

# 13

## अध्याय

# सीमा और अवकलज

## Limits and Derivatives

### प्रश्नावली 13.1

निर्देश (प्र. सं. 1 - 22) निम्नलिखित सीमाओं के मान ज्ञात कीजिए।

(प्र. सं. 1-5) हम दिए हुए फलन में सीमा प्रत्यक्ष रूप में रखेंगे।

प्रश्न 1.  $\lim_{x \rightarrow 3} x + 3$

हल  $\lim_{x \rightarrow 3} x + 3 = 3 + 3 = 6$

प्रश्न 2.  $\lim_{x \rightarrow \pi} \left( x - \frac{22}{7} \right)$

हल  $\lim_{x \rightarrow \pi} \left( x - \frac{22}{7} \right) = \pi - \frac{22}{7}$

प्रश्न 3.  $\lim_{r \rightarrow 1} \pi r^2$

हल  $\lim_{r \rightarrow 1} \pi r^2 = \pi \times (1)^2 = \pi$

प्रश्न 4.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4x + 3}{x - 2}$

हल  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4x + 3}{x - 2} = \frac{4 \times 4 + 3}{4 - 2} = \frac{19}{2}$

प्रश्न 5.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^{10} + x^5 + 1}{x - 1}$

हल  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^{10} + x^5 + 1}{x - 1} = \frac{(-1)^{10} + (-1)^5 + 1}{-1 - 1} = \frac{1 - 1 + 1}{-2} = -\frac{1}{2}$

प्रश्न 6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + 1)^5 - 1}{x}$

यहाँ हम दिए हुए फलन में प्रत्यक्ष रूप से सीमा नहीं रख सकते क्योंकि यह  $\left(\frac{0}{0}\right)$  रूप देता

है। अतः यहाँ सूत्र  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$  का प्रयोग करेंगे।

हल  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + 1)^5 - 1}{x}$   $\left(\frac{0}{0}\right)$  रूप

माना  $x + 1 = h$

जब  $x \rightarrow 0$ , तब  $h \rightarrow 1$

$\therefore \lim_{h \rightarrow 1} \frac{h^5 - 1}{h - 1} = \lim_{h \rightarrow 1} \frac{h^5 - 1^5}{h - 1} = \lim_{h \rightarrow 1} 5(h)^{5-1} = 5 \times 1^4 = 5$

नोट: विद्यार्थियों को सीमा को परिवर्तित करना नहीं भूलना चाहिए।

प्रश्न 7.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - x - 10}{x^2 - 4}$

प्रत्यक्ष रूप से  $x = 2$  का मान नहीं रखा जा सकता है क्योंकि यह  $\left(\frac{0}{0}\right)$  रूप देता है। अतः

पहले अंश तथा हर के गुणखंड करते हैं और उभयनिष्ठ गुणखंड को काट देते हैं तथा जब अनिर्धार्य रूप अर्थात्  $\left(\frac{0}{0}\right)$  रूप हट जाए, तब  $x$  का मान रखते हैं।

हल  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - x - 10}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - (6 - 5)x - 10}{(x - 2)(x + 2)}$   $\left(\frac{0}{0}\right)$  रूप

$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 6x + 5x - 10}{(x - 2)(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x(x - 2) + 5(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)}$

$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(3x + 5)}{(x - 2)(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x + 5}{x + 2} = \frac{3 \times 2 + 5}{2 + 2} = \frac{6 + 5}{4} = \frac{11}{4}$

नोट सीमा में उभयनिष्ठ गुणनखंड को निरस्त करेंगे। किंतु फलन में आप प्रत्यक्ष रूप से उभयनिष्ठ गुणनखंड को निरस्त नहीं कर सकते जब तक यह फलन अनिर्धार्य रूप अर्थात्  $\left(\frac{0}{0}\right)$  रूप का हो।

प्रश्न 8.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 81}{2x^2 - 5x - 3}$

इसके लिए पहले अंश तथा हर का गुणनखंड कर उभयनिष्ठ गुणनखंड को काट देते हैं तथा जब अनिर्धार्य रूप अर्थात्  $\frac{0}{0}$  रूप हट जाए, तो  $x$  का मान रखते हैं।

हल  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 81}{2x^2 - 5x - 3}$   $\left(\frac{0}{0}\right)$  रूप

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 9)(x^2 + 9)}{2x^2 - 6x + x - 3} \quad [\because a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)}{2x(x - 3) + 1(x - 3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)}{(x - 3)(2x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x + 3)(x^2 + 9)}{2x + 1}$$

$$= \frac{(3 + 3)(3^2 + 9)}{2 \times 3 + 1} = \frac{6 \times 18}{7} = \frac{108}{7}$$

प्रश्न 9.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax + b}{cx + 1}$

हल  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax + b}{cx + 1} = \frac{a \times 0 + b}{c \times 0 + 1} = \frac{b}{1} = b$

प्रश्न 10.  $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^{1/3} - 1}{z^{1/6} - 1}$

इसे सूत्र  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = n a^{n-1}$  का प्रयोग करके हल किया जा सकता है।

हल  $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^{1/3} - 1}{z^{1/6} - 1} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^{1/3} - 1}{z - 1} \times \frac{z - 1}{z^{1/6} - 1} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)(1)^{\frac{1}{3}-1}}{\left(\frac{1}{6}\right)(1)^{\frac{1}{6}-1}} = \frac{6}{3} \times 1 = 2$

प्रश्न 11.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 + bx + c}{cx^2 + bx + a}$ ,  $a + b + c \neq 0$

हल  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 + bx + c}{cx^2 + bx + a} = \frac{a \times (1)^2 + b \times 1 + c}{c \times (1)^2 + b \times 1 + a} = \frac{a + b + c}{c + b + a} = 1$

नोट यदि  $a + b + c = 0$  तब दी हुई सीमा  $\left(\frac{0}{0}\right)$  रूप की है जो ज्ञात नहीं किया जा सकती।

प्रश्न 12.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{2}}{x + 2}$

हल  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{2}}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(2+x)}{2x(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{2x} = \frac{1}{2(-2)} = -\frac{1}{4}$

प्रश्न 13.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx}$

(प्र. सं. 13-15) यहाँ हम दी गई सीमा को मानक रूप में बदलेंगे तथा परिणाम  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$  या  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$  का प्रयोग करेंगे।

हल  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a) \sin ax}{b(ax)} \quad (\text{अंश तथा हर को } a \text{ से गुणा करने पर})$   
 $= \frac{a}{b} \times 1 = \frac{a}{b} \quad \left(\because \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1\right)$

प्रश्न 14.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$

हल  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$

अंश तथा हर को  $(ax)(bx)$  से गुणा करने पर,

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} \times \frac{bx}{\sin bx} \times \frac{ax}{bx} = 1 \times 1 \times \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \quad \left(\because \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx}{\sin bx} = 1\right)$

प्रश्न 15.  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(\pi - x)}{\pi(\pi - x)}$

हल  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(\pi - x)}{\pi(\pi - x)}$

माना  $\pi - x = h$ , जब  $x \rightarrow \pi$ , तब  $h \rightarrow 0$

$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{\pi h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \times \frac{\sin h}{h} = \frac{1}{\pi} \times 1 = \frac{1}{\pi} \quad \left(\because \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1\right)$

प्रश्न 16.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\pi - x}$

हल  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\pi - x} = \frac{\cos 0}{\pi - 0} = \frac{1}{\pi} \quad (\because \cos 0 = 1)$

प्रश्न 17.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{\cos x - 1}$

सीमा रखने पर यह फलन अनिर्धार्य रूप धारण करता है, ऐसे फलन को हल करने के लिए सर्वप्रथम सूत्र  $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$  का प्रयोग कर सरल करते हैं और सीमा रखते हैं।

$$\text{हल } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{\cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{2 \sin^2 \frac{x}{2}}$$

$$\left( \because 1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x \text{ तथा } 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \right)$$

अंश तथा हर को  $x^2$  से गुणा करने पर और बाद में अंश को  $\frac{4}{4}$  से गुणा करने पर

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \times \frac{4 \times \frac{x^2}{4}}{\sin^2 \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 \times \left( \frac{\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2 \times 4 = 1 \times 1 \times 4 = 4$$

**प्रश्न 18.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax + x \cos x}{b \sin x}$

**हल**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax + x \cos x}{b \sin x}$

प्रत्येक पद को  $x$  से भाग करने पर,

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{ax}{x} + \frac{x \cos x}{x}}{\frac{b \sin x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a + \cos x}{b \left( \frac{\sin x}{x} \right)}$$

$$= \frac{a + \cos 0}{b \times 1} = \frac{a + 1}{b} \quad \left( \because \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \right)$$

नोट कई बार जब हम सीमा रखते हैं तो, हमें अनिर्धार्य रूप  $\left( \frac{0}{0} \right)$  प्राप्त होता है। ऐसे फलन को सर्वप्रथम विस्तार कर या सूत्र को प्रयोग कर फलन के अनिर्धार्य रूप  $\left( \frac{0}{0} \right)$  को हटाते हैं।

**प्रश्न 19.**  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sec x$

**हल**  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sec x = 0 \times \sec 0 = 0 \times 1 = 0$

**प्रश्न 20.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax + bx}{ax + \sin bx}$ ,  $a, b$  तथा  $a + b \neq 0$

**हल**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax + bx}{ax + \sin bx}$

प्रत्येक पद को  $x$  से भाग करने पर,

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin ax}{x} + \frac{bx}{x}}{\frac{ax}{x} + \frac{\sin bx}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{a \sin ax}{ax} + b}{a + \frac{b \sin bx}{bx}}$$

$$= \frac{a \times 1 + b}{a + b} = \frac{a + b}{a + b} = 1 \quad \left( \because \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \right)$$

**प्रश्न 21.**  $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{cosec} x - \cot x)$

प्रत्यक्ष रूप से सीमा रखने पर यदि फलन परिभाषित नहीं होता है, तब इस प्रकार के प्रश्न को हल करने के लिए हम सूत्र  $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$  तथा  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$  का प्रयोग कर इसे सरल करते हैं और फिर सीमा रखने पर हम अभीष्ट परिणाम पाते हैं।

$$\begin{aligned} \text{हल} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{cosec} x - \cot x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \tan \frac{x}{2} = \tan 0 = 0 \end{aligned}$$

**प्रश्न 22.**  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan 2x}{x - \frac{\pi}{2}}$

हल दिया है,  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan 2x}{x - \frac{\pi}{2}}$

माना  $x - \frac{\pi}{2} = h$

जब  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ , तब  $h \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \therefore \text{दी गई सीमा} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan 2\left(\frac{\pi}{2} + h\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan(\pi + 2h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan 2h}{h} \quad (\because \tan(\pi + \theta) = \tan \theta) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \tan 2h}{2h} = 2 \times 1 = 2 \quad \left( \because \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \right) \end{aligned}$$

नोट विद्यार्थी जब चर में परिवर्तन करते हैं, तो उन्हें सीमा में परिवर्तन करना नहीं भूलना चाहिए।

**प्रश्न 23.**  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  और  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  ज्ञात कीजिए, जहाँ  $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x \leq 0 \\ 3(x + 1), & x > 0 \end{cases}$

(प्र. सं. 23 - 28) चूँकि फलन वर्गीकृत रूप में दिया हुआ है। अतः हम सीमा की अस्तित्व जाँच करने के लिए दाएँ पक्ष की सीमा तथा बाएँ पक्ष की सीमा  $x$  के विशेष मान के लिए निकालेंगे।

हल दिया है,  $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x \leq 0 \\ 3(x + 1), & x > 0 \end{cases}$

$x = 0$  पर,  $f(0) = 3$

दाएँ पक्ष की सीमा (RHL)  $= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(0 + h)$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 3(0 + h + 1) = 3(0 + 0 + 1) = 3 \times 1 = 3$$

$$\text{बाएँ पक्ष की सीमा (LHL)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(0 - h)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 2(0 - h) + 3 = 2(0 - 0) + 3 = 3$$

⇒ दाएँ पक्ष की सीमा = बाएँ पक्ष की सीमा =  $f(0)$

यहाँ,  $x = 0$  पर सीमा का अस्तित्व है।

$$\text{बिंदु } x = 1, \text{ पर दाएँ पक्ष की सीमा} = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(1 + h)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 3(1 + h + 1) \quad (x = 1 + h \text{ रखने पर})$$

$$= 3(1 + 0 + 1) = 6$$

$$\text{बाएँ पक्ष की सीमा} = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(1 - h) \quad (x = 1 - h \text{ रखने पर})$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 3(1 - h + 1) = 3(1 - 0 + 1) = 6$$

$$\text{तथा} \quad f(1) = 3(1 + 1) = 6$$

अतः दाएँ पक्ष की सीमा = बाएँ पक्ष की सीमा

∴ सीमा का अस्तित्व है।

**प्रश्न 24.**  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  ज्ञात कीजिए, जहाँ  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 1 \\ -x^2 - 1, & x > 1 \end{cases}$

$$\text{हल दिया है, } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 1 \\ -x^2 - 1, & x > 1 \end{cases}$$

$x = 1$ , पर

$$\text{दाएँ पक्ष की सीमा} = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(1 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} -(1 + h)^2 - 1$$

( $x = 1 + h$  रखने पर)

$$= -(1 + 0)^2 - 1 = -1 - 1 = -2$$

$$\text{बाएँ पक्ष की सीमा} = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(1 - h)$$

( $x = 1 - h$  रखने पर)

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (1 - h)^2 - 1 = (1 - 0)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$$

⇒ दाएँ पक्ष की सीमा  $\neq$  बाएँ पक्ष की सीमा

अतः, बिंदु  $x = 1$  पर सीमा का अस्तित्व नहीं है।

**प्रश्न 25.**  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ  $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$$\text{यहाँ हम निरपेक्ष फलन } x \text{ की परिभाषा का प्रयोग करेंगे अर्थात् } |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

हल दिया है,  $f(x) = \begin{cases} |x|, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

बिंदु  $x = 0$  पर,

$$\text{दाएँ पक्ष की सीमा} = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(0+h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|0+h|}{(0+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(0+h)}{(0+h)} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{बाएँ पक्ष की सीमा} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(0-h) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|0-h|}{0-h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(0-h)}{(0-h)} = -1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  दाएँ पक्ष की सीमा  $\neq$  बाएँ पक्ष की सीमा

अतः बिंदु  $x = 0$  पर सीमा का अस्तित्व नहीं है।

नोट हमें सीमा का मान ध्यानपूर्वक रखना चाहिए, कभी-कभी LHL  $\neq$  RHL अतः LHL तथा RHL दोनों का मान ज्ञात करना चाहिए।

प्रश्न 26.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ , जहाँ  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

हल दिया है,  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$$x = 0 \text{ पर, RHL} = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(0+h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0+h}{|0+h|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0+h}{(0+h)} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{LHL} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(0-h) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(0-h)}{|0-h|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(0-h)}{-(0-h)} = -1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  दाएँ पक्ष की सीमा  $\neq$  बाएँ पक्ष की सीमा

अतः बिंदु  $x = 0$  पर सीमा का अस्तित्व नहीं है।

प्रश्न 27.  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$  ज्ञात कीजिए जहाँ  $f(x) = |x| - 5$

हल दिया है,  $f(x) = |x| - 5$

हम जानते हैं कि,  $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} |x| - 5 = x - 5 = 5 - 5 = 0 \quad (\because x \rightarrow 5 \text{ पर } |x| = x)$$

प्रश्न 28. मान लीजिए  $f(x) = \begin{cases} a + bx, & x < 1 \\ 4, & x = 1 \\ b - ax, & x > 1 \end{cases}$  और यदि  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ , तो  $a$  और  $b$  के

सम्भव मान क्या हैं?



हल दिया है,  $f(x) = \begin{cases} a + bx, & x < 1 \\ 4, & x = 1 \\ b - ax, & x > 1 \end{cases}$

$x = 1$  पर,  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$  (दिया है)

अर्थात् दाएँ पक्ष की सीमा = बाएँ पक्ष की सीमा =  $f(1)$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 4$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(1+h) = \lim_{h \rightarrow 0} f(1-h) = 4$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} b - a(1+h) = \lim_{h \rightarrow 0} a + b(1-h) = 4$$

$$\Rightarrow b - a(1+0) = a + b(1-0) = 4$$

$$\Rightarrow b - a = a + b = 4$$

$$\Rightarrow b - a = 4 \text{ तथा } b + a = 4$$

हल करने पर  $b = 4$  तथा  $a = 0$

**प्रश्न 29.** माना  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  अचर वास्तविक संख्याएँ हैं और एक फलन  $f(x)$  निम्न प्रकार परिभाषित है

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  क्या है?  $a \neq a_1, a_2, \dots, a_n$  के लिए  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  का परिकलन कीजिए।

हल दिया है,  $f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) \\ &= (a - a_1)(a - a_2) \dots (a - a_n) \\ &= 0 \times (a - a_2) \dots (a - a_n) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{पुनः} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) \\ &= (a - a_1)(a - a_2) \dots (a - a_n) \end{aligned}$$

**प्रश्न 30.** यदि  $f(x) = \begin{cases} |x| + 1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ |x| - 1, & x > 0 \end{cases}$  तो  $a$  के किन मानों के लिए  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  का अस्तित्व है?

अस्तित्व है?

$$\text{हल दिया है, } f(x) = \begin{cases} |x| + 1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ |x| - 1, & x > 0 \end{cases}$$

बिंदु  $x = 0$  पर,

$$\begin{aligned} \text{दाएँ पक्ष की सीमा} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(0+h) = \lim_{h \rightarrow 0} |0+h| - 1 \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} h - 1 = 0 - 1 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{बाएँ पक्ष की सीमा} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f|0-h| = \lim_{h \rightarrow 0} |0-h| + 1 \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} -(0-h) + 1 = \lim_{h \rightarrow 0} h + 1 = 0 + 1 = 1\end{aligned}$$

⇒ दाएँ पक्ष की सीमा ≠ बाएँ पक्ष की सीमा

∴ बिंदु  $x = 0$ , पर, सीमा का अस्तित्व नहीं है।

अतः  $a \neq 0$  के सभी मानों के लिए  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  का अस्तित्व है।

**प्रश्न 31.** यदि फलन  $f(x) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x^2 - 1} = \pi$ , को संतुष्ट करता है, तो  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  का मान

ज्ञात कीजिए।

यहाँ हम निम्न गुण  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$  का प्रयोग करके फलन को सरल करेंगे।

$$\text{हल दिया है, } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x^2 - 1} = \pi \Rightarrow \frac{\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) - 2]}{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1)} = \pi$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} [f(x) - 2] = \pi \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) - 2 = \pi (1^2 - 1)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) - 2 = \pi \times 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

**प्रश्न 32.** किन पूर्णाकों  $m$  और  $n$  के लिए,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  और  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  दोनों का अस्तित्व है,

$$\text{यदि } f(x) = \begin{cases} mx^2 + n, & x < 0 \\ nx + m, & 0 \leq x \leq 1 \\ nx^3 + m, & x > 1 \end{cases}$$

**हल** यदि बिंदु  $x = 0$  पर सीमा का अस्तित्व है।

तब, दाएँ पक्ष की सीमा = बाएँ पक्ष की सीमा

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(0+h) = \lim_{h \rightarrow 0} f(0-h)$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} n(0+h) + m = \lim_{h \rightarrow 0} m(0-h)^2 + n$$

$$\Rightarrow n(0+0) + m = m(0-0)^2 + n$$

$$\Rightarrow m = n$$

... (i)

पुनः बिंदु  $x = 1$  पर सीमा का अस्तित्व है।

⇒ दाएँ पक्ष की सीमा = बाएँ पक्ष की सीमा

$$\begin{aligned}
\Rightarrow & \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \\
\Rightarrow & \lim_{h \rightarrow 0} f(1+h) = \lim_{h \rightarrow 0} f(1-h) \\
\Rightarrow & \lim_{h \rightarrow 0} n(1+h)^3 + m = \lim_{h \rightarrow 0} n(1-h) + m \\
\Rightarrow & n(1+0)^3 + m = n(1-0) + m \\
\Rightarrow & n + m = m + n \quad \dots(ii)
\end{aligned}$$

अतः सभी (i) से  $m = n$  के लिए  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  का अस्तित्व है और  $m$  तथा  $n$  के किसी पूर्णांक के लिए सभी (ii) से  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  का अस्तित्व है

## प्रश्नावली 13.2

(प्र. सं. 1-4) हम फलन  $f(x)$  का अवकलज निम्न सूत्र

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ का प्रयोग करके ज्ञात करेंगे।}$$

**प्रश्न 1.**  $x = 10$  पर  $x^2 - 2$  का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल माना  $f(x) = x^2 - 2$ ,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(x+h)^2 - 2] - (x^2 - 2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + h^2 + 2xh - 2 - x^2 + 2}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+2x)}{h} = 0 + 2x = 2x
\end{aligned}$$

बिंदु  $x = 10$  पर,  $f'(10) = 2 \times 10 = 20$

**प्रश्न 2.**  $x = 100$  पर  $99x$  का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल माना  $f(x) = 99x$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{99(x+h) - 99x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{99x + 99h - 99x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{99h}{h} = 99$$

बिंदु  $x = 100$  पर,  $f'(100) = 99$

**प्रश्न 3.**  $x = 1$  पर  $x$  का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल माना  $f(x) = x$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \Rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} \Rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

बिंदु  $x = 1$  पर  $f'(1) = 1$

प्रश्न 4. प्रथम सिद्धांत से निम्नलिखित फलनों के अवकलज ज्ञात कीजिए।

(i)  $x^3 - 27$       (ii)  $(x-1)(x-2)$       (iii)  $\frac{1}{x^3}$       (iv)  $\frac{x+1}{x-1}$

हल (i) माना  $f(x) = x^3 - 27$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ \Rightarrow f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(x+h)^3 - 27] - (x^3 - 27)}{h} \quad [\because f(x) = x^3 - 27] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + h^3 + 3xh(x+h) - x^3}{h} \\ &\quad [\because (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 + 3xh(x+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h[h^2 + 3x(x+h)]}{h} \\ &= 0 + 3x(x+0) = 3x^2 \\ \Rightarrow f'(x) &= 3x^2 \end{aligned}$$

(ii) माना  $f(x) = (x-1)(x-2) = x^2 - 2x - x + 2$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x) &= x^2 - 3x + 2 \\ f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ \Rightarrow f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(x+h)^2 - 3(x+h) + 2] - (x^2 - 3x + 2)}{h} \quad [\because f(x) = x^2 - 3x + 2] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + h^2 + 2xh - 3x - 3h + 2 - x^2 + 3x - 2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2xh - 3h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h + 2x - 3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} h + 2x - 3 = 0 + 2x - 3 = 2x - 3 \\ \Rightarrow f'(x) &= 2x - 3 \end{aligned}$$

(iii) माना  $f(x) = \frac{1}{x^3}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ \Rightarrow f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^3} - \frac{1}{x^3}}{h} \quad \left(\because f(x) = \frac{1}{x^3}\right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 - (x+h)^3}{(x+h)^3 x^3 h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 - [x^3 + h^3 + 3xh(x+h)]}{(x+h)^3 x^3 h} \end{aligned}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^3 - 3xh(x+h)}{(x+h)^3 x^3 h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h[h^2 + 3x(x+h)]}{(x+h)^3 x^3 h}$$

$$= \frac{-[0 + 3x(x+0)]}{(x+0)^3 x^3} = \frac{-3x^2}{x^3 x^3} = \frac{-3}{x^4}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-3}{x^4}$$

(iv) माना  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x+h+1}{x+h-1} - \frac{x+1}{x-1}}{h} \quad \left( \because f(x) = \frac{x+1}{x-1} \right)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h+1)(x-1) - (x+1)(x+h-1)}{(x+h-1)(x-1)h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^2 - x + hx - h + x - 1) - (x^2 + hx - x + x + h - 1)}{(x+h-1)(x-1)h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + hx - h - 1 - x^2 - hx - h + 1}{(x+h-1)(x-1)h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h}{(x+h-1)(x-1)h} = \frac{-2}{(x+0-1)(x-1)} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

**प्रश्न 5.** फलन  $f(x) = \frac{x^{100}}{100} + \frac{x^{99}}{99} + \dots + \frac{x^2}{2} + x + 1$  के लिए सिद्ध कीजिए कि

$$f'(1) = 100 f'(0).$$

(प्र. सं. 5-7) यहाँ हम निम्न सम्बन्ध  $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$  प्रयोग कर सरल करेंगे।

हल दिया है,  $f(x) = \frac{x^{100}}{100} + \frac{x^{99}}{99} + \dots + \frac{x^2}{2} + x + 1$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{100x^{99}}{100} + \frac{99x^{98}}{99} + \dots + \frac{2x}{2} + 1 + 0$$

$$[\because f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}]$$

$$\Rightarrow f'(x) = x^{99} + x^{98} + \dots + x + 1 \quad \dots(i)$$

$x = 1$  रखने पर,

$$f'(1) = \frac{(1)^{99} + 1^{98} + \dots + 1 + 1}{100 \text{ बार}} = \frac{1 + 1 + 1 \dots + 1 + 1}{100 \text{ बार}}$$

$$\Rightarrow f'(1) = 100 \quad \dots(ii)$$

पुनः  $x = 0$  रखने पर,

$$f'(0) = 0 + 0 + \dots + 0 + 1$$

$$\Rightarrow f'(0) = 1 \quad \dots(iii)$$

समी (ii) तथा (iii) से,  $f'(1) = 100 f'(0)$

**प्रश्न 6.** किसी निश्चित वास्तविक संख्या  $a$  के लिए

$$x^n + ax^{n-1} + a^2x^{n-2} + \dots + a^{n-1}x + a^n$$

का अवकलज ज्ञात कीजिए।

**हल** माना  $f(x) = x^n + ax^{n-1} + a^2x^{n-2} + \dots + a^{n-1}x + a^n$

$x$  के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$f'(x) = nx^{n-1} + a(n-1)x^{n-2} + a^2(n-2)x^{n-3} + \dots + a^{n-1}(1) + 0$$

$$[\because f(x) = ax^n \Rightarrow f'(x) = anx^{n-1}]$$

$$\Rightarrow f'(x) = nx^{n-1} + a(n-1)x^{n-2} + a^2(n-2)x^{n-3} + \dots + a^{n-1}$$

**प्रश्न 7.** किन्हीं अचरों  $a$  और  $b$  के लिए निम्न फलनों के अवकलज ज्ञात कीजिए।

(i)  $(x-a)(x-b)$     (ii)  $(ax^2 + b)^2$     (iii)  $\frac{x-a}{x-b}$

**हल** (i) माना  $f(x) = (x-a)(x-b) = x^2 - ax - bx + ab = x^2 - (a+b)x + ab$

$x$  के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$f'(x) = 2x - (a+b) \cdot 1 + 0 = 2x - a - b$$

(ii) माना  $f(x) = (ax^2 + b)^2$

$$\Rightarrow f(x) = a^2x^4 + b^2 + 2abx^2$$

$x$  के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$f'(x) = 4a^2x^3 + 0 + 2ab(2x) = 4a^2x^3 + 4abx = 4ax(ax^2 + b)$$

(iii) माना  $f(x) = \frac{x-a}{x-b}$

$x$  के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$f'(x) = \frac{(x-b)\frac{d}{dx}(x-a) - (x-a)\frac{d}{dx}(x-b)}{(x-b)^2}$$

$$= \frac{(x-b)(1-0) - (x-a)(1-0)}{(x-b)^2} = \frac{(x-b) - (x-a)}{(x-b)^2}$$

$$\left[ \because f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right]$$

$$\therefore f'(x) = \frac{f_2(x)f_1'(x) - f_1(x)f_2'(x)}{\{f_2(x)\}^2} = \frac{x-b-x+a}{(x-b)^2} = \frac{a-b}{(x-b)^2}$$

**प्रश्न 8.** किसी अचर  $a$  के लिए  $\frac{x^n - a^n}{x-a}$  का अवकलज ज्ञात कीजिए।

यहाँ हम अवकलज ज्ञात करने के लिए निम्न भागफल सूत्र अर्थात् का प्रयोग करेंगे।

$$\frac{d}{dx} \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\} = \frac{g(x) \frac{d}{dx} f(x) - f(x) \frac{d}{dx} g(x)}{\{g(x)\}^2}$$

हल माना  $y = \frac{x^n - a^n}{x - a}$

$y$  का  $x$  के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{(x-a) \frac{d}{dx}(x^n - a^n) - (x^n - a^n) \frac{d}{dx}(x-a)}{(x-a)^2} \\ &= \frac{(x-a)[nx^{n-1} - 0] - (x^n - a^n)(1-0)}{(x-a)^2} \\ &= \frac{(x-a)nx^{n-1} - x^n + a^n}{(x-a)^2} = \frac{x \times nx^{n-1} - anx^{n-1} - x^n + a^n}{(x-a)^2} \\ &= \frac{nx^n - anx^{n-1} - x^n + a^n}{(x-a)^2} \end{aligned}$$

**प्रश्न 9.** निम्नलिखित के अवकलज ज्ञात कीजिए।

(i)  $2x - \frac{3}{4}$

(ii)  $(5x^3 + 3x - 1)(x - 1)$

(iii)  $x^{-3}(5 + 3x)$

(iv)  $x^5(3 - 6x^{-9})$

(v)  $x^{-4}(3 - 4x^{-5})$

(vi)  $\frac{2}{x+1} - \frac{x^2}{3x-1}$

यहाँ हम नीचे दिए हुए विभिन्न अवकलज सूत्रों का प्रयोग करेंगे

•  $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$

•  $\frac{d}{dx} \{f(x)g(x)\} = f(x) \left\{ \frac{d}{dx} g(x) \right\} + g(x) \left\{ \frac{d}{dx} f(x) \right\}$  (गुणनफल सूत्र)

•  $\frac{d}{dx} \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\} = \frac{g(x) \left\{ \frac{d}{dx} f(x) \right\} - f(x) \left\{ \frac{d}{dx} g(x) \right\}}{\{g(x)\}^2}$  (भागफल सूत्र)

हल (i) माना  $y = 2x - \frac{3}{4}$

$y$  का  $x$  के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = 2 \times 1 - 0 = 2$$

(ii) माना  $y = (5x^3 + 3x - 1)(x - 1)$

$y$  का  $x$  के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (5x^3 + 3x - 1) \frac{d}{dx}(x - 1) + (x - 1) \frac{d}{dx}(5x^3 + 3x - 1) \\ &= (5x^3 + 3x - 1)(1 - 0) + (x - 1)(5 \times 3x^2 + 3 \times 1 - 0) \\ &= (5x^3 + 3x - 1) + (x - 1)(15x^2 + 3) \\ &= 5x^3 + 3x - 1 + 15x^3 + 3x - 15x^2 - 3 \\ &= 20x^3 - 15x^2 + 6x - 4 \end{aligned}$$

(iii) माना  $y = x^{-3}(5 + 3x)$

$$\Rightarrow y = 5x^{-3} + 3x^{-2}$$

$y$  का  $x$  के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = 5(-3)x^{-3-1} + 3(-2)x^{-2-1} = -15x^{-4} - 6x^{-3}$$

(iv) माना  $y = x^5(3 - 6x^{-9}) = 3x^5 - 6x^{5-9} = 3x^5 - 6x^{-4}$

$y$  का  $x$  के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = 3 \times 5x^{5-1} - 6(-4)x^{-4-1} = 15x^4 + 24x^{-5}$$

(v) माना  $y = x^{-4}(3 - 4x^{-5})$

$$\Rightarrow y = 3x^{-4} - 4x^{-4-5} \Rightarrow y = 3x^{-4} - 4x^{-9}$$

$y$  का  $x$  के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = 3(-4)x^{-4-1} - 4(-9)x^{-9-1} = -12x^{-5} + 36x^{-10}$$

(vi) माना  $y = \frac{2}{x+1} - \frac{x^2}{3x-1}$

$y$  का  $x$  के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+1) \frac{d}{dx}(2) - 2 \frac{d}{dx}(x+1)}{(x+1)^2} - \frac{(3x-1) \frac{d}{dx}(x^2) - x^2 \frac{d}{dx}(3x-1)}{(3x-1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(x+1) \times 0 - 2 \times 1}{(x+1)^2} - \frac{(3x-1)2x - x^2(3)}{(3x-1)^2}$$

$$= -\frac{2}{(x+1)^2} - \frac{(6x^2 - 2x - 3x^2)}{(3x-1)^2} = -\frac{2}{(x+1)^2} - \frac{(3x^2 - 2x)}{(3x-1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-2}{(x+1)^2} - \frac{x(3x-2)}{(3x-1)^2}$$

**प्रश्न 10.** प्रथम सिद्धांत से  $\cos x$  का अवकलन ज्ञात कीजिए।

यहाँ हम प्रथम सिद्धांत की विधि अर्थात्  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  का प्रयोग करेंगे।

हल माना  $f(x) = \cos x$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (\text{प्रथम सिद्धांत द्वारा})$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{x+h+x}{2} \sin \frac{x+h-x}{2}}{h}$$

$(\because \cos C - \cos D = -2 \sin \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2})$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{2x+h}{2} \sin \frac{h}{2}}{2 \times \frac{h}{2}}$$



$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ -\sin\left(\frac{2x+h}{2}\right) \right\} \left\{ \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right\} = -\sin \frac{2x}{2} \times 1 \quad \left( \because \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1 \right)$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\sin x$$

**प्रश्न 11.** निम्नलिखित फलनों के अवकलज ज्ञात कीजिए।

- (i)  $\sin x \cos x$       (ii)  $\sec x$       (iii)  $5 \sec x + 4 \cos x$   
 (iv)  $\operatorname{cosec} x$       (v)  $3 \cot x + 5 \operatorname{cosec} x$       (vi)  $5 \sin x - 6 \cos x + 7$   
 (vii)  $2 \tan x - 7 \sec x$

**हल**

(i) माना  $y = \sin x \cos x$

$y$  का  $x$  के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = \sin x \frac{d}{dx} \cos x + \cos x \frac{d}{dx} \sin x \quad (\text{गुणनफल सूत्र द्वारा})$$

$$= \sin x (-\sin x) + \cos x \cos x = -\sin^2 x + \cos^2 x = \cos 2x$$

(ii) माना  $y = \sec x \Rightarrow y = \frac{1}{\cos x}$

$y$  का  $x$  के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x \frac{d}{dx} (1) - 1 \times \frac{d}{dx} \cos x}{\cos^2 x} \quad (\text{भागफल सूत्र द्वारा})$$

$$= \frac{\cos x \times 0 - 1 \times (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{1}{\cos x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \tan x \sec x$$

(iii) माना  $y = 5 \sec x + 4 \cos x$

$y$  का  $x$  के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = 5 \sec x \tan x - 4 \sin x$$

(iv) माना  $y = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$

$y$  का  $x$  के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x \frac{d}{dx} (1) - (1) \frac{d}{dx} (\sin x)}{\sin^2 x} \quad (\text{भागफल सूत्र द्वारा})$$

$$= \frac{\sin x \times 0 - 1 \times \cos x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{0 - \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\cos x}{\sin x} \times \frac{1}{\sin x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\cot x \operatorname{cosec} x$$

(v) माना  $y = 3 \cot x + 5 \operatorname{cosec} x$

$y$  का  $x$  के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = -3 \operatorname{cosec}^2 x - 5 \operatorname{cosec} x \cot x$$

(vi) माना  $y = 5 \sin x - 6 \cos x + 7$

$y$  का  $x$ , के सापेक्ष अवकलज करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = 5 \cos x - 6(-\sin x) + 0 = 5 \cos x + 6 \sin x$$

(vii) माना  $y = 2 \tan x - 7 \sec x$

$y$  का  $x$  के सापेक्ष अवकलज करने पर,  $\frac{dy}{dx} = 2 \sec^2 x - 7 \sec x \tan x$

## विविध प्रश्नावली

प्रश्न 1. प्रथम सिद्धांत से निम्नलिखित फलनों का अवकलज ज्ञात कीजिए

(i)  $-x$     (ii)  $(-x)^{-1}$     (iii)  $\sin(x+1)$     (iv)  $\cos\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$

हल (i) माना  $f(x) = -x$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(x+h) - (-x)}{h} \quad (\text{प्रथम सिद्धांत द्वारा})$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-x - h + x}{h} \quad [\because f(x) = -x]$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h} = -1$$

(ii) माना  $f(x) = (-x)^{-1}$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (\text{प्रथम सिद्धांत द्वारा})$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{x+h} + \frac{1}{x}}{h} \quad (\because f(x) = \frac{1}{x})$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{x(x+h)h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{x(x+h)h} = \frac{1}{x(x+0)} = \frac{1}{x^2}$$

(iii)  $f(x) = \sin(x+1)$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (\text{प्रथम सिद्धांत द्वारा})$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h+1) - \sin(x+1)}{h} \quad [\because f(x) = \sin(x+1)]$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cos \frac{x+h+1+x+1}{2} \cdot \sin \frac{x+h+1-x-1}{2}}{h}$$

$$\left[ \because \sin C - \sin D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cos \frac{2x+h+2}{2} \sin \frac{h}{2}}{2 \times \frac{h}{2}} = \cos \frac{2x+0+2}{2} \times 1 \left( \because \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1 \right) \\
\Rightarrow f'(x) &= \cos(x+1) \\
\text{(iv) माना } f(x) &= \cos\left(x - \frac{\pi}{8}\right) \\
f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (\text{प्रथम सिद्धांत द्वारा}) \\
\Rightarrow f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos\left(x+h - \frac{\pi}{8}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{8}\right)}{h} \quad \left[ \because f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{8}\right) \right] \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{x+h - \frac{\pi}{8} + x - \frac{\pi}{8}}{2} \sin \frac{x+h - \frac{\pi}{8} - x + \frac{\pi}{8}}{2}}{h} \\
&\quad \left( \because \cos C - \cos D = -2 \sin \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2} \right) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{2x - 2\left(\frac{\pi}{8}\right) + h}{2} \sin \frac{h}{2}}{2 \times \frac{h}{2}} \\
&= -\sin \frac{2x - 2\left(\frac{\pi}{8}\right) + 0}{2} \times 1 \quad \left( \because \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1 \right) \\
&= -\sin \frac{2\left(x - \frac{\pi}{8}\right)}{2} \Rightarrow f'(x) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right)
\end{aligned}$$

**निर्देश** (प्र. सं. 2 - 30) निम्नलिखित फलनों के अवकलज ज्ञात कीजिए (यहाँ  $a, b, c, d, p, q, r$  और  $s$  निश्चित अशून्य अचर हैं और  $m$  तथा  $n$  पूर्णांक हैं।)

**प्रश्न 2.**  $x + a$

**हल** माना  $y = x + a$

$y$  का  $x$  के सापेक्ष अवकलन करने पर,  $\frac{dy}{dx} = 1 + 0 = 1$

**प्रश्न 3.**  $(px + q)\left(\frac{r}{x} + s\right)$

**हल** माना  $y = (px + q)\left(\frac{r}{x} + s\right)$

$y$  का  $x$  के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= (px + q) \frac{d}{dx} \left( \frac{r}{x} + s \right) + \left( \frac{r}{x} + s \right) \frac{d}{dx} (px + q) && \text{(गुणनफल विधि द्वारा)} \\
&= (px + q) \left[ -\frac{r}{x^2} + 0 \right] + \left( \frac{r}{x} + s \right) (p \times 1 + 0) \\
& && \left[ \because \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} \right) = \frac{d}{dx} (x^{-1}) = (-1) x^{-1-1} = -\frac{1}{x^2} \right] \\
&= (px + q) \left( -\frac{r}{x^2} \right) + \left( \frac{r}{x} + s \right) p \\
&= -\frac{pxr}{x^2} - \frac{qr}{x^2} + \frac{pr}{x} + ps = -\frac{pr}{x} - \frac{qr}{x^2} + \frac{pr}{x} + ps \\
\Rightarrow \frac{dy}{dx} &= ps - \frac{qr}{x^2}
\end{aligned}$$

**प्रश्न 4.**  $(ax + b)(cx + d)^2$

**हल** माना  $y = (ax + b)(cx + d)^2$

$y$  का  $x$  के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= (ax + b) \frac{d}{dx} (cx + d)^2 + (cx + d)^2 \frac{d}{dx} (ax + b) && \text{(गुणनफल विधि द्वारा)} \\
&= (ax + b) \frac{d}{dx} (c^2x^2 + d^2 + 2cxd) + (cx + d)^2 (a \times 1 + 0) \\
& && [\because (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2] \\
&= (ax + b)(c^2(2x) + 0 + 2c \times 1 \times d) + (cx + d)^2 \times a \\
&= (ax + b)(2c^2x + 2cd) + a(cx + d)^2 \\
&= (ax + b)2c(cx + d) + a(cx + d)^2 \\
&= (cx + d)[2c(ax + b) + a(cx + d)] \\
&= (cx + d)(2acx + 2bc + acx + ad) \\
&= (cx + d)(3acx + 2bc + ad)
\end{aligned}$$

**प्रश्न 5.**  $\frac{ax + b}{cx + d}$

**हल** माना  $y = \frac{ax + b}{cx + d}$

$y$  का  $x$  के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{(cx + d) \frac{d}{dx} (ax + b) - (ax + b) \frac{d}{dx} (cx + d)}{(cx + d)^2} && \text{(भागफल विधि द्वारा)} \\
&= \frac{(cx + d)(a \times 1 + 0) - (ax + b)(c \times 1 + 0)}{(cx + d)^2} = \frac{a(cx + d) - (ax + b)c}{(cx + d)^2} \\
&= \frac{acx + ad - acx - bc}{(cx + d)^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}
\end{aligned}$$

प्रश्न 6.  $\frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}}$

हल माना  $y = \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} \Rightarrow y = \frac{x+1}{x-1}$

$y$  का  $x$  के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-1) \frac{d}{dx}(x+1) - (x+1) \frac{d}{dx}(x-1)}{(x-1)^2} \quad (\text{भागफल सूत्र द्वारा})$$

$$= \frac{(x-1)(1+0) - (x+1)(1-0)}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

प्रश्न 7.  $\frac{1}{(ax^2 + bx + c)}$

हल माना  $y = \frac{1}{ax^2 + bx + c}$

$y$  का  $x$  के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(ax^2 + bx + c) \frac{d}{dx}(1) - 1 \times \frac{d}{dx}(ax^2 + bx + c)}{(ax^2 + bx + c)^2} \quad (\text{भागफल सूत्र द्वारा})$$

$$= \frac{(ax^2 + bx + c) \times 0 - 1 \times (2ax + b)}{(ax^2 + bx + c)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{(2ax + b)}{(ax^2 + bx + c)^2}$$

प्रश्न 8.  $\frac{ax + b}{px^2 + qx + r}$

हल माना  $y = \frac{ax + b}{px^2 + qx + r}$

$y$  का  $x$  के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(px^2 + qx + r) \frac{d}{dx}(ax + b) - (ax + b) \frac{d}{dx}(px^2 + qx + r)}{(px^2 + qx + r)^2} \quad (\text{भागफल सूत्र द्वारा})$$

$$= \frac{(px^2 + qx + r)(a \times 1 + 0) - (ax + b)(2px + q)}{(px^2 + qx + r)^2}$$

$$= \frac{(px^2 + qx + r)a - (ax + b)(2px + q)}{(px^2 + qx + r)^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(apx^2 + aqx + ra) - (2apx^2 + aqx + 2bpx + qb)}{(px^2 + qx + r)^2} \\
&= \frac{apx^2 + aqx + ra - 2apx^2 - aqx - 2bpx - bq}{(px^2 + qx + r)^2} \\
&= \frac{-apx^2 - 2bpx + ra - bq}{(px^2 + qx + r)^2}
\end{aligned}$$

**प्रश्न 9.**  $\frac{px^2 + qx + r}{ax + b}$

**हल** माना  $y = \frac{px^2 + qx + r}{(ax + b)}$

$y$  का  $x$  के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{(ax + b) \frac{d}{dx}(px^2 + qx + r) - (px^2 + qx + r) \frac{d}{dx}(ax + b)}{(ax + b)^2} && \text{(भागफल सूत्र द्वारा)} \\
&= \frac{(ax + b)(2px + q + 0) - (px^2 + qx + r)(a \times 1 + 0)}{(ax + b)^2} \\
&= \frac{(ax + b)(2px + q) - (px^2 + qx + r)a}{(ax + b)^2} \\
&= \frac{(2apx^2 + aqx + 2bpx + bq) - (apx^2 + aqx + ra)}{(ax + b)^2} \\
&= \frac{2apx^2 + aqx + 2bpx + bq - apx^2 - aqx - ra}{(ax + b)^2} \\
&= \frac{dy}{dx} = \frac{apx^2 + 2bpx + bq - ra}{(ax + b)^2}
\end{aligned}$$

**प्रश्न 10.**  $\frac{a}{x^4} - \frac{b}{x^2} + \cos x$

**हल** माना  $y = \frac{a}{x^4} - \frac{b}{x^2} + \cos x$

$\Rightarrow y = ax^{-4} - bx^{-2} + \cos x$

$y$  का  $x$  के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= a \frac{d}{dx}(x^{-4}) - b \frac{d}{dx}(x^{-2}) + \frac{d}{dx}(\cos x) \\
&= a(-4)x^{-4-1} - b(-2)x^{-2-1} - \sin x && \left( \because \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} \right) \\
&= -\frac{4a}{x^5} + \frac{2b}{x^3} - \sin x
\end{aligned}$$

**प्रश्न 11.**  $4\sqrt{x} - 2$

**हल** माना  $y = 4\sqrt{x} - 2$

$$\Rightarrow y = 4x^{1/2} - 2$$

$y$  का  $x$  के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = 4 \times \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} - 0 = 2x^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

**प्रश्न 12.**  $(ax + b)^n$ .

(प्र. सं. 12-13) यहाँ हमें फलनों के फलन जैसे  $y = f\{g(x)\}$  दिये हुए है। यहाँ  $f$   $g$  का फलन है और  $g$   $x$  का फलन  $x$  है इस प्रकार के फलनों का अवकलन निम्न सूत्र  $\frac{dy}{dx} \equiv f'\{g(x)\} \cdot g'(x)$  से दिया जाता है।

अतः सर्वप्रथम बाहरी फलन का अवकलन करते हैं और तब अंदर वाले फलन का अवकलन करते हैं। यह प्रथम अवकलन का शृंखला नियम कहलाती है।

**हल** माना  $y = (ax + b)^n$

$y$  का  $x$  के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = n(ax + b)^{n-1} \frac{d}{dx}(ax + b)$$
$$= n(ax + b)^{n-1} \times a$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = na(ax + b)^{n-1}$$

**प्रश्न 13.**  $(ax + b)^n (cx + d)^m$

**हल** माना  $y = (ax + b)^n (cx + d)^m$

$y$  का  $x$  के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = (ax + b)^n \frac{d}{dx}(cx + d)^m + (cx + d)^m \frac{d}{dx}(ax + b)^n$$
$$= (ax + b)^n m(cx + d)^{m-1} \frac{d}{dx}(cx + d) + (cx + d)^m n(ax + b)^{n-1} \frac{d}{dx}(ax + b)$$
$$= m(ax + b)^n (cx + d)^{m-1} (c \times 1 + 0) + n(cx + d)^m (ax + b)^{n-1} (a \times 1 + 0)$$
$$= m(ax + b)^n (cx + d)^{m-1} c + n(cx + d)^m (ax + b)^{n-1} a$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (ax + b)^{n-1} (cx + d)^{m-1} [mc(ax + b) + na(cx + d)]$$

**प्रश्न 14.**  $\sin(x + a)$

**हल** माना  $y = \sin(x + a)$

$$y = \sin x \cos a + \cos x \sin a$$

$$[\because \sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B]$$

$y$  का  $x$  के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \cos a \frac{d}{dx}(\sin x) + \sin a \frac{d}{dx}(\cos x)$$
$$= \cos a \cos x - \sin a \sin x = \cos(x + a)$$

**प्रश्न 15.**  $\operatorname{cosec} x \cot x$

**हल** माना  $y = \operatorname{cosec} x \cot x$

$y$  का  $x$  के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \operatorname{cosec} x \frac{d}{dx}(\cot x) + \cot x \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) && \text{(गुणनफल विधि द्वारा)} \\ &= -\operatorname{cosec} x \operatorname{cosec}^2 x + \cot x (-\operatorname{cosec} x \cot x) \\ &= -\operatorname{cosec}^3 x - \cot^2 x \operatorname{cosec} x\end{aligned}$$

**प्रश्न 16.**  $\frac{\cos x}{1 + \sin x}$

**हल** माना  $y = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

$y$  का  $x$  के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{(1 + \sin x) \frac{d}{dx}(\cos x) - \cos x \frac{d}{dx}(1 + \sin x)}{(1 + \sin x)^2} && \text{(भागफल सूत्र द्वारा)} \\ &= \frac{(1 + \sin x)(-\sin x) - \cos x(0 + \cos x)}{(1 + \sin x)^2} \\ &= \frac{-\sin x - \sin^2 x - \cos^2 x}{(1 + \sin x)^2} = \frac{-\sin x - (\cos^2 x + \sin^2 x)}{(1 + \sin x)^2} \\ &= \frac{-\sin x - 1}{(1 + \sin x)^2} = \frac{-(1 + \sin x)}{(1 + \sin x)^2} = \frac{-1}{(1 + \sin x)}\end{aligned}$$

**प्रश्न 17.**  $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

**हल** माना  $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

$y$  का  $x$  के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{(\sin x - \cos x) \frac{d}{dx}(\sin x + \cos x) - (\sin x + \cos x) \frac{d}{dx}(\sin x - \cos x)}{(\sin x - \cos x)^2} && \text{(भागफल सूत्र द्वारा)} \\ &= \frac{(\sin x - \cos x)(\cos x - \sin x) - (\sin x + \cos x)(\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2} \\ &= \frac{-(\cos x - \sin x)(\cos x - \sin x) - (\cos x + \sin x)^2}{(\sin x - \cos x)^2} \\ &= \frac{-(\cos x - \sin x)^2 - (\cos x + \sin x)^2}{(\sin x - \cos x)^2} \\ &= \frac{-[(\cos^2 x + \sin^2 x - 2\cos x \sin x) + (\cos^2 x + \sin^2 x + 2\cos x \sin x)]}{(\sin x - \cos x)^2} \\ &= \frac{-[1 + 1] - 2}{(\sin x - \cos x)^2} = \frac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}\end{aligned}$$



**प्रश्न 18.**  $\frac{\sec x - 1}{\sec x + 1}$

**हल** माना  $y = \frac{\sec x - 1}{\sec x + 1}$

$y$  का  $x$  के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\sec x + 1) \frac{d}{dx}(\sec x - 1) - (\sec x - 1) \frac{d}{dx}(\sec x + 1)}{(\sec x + 1)^2}$$

(भागफल सूत्र विधि)

$$= \frac{(\sec x + 1)(\sec x \tan x - 0) - (\sec x - 1)(\sec x \tan x + 0)}{(\sec x + 1)^2}$$

$$= \frac{(\sec x + 1)(\sec x \tan x) - (\sec x - 1)(\sec x \tan x)}{(\sec x + 1)^2}$$

$$= \frac{\sec x \tan x [\sec x + 1 - \sec x + 1]}{(\sec x + 1)^2} = \frac{2 \sec x \tan x}{(\sec x + 1)^2}$$

**प्रश्न 19.**  $\sin^n x$

यहाँ हम अवकलन का श्रृंखला नियम प्रयोग करेंगे।

**हल** माना  $y = \sin^n x \Rightarrow y = (\sin x)^n$

$y$  का  $x$  के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = n (\sin x)^{n-1} \times \frac{d}{dx}(\sin x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = n \sin^{n-1} x \cos x$$

**प्रश्न 20.**  $\frac{a + b \sin x}{c + d \cos x}$

**हल** माना  $y = \frac{a + b \sin x}{c + d \cos x}$

$y$  का  $x$  के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(c + d \cos x) \frac{d}{dx}(a + b \sin x) - (a + b \sin x) \frac{d}{dx}(c + d \cos x)}{(c + d \cos x)^2}$$

$$= \frac{(c + d \cos x)[0 + b \cos x] - (a + b \sin x)(0 - d \sin x)}{(c + d \cos x)^2}$$

$$= \frac{(c + d \cos x)(b \cos x) - (a + b \sin x)(-d \sin x)}{(c + d \cos x)^2}$$

$$= \frac{bc \cos x + bd \cos^2 x + ad \sin x + bd \sin^2 x}{(c + d \cos x)^2}$$

$$= \frac{bc \cos x + ad \sin x + bd(\cos^2 x + \sin^2 x)}{(c + d \cos x)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{bc \cos x + ad \sin x + bd}{(c + d \cos x)^2}$$

**प्रश्न 21.**  $\frac{\sin(x+a)}{\cos x}$

हल माना

$$y = \frac{\sin(x+a)}{\cos x} = \frac{\sin x \cos a + \cos x \sin a}{\cos x}$$

(सूत्र  $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ )

$$= \frac{\sin x \cos a}{\cos x} + \frac{\cos x \sin a}{\cos x} = \cos a \tan x + \sin a$$

y का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \cos a \frac{d}{dx}(\tan x) + \frac{d}{dx}(\sin a)$$

$$= \cos a \sec^2 x + 0 \quad \left[ \because \frac{d}{dx}(\text{नियतांक}) = 0 \right]$$

$$= \frac{\cos a}{\cos^2 x} \quad \left( \because \cos x = \frac{1}{\sec x} \right)$$

**प्रश्न 22.**  $x^4(5\sin x - 3\cos x)$

हल माना  $y = x^4(5\sin x - 3\cos x)$

y का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = x^4 \frac{d}{dx}(5\sin x - 3\cos x) + (5\sin x - 3\cos x) \frac{d}{dx}(x^4)$$

(गुणनफल सूत्र द्वारा)

$$= x^4(5\cos x + 3\sin x) + (5\sin x - 3\cos x)4x^3$$

$$= x^3[x(5\cos x + 3\sin x) + 4(5\sin x - 3\cos x)]$$

$$= x^3[5x\cos x + 3x\sin x + 20\sin x - 12\cos x]$$

**प्रश्न 23.**  $(x^2 + 1)\cos x$

हल माना  $y = (x^2 + 1)\cos x$

y का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = (x^2 + 1) \frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x \frac{d}{dx}(x^2 + 1)$$

(गुणनफल सूत्र द्वारा)

$$= (x^2 + 1)(-\sin x) + \cos x(2x)$$

$$= -x^2 \sin x - \sin x + 2x \cos x$$

**प्रश्न 24.**  $(ax^2 + \sin x)(p + q\cos x)$

हल माना  $y = (ax^2 + \sin x)(p + q\cos x)$

y का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = (ax^2 + \sin x) \frac{d}{dx}(p + q\cos x) + (p + q\cos x) \frac{d}{dx}(ax^2 + \sin x)$$

(गुणनफल सूत्र द्वारा)

$$= (ax^2 + \sin x)(0 - q\sin x) + (p + q\cos x)(2ax + \cos x)$$

$$= -q\sin x(ax^2 + \sin x) + (p + q\cos x)(2ax + \cos x)$$

**प्रश्न 25.**  $(x + \cos x)(x - \tan x)$

**हल** माना  $y = (x + \cos x)(x - \tan x)$

$y$  का  $x$  के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (x + \cos x) \frac{d}{dx}(x - \tan x) + (x - \tan x) \frac{d}{dx}(x + \cos x) && \text{(गुणनफल सूत्र द्वारा)} \\ &= (x + \cos x)(1 - \sec^2 x) + (x - \tan x)(1 - \sin x) \\ &= -(x + \cos x)(\sec^2 x - 1) + (x - \tan x)(1 - \sin x) \\ &= -(x + \cos x) \tan^2 x + (x - \tan x)(1 - \sin x) && (\because \sec^2 x - \tan^2 x = 1) \end{aligned}$$

**प्रश्न 26.**  $\frac{4x + 5\sin x}{3x + 7\cos x}$

**हल** माना  $y = \frac{4x + 5\sin x}{3x + 7\cos x}$

$y$  का  $x$  के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{(3x + 7\cos x) \frac{d}{dx}(4x + 5\sin x) - (4x + 5\sin x) \frac{d}{dx}(3x + 7\cos x)}{(3x + 7\cos x)^2} && \text{(भागफल सूत्र द्वारा)} \\ &= \frac{(3x + 7\cos x)(4 \times 1 + 5\cos x) - (4x + 5\sin x)(3 - 7\sin x)}{(3x + 7\cos x)^2} \\ &= \frac{12x + 15x\cos x + 28\cos x + 35\cos^2 x - 12x + 28x\sin x - 15\sin x + 35\sin^2 x}{(3x + 7\cos x)^2} \\ &= \frac{35(\cos^2 x + \sin^2 x) + 15x\cos x + 28\cos x + 28x\sin x - 15\sin x}{(3x + 7\cos x)^2} \\ &= \frac{35 + 15x\cos x + 28\cos x + 28x\sin x - 15\sin x}{(3x + 7\cos x)^2} && (\because \sin^2 x + \cos^2 x = 1) \end{aligned}$$

**प्रश्न 27.**  $\frac{x^2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x}$

**हल** माना  $y = \frac{x^2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x} \Rightarrow y = \left(\cos \frac{\pi}{4}\right) \times \frac{x^2}{\sin x}$

$y$  का  $x$  के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \cos \frac{\pi}{4} \times \frac{d}{dx} \left( \frac{x^2}{\sin x} \right) && (\because \cos \frac{\pi}{4} \text{ एक नियतांक है}) \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= \left( \cos \frac{\pi}{4} \right) \times \frac{\sin x \frac{d}{dx}(x^2) - x^2 \left( \frac{d}{dx} \sin x \right)}{\sin^2 x} && \text{(भागफल सूत्र द्वारा)} \\ &= \cos \frac{\pi}{4} \times \frac{(\sin x)(2x) - x^2(\cos x)}{\sin^2 x} = \frac{x \cos \frac{\pi}{4} [2\sin x - x \cos x]}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

**प्रश्न 28.**  $\frac{x}{1 + \tan x}$

**हल** माना  $y = \frac{x}{1 + \tan x}$

$y$  का  $x$  के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{(1 + \tan x) \frac{d}{dx}(x) - x \frac{d}{dx}(1 + \tan x)}{(1 + \tan x)^2} \\ &= \frac{(1 + \tan x)(1) - x(0 + \sec^2 x)}{(1 + \tan x)^2} = \frac{1 + \tan x - x \sec^2 x}{(1 + \tan x)^2} \end{aligned}$$

**प्रश्न 29.**  $(x + \sec x)(x - \tan x)$

**हल** माना  $y = (x + \sec x)(x - \tan x)$

$y$  का  $x$  के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (x + \sec x) \frac{d}{dx}(x - \tan x) + (x - \tan x) \frac{d}{dx}(x + \sec x) \quad (\text{गुणनफल सूत्र द्वारा}) \\ &= (x + \sec x)(1 - \sec^2 x) + (x - \tan x)(1 + \sec x \tan x) \end{aligned}$$

**प्रश्न 30.**  $\frac{x}{\sin^n x}$

**हल** माना  $y = \frac{x}{\sin^n x}$

$y$  का  $x$  के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\sin^n x \frac{d}{dx}(x) - x \frac{d}{dx}(\sin^n x)}{(\sin^n x)^2} \quad (\text{भागफल सूत्र द्वारा}) \\ &= \frac{\sin^n x \times 1 - x \frac{d}{dx}(\sin^n x)}{\sin^{2n} x} \end{aligned}$$

शुंखला नियम द्वारा  $(\sin x)^n$  का अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^n x - nx(\sin x)^{n-1} \frac{d}{dx}(\sin x)}{\sin^{2n} x} = \frac{\sin^n x - nx \sin^{n-1} x \cos x}{\sin^{2n} x}$$