$$

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ से तुलना करने पर,

हम प्राप्त करते हैं, $2g = -8, 2f = 10, c = -12 \Rightarrow g = -4,\ f = 5,\ c = -12$

$\therefore$ केंद्र $= (-g, -f) = (4, -5)$

तथा त्रिज्या $= \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{(-4)^2 + (5)^2 - (-12)} = \sqrt{16 + 25 + 12} = \sqrt{53}$

प्रश्न 9. $2x^2 + 2y^2 - x = 0$

हल दिए गए वृत्त की समीकरण

$$2x^2 + 2y^2 - x = 0$$

2 से भाग देने पर, हम प्राप्त करते हैं $x^2 + y^2 - \frac{x}{2} = 0$

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, के साथ तुलना करने पर हम पाते हैं,

$$2g = -\frac{1}{2}, 2f = 0, c = 0 \Rightarrow g = -\frac{1}{4}, f = 0, c = 0$$

evidyarthi

$\therefore$ केंद्र $= (-g, -f) = (1/4, 0)$

तथा त्रिज्या $= \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 0 - 0} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$

> **नोट** *वृत्त का व्यापक समीकरण में सर्वप्रथम हम x^2 तथा y^2 के गुणांक को धनात्मक इकाई बनाते हैं। अन्यथा केंद्र के निर्देशांक लेने में गलती हो जाती है।*

प्रश्न 10. **बिंदुओं (4, 1) और (6, 5) से जाने वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केंद्र रेखा $4x + y = 16$ पर स्थित है।**

हल माना वृत्त की समीकरण $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ...(i)

चूँकि समी (i), बिंदुओं (4, 1) तथा (6, 5) से होकर गुजरती है अर्थात् ये इसे संतुष्ट करेंगे।

जब बिंदु (4, 1) है,

$$(4)^2 + (1)^2 + 2g(4) + 2f(1) + c = 0$$

$\Rightarrow$ $17 + 8g + 2f + c = 0$

$\Rightarrow$ $8g + 2f + c + 17 = 0$ ...(ii)

जब बिंदु (6, 5) है,

$$(6)^2 + (5)^2 + 2g(6) + 2f(5) + c = 0$$

$\Rightarrow$ $36 + 25 + 12g + 10f + c = 0$

$\Rightarrow$ $12g + 10f + c + 61 = 0$ ...(iii)

जैसा कि समी (i) का केंद्र $(-g, -f)$ रेखा $4x + y = 16$ पर स्थित है,

$\therefore$ $4(-g) + (-f) = 16$

$\Rightarrow$ $4g + f + 16 = 0$ ...(iv)

अब, समी (ii) को समी (iii) में से घटाने पर,

$4g + 8f + 44 = 0$ ...(v)

अब, समी (iv) को समी (v) में से घटाने पर,

$7f + 28 = 0$

$\Rightarrow$ $7f = -28$

$\Rightarrow$ $f = -4$

समी (iv) से, $4g - 4 + 16 = 0$

$\Rightarrow$ $4g + 12 = 0$

$\Rightarrow$ $4g = -12 \Rightarrow g = -3$

समी (ii) से, $8(-3) + 2(-4) + c + 17 = 0$

$\Rightarrow$ $-24 - 8 + c + 17 = 0$

$\Rightarrow$ $c - 32 + 17 = 0$

$\Rightarrow$ $c - 15 = 0$

$\Rightarrow$ $c = 15$

g, f तथा c के मानों को समी (i) में रखने पर, हम वृत्त की अभीष्ट समीकरण प्राप्त करते हैं,

$$x^2 + y^2 + 2(-3)x + 2(-4)y + 15 = 0$$

$\Rightarrow$ $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 15 = 0$

eVidyarthi

प्रश्न 11. बिंदुओं (2, 3) तथा (– 1, 1) से जाने वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केंद्र रेखा $x - 3y - 11 = 0$ पर स्थित है।

हल माना वृत्त की समीकरण

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2f\,y + c = 0 \qquad \ldots(i)$$

समी (i), बिंदुओं (2, 3) तथा (– 1, 1) से होकर जाती है अर्थात् ये इसको संतुष्ट करेंगे।

जब बिंदु (2, 3) है, $(2)^2 + (3)^2 + 2g(2) + 2f(3) + c = 0$

$$\Rightarrow \quad 4g + 6f + c + 13 = 0 \qquad \ldots(ii)$$

तथा जब बिंदु (–1, 1), है $(-1)^2 + (1)^2 + 2g(-1) + 2f(1) + c = 0$

$$\Rightarrow \quad -2g + 2f + c + 2 = 0 \qquad \ldots(iii)$$

जैसा कि केंद्र $(-g, -f)$ रेखा $x - 3y - 11 = 0$ पर स्थित है,

अर्थात् $(-g) - 3(-f) - 11 = 0$

$$\Rightarrow \quad -g + 3f - 11 = 0 \qquad \ldots(iv)$$

अब समी (iii) को समी (ii) में से घटाने पर हम पाते हैं,

$$6g + 4f + 11 = 0 \qquad \ldots(v)$$

समी (iv) से, $g = 3f - 11$ समी (v) में रखने पर हम पाते हैं,

$$6(3f - 11) + 4f + 11 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 18f - 66 + 4f + 11 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 22f - 55 = 0$$

$$\Rightarrow \quad f = \frac{55}{22} \Rightarrow f = \frac{5}{2}$$

समी (iv) से, $g = 3 \times \frac{5}{2} - 11 = \frac{15 - 22}{2} = \frac{-7}{2}$

समी (ii) से, $4 \times \left(-\frac{7}{2}\right) + 6\left(\frac{5}{2}\right) + c + 13 = 0$

$$\Rightarrow \quad -14 + 15 + c + 13 = 0$$

$$\Rightarrow \quad c + 14 = 0$$

$$\Rightarrow \quad c = -14$$

g, f तथा c के मानों को समी (i) में रखने पर वृत्त की अभीष्ट समीकरण,

$$x^2 + y^2 + 2x\left(-\frac{7}{2}\right) + 2y\left(\frac{5}{2}\right) - 14 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 7x + 5y - 14 = 0$$

प्रश्न 12. त्रिज्या 5 के उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केंद्र x-अक्ष पर हो और जो बिंदु (2, 3) से जाता है।

हल माना वृत्त का केंद्र $(h, 0)$ है, चूँकि वृत्त का केंद्र x-अक्ष पर स्थित है। अतः इसका y-निर्देशांक शून्य होगा।

चूँकि वृत्त पर स्थित किसी बिंदु से वृत्त के केंद्र की दूरी = त्रिज्या

$$\therefore \quad \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = r$$

$$\therefore \quad \sqrt{(h - 2)^2 + (0 - 3)^2} = 5 \qquad (\because x_1 = 2, y_1 = 3, x_2 = h, y_2 = 0)$$

$\Rightarrow \quad h^2 + 4 - 4h + 9 = 25$ (दोनों पक्षों का वर्ग करने पर)

$\Rightarrow \quad h^2 - 4h + 13 - 25 = 0$

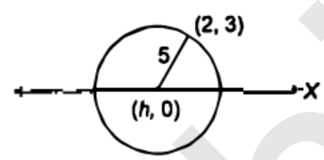
$\Rightarrow \quad h^2 - 4h - 12 = 0$

$\Rightarrow \quad h^2 - 6h + 2h - 12 = 0$

$\Rightarrow \quad h(h - 6) + 2(h - 6) = 0$

$\Rightarrow \quad (h - 6)(h + 2) = 0$

$\Rightarrow \quad h - 6 = 0$ या $h + 2 = 0 \Rightarrow h = 6$ या -2



$\therefore$ केंद्र (6, 0) या (– 2, 0) है।

अतः वृत्त की समीकरण

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ के प्रयोग द्वारा,

जब $(h, k) = (6, 0)$ तथा $r = 5$,

$$(x - 6)^2 + (y - 0)^2 = 5^2$$

$\Rightarrow \quad x^2 + 36 - 12x + y^2 = 25$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0$

और जब $(h, k) = (-2, 0)$ तथा $r = 5$

$\Rightarrow \quad (x + 2)^2 + (y - 0)^2 = 5^2$ $\quad [\because (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2]$

$\Rightarrow \quad x^2 + 4 + 4x + y^2 = 25$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 + 4x - 21 = 0$

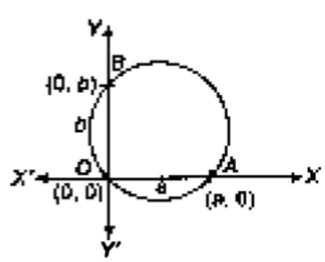
प्रश्न 13. (0,0) से होकर जाने वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो निर्देशांक्षों पर a तथा b अंत:खंड बनाता है।

हल चूँकि वृत्त निर्देशांक्षों को a तथा b पर अंत:खंडित करता है। इसका अर्थ है कि x-अक्ष पर अंत:खंड बिंदु $(a, 0)$ तथा y-अक्ष पर अत:खंड बिंदु $(0, b)$ है, अत: वृत्त बिंदुओं $O(0, 0)$, $A(a, 0)$ तथा $B(0, b)$ से होकर गुजरता है।

माना वृत्त का व्यापक समीकरण,

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2f\,y + c = 0 \quad \ldots(i)$$

चूँकि समी (i) बिंदुओं $O(0, 0)$, $A(a, 0)$ तथा $B(0, b)$ से होकर जाती है अर्थात् ये इसे संतुष्ट करेंगे।



evidyarthi

जब बिंदु (0,0) है,

$$0+0+0+0+c=0 \Rightarrow c=0$$

जब बिंदु (*a*, 0) है,

$$a^2+0+2ag+0+0=0 \Rightarrow a^2+2ag=0$$

$$\Rightarrow \quad g=-\frac{a}{2}$$

तथा जब बिंदु (0, *b*) है,

$$0+b^2+0+2bf+0=0$$

$$\Rightarrow \quad b^2+2bf=0 \Rightarrow f=-\frac{b}{2}$$

g, *f* तथा *c* के मानों को समी (i) में रखने पर वृत्त की अभीष्ट समीकरण प्राप्त करते हैं।

अर्थात् $$x^2+y^2+2x\left(-\frac{a}{2}\right)+2y\left(-\frac{b}{2}\right)+0=0$$

$$\Rightarrow \quad x^2+y^2-ax-by=0$$

प्रश्न 14. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केंद्र (2, 2) हो तथा बिंदु (4, 5) से जाता है।

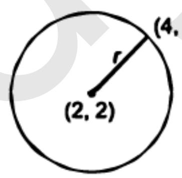
यदि बिंदु *P* (*x*, *y*) वृत्त पर स्थित किसी बिंदु के निर्देशांक हैं तथा (*h*, *k*) वृत्त के केंद्र के निर्देशांक है, तब त्रिज्या

$$r=\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}$$

हल यहाँ, केंद्र (*h*, *k*) = (2, 2) तथा वृत्त पर स्थित बिंदु *P* (*x*, *y*) = (4, 5) है।

$$\therefore \quad r=\sqrt{(2-4)^2+(2-5)^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$$

$$\left[\because r=\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}\right]$$



वृत्त की समीकरण

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

$$\therefore \quad (x-2)^2+(y-2)^2=(\sqrt{13})^2 \quad [\text{दिया है, } (h,k)=(2,2) \text{ तथा } r=\sqrt{13}]$$

$$\Rightarrow \quad x^2+4-4x+y^2+4-4y=13$$

$$\Rightarrow \quad x^2+y^2-4x-4y-5=0$$

प्रश्न 15. क्या बिंदु (– 2.5, 3.5) वृत्त $x^2+y^2=25$ के अंदर, बाहर या वृत्त पर स्थित है?

हल दिया है, वृत्त की समीकरण

$$x^2+y^2=25$$

माना $$S=x^2+y^2-25 \quad \ldots(i)$$

$(x, y) = (-2.5, 3.5)$ समी (i) में रखने पर,

$\Rightarrow \quad S = (-2.5)^2 + (3.5)^2 - 25 = 6.25 + 12.25 - 25 = 18.50 - 25 = -6.50 < 0$

$\therefore$ बिंदु वृत्त के अंदर स्थित है।

> **नोट** *बिंदु (x_1, y_1) पर, यदि $S_1 > 0$, तब बिंदु वृत्त के बाहर, यदि $S_1 = 0$, तब बिंदु वृत्त पर तथा यदि $S_1 < 0$, तब बिंदु वृत्त के अंदर स्थित होते हैं।*

प्रश्नावली 11.2

निर्देश (प्र. सं. 1-6) निम्नलिखित प्रश्नों में नाभि के निर्देशांक, परवलय का अक्ष, नियता का समीकरण और नाभिलंब जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 1. $y^2 = 12x$

हल दी गई परवलय की समीकरण $y^2 = 12x$

जो $y^2 = 4ax$ रूप की है अर्थात् नाभियाँ X-अक्ष की धन दिशा में स्थित है।

यहाँ, $\quad 4a = 12 \Rightarrow a = 3$

नाभियाँ $= (a, 0) = (3, 0)$

अक्ष $= X$-अक्ष

नियता, $\quad x = -a \Rightarrow x = -3$

नाभिलंब जीवा की लंबाई $= 4a = 4 \times 3 = 12$

प्रश्न 2. $x^2 = 6y$

हल दी गई परवलय की समीकरण $x^2 = 6y$, जोकि $x^2 = 4ay$ के रूप की है अर्थात् नाभियाँ Y-अक्ष की धन दिशा में स्थित है।

यहाँ, $\quad 4a = 6 \Rightarrow a = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

नाभियाँ $= (0, a) = \left(0, \frac{3}{2}\right)$

अक्ष $= Y$-अक्ष

नियता, $y = -a \Rightarrow y = -\frac{3}{2}$

नाभिलंब जीवा की लंबाई $= 4a = 4 \times \frac{3}{2} = 6$

प्रश्न 3. $y^2 = -8x$

हल दी गई परवलय की समीकरण $y^2 = -8x$ है, जो $y^2 = -4ax$ के रूप की है अर्थात् नाभियाँ X-अक्ष की ऋणात्मक दिशा में स्थित है।

यहाँ, $\quad 4a = 8 \Rightarrow a = 2$

नाभियाँ $= (-a, 0) = (-2, 0)$

अक्ष $= X$-अक्ष

evidyarthi

नियता, $x = a \Rightarrow x = 2$

नाभिलंब जीवा की लंबाई $= 4a = 4 \times 2 = 8$

प्रश्न 4. $x^2 = -16y$

हल दी गई परवलय की समीकरण $x^2 = -16y$ है, जो $x^2 = -4ay$ के रूप की है अर्थात् नाभियाँ Y-अक्ष की ऋणात्मक दिशा में स्थित है।

यहाँ, $4a = 16 \Rightarrow a = 4$

नाभियाँ $= (0, -a) = (0, -4)$

अक्ष = Y-अक्ष

नियता, $y = a \Rightarrow y = 4$

नाभिलंब जीवा की लंबाई $= 4a = 4 \times 4 = 16$

प्रश्न 5. $y^2 = 10x$

हल दी गई परवलय की समीकरण $y^2 = 10x$ है, जो $y^2 = 4ax$ के रूप की हे अर्थात् नाभियाँ X-अक्ष की घन दिशा में स्थित है।

यहाँ, $4a = 10 \Rightarrow a = \frac{5}{2}$

नाभियाँ $= (a, 0) = \left(\frac{5}{2}, 0\right)$

अक्ष = X-अक्ष

नियता, $x = -a \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$

नाभिलंब जीवा की लंबाई $= 4a = 4 \times \frac{5}{2} = 10$

प्रश्न 6. $x^2 = -9y$

हल दी गई परवलय की समीकरण $x^2 = -9y$ है, जो $x^2 = -4ay$ के रूप की है अर्थात् नाभियाँ Y-अक्ष की ऋणात्मक दिशा में स्थित है।

यहाँ, $4a = 9$

$\Rightarrow$ $a = \frac{9}{4}$

नाभियाँ $= (0, -a) = \left(0, -\frac{9}{4}\right)$

अक्ष = Y-अक्ष

नियता, $y = a \Rightarrow y = \frac{9}{4}$

नाभिलंब जीवा की लंबाई $= 4a = 9$

निर्देश (प्र. सं. 7 - 12) निम्नलिखित प्रश्नों में परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जो दिए प्रतिबंध को संतुष्ट करता है।

प्रश्न 7. नाभि (6, 0) तथा नियता $x = -6$

हल दिया है कि, नाभि (6, 0) तथा नियता $x = -6$ है।
यहाँ, हम देखते हैं कि नाभि के निर्देशांक में x-निर्देशांक धनात्मक है तथा y-निर्देशांक शून्य है। अतः नाभि x-अक्ष की धनात्मक दिशा में स्थित है अर्थात् परवलय की समीकरण $y^2 = 4ax$, $a = 6$ के साथ, के रूप की होगी।

अतः अभीष्ट समीकरण

$$y^2 = 4 \times 6x \Rightarrow y^2 = 24x$$

प्रश्न 8. नाभि (0, – 3) तथा नियता $y = 3$

हल दिया है कि नाभि = (0, – 3) तथा नियता $y = 3$
चूँकि नाभि Y-अक्ष की ऋणात्मक दिशा में स्थित है अर्थात् परवलय की समीकरण $x^2 = -4ay$, $a = 3$ के साथ, के रूप की होगी।

अतः अभीष्ट समीकरण

$$x^2 = -4(3)y \Rightarrow x^2 = -12y$$

प्रश्न 9. शीर्ष (0, 0) तथा नाभि (3, 0)

हल दिया है कि शीर्ष = (0, 0)

नाभि = (3, 0)

चूँकि शीर्ष (0, 0) तथा नाभि X-अक्ष की धन दिशा में स्थित है। अतः परवलय की समीकरण $y^2 = 4ax$, $a = 3$ के साथ, के रूप की होगी।

अतः अभीष्ट समीकरण

$$y^2 = 4 \times 3x$$

$$\Rightarrow \quad y^2 = 12x$$

प्रश्न 10. शीर्ष (0, 0) तथा नाभि (– 2, 0)

हल दिया है, शीर्ष = (0, 0)

नाभि = (– 2, 0)

चूँकि शीर्ष (0, 0) तथा नाभि X-अक्ष की ऋणात्मक दिशा में स्थित है। अतः परवलय की समीकरण $y^2 = -4ax$, $a = 2$ के साथ के रूप की होगी।

अतः अभीष्ट समीकरण $y^2 = -4(2)x = -8x$

प्रश्न 11. शीर्ष (0, 0), (2, 3) से जाता है और अक्ष, X-अक्ष के अनुदिश है।

हल दिया है, शीर्ष = (0, 0)

बिंदु = (2, 3), अक्ष = X-अक्ष

evidyarthi

चूँकि बिंदु (2, 3) प्रथम चतुर्थांश में स्थित है तथा अक्ष, X-अक्ष है। अतः परवलय की समीकरण $y^2 = 4ax$ के रूप की होगी, जोकि बिंदु (2, 3) से होकर गुजरती है अर्थात्

$x = 2, y = 3$ परवलय की समीकरण $y^2 = 4ax$

$$\therefore \quad (3)^2 = 4a \times (2) \Rightarrow a = \frac{9}{8}$$

अतः परवलय की अभीष्ट समीकरण

$$y^2 = 4\left(\frac{9}{8}\right)x \Rightarrow y^2 = \frac{9}{2}x$$

प्रश्न 12. **शीर्ष (0, 0), (5, 2) से जाता है और Y-अक्ष के सापेक्ष सममित है।**

हल दिया है, शीर्ष = (0, 0)

बिंदु = (5, 2)

चूँकि बिंदु (5, 2) प्रथम चतुर्थांश में स्थित है तथा अक्ष Y-अक्ष है। इस प्रकार परवलय Y-अक्ष के सापेक्ष सममित है। अतः परवलय की समीकरण $x^2 = 4ay$ के रूप की होगी, जो बिंदु (5, 2) से होकर गुजरती है अर्थात्

$x = 5, y = 2$ परवलय की समीकरण $x^2 = 4ay$ में रखने पर,

$$\therefore \quad (5)^2 = 4a \times 2$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{25}{8}$$

अतः परवलय की अभीष्ट समीकरण

$$x^2 = 4 \times \frac{25}{8}y \Rightarrow x^2 = \frac{25}{2}y$$

प्रश्नावली 11.3

निर्देश (प्र. सं. 1 - 9) निम्नलिखित प्रश्नों में प्रत्येक दीर्घवृत्त में नाभियों और शीर्षों के निर्देशांक, दीर्घ और लघु अक्ष की लंबाइयाँ, उत्केंद्रता तथा नाभिलंब जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 1. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$

हल दिया है, $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$

$\because \frac{x^2}{36}$ का हर, भाग $\frac{y^2}{16}$ के हर भाग से बड़ा है।

$\therefore$ दीर्घ अक्ष, x-अक्ष के अनुदिश है। दी गई समीकरण की तुलना $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ से करने पर, हम प्राप्त करते हैं,

$$a^2 = 36 \quad \text{तथा} \quad b^2 = 16$$

$$\Rightarrow \quad a = 6 \quad \text{तथा} \quad b = 4$$

यहाँ, a तथा b लंबाइयाँ हैं, अतः हम केवल घनात्मक चिन्ह लेते हैं।

evidyarthi

अब, $$c^2 = a^2 - b^2 = 36 - 16 = 20$$

⇒ $$c = 2\sqrt{5}$$

यहाँ, दीर्घ अक्ष, X-अक्ष के अनुदिश है।

$$\text{नाभियाँ} = (\pm c, 0) = (\pm 2\sqrt{5}, 0)$$

$$\text{शीर्ष} = (\pm a, 0) = (\pm 6, 0)$$

$$\text{दीर्घ अक्ष की लंबाई} = 2a = 2 \times 6 = 12$$

$$\text{लघु अक्ष की लंबाई} = 2b = 2 \times 4 = 8$$

$$\text{उत्केंद्रता}, e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{नाभिलंब जीवा की लंबाई} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 16}{6} = \frac{16}{3}$$

प्रश्न 2. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$

हल दी गई दीर्घवृत्त की समीकरण

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$$

∵ $\frac{x^2}{4}$ का हर भाग $\frac{y^2}{25}$ के हर भाग से छोटा है।

∴ दीर्घ अक्ष Y-अक्ष के अनुदिश है।

दी गई समीकरण की तुलना $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ से करने पर हम पाते हैं

$$b^2 = 4 \quad \text{तथा} \quad a^2 = 25$$

⇒ $$b = 2 \quad \text{तथा} \quad a = 5$$

यहाँ, a तथा b लंबाइयाँ है, अतः हम केवल धनात्मक चिन्ह लेंगे।

∵ $$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 4 = 21$$

⇒ $$c = \sqrt{21}$$

यहाँ, दीर्घ अक्ष, Y-अक्ष के अनुदिश है, अतः

$$\text{नाभियाँ} = (0, \pm c) = (0, \pm \sqrt{21})$$

$$\text{शीर्ष} = (0, \pm a) = (0, \pm 5)$$

$$\text{दीर्घ अक्ष की लंबाई} = 2a = 2 \times 5 = 10$$

$$\text{लघु अक्ष की लंबाई} = 2b = 2 \times 2 = 4$$

$$\text{उत्केंद्रता}, e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$\text{नाभिलंब जीवा की लंबाई} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 4}{5} = \frac{8}{5}$$

eVidyarthi

प्रश्न 3. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

हल दी गई दीर्घवृत्त की समीकरण $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

$\because \frac{x^2}{16}$ का हर भाग, $\frac{y^2}{9}$ के हर भाग से बड़ा है।

$\therefore$ दीर्घ अक्ष, X-अक्ष के अनुदिश है।

दी गई समीकरण की तुलना $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ से करने पर हम प्राप्त करते हैं,

$$a^2=16 \quad \text{तथा} \quad b^2=9$$

$$\Rightarrow \quad a=4 \quad \text{तथा} \quad b=3$$

यहाँ, a तथा b लंबाइयाँ है, अत: हम केवल धनात्मक चिन्ह लेते हैं।

अब, $c^2=a^2-b^2=16-9=7$

$\Rightarrow$ $c=\sqrt{7}$

यहाँ, दीर्घ अक्ष, X-अक्ष के अनुदिश है, अतः

नाभियाँ $=(\pm c, 0)=(\pm\sqrt{7}, 0)$

शीर्ष $=(\pm a, 0)=(\pm 4, 0)$

दीर्घ अक्ष की लंबाई $=2a=2\times 4=8$

लघु अक्ष की लंबाई $=2b=2\times 3=6$

उत्केंद्रता, $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

नाभिलंब जीवा की लंबाई $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2\times 9}{4}=\frac{9}{2}$

प्रश्न 4. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{100}=1$

हल दी गई दीर्घवृत्त की समीकरण $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{100}=1$

$\because \frac{x^2}{25}$ का हर भाग, $\frac{y^2}{100}$ के हर भाग के छोटा है।

$\therefore$ दीर्घ अक्ष Y-अक्ष के अनुदिश है।

दी गई समीकरण की तुलना $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ के साथ करने पर हम पाते हैं,

$$b^2=25 \text{ तथा } a^2=100$$

$$\Rightarrow \quad b=5 \quad \text{तथा} \quad a=10$$

यहाँ, a तथा b लंबाइयाँ हैं, अतः हम केवल धनात्मक चिन्ह लेते हैं।

अब, $c^2=a^2-b^2=100-25=75=25\times 3 \Rightarrow c=5\sqrt{3}$

यहाँ, दीर्घ अक्ष, Y-अक्ष के अनुदिश हैं, अतः

नाभियाँ $=(0, \pm c)=(0, \pm 5\sqrt{3})$

$$\text{शीर्ष} = (0, \pm a) = (0, \pm 10)$$

$$\text{दीर्घ अक्ष की लंबाई} = 2a = 2 \times 10 = 20$$

$$\text{लघु अक्ष की लंबाई} = 2b = 2 \times 5 = 10$$

$$\text{उत्केंद्रता}, e = \frac{c}{a} = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{नाभिलंब जीवा की लंबाई} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 25}{10} = 5$$

प्रश्न 5. $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{36} = 1$

हल दी गई दीर्घवृत्त की समीकरण $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{36} = 1$

$\because \frac{x^2}{49}$ का हर भाग, $\frac{y^2}{36}$ के हर भाग से बड़ा है।

$\therefore$ दीर्घ अक्ष, X-अक्ष के अनुदिश है।

दी गई समीकरण की तुलना $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के साथ करने पर हम प्राप्त करते हैं

$$a^2 = 49, b^2 = 36$$

$\Rightarrow$ $a = 7, b = 6$

यहाँ, a तथा b लंबाइयाँ हैं, अतः हम केवल धनात्मक चिन्ह लेते हैं।

अब, $c^2 = a^2 - b^2 = 49 - 36 = 13$

$\Rightarrow$ $c = \sqrt{13}$

यहाँ, दीर्घ अक्ष, Y-अक्ष के अनुदिश है, अतः

$$\text{नाभियाँ} = (\pm c, 0) = (\pm \sqrt{13}, 0)$$

$$\text{शीर्ष} = (\pm a, 0) = (\pm 7, 0)$$

$$\text{दीर्घ अक्ष की लंबाई} = 2a = 2 \times 7 = 14$$

$$\text{लघु अक्ष की लंबाई} = 2b = 2 \times 6 = 12$$

$$\text{उत्केंद्रता}, e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{7}$$

$$\text{नाभिलंब जीवा की लंबाई} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 36}{7} = \frac{72}{7}$$

प्रश्न 6. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{400} = 1$

हल दी गई दीर्घवृत्त की समीकरण

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{400} = 1$$

$\because \frac{x^2}{100}$ का हर भाग, $\frac{y^2}{400}$ के हर भाग से छोटा है।

$\therefore$ दीर्घ अक्ष, Y-अक्ष के अनुदिश है।

eVidyarthi

दी गई समीकरण की तुलना $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ से करने पर हम पाते हैं

$$b^2 = 100 \quad \text{तथा} \quad a^2 = 400$$

$\Rightarrow$ $$b = 10 \quad \text{तथा} \quad a = 20$$

यहाँ, a तथा b लंबाइयाँ हैं, अतः हम केवल धनात्मक चिन्ह लेते हैं

अब, $$c^2 = a^2 - b^2 = 400 - 100 = 300$$

$\Rightarrow$ $$c = 10\sqrt{3}$$

यहाँ, दीर्घ अक्ष Y-अक्ष के अनुदिश है, अतः

$$\text{नाभियाँ} = (0, \pm c) = (0, \pm 10\sqrt{3})$$

$$\text{शीर्ष} = (0, \pm a) = (0, \pm 20)$$

$$\text{दीर्घ अक्ष की लंबाई} = 2a = 2 \times 20 = 40$$

$$\text{लघु अक्ष की लंबाई} = 2b = 2 \times 10 = 20$$

$$\text{उत्केंद्रता, } e = \frac{c}{a} = \frac{10\sqrt{3}}{20} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

~~नाभिलंब जीवा की लंबाई~~ $$= \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 100}{20} = 10$$

प्रश्न 7. $36x^2 + 4y^2 = 144$

हल दी गई दीर्घवृत्त की समीकरण

$$36x^2 + 4y^2 = 144$$

$\Rightarrow$ $$\frac{36x^2}{144} + \frac{4y^2}{144} = 1$$ (144 द्वारा भाग देने पर)

$\Rightarrow$ $$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{36} = 1$$

$\because$ $\frac{x^2}{4}$ का हर भाग, $\frac{y^2}{36}$ के हर भाग से छोटा है।

$\therefore$ दीर्घ अक्ष, Y-अक्ष के अनुदिश है।

दी गई समीकरण की तुलना $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ से करने पर हम प्राप्त करते हैं

$$b^2 = 4 \quad \text{तथा} \quad a^2 = 36$$

$\Rightarrow$ $$b = 2 \quad \text{तथा} \quad a = 6$$

यहाँ, a तथा b लंबाइयाँ हैं, अतः हम केवल धनात्मक चिन्ह लेते हैं

तथा $$c^2 = a^2 - b^2 = 36 - 4 = 32$$

$\Rightarrow$ $$c = 4\sqrt{2}$$

यहाँ, दीर्घ अक्ष, Y-अक्ष के अनुदिश है, अतः

$$\text{नाभियाँ} = (0, \pm c) = (0, \pm 4\sqrt{2})$$

$$\text{शीर्ष} = (0, \pm a) = (0, \pm 6)$$

$$\text{दीर्घ अक्ष की लंबाई} = 2a = 2 \times 6 = 12$$

$$\text{लघु अक्ष की लंबाई} = 2b = 2 \times 2 = 4$$

evidyarthi

$$\text{उत्केंद्रता}, e = \frac{c}{a} = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{नामिलंब जीवा की लंबाई} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 4}{6} = \frac{4}{3}$$

प्रश्न 8. $16x^2 + y^2 = 16$

हल दी गई दीर्घवृत्त की समीकरण

$$16x^2 + y^2 = 16$$

$$\Rightarrow \quad \frac{16x^2}{16} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad \text{(16 द्वारा भाग करने पर)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{16} = 1$$

$\because \frac{x^2}{1}$ का हर भाग, $\frac{y^2}{16}$ के हर भाग से छोटा है।

$\therefore$ दीर्घ अक्ष, Y-अक्ष के अनुदिश है

दी गई समीकरण की तुलना $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ से करने पर हम प्राप्त करते हैं

$$b^2 = 1 \text{ तथा } a^2 = 16$$

$$\Rightarrow \quad b = 1 \quad \text{तथा} \quad a = 4$$

यहाँ, a तथा b लंबाइयाँ हैं, अतः हम केवल घनात्मक चिन्ह लेते हैं

अब, $c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 1 = 15$

$$\Rightarrow \quad c = \sqrt{15}$$

यहाँ, दीर्घ अक्ष Y-अक्ष के अनुदिश है, अतः

$$\text{नाभियाँ} = (0, \pm c) = (0, \pm \sqrt{15})$$

$$\text{शीर्ष} = (0, \pm a) = (0, \pm 4)$$

$$\text{दीर्घ अक्ष की लंबाई} = 2a = 2 \times 4 = 8$$

$$\text{लघु अक्ष की लंबाई} = 2b = 2 \times 1 = 2$$

$$\text{उत्केंद्रता}, e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\text{नामिलंब जीवा की लंबाई} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 1}{4} = \frac{1}{2}$$

प्रश्न 9. $4x^2 + 9y^2 = 36$

हल दी गई दीर्घवृत्त की समीकरण

$$4x^2 + 9y^2 = 36$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4x^2}{36} + \frac{9y^2}{36} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad \text{(36 द्वारा भाग देने पर)}$$

$\because \frac{x^2}{9}$ कर हर भाग, $\frac{y^2}{4}$ के हर भाग से बड़ा है।

$\therefore$ दीर्घ अक्ष, X-अक्ष के अनुदिश है।

दी गई समीकरण की तुलना $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के साथ करने पर हम प्राप्त करते हैं

$$a^2 = 9 \quad \text{तथा} \quad b^2 = 4$$

$\Rightarrow$ $$a = 3 \quad \text{तथा} \quad b = 2$$

अब, $$c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5$$

$\Rightarrow$ $$c = \sqrt{5}$$

यहाँ, दीर्घ अक्ष, X-अक्ष के अनुदिश है, अतः

$$\text{नाभियाँ} = (\pm c, 0) = (\pm \sqrt{5}, 0)$$

$$\text{शीर्ष} = (\pm a, 0) = (\pm 3, 0)$$

$$\text{दीर्घ अक्ष की लंबाई} = 2a = 2 \times 3 = 6$$

$$\text{लघु अक्ष की लंबाई} = 2b = 2 \times 2 = 4$$

$$\text{उत्केंद्रता, } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{नाभिलंब जीवा की लंबाई} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 4}{3} = \frac{8}{3}$$

निर्देश (प्र. सं. 10 - 20) **निम्नलिखित प्रश्नों में दिए प्रतिबंधों को संतुष्ट करते हुए दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।**

प्रश्न 10. **शीर्षों** $(\pm 5, 0)$ **तथा नाभियाँ** $(\pm 4, 0)$

हल शीर्ष $(\pm 5, 0)$ तथा नाभियाँ $(\pm 4, 0)$ X-अक्ष पर स्थित हैं, चूँकि इनका y-निर्देशांक शून्य है। अतः दीर्घवृत्त की समीकरण निम्न रूप की होगी।

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \ldots(i)$$

जहाँ, $$a = 5 \text{ तथा } c = 4$$

अब, $$c^2 = a^2 - b^2$$

$\therefore$ $$(4)^2 = (5)^2 - b^2$$

$\Rightarrow$ $$16 = 25 - b^2$$

$\Rightarrow$ $$b^2 = 25 - 16 \Rightarrow b^2 = 9$$

$a^2 = 25$ तथा $b^2 = 9$ समी (i) में रखने पर हम प्राप्त करते हैं,

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

प्रश्न 11. **शीर्षों** $(0, \pm 13)$ **तथा नाभियाँ** $(0, \pm 5)$

हल शीर्ष $(0, \pm 13)$ तथा नाभियाँ $(0, \pm 5)$ Y-अक्ष पर स्थित होंगी, चूँकि इन दोनों के X-निर्देशांक शून्य हैं। अतः दीर्घवृत्त की समीकरण निम्न रूप की होगी।

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \qquad \ldots(i)$$

जहाँ, $a = 13$ तथा $c = 5$

eVidyarthi

$$\because \quad c^2 = a^2 - b^2$$
$$\Rightarrow \quad (5)^2 = (13)^2 - b^2$$
$$\Rightarrow \quad 25 = 169 - b^2$$
$$\Rightarrow \quad b^2 = 169 - 25$$
$$\Rightarrow \quad b^2 = 144$$

$a^2 = 169$ तथा $b^2 = 144$ समी (i) में रखने पर, हम प्राप्त करते हैं

$$\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{169} = 1$$

प्रश्न 12. **शीर्षों (± 6, 0) तथा नाभियाँ (± 4, 0)**

हल शीर्ष (± 6, 0) तथा नाभियाँ (±4, 0) X-अक्ष पर स्थित होंगे, चूँकि इन दोनों के y-निर्देशांक शून्य हैं। अतः दीर्घवृत्त की समीकरण निम्न रूप की होगी।

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots(i)$$

जहाँ, $a = 6$ तथा $c = 4$

$$\because \quad c^2 = a^2 - b^2$$
$$\Rightarrow \quad (4)^2 = (6)^2 - b^2$$
$$\Rightarrow \quad 16 = 36 - b^2$$
$$\Rightarrow \quad b^2 = 36 - 16 = 20$$

$a^2 = 36$ तथा $b^2 = 20$ समी (i) में रखने पर, हम प्राप्त करते हैं

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$$

प्रश्न 13. **दीर्घ अक्ष के अंत्य बिंदु (± 3, 0), लघु अक्ष के अंत्य बिंदु (0, ± 2)**

हल चूँकि दीर्घ अक्ष (± 3, 0) X-अक्ष के अनुदिश तथा लघु अक्ष (0, ± 2) Y-अक्ष के अनुदिश है। अतः दीर्घवृत्त की समीकरण होगी।

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots(i)$$

जहाँ, $a = 3$ तथा $b = 2$

अतः समी (i) से, $$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

या $$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

प्रश्न 14. **दीर्घ अक्ष के अंत्य बिंदु $(0, \pm\sqrt{15})$, लघु अक्ष के अंत्य बिंदु (± 1, 0)**

हल चूँकि दीर्घ अक्ष $(0, \pm\sqrt{5})$ Y-अक्ष के अनुदिश तथा लघु अक्ष (± 1, 0) X-के अनुदिश है। अतः दीर्घवृत्त की समीकरण निम्न रूप की होगी।

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \ldots(i)$$

जहाँ, $a = \sqrt{15}$ तथा $b = 1$

evidyarthi

अतः समी (i) से, $$\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{15})^2} = 1$$

या $$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{15} = 1$$

प्रश्न 15. दीर्घ अक्ष की लंबाई 26, नाभियाँ $(\pm 5, 0)$

हल नाभियाँ $(\pm 5, 0)$ X-अक्ष पर स्थित हैं, चूँकि इनका y-निर्देशांक शून्य है। अतः दीर्घवृत्त की समीकरण निम्न रूप की होगी।

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots(i)$$

दिया है कि, दीर्घ अक्ष की लंबाई, $2a = 26 \Rightarrow a = 13$ तथा $c = 5$

$\because$ $c^2 = a^2 - b^2$

$\Rightarrow$ $(5)^2 = (13)^2 - b^2$

$\Rightarrow$ $25 = 169 - b^2$

$\Rightarrow$ $b^2 = 169 - 25 = 144$

$a^2 = 169$ तथा $b^2 = 144$ समी (i) में रखने पर, हम प्राप्त करते हैं,

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$$

प्रश्न 16. लघु अक्ष की लंबाई 16, नाभियाँ $(0, \pm 6)$

हल नाभियाँ $(0, \pm 6)$ Y-अक्ष पर स्थित हैं, चूँकि इनका x-निर्देशांक शून्य है। अतः दीर्घवृत्त की समीकरण निम्न रूप की होगी।

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \ldots(i)$$

दिया है कि लघु अक्ष की लंबाई, $2b = 16$ तथा $c = 6$

$\Rightarrow$ $b = 8$ तथा $c = 6$

$\because$ $c^2 = a^2 - b^2$

$\Rightarrow$ $(6)^2 = a^2 - (8)^2$

$\Rightarrow$ $36 = a^2 - 64$

$\Rightarrow$ $a^2 = 36 + 64 = 100$

$a^2 = 89$ तथा $b^2 = 64$ समी (i) में रखने पर, हम प्राप्त करते हैं,

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$$

प्रश्न 17. नाभियाँ $(\pm 3, 0)$, $a = 4$

हल नाभियाँ $(\pm 3, 0)$ X-अक्ष पर स्थित होंगी, चूँकि इनका y-निर्देशांक शून्य है। अतः दीर्घवृत्त की समीकरण निम्न रूप की होगी।

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots(i)$$

evidyarthi

दिया है कि नाभियाँ $(\pm c, 0) = (\pm 3, 0)$

$$c = 3 \quad \text{तथा} \quad a = 4$$

$\because$ $$c^2 = a^2 - b^2$$

$\Rightarrow$ $$(3)^2 = (4)^2 - b^2$$

$\Rightarrow$ $$9 = 16 - b^2$$

$\Rightarrow$ $$b^2 = 16 - 9$$

$\Rightarrow$ $$b^2 = 7$$

$a^2 = 16$ तथा $b^2 = 7$ समी (i) में रखने पर, हम प्राप्त करते हैं,

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$$

प्रश्न 18. $b = 3, c = 4$, **केंद्र मूल बिंदु पर, नाभियाँ X-अक्ष पर।**

हल चूँकि नाभियाँ X-अक्ष पर स्थित हैं। अतः दीर्घवृत्त की समीकरण निम्न रूप की होगी।

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \ldots(i)$$

दिया है कि, $$b = 3, c = 4$$

$\because$ $$c^2 = a^2 - b^2$$

$\Rightarrow$ $$(4)^2 = a^2 - (3)^2$$

$\Rightarrow$ $$16 = a^2 - 9 \Rightarrow a^2 = 16 + 9$$

$\Rightarrow$ $$a^2 = 25$$

$a^2 = 25$ तथा $b^2 = 9$ समी (i) में रखने पर, हम प्राप्त करते हैं

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

प्रश्न 19. केंद्र (0, 0) पर दीर्घ अक्ष Y-अक्ष पर और बिंदुओं (3, 2) और (1, 6) से जाता है।

हल चूँकि दीर्घ अक्ष Y-अक्ष के अनुदिश है। अतः दीर्घवृत्त की समीकरण निम्न रूप की होगी।

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \qquad \ldots(i)$$

दिया है कि समी (i) बिंदुओं (3, 2) तथा (1, 6) से होकर जाती है अर्थात् ये बिंदु इसे संतुष्ट करेंगे।

$\therefore$ $$\frac{3^2}{b^2} + \frac{2^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{9}{b^2} + \frac{4}{a^2} = 1 \qquad \ldots(ii)$$

तथा $$\frac{1^2}{b^2} + \frac{6^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{b^2} + \frac{36}{a^2} = 1 \qquad \ldots(iii)$$

समी (ii) को 9 से गुणा करके, समी (iii) में से घटाने पर, हम प्राप्त करते हैं

$$\frac{80}{b^2} = 8 \Rightarrow b^2 = \frac{80}{8}$$

$\Rightarrow$ $$b^2 = 10$$

समी (ii) से, $$\frac{9}{10} + \frac{4}{a^2} = 1$$

evidyarthi

$\Rightarrow \quad \frac{4}{a^2} = 1 - \frac{9}{10} \Rightarrow \frac{4}{a^2} = \frac{1}{10} \Rightarrow a^2 = 40$

$a^2 = 40$ तथा $b^2 = 10$ समी (i) में रखने पर, हम पाते हैं

$$\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{40} = 1$$

प्रश्न 20. दीर्घ अक्ष, X-अक्ष पर और बिंदुओं (4, 3) और (6, 2) से जाता है।

हल चूँकि दीर्घ अक्ष, X-अक्ष के अनुदिश है। अतः दीर्घवृत्त की समीकरण निम्न रूप की होगी।

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{...(i)}$$

दिया है कि समी (i) बिंदुओं (4, 3) तथा (6, 2) से होकर जाती है अर्थात् ये समीकरण को संतुष्ट करेंगे।

$\therefore \quad \frac{(4)^2}{a^2} + \frac{(3)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{16}{a^2} + \frac{9}{b^2} = 1 \quad \text{...(ii)}$

तथा $\quad \frac{(6)^2}{a^2} + \frac{(2)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{36}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1 \quad \text{...(iii)}$

समी (ii) को 4 से तथा समी (iii) को 9 से गुणा करके घटाने पर, हम पाते हैं,

$$\frac{64}{a^2} - \frac{324}{a^2} = 4 - 9 \Rightarrow -\frac{260}{a^2} = -5$$

$\Rightarrow \quad a^2 = \frac{260}{5} \Rightarrow a^2 = 52$

समी (ii) से,

$$\frac{9}{b^2} = 1 - \frac{16}{52} \Rightarrow \frac{9}{b^2} = \frac{52 - 16}{52}$$

$\Rightarrow \quad \frac{9}{b^2} = \frac{36}{52} \Rightarrow b^2 = \frac{9 \times 52}{36} = 13$

$a^2 = 52$ तथा $b^2 = 13$ समी (i) में रखने पर, हम पाते हैं

$$\frac{x^2}{52} + \frac{y^2}{13} = 1$$

प्रश्नावली 11.4

निर्देश (प्र. सं. 1 - 6) निम्नलिखित प्रश्नों में अतिपरवलयों के शीर्षों, नाभियों के निर्देशांक, उत्केंद्रता और नाभिलंब जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 1. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

हल दी गई समीकरण $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ की $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ के साथ तुलना करने पर, हम प्राप्त करते हैं

$$a^2 = 16 \text{ तथा } b^2 = 9$$

eVidyarthi

$\Rightarrow$ $a = 4$ तथा $b = 3$

अब, $c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25$

$\Rightarrow$ $c = 5$ ($\because c$ धनात्मक जरूरी है)

यहाँ, अतिपरवलय की समीकरण में x^2 का गुणांक धनात्मक है, अतः अनुप्रस्थ अक्ष, X-अक्ष के अनुदिश होगा।

$$\text{नाभि} = (\pm c, 0) = (\pm 5, 0)$$

$$\text{शीर्ष} = (\pm a, 0) = (\pm 4, 0)$$

$$\text{उत्केंद्रता } e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$$

$$\text{नाभिलंब} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 9}{4} = \frac{9}{2}$$

प्रश्न 2. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{27} = 1$

हल दी गई समीकरण $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{27} = 1$ की $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ के साथ तुलना करने पर, हम प्राप्त करते हैं

$a^2 = 9$ तथा $b^2 = 27$

$\Rightarrow$ $a = 3$ तथा $b = 3\sqrt{3}$ ($\because a, b > 0$)

$\because$ $c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 27 = 36$

$\Rightarrow$ $c = 6$ ($\because c$ धनात्मक है)

यहाँ, अतिपरवलय की समीकरण में y^2 का गुणांक धनात्मक है, अतः अनुप्रस्थ अक्ष, Y-अक्ष के अनुदिश है।

$$\text{नाभि} = (0, \pm c) = (0, \pm 6)$$

$$\text{शीर्ष} = (0, \pm a) = (0, \pm 3)$$

$$\text{उत्केंद्रता, } e = \frac{c}{a} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\text{नाभिलंब} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 27}{3} = 18$$

> **नोट** *अतिपरवलय की समीकरण में, यदि x^2 का गुणांक धनात्मक है, तब इसका अनुप्रस्थ अक्ष X-अक्ष होता है तथा यदि y^2 का गुणांक धनात्मक है, तब इसका अनुप्रस्थ अक्ष Y-अक्ष होता है।*

प्रश्न 3. $9y^2 - 4x^2 = 36$

हल दिया है कि समीकरण $9y^2 - 4x^2 = 36$ को 36 से दोनों पक्षों में भाग करने पर, हम पाते हैं

$$\frac{9y^2}{36} - \frac{4x^2}{36} = \frac{36}{36}$$

$\Rightarrow$ $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$

अब, समीकरण $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$ की तुलना $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ के साथ करने, पर हम पाते हैं,

$$a^2 = 4 \text{ तथा } b^2 = 9$$

$\Rightarrow$ $$a = 2 \text{ तथा } b = 3$$

$\because$ $$c^2 = a^2 + b^2$$

$\Rightarrow$ $$c^2 = 4 + 9 = 13$$

$\Rightarrow$ $$c = \sqrt{13}$$ ($\because$ c धनात्मक है)

यहाँ, अतिपरवलय की समीकरण में y^2 का गुणांक धनात्मक है, अतः अनुप्रस्थ अक्ष Y-अक्ष के अनुदिश होगा।

$$\text{नाभि} = (0, \pm c) = (0, \pm \sqrt{13})$$

$$\text{शीर्ष} = (0, \pm a) = (0, \pm 2)$$

$$\text{उत्केंद्रता, } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$\text{नाभिलंब} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 9}{2} = 9$$

प्रश्न 4. $16x^2 - 9y^2 = 576$

हल दी गई समीकरण $16x^2 - 9y^2 = 576$, को 576 द्वारा भाग करने पर, हम पाते हैं

$$\frac{16x^2}{576} - \frac{9y^2}{576} = \frac{576}{576} \Rightarrow \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$$

अब, समीकरण $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$ की तुलना $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ के साथ करने पर, हम पाते हैं

$$a^2 = 36 \quad \text{तथा} \quad b^2 = 64$$

$\Rightarrow$ $$a = 6 \quad \text{तथा} \quad b = 8$$

$\because$ $$c^2 = a^2 + b^2 = 36 + 64 = 100$$

$\Rightarrow$ $$c = 10$$

यहाँ, अतिपरवलय की समीकरण में x^2 का गुणांक धनात्मक है, अतः अनुप्रस्थ अक्ष X-अक्ष के अनुदिश होगा।

$$\text{नाभि} = (\pm c, 0) = (\pm 10, 0)$$

$$\text{शीर्ष} = (\pm a, 0) = (\pm 6, 0)$$

$$\text{उत्केंद्रता, } e = \frac{c}{a} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$\text{नाभिलंब} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 64}{6} = \frac{64}{3}$$

प्रश्न 5. $5y^2 - 9x^2 = 36$

हल दी गई समीकरण $5y^2 - 9x^2 = 36$ को 36 के द्वारा भाग करने पर, हम पाते हैं

$$\frac{5y^2}{36} - \frac{9x^2}{36} = \frac{36}{36} \Rightarrow \frac{y^2}{\frac{36}{5}} - \frac{x^2}{4} = 1$$

eVidyarthi

समीकरण $\frac{y^2}{\frac{36}{5}} - \frac{x^2}{4} = 1$ की तुलना $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ के साथ करने पर,

$$a^2 = \frac{36}{5} \quad \text{तथा} \quad b^2 = 4$$

$\Rightarrow$ $$a = \frac{6}{\sqrt{5}} \quad \text{तथा} \quad b = 2$$

$\because$ $$c^2 = a^2 + b^2 = \frac{36}{5} + 4$$

$\Rightarrow$ $$c^2 = \frac{36+20}{5} = \frac{56}{5}$$

$\Rightarrow$ $$c = \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{5}}$$

यहाँ, अतिपरवलय की समीकरण में y^2 का गुणांक धनात्मक है, अतः अनुप्रस्थ अक्ष Y-अक्ष के अनुदिश होगा।

$$\text{नाभि} = (0, \pm c) = \left(0, \pm \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\text{शीर्ष} = (0, \pm a) = \left(0, \pm \frac{6}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\text{उत्केंद्रता}, e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{5}}}{\frac{6}{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{14}}{3}$$

$$\text{नाभिलंब} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 4}{\frac{6}{\sqrt{5}}} = \frac{8\sqrt{5}}{6} = \frac{4\sqrt{5}}{3}$$

प्रश्न 6. $49y^2 - 16x^2 = 784$

हल दी गई समीकरण $49y^2 - 16x^2 = 784$, को 784 द्वारा भाग देने पर, हम पाते हैं,

$$\frac{49y^2}{784} - \frac{16x^2}{784} = \frac{784}{784}$$

$\Rightarrow$ $$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{49} = 1$$

समीकरण $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{49} = 1$ की तुलना $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ के साथ करने पर,

$$a^2 = 16 \quad \text{तथा} \quad b^2 = 49$$

$\Rightarrow$ $$a = 4 \quad \text{तथा} \quad b = 7$$

$\because$ $$c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 49 = 65$$

$\Rightarrow$ $$c = \sqrt{65} \qquad (\because c > 0)$$

यहाँ, अतिपरवलय की समीकरण में y^2 का गुणांक धनात्मक है, अतः अनुप्रस्थ अक्ष Y-अक्ष के अनुदिश होगा।

$$\text{नाभि} = (0, \pm c) = (0, \pm \sqrt{65})$$

$$\text{शीर्ष} = (0, \pm a) = (0, \pm 4)$$

$$\text{उत्केंद्रता, } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{65}}{4}$$

$$\text{नाभिलंब} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 49}{4} = \frac{49}{2}$$

निर्देश (प्र. सं. 7 - 15) **निम्नलिखित प्रश्नों तक प्रत्येक में, दिए गए प्रतिबंधों को संतुष्ट करते हुए अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए।**

प्रश्न 7. शीर्ष $(\pm 2, 0)$, नाभियाँ $(\pm 3, 0)$

हल चूँकि शीर्ष $(\pm 2, 0)$ तथा नाभि $(\pm 3, 0)$ X-अक्ष पर स्थित है, जैसा कि इनका y-निर्देशांक शून्य है।

अतः अतिपरवलय की समीकरण निम्न रूप की होगी।

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots(i)$$

जहाँ, दिया है कि

$$a = 2 \quad \text{तथा} \quad c = 3$$

$\because$ $c^2 = a^2 + b^2$

$\Rightarrow$ $9 = 4 + b^2$

$\Rightarrow$ $b^2 = 5$

समी (i) में $a^2 = 4$ तथा $b^2 = 5$ के मान रखने पर, हम पाते हैं

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$$

प्रश्न 8. शीर्ष $(0, \pm 5)$, नाभियाँ $(0, \pm 8)$

हल चूँकि शीर्ष $(0, \pm 5)$ तथा नाभियाँ $(0, \pm 8)$ Y-अक्ष पर स्थित है, चूँकि इनका x-निर्देशांक शून्य है।

अतः अतिपरवलय की समीकरण निम्न रूप की होगी।

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad \ldots(i)$$

जहाँ, दिया है कि $(0, \pm a) = (0, \pm 5)$ तथा नाभियाँ $(0, \pm c) = (0, \pm 8)$

$$a = 5 \quad \text{तथा} \quad c = 8$$

$\because$ $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 64 = 25 + b^2$

$\Rightarrow$ $b^2 = 64 - 25$

$\Rightarrow$ $b^2 = 39$

$a^2 = 25$ तथा $b^2 = 39$ का मान समी (i) में रखने पर, हम पाते हैं

$$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{39} = 1$$

evidyarthi

प्रश्न 9. शीर्ष (0, ± 3) तथा नाभियाँ (0, ± 5)

हल चूँकि शीर्ष (0, ± 3) तथा नाभियाँ (0, ± 5) Y-अक्ष पर स्थित है, चूँकि इनका x-निर्देशांक शून्य है।

अतः अतिपरवलय की समीकरण निम्न रूप की होगी

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \qquad \ldots(i)$$

जहाँ, यह दिया है कि शीर्ष (0, ± 3) = (0, ± a) तथा नाभियाँ (0, ± 5) = (0, ± c)

$$a = 3 \quad \text{तथा} \quad c = 5$$

$\because$ $\qquad c^2 = a^2 + b^2$

$\Rightarrow$ $\qquad 25 = 9 + b^2 \Rightarrow b^2 = 16$

$a^2 = 9$ तथा $b^2 = 16$ समी (i) में रखने पर, हम पाते हैं

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$$

प्रश्न 10. नाभियाँ (±5, 0) तथा अनुप्रस्थ अक्ष की लंबाई 8 है।

हल चूँकि नाभियाँ (± 5, 0) X-अक्ष पर स्थित है, चूँकि इसका y-निर्देशांक शून्य है।

अतः अतिपरवलय की समीकरण निम्न रूप की होगी।

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \ldots(i)$$

जहाँ, यह दिया है कि नाभियाँ (± 5, 0) = (± c, 0) तथा अनुप्रस्थ अक्ष की लंबाई 2a = 8

$$c = 5 \quad \text{तथा} \quad 2a = 8 \Rightarrow a = 4$$

$\because$ $\qquad c^2 = a^2 + b^2$

$\Rightarrow$ $\qquad 25 = 16 + b^2 \qquad \Rightarrow b^2 = 9$

$a^2 = 16$ तथा $b^2 = 9$ समी (i) में रखने पर, हम पाते हैं

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

प्रश्न 11. नाभियाँ (0, ± 13), तथा संयुग्मी अक्ष की लंबाई 24 है।

हल चूँकि नाभियाँ (0, ± 13) Y-अक्ष पर स्थित है, चूँकि इसका X-निर्देशांक शून्य है।

अतः अतिपरवलय की समीकरण निम्न रूप की होगी।

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \qquad \ldots(i)$$

जहाँ, यह दिया है कि नाभियाँ (0, ± 13) = (0, ± c) तथा संयुग्मी अक्ष की लंबाई 2b = 24

$$c = 13 \quad \text{तथा} \quad b = 12$$

$\because$ $\qquad c^2 = a^2 + b^2$

$\therefore$ $\qquad 169 = a^2 + 144 \Rightarrow a^2 = 169 - 144 \Rightarrow a^2 = 25$

$a^2 = 25$ तथा $b^2 = 144$ समी (i) में रखने पर, हम पाते हैं

$$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{144} = 1$$

eVidyarthi

प्रश्न 12. नाभियाँ $(\pm 3\sqrt{5}, 0)$ नाभिलंब जीवा की लंबाई 8 है।

हल चूँकि नाभियाँ $(\pm 3\sqrt{5}, 0)$ X-अक्ष पर स्थित है, चूँकि इनका y-निर्देशांक शून्य है।
अत: अतिपरवलय की समीकरण निम्न रूप की होगी।

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \ldots(i)$$

जहाँ, यह दिया है कि नाभियाँ $(\pm 3\sqrt{5}, 0) = (\pm c, 0)$

$$c = 3\sqrt{5}$$

तथा नाभिलंब जीवा की लंबाई

$$\frac{2b^2}{a} = 8$$

$\Rightarrow \quad b^2 = 4a$

$\because \quad c^2 = a^2 + b^2$

$\therefore \quad (3\sqrt{5})^2 = a^2 + (4a)$

$\Rightarrow \quad 9 \times 5 = a^2 + 4a$

$\Rightarrow \quad a^2 + 4a - 45 = 0$

मध्य पद को विभक्त करने पर,

$\Rightarrow \quad a^2 + 9a - 5a - 45 = 0$

$\Rightarrow \quad a(a + 9) - 5(a + 9) = 0$

$\Rightarrow \quad (a - 5)(a + 9) = 0$

$\Rightarrow \quad a - 5 = 0, a + 9 = 0$

$\Rightarrow \quad a = 5, -9$

$\because$ a ऋणात्मक नहीं हो सकता है।

$\therefore \quad a = 5 \Rightarrow b^2 = 4 \times 5 = 20$

$a^2 = 25$ तथा $b^2 = 20$ समी (i) में रखने पर हम पाते हैं

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{20} = 1$$

प्रश्न 13. नाभियाँ $(\pm 4, 0)$, नाभिलंब जीवा की लंबाई 12 है।

हल चूँकि नाभियाँ $(\pm 4, 0)$ X-अक्ष पर स्थित है, चूँकि इनका y-निर्देशांक शून्य है।
अत: अतिपरवलय की समीकरण निम्न रूप की होगी।

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \ldots(i)$$

जहाँ, यह दिया है कि नाभियाँ $(\pm 4, 0) = (\pm c, 0)$ तथा नाभिलंब जीवा की लंबाई $\frac{2b^2}{a} = 12$

$\therefore \quad c = 4$ तथा $b^2 = 6a \qquad \ldots(ii)$

$\because \quad c^2 = a^2 + b^2$

$\Rightarrow \quad 16 = a^2 + 6a$

$\Rightarrow \quad a^2 + 6a - 16 = 0$

मध्य पद को विभक्त करने पर,

$$a^2 + 8a - 2a - 16 = 0$$

$\Rightarrow$ $$a(a + 8) - 2(a + 8) = 0$$

$\Rightarrow$ $$(a - 2)(a + 8) = 0$$

$\Rightarrow$ $$a - 2 = 0, a + 8 = 0 \Rightarrow a = 2, -8$$

$\because a$ ऋणात्मक नहीं हो सकता है।

$\therefore$ $$a = 2$$

$\Rightarrow$ $$b^2 = 6a = 6 \times 2 = 12$$

$a^2 = 4$ तथा $b^2 = 12$ समी (i) में रखने पर, हम पाते हैं

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

प्रश्न 14. शीर्ष ($\pm 7, 0$) तथा उत्केंद्रता $\frac{4}{3}$ है।

हल चूँकि शीर्ष ($\pm$ 7, 0) X-अक्ष पर स्थित है, चूँकि इनका y-निर्देशांक शून्य है।

अतः अतिपरवलय की समीकरण निम्न रूप की होगी।

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots(i)$$

जहाँ, यह दिया है कि शीर्ष ($\pm$ 7, 0) = ($\pm$ a, 0)

$$a = 7 \text{ तथा } e = \frac{4}{3}$$

$\because$ $$c = ae$$

$\Rightarrow$ $$c = 7 \times \frac{4}{3} = \frac{28}{3}$$

तथा $$c^2 = a^2 + b^2$$

$$\frac{784}{9} = 49 + b^2$$

$\Rightarrow$ $$b^2 = \frac{784}{9} - \frac{49}{1}$$

$\Rightarrow$ $$b^2 = \frac{784 - 441}{9}$$

$\Rightarrow$ $$b^2 = \frac{343}{9}$$

$a^2 = 49$ तथा $b^2 = \frac{343}{9}$ समी (i) में रखने पर, हम पाते हैं

$$\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{\frac{343}{9}} = 1$$

या $$\frac{x^2}{49} - \frac{9y^2}{343} = 1$$

eVidyarthi

प्रश्न 15. नाभियाँ $(0, \pm\sqrt{10})$ है तथा (2, 3) से होकर जाता है

हल चूँकि नाभियाँ $(0, \pm\sqrt{10})$ Y-अक्ष पर स्थित है, चूँकि इनका x-निर्देशांक शून्य है।
अत: अतिपरवलय की समीकरण निम्न रूप की होगी।

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad \ldots(i)$$

जहाँ, यह दिया है कि नाभियाँ $(0, \pm\sqrt{10}) = (0, \pm c) \Rightarrow c = \sqrt{10}$

तथा अतिपरवलय बिंदु (2, 3) से होकर गुजरता है अर्थात् बिंदु समी (i) को संतुष्ट करेगा।

$$\therefore \quad \frac{(3)^2}{a^2} - \frac{(2)^2}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{9}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1 \quad \ldots(ii)$$

$$\because \quad c = \sqrt{10}$$

$$\Rightarrow \quad c^2 = 10$$

$$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 = 10 \quad (\because c^2 = a^2 + b^2)$$

$$\Rightarrow \quad b^2 = 10 - a^2 \quad \ldots(iii)$$

समी (ii) से, $\frac{9}{a^2} - \frac{4}{10 - a^2} = 1$

$$\Rightarrow \quad \frac{90 - 9a^2 - 4a^2}{a^2(10 - a^2)} = 1$$

$$\Rightarrow \quad 90 - 13a^2 = 10a^2 - a^4$$

$$\Rightarrow \quad a^4 - 23a^2 + 90 = 0$$

$$\Rightarrow \quad a^4 - 18a^2 - 5a^2 + 90 = 0$$

$$\Rightarrow \quad a^2(a^2 - 18) - 5(a^2 - 18) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (a^2 - 5)(a^2 - 18) = 0$$

$$\Rightarrow \quad a^2 = 5 \text{ या } a^2 = 18$$

समी (iii) से, यदि $a^2 = 5$

$$\Rightarrow \quad b^2 = 10 - 5 = 5$$

यदि $\quad a^2 = 18$

$$\Rightarrow \quad b^2 = 10 - 18 = -8$$

जोकि संभव नहीं है।

अत: $\quad a^2 = b^2 = 5$

$a^2 = b^2 = 5$ समी (i) में रखने पर, हम पाते हैं

$$\Rightarrow \quad \frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{5} = 1$$

$$\Rightarrow \quad y^2 - x^2 = 5$$

विविध प्रश्नावली

प्रश्न 1. यदि एक परवलयाकार परावर्तक का व्यास 20 सेमी और गहराई 5 सेमी है। नाभि ज्ञात कीजिए।

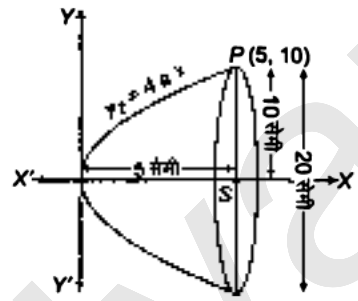
हल परवलयाकार परावर्तक के शीर्ष को मूलबिंदु पर तथा X-अक्ष को परवलय के अक्ष के अनुदिश लेते हैं। परवलय की समीकरण $y^2 = 4ax$ है। दी गई गहराई 5 सेमी तथा व्यास 20 सेमी है।

$\because$ बिंदु $P(5,10)$ परवलय पर स्थित है।

$\therefore \quad (10)^2 = 4a(5) \Rightarrow a = 5$

स्पष्ट है कि नाभि दिए गए व्यास के मध्य-बिंदु पर है।

अर्थात् $\quad S = (5, 0)$



प्रश्न 2. एक मेहराब परवलय के आकार का है और इसका अक्ष ऊर्ध्वाधर है। मेहराब 10 मी ऊँचा है और आधार 5 मी चौड़ा है। यह परवलय के 2 मी की दूरी पर शीर्ष से कितना चौड़ा होगा?

हल चूँकि अक्ष ऊर्ध्वाधर है, अतः माना मेहराब परवलय के रूप का है।

$$x^2 = 4ay \quad \ldots(i)$$

दिया है, $\quad OB = 10$ मी

तथा $\quad AC = 5$ मी $\Rightarrow \quad AB = \frac{5}{2}$ मी $\quad (\because AC = 5)$

अतः $A = \left(\frac{5}{2}, 10\right)$ के निर्देशांक समी (i) को संतुष्ट करेंगे।

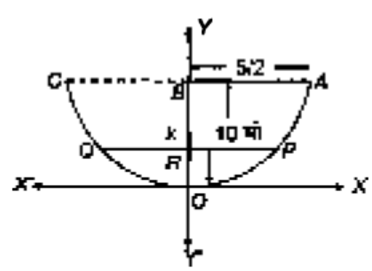
अर्थात् $\quad \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 4a \times 10$

$\Rightarrow \quad \frac{25}{4} = 40a$

$\Rightarrow \quad a = \frac{5}{32}$

समी (i) से, $\quad x^2 = 4 \times \frac{5}{32} y$

$\Rightarrow \quad x^2 = \frac{5}{8} y$



eVidyarthi

अब, माना $OR = 2$ तथा $PQ = k \Rightarrow RP = \frac{k}{2}$

इस प्रकार, $P = \left(\frac{k}{2}, 2\right)$ परवलय स्थित होंगे।

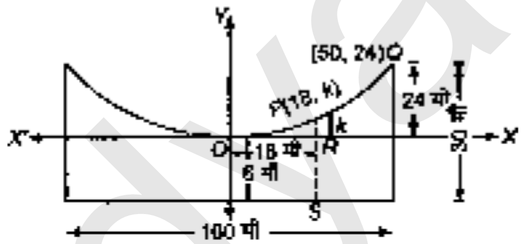
$\therefore \quad \left(\frac{k}{2}\right)^2 = \frac{5}{8} \times 2 \qquad \left(\because x^2 = \frac{5}{8}y\right)$

$\Rightarrow \quad \frac{k^2}{4} = \frac{5}{4}$

$\Rightarrow \quad k = \sqrt{5} = 2.23$ मी (लगभग)

प्रश्न 3. एक सर्वसम भारी झूलते पुल की केबिल (cable) परवलय के रूप में लटकी हुई है। सड़क पथ जो क्षैतिज है 100 मी लंबा है तथा केबिल से जुड़े ऊर्ध्वाधर तारों पर टिका हुआ है, जिसमें सबसे लंबा तार 30 मी और सबसे छोटा तार 6 मी है। मध्य से 18 मीटर दूर सड़क पथ से जुड़े समर्थक (supporting) तार की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल चूँकि तार ऊर्ध्वाधर है, माना परवलय की समीकरण निम्नलिखित रूप में है।



$$x^2 = 4ay \qquad \ldots(i)$$

नाभि केबिल के मध्य में है तथा सबसे छोटे और सबसे लंबे उर्ध्वाघर समर्थक क्रमशः 6 मी तथा 30 मी के हैं, तथा सड़क पथ 100 मी लंबा हैं

स्पष्ट है कि, $Q(50, 24)$ के निर्देशांक समी (i) को संतुष्ट करेंगे।

$(50)^2 = 4a \times 24$

$\Rightarrow \quad 2500 = 96a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2500}{96}$

अतः समी (i) से, $x^2 = 4 \times \frac{2500}{96} y$

$\Rightarrow \quad x^2 = \frac{2500}{24} y$

माना $\quad PR = k$ मी

$\therefore$ बिंदु $P(18, k)$ परवलय की समीकरण को संतुष्ट करेंगे अर्थात्

समी (i) से, $\quad (18)^2 = \frac{2500}{24} \times k$

$\Rightarrow \quad 324 = \frac{2500}{24} k$

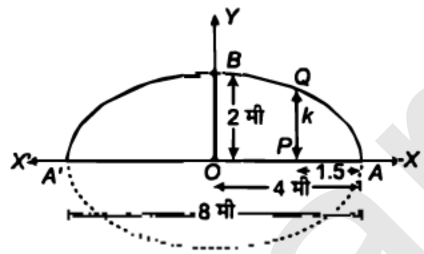
$\Rightarrow$ $$k = \frac{324 \times 24}{2500} = \frac{324 \times 6}{625} = \frac{1944}{625}$$

$$k = 3.11$$

$\therefore$ आवश्यक लंबाई $= 6 + k = 6 + 3.11 = 9.11$ मी (लगभग)

प्रश्न 4. **एक मेहराब अर्ध-दीर्घवृत्ताकार रूप का है। यह 8 मी चौड़ा और केंद्र से 2 मी ऊँचा है। एक सिरे से 1.5 मी दूर बिंदु पर मेहराब की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।**

हल



स्पष्ट है कि दीर्घवृत्त की समीकरण निम्न रूप लेती है।

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \ldots(i)$$

यहाँ, यह दिया है कि $2a = 8$ तथा $b = 2 \Rightarrow a = 4, \; b = 2$

a तथा b के मानों को समी (i) में रखने पर, हम प्राप्त करते हैं

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

दिया है, $AP = 1.5$ मी

$\Rightarrow$ $OP = OA - AP = 4 - 1.5$

$\Rightarrow$ $OP = 2.5$ मी

माना $PQ = k$

$\therefore$ Q के निर्देशांक $(2.5, k)$ दीर्घवृत्त की समीकरण को संतुष्ट करेंगे।

अर्थात् $$\frac{(2.5)^2}{16} + \frac{k^2}{4} = 1$$

$\Rightarrow$ $$\frac{6.25}{16} + \frac{k^2}{4} = 1$$

$\Rightarrow$ $$\frac{k^2}{4} = \frac{1}{1} - \frac{625}{16} = \frac{16 - 625}{16}$$

$\Rightarrow$ $$\frac{k^2}{4} = \frac{9.75}{16}$$

$\Rightarrow$ $$k^2 = \frac{9.75}{4}$$

$\Rightarrow$ $$k^2 = 2.4375$$

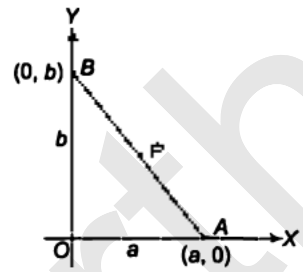
$\Rightarrow$ $$k = 1.56 \text{ मी (लगभग)}$$

eVidyarthi

प्रश्न 5. एक 12 सेमी लंबी छड़ इस प्रकार चलती है कि इसके सिरे निर्देशांक्षों को स्पर्श करते हैं। छड़ के बिंदु P का बिंदुपथ ज्ञात कीजिए जो x-अक्ष के संपर्क वाले सिरे से 3 सेमी दूर है।

हल माना AB, 12 सेमी लंबाई की छड़ है।

माना $OA = a$ तथा $OB = b$



ΔOAB में पाइथागोरस प्रमेय का प्रयोग करने पर,

$$(\text{आधार})^2 + (\text{लंब})^2 = (\text{कर्ण})^2$$

$$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 = (12)^2$$

$$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 = 144 \qquad \ldots(i)$$

माना $AP = 3$ सेमी $\Rightarrow PB = AB - AP = 12 - 3 = 9$ सेमी

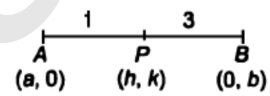
$$\Rightarrow \quad AP : PB = 3 : 9 = 1 : 3$$

माना $P = (h, k)$ जिसके लिए बिंदुपथ ज्ञात करना है।

$\therefore$ यदि बिंदु $P(h, k)$ बिंदुओं A तथा B कों मिलाने वाले रेखाखंड को अनुपात $m : n$ में अंतः विभाजित करते हैं, तब

$$h = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}, \; k = \frac{my_2 + ny_1}{m + n}$$

$$\therefore \quad h = \frac{1 \times 0 + 3 \times a}{1 + 3}$$



$$h = \frac{3a}{4}$$

$$a = \frac{4h}{3}$$

तथा

$$k = \frac{1 \times b + 3 \times 0}{1 + 3}$$

$$k = \frac{b}{4} \quad \Rightarrow \quad b = 4k$$

समी (i) में $a = \dfrac{4h}{3}$ तथा $b = 4k$ के मानों को रखने पर, हम प्राप्त करते हैं

$$\left(\frac{4h}{3}\right)^2 + (4k)^2 = 144$$

$$\Rightarrow \quad \frac{16h^2}{9} + 16k^2 = 144$$

$$\Rightarrow \quad \frac{h^2}{9} + k^2 = 9$$

$$\Rightarrow \quad \frac{h^2}{81} + \frac{k^2}{9} = 1$$

अतः बिंदु $P(h, k)$ का बिंदुपथ है

$$\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{9} = 1$$

eVidyarthi

नोट *किसी बिंदु (h, k) के लिए बिंदुपथ में, दिए गए प्रतिबंध की सहायता से हम एक संबंध बनाते हैं तथा अंतिम में h को x से तथा k को y से बदल देते हैं, इस प्रकार हमें आवश्यक परिणाम प्राप्त हो जाता है।*

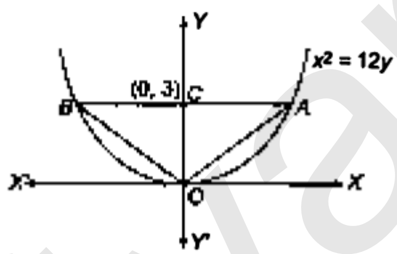
प्रश्न 6. त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जो परवलय $x^2 = 12y$ के शीर्ष को इसकी नाभिलंब जीवा के सिरों को मिलाने वाली रेखाओं से बना है।

हल स्पष्ट है कि नाभिलंब एक रेखा है जो अक्ष पर लंब है तथा नाभि से होकर जाती है, जिसकी लंबाई $4a$ है।

दिया है कि $x^2 = 12y$, जो $x^2 = 4ay$ के रूप का है।

$\Rightarrow 4a = 12 = ACB$ की लंबाई

$\therefore$ नाभि $C = (0, 3)$



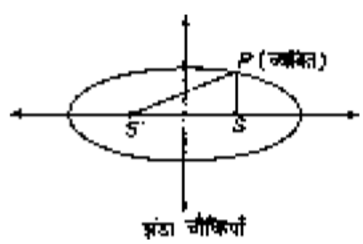
$$\Delta OAB \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times AB \times OC$$
$$= \frac{1}{2} \times 12 \times 3$$
$$= 6 \times 3$$
$$= 18 \text{ वर्ग इकाई}$$

प्रश्न 7. एक व्यक्ति दौड़पथ पर दौड़ते हुए अंकित करता है कि उससे दो झंडा चौकियों की दूरियों का योग सदैव 10 मी रहता है। और झंडा चौकियों के बीच की दूरी 8 मी है। व्यक्ति द्वारा बनाए पथ का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल स्पष्ट है कि व्यक्ति दौड़पथ पर दौड़ते हुए दीर्घवृत्त निरूपित करेगा।

दिया है, $SP + S'P = 10$

अर्थात् $2a = 10 \Rightarrow a = 5$



evidyarthi

चूँकि S तथा S' के निर्देशांक $(c, 0)$ तथा $(-c, 0)$ हैं। इस प्रकार, S तथा S' के बीच की दूरी है

$$2c = 8$$

$\Rightarrow$ $$c = 4$$

$\because$ $$c^2 = a^2 - b^2$$

$\Rightarrow$ $$16 = 25 - b^2$$

$\Rightarrow$ $$b^2 = 25 - 16$$

$\Rightarrow$ $$b^2 = 9$$

$\Rightarrow$ $$b = 3$$

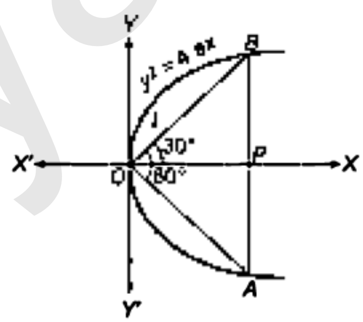
अतः पथ (दीर्घवृत्त) की समीकरण है

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$\Rightarrow$ $$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad (\because a = 5, b = 3)$$

प्रश्न 8. **परवलय $y^2 = 4ax$, के अंतर्गत एक समबाहु त्रिभुज है जिसका एक शीर्ष परवलय का शीर्ष है। त्रिभुज की भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए।**

हल सर्वप्रथम हम X-अक्ष की धन दिशा में एक परवलय खींचते हैं तथा इसके भीतर एक समबाहु ΔOAB बनाते हैं।



माना $OB = l = OA = AB$

$\therefore$ $\angle BOA = 60° \Rightarrow \angle BOP = 30°$

ΔBOP में, $\sin 30° = \dfrac{PB}{OB}$

$\Rightarrow$ $$\frac{1}{2} = \frac{PB}{l} \Rightarrow PB = \frac{l}{2}$$

तथा $\cos 30° = \dfrac{OP}{OB} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{OP}{l}$

$\Rightarrow$ $$OP = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore$ B के निर्देशांक $= (OP, PB) = \left(\dfrac{l\sqrt{3}}{2}, \dfrac{l}{2}\right)$, $y^2 = 4ax$ को संतुष्ट करेंगे अर्थात्

$$\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{4a \times l\sqrt{3}}{2}$$

$\Rightarrow$ $$\frac{l^2}{4} = \frac{4al\sqrt{3}}{2}$$

$\Rightarrow$ $$l = 8\sqrt{3}a$$

अतः त्रिभुज की भुजा की लंबाई $8\sqrt{3}a$ है।

evidyarthi