अध्याय 2

संबंध एवं फलन

Relations and Functions

प्रश्नावली 2.1

प्रश्न 1. यदि $\left(\frac{x}{3}+1, y-\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$, तो x तथा y ज्ञात कीजिए।

दो क्रमित युग्म (a, b) तथा (c, d) बराबर होंगे, यदि $a=c$ और $b=d$

हल दिया है, $\left(\frac{x}{3}+1, y-\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$

$\Rightarrow \quad \frac{x}{3}+1=\frac{5}{3}$ और $y-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow \quad \frac{x}{3}=\frac{5}{3}-\frac{1}{1}$ और $y=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}$

$\Rightarrow \quad \frac{x}{3}=\frac{5-3}{3}$ और $y=\frac{1+2}{3}$

$\Rightarrow \quad \frac{x}{3}=\frac{2}{3}$ और $y=\frac{3}{3}$

$\Rightarrow \quad x=2$ और $y=1$

प्रश्न 2. यदि समुच्चय A में 3 अवयव हैं तथा समुच्चय $B = \{3, 4, 5\}$, तो $(A \times B)$ में अवयवों की संख्या ज्ञात कीजिए।

यहाँ, हम निम्न सूत्र $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$ का प्रयोग करेंगे।

हल यहाँ, $n(A) = 3$ तथा $B = \{3, 4, 5\} \Rightarrow n(B) = 3$

$\therefore$ $$n(A \times B) = n(A) \times n(B) = 3 \times 3 = 9$$

प्रश्न 3. यदि $G = \{7, 8\}$ तथा $H = \{5, 4, 2\}$, तो $G \times H$ तथा $H \times G$ ज्ञात कीजिए।

दो अरिक्त समुच्चय P और Q का कार्तीय गुणन $P \times Q$, उन सभी क्रमित युग्मों का समुच्चय है, जिनको प्रथम घटक P से तथा द्वितीय घटक Q से लेकर बनाया जाता है।

अर्थात् $$P \times Q = \{(p, q) : p \in P, q \in Q\}$$

हल दिया है, $G = \{7, 8\}$ तथा $H = \{5, 4, 2\}$

$\therefore$ $G \times H = \{7, 8\} \times \{5, 4, 2\} = \{(7, 5), (7, 4), (7, 2), (8, 5), (8, 4), (8, 2)\}$

और $H \times G = \{5, 4, 2\} \times \{7, 8\} = \{(5, 7), (5, 8), (4, 7), (4, 8), (2, 7), (2, 8)\}$

प्रश्न 4. बताइए कि निम्नलिखित कथनों में से प्रत्येक सत्य है अथवा असत्य है। यदि कथन असत्य है, तो दिए गए कथन को सही बनाकर लिखिए।

(i) यदि $P = \{m, n\}$ और $Q = \{n, m\}$, तो $P \times Q = \{(m, n), (n, m)\}$

(ii) यदि A और B अरिक्त समुच्चय हैं, तो $A \times B$ क्रमित युग्मों (x, y) का एक अरिक्त समुच्चय इस प्रकार है, कि $x \in A$ तथा $y \in B$.

(iii) यदि $A = \{1, 2\}$ तथा $B = \{3, 4\}$, तो $A \times (B \cap \phi) = \phi$

हल

(i) यह असत्य है क्योंकि यदि $P = \{m, n\}$ और $Q = \{n, m\}$, तब
$$P \times Q = \{m, n\} \times \{n, m\} = \{(m, n), (m, m), (n, n), (n, m)\}$$

(ii) यह सत्य है, क्योंकि $A \times B$ क्रमित युग्म (x, y) का एक अरिक्त समुच्चय इस प्रकार है कि $x \in A$ तथा $y \in B$

(iii) यह सत्य है, क्योंकि $B \cap \phi = \phi \Rightarrow A \times (B \cap \phi) = A \times \phi = \phi$

प्रश्न 5. यदि $A = \{-1, 1\}$, तो $A \times A \times A$ ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $A = \{-1, 1\}$

$$\Rightarrow \quad A \times A = \{-1, 1\} \times \{-1, 1\}$$
$$= \{(-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1)\}$$

पुनः $$A \times A \times A = \{(-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1)\} \times \{-1, 1\}$$
$$= \{(-1, -1, -1), (-1, -1, 1), (-1, 1, -1), (-1, 1, 1), (1, -1, -1), (1, -1, 1), (1, 1, -1), (1, 1, 1)\}$$

प्रश्न 6. यदि $A \times B = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y)\}$, तो A तथा B ज्ञात कीजिए।

हल चूँकि $A \times B = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y)\}$

$$\Rightarrow \quad A = \{a, b\} \quad \text{तथा} \quad B = \{x, y\}$$

प्रश्न 7. मान लीजिए कि $A = \{1, 2\}, B = \{1, 2, 3, 4\}, C = \{5, 6\}$ तथा $D = \{5, 6, 7, 8\}$ सत्यापित कीजिए कि

(i) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

(ii) $A \times C, B \times D$ का एक उपसमुच्चय है।

हल दिया है, $A = \{1, 2\}, B = \{1, 2, 3, 4\}, C = \{5, 6\}$ तथा $D = \{5, 6, 7, 8\}$

(i) $B \cap C = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{5, 6\} = \phi$

$\therefore \quad A \times (B \cap C) = \{1, 2\} \times \phi = \phi$ ...(i)

$A \times B = \{1, 2\} \times \{1, 2, 3, 4\}$

$= \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\}$

अब, $A \times C = \{1, 2\} \times \{5, 6\}$

$= \{(1, 5), (1, 6), (2, 5), (2, 6)\}$ ...(ii)

$\Rightarrow (A \times B) \cap (A \times C) = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\}$
$\cap \{(1, 5), (1, 6), (2, 5), (2, 6)\}$ ...(iii)

$= \phi$

समी (i) तथा (iii) से, $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

(ii) $B \times D = \{1, 2, 3, 4\} \times \{5, 6, 7, 8\}$

$= \{(1, 5), (1, 6), (1, 7), (1, 8), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (2, 8),$
$(3, 5), (3, 6), (3, 7), (3, 8), (4, 5), (4, 6), (4, 7), (4, 8)\}$ ...(iv)

समी (ii) तथा (iv) से, $A \times C$ के सभी अवयव $B \times D$ में हैं।

अतः $A \times C, B \times D$ का एक उपसमुच्चय है।

नोट यदि A एक अरिक्त समुच्चय है तथा B एक रिक्त समुच्चय है, तब $A \times B = \phi$

प्रश्न 8. मान लीजिए कि $A = \{1, 2\}$ और $B = \{3, 4\}$, $A \times B$ लिखिए। $A \times B$ के कितने उपसमुच्चय होंगे? उनकी सूची बनाइए।

यदि एक समुच्चय में n अवयव है, तब कुल उपसमुच्चयों की संख्या $= 2^n$

हल दिया है, $A = \{1, 2\}$ तथा $B = \{3, 4\}$

$\Rightarrow \quad A \times B = \{1, 2\} \times \{3, 4\}$

$A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$

$\Rightarrow \quad n(A \times B) = 4$

$\Rightarrow A \times B$ के कुल उपसमुच्चय $= 2^4 = 16$

अतः $A \times B$ के उपसमुच्चय निम्न हैं

ϕ, $\{(1, 3)\}$, $\{(1, 4)\}$, $\{(2, 3)\}$, $\{(2, 4)\}$, $\{(1, 3), (1, 4)\}$, $\{(1, 3), (2, 3)\}$,
$\{(1, 3), (2, 4)\}$, $\{(1, 4), (2, 3)\}$, $\{(1, 4), (2, 4)\}$, $\{(2, 3), (2, 4)\}$,
$\{(1, 3), (1, 4), (2, 3)\}$, $\{(1, 3), (1, 4), (2, 4)\}$,
$\{(1, 3), (2, 3), (2, 4)\}$, $\{(1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$,
$\{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$

प्रश्न 9. मान लीजिए कि A और B दो समुच्चय हैं, जहाँ $n(A) = 3$ और $n(B) = 2$, यदि $(x, 1), (y, 2), (z, 1), A \times B$ में हैं, तो A और B को ज्ञात कीजिए, जहाँ x, y और z भिन्न-भिन्न अवयव हैं।

हल दिया है, $A \times B = \{(x, 1), (y, 2), (z, 1)\}$

यहाँ, $x, y, z \in A$ तथा $1, 2 \in B \Rightarrow A = \{x, y, z\}$ तथा $B = \{1, 2\}$

प्रश्न 10. कार्तीय गुणन $A \times A$ में 9 अवयव हैं, जिनमें $(-1, 0)$ तथा $(0, 1)$ भी हैं। समुच्चय A ज्ञात कीजिए तथा $A \times A$ के शेष अवयव भी ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $(-1, 0) \in A \times A$ तथा $(0, 1) \in A \times A$

$\Rightarrow \quad A = \{-1, 0, 1\}$

अतः $\quad A \times A = \{-1, 0, 1\} \times \{-1, 0, 1\}$

$= \{(-1, -1), (-1, 0), (-1, 1), (0, -1), (0, 0), (0, 1), (1, -1), (1, 0), (1, 1)\}$

अतः शेष अवयव $= \{(-1, -1), (-1, 1), (0, -1), (0, 0), (1, -1), (1, 1)\}$ हैं।

प्रश्नावली 2.2

प्रश्न 1. मान लीजिए कि $A = \{1, 2, 3, ..., 14\}$, $R = \{(x, y) : 3x - y = 0$, जहाँ $x, y \in A\}$ द्वारा, A से A का एक संबंध R लिखिए। इसके प्रांत, सहप्रांत और परिसर लिखिए।

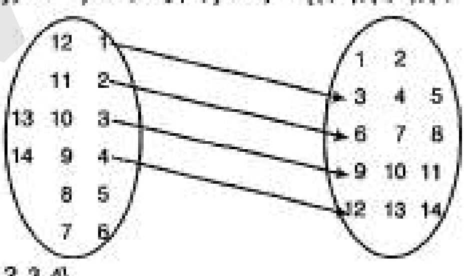
(i) क्रमित युग्मों के सभी प्रथम घटकों के समुच्चय को संबंध R का प्रांत (domain) कहते हैं।

(ii) क्रमित युग्मों के सभी द्वितीय घटकों के समुच्चय को संबंध R का परिसर (range) कहते हैं।

(iii) यदि R, समुच्चय A से समुच्चय B में एक संबंध है तब पूरे समुच्चय B को सहप्रांत (codomain) कहते हैं।

आपको हमेशा स्मरण होना चाहिए कि परिसर $\subseteq$ सहप्रांत।

हल (i) $R = \{(x, y) : 3x - y = 0$, जहाँ, $x, y \in A\} = \{(1, 3), (2, 6), (3, 9), (4, 12)\}$



(ii) प्रांत $= \{1, 2, 3, 4\}$

(iii) सहप्रांत $= \{1, 2, 3, 4, ..., 14\}$

(iv) परिसर $= \{3, 6, 9, 12\}$

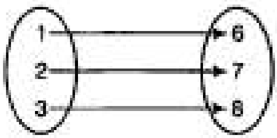
प्रश्न 2. प्राकृत संख्याओं के समुच्चय पर $R = \{(x, y) : y = x + 5, x$ संख्या 4 से कम, एक प्राकृत संख्या है, $x, y \in N\}$ द्वारा एक संबंध R परिभाषित कीजिए। इस संबंध को, रोस्टर रूप में, इसके प्रांत और परिसर लिखिए।

हल चूँकि, x संख्या 4 से कम एक प्राकृत संख्या है अर्थात् $x = 1, 2, 3$

(i) $R = \{(x, y) : y = x + 5, x$ एक प्राकृत संख्या है 4 से कम; $x, y \in N\}$

$= \{(1, 6), (2, 7), (3, 8)\}$

निम्न चित्र में संगत तीर आरेख दर्शाया गया है



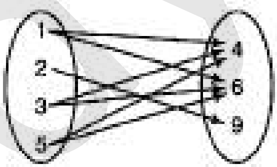
(ii) प्रांत = {1, 2, 3}

(iii) परिसर = {6, 7, 8}

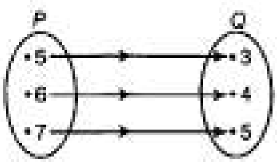
प्रश्न 3. $A = \{1, 2, 3, 5\}$ और $B = \{4, 6, 9\}$ A से B में एक संबंध $R = \{(x, y) : x$ और y का अंतर विषम है, $x \in A, y \in B\}$ द्वारा परिभाषित कीजिए। R को रोस्टर रूप में लिखिए।

हल $R = \{(x, y) : x$ और y का अंतर विषम है, $x \in A, y \in B\}$

$R = \{(1, 4), (1, 6), (2, 9), (3, 4), (3, 6), (5, 4), (5, 6)\}$



प्रश्न 4. आकृति में, समुच्चय P से Q का एक संबंध दर्शाया गया है। इस संबंध को (i) समुच्चय निर्माण रूप (ii) रोस्टर रूप में लिखिए। इसके प्रांत तथा परिसर क्या हैं?



हल

(i) समुच्चय निर्माण रूप में, $R = \{(x, y) : y = x - 2, x \in P$ तथा $y \in Q\}$

(ii) रोस्टर रूप में, $R = \{(5, 3), (6, 4), (7, 5)\}$

अत: प्रांत = {5, 6, 7} तथा परिसर = {3, 4, 5}

प्रश्न 5. मान लीजिए कि $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, मान लीजिए कि R, A पर $\{(a, b) : a, b \in A,$ संख्या a संख्या b को यथावत् विभाजित करती है $\}$ द्वारा परिभाषित एक संबंध है।

(i) R को रोस्टर रूप में लिखिए।

(ii) R का प्रांत ज्ञात कीजिए।

(iii) R का परिसर ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

(i) $R = \{(a, b) : a, b \in A$, संख्या a, संख्या b को यथावत् विभाजित करती है$\}$

$= \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 6), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (6, 6)\}$

(ii) प्रांत $= \{1, 2, 3, 4, 6\}$

(iii) परिसर $= \{1, 2, 3, 4, 6\}$

प्रश्न 6. $R = \{(x, x + 5) : x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R के प्रांत और परिसर ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $R = \{(x, x + 5) : x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}\}$ ...(i)

$x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ रखने पर,

$\Rightarrow$ प्रांत $= \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

पुन: x का मान सभी (i) में रखने पर हम पाते हैं,

$y = x + 5 = 5, 6, 7, 8, 9, 10$

$\Rightarrow$ परिसर $= \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

प्रश्न 7. संबंध $R = \{(x, x^3) : x$, संख्या 10 से कम एक अभाज्य संख्या है $\}$ को रोस्टर रूप में लिखिए।

हल दिया है, $R = \{(x, x^3) : x$, संख्या 10 से कम एक अभाज्य संख्या है$\}$

$\because$ अभाज्य संख्या 10 से कम है $\therefore$ अभाज्य संख्या $= 2, 3, 5, 7$

$\Rightarrow$ $R = \{(2, 2^3), (3, 3^3), (5, 5^3), (7, 7^3)\} = \{(2, 8), (3, 27), (5, 125), (7, 343)\}$

प्रश्न 8. मान लीजिए कि $A = \{x, y, z\}$ और $B = \{1, 2\}$, तब A से B के संबंधों की संख्या ज्ञात कीजिए।

यदि $n(A) = m$ तथा $n(B) = n$, तब A से B में संबंधों की कुल संख्या $= 2^{mn}$

हल यहाँ, $A = \{x, y, z\}$ तथा $B = \{1, 2\}$ $\Rightarrow$ $n(A) = 3, n(B) = 2$

$\therefore$ A से B में संबंधों की कुल संख्या $= 2^{3 \times 2} = 2^6 = 64$

प्रश्न 9. मान लीजिए कि R, Z पर, $R = \{(a, b) : a, b \in Z, a - b$ एक पूर्णांक है $\}$, द्वारा परिभाषित एक संबंध है। R के प्रांत तथा परिसर ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $R = \{(a, b) : a, b \in Z, a - b$ एक पूर्णांक है$\}$

हम जानते हैं कि दो पूर्णांकों का अन्तर भी एक पूर्णांक होता है।

$\therefore$ प्रांत $= Z$, परिसर $= Z$

प्रश्नावली 2.3

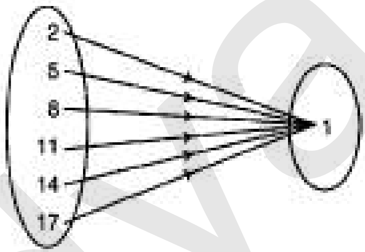
प्रश्न 1. निम्नलिखित संबंधों में कौन-से फलन हैं? कारण का उल्लेख कीजिए। यदि संबंध एक फलन है, तो उसका परिसर निर्धारित कीजिए।

(i) {(2, 1), (5, 1), (8, 1), (11, 1), (14, 1), (17, 1)}
(ii) {(2, 1), (4, 2), (6, 3), (8, 4), (10, 5), (12, 6), (14, 7)}
(iii) {(1, 3), (1, 5), (2, 5)}

दिया हुआ संबंध फलन है या नहीं, जाँच करने के लिए हम तीर आलेख का प्रयोग करेंगे। इसका प्रयोग कर हम आसानी से देख सकते हैं कि क्रमित युग्म के प्रथम घटक के अवयवों की पुनरावृत्ति हो रही है अथवा नहीं।

हल

(i) दिया है, $R = \{(2, 1), (5, 1), (8, 1), (11, 1), (14, 1), (17, 1)\}$



उपरोक्त आलेख से स्पष्ट है कि क्रमित युग्म के प्रथम घटक के दो अवयव समान नहीं है।

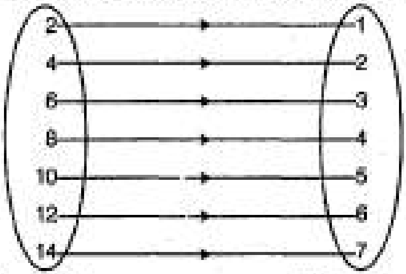
अतः यह संबंध एक फलन है।

यहाँ, प्रांत = क्रमित युग्मों के प्रथम घटकों का समुच्चय

$= \{2, 5, 8, 11, 14, 17\}$

परिसर = क्रमित युग्म के द्वितीय घटकों का समुच्चय = {1}

(ii) दिया है, $R = \{(2, 1), (4, 2), (6, 3), (8, 4), (10, 5), (12, 6), (14, 7)\}$



चूँकि दो क्रमित युग्मों का प्रथम घटक समान नहीं है। अतः यह संबंध एक फलन है।

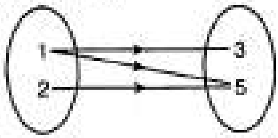
प्रांत = क्रमित युग्मों के प्रथम घटकों का समुच्चय

$= \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$

परिसर = क्रमित युग्मों के द्वितीय घटकों का समुच्चय

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

(iii) दिया है, $R = \{(1, 3), (1, 5), (2, 5)\}$



चूँकि क्रमित युग्मों (1, 3) तथा (1, 5) के प्रथम घटक समान हैं या हम कह सकते हैं कि अवयव 1 के दो प्रतिबिंब 3 और 5 हैं। अतः यह एक फलन नहीं है।

नोट यदि किसी दो क्रमित युग्मों के प्रथम घटक समान हैं, तब यह फलन नहीं होगा।

प्रश्न 2. निम्नलिखित वास्तविक फलनों के प्रांत तथा परिसर ज्ञात कीजिए।

(i) $f(x) = -|x|$ (ii) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

हल

(i) दिया है, $f(x) = -|x|$

यहाँ, $f(x) \le 0, \forall x \in R$

$\Rightarrow$ प्रांत = सभी बिंदुओं का समुच्चय, जहाँ फलन परिभाषित है।

$\Rightarrow$ प्रांत = R

$\Rightarrow$ परिसर = फलन के सभी मानों का समुच्चय

$\Rightarrow$ परिसर = $R^- \cup \{0\}$

(ii) दिया है, $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

फलन को परिभाषित करने के लिए,

$$9 - x^2 \ge 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 9 \le 0 \qquad \ldots(i)$$

$$\Rightarrow \quad \{x - (-3)\}(x - 3) \le 0$$

$$\Rightarrow \quad -3 \le x \le 3$$

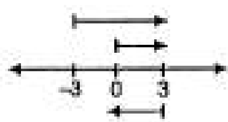
{यदि $a < b$ तथा $(x - a)(x - b) \le 0 \Rightarrow a \le x \le b$}

$\Rightarrow$ प्रांत = $[-3, 3]$

$= \{x : x \in R$ तथा $-3 \le x \le 3\}$

पुनः परिसर के लिए,

माना $f(x) = y$, तब



$$\Rightarrow \quad y = \sqrt{9 - x^2}$$

दोनों ओर वर्ग करने पर,

$$y^2 = 9 - x^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = 9 - y^2 \qquad \ldots(ii)$$

x^2 का मान समी (i) में रखने पर,

$$\Rightarrow \quad 9 - y^2 - 9 \le 0$$

$\Rightarrow \quad -y^2 \le 0$

$\Rightarrow \quad y^2 \ge 0$ ...(iii)

$-\infty < y < \infty$

किंतु y कभी भी ऋणात्मक नहीं हो सकता है। इसलिए फलन $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ ऋणात्मक मान नहीं रख सकता है।

$\therefore \quad y \ge 0$

समी (ii) से, $\quad x = \sqrt{9-y^2}$

$\Rightarrow \quad 9 - y^2 \ge 0 \quad (\because x^2 \ge 0)$

$\Rightarrow \quad y^2 - 9 \le 0$

$\Rightarrow \quad -3 \le y \le 3$

$\Rightarrow$ परिसर = $[0, 3]$ या $\{y : y \in R, 0 \le y \le 3\}$

> **नोट** *फलन के प्रांत या परिसर निकालने के लिए, कृपया फलन का वर्ग करने पर सावधानी रखें, कभी-कभी यह कुछ अतिरिक्त मान भी देता है।*

प्रश्न 3. एक फलन $f(x) = 2x - 5$ द्वारा परिभाषित है। निम्नलिखित के मान लिखिए

(i) $f(0)$ (ii) $f(7)$ (iii) $f(-3)$

हल दिया है, $f(x) = 2x - 5$

(i) $f(0) = 2 \times 0 - 5 = 0 - 5 = -5$

(ii) $f(7) = 2 \times 7 - 5 = 14 - 5 = 9$

(iii) $f(-3) = 2(-3) - 5 = -6 - 5 = -11$

प्रश्न 4. फलन 't' सेल्सियस तापमान का फारेनहाइट तापमान में प्रतिचित्रण करता है, जो $t(C) = \frac{9C}{5} + 32$ द्वारा परिभाषित है, निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए।

(i) $t(0)$ (ii) $t(28)$ (iii) $t(-10)$ (iv) C का मान, जब $t(C) = 212$

हल दिया है, $t(C) = \frac{9C}{5} + 32$ ...(i)

(i) समी (i) में $C = 0$ रखने पर,

$$t(0) = \frac{9 \times 0}{5} + 32 = 0 + 32 = 32$$

(ii) समी (i) में $C = 28$ रखने पर,

$$t(28) = \frac{9 \times 28}{5} + 32 = \frac{252}{5} + \frac{32}{1}$$

$$= \frac{252 + 160}{5} = \frac{412}{5}$$

(iii) समी (i) में $C = -10$ रखने पर,

$$t(-10) = \frac{9 \times (-10)}{5} + 32$$

$$= \frac{-9 \times 10}{5} + 32 = -9 \times 2 + 32$$

$$= -18 + 32 = 14$$

(iv) समी (i) में $f(C) = 212$ रखने पर,

$$212 = \frac{9C}{5} + 32 \Rightarrow \frac{9C}{5} = 212 - 32$$

$$\Rightarrow \quad \frac{9C}{5} = 180 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{5 \times 180}{9}$$

$$\Rightarrow \quad C = 5 \times 20 = 100$$

प्रश्न 5. निम्नलिखित में से प्रत्येक फलन का परिसर ज्ञात कीजिए।

(i) $f(x) = 2 - 3x$, $x \in R$, $x > 0$

(ii) $f(x) = x^2 + 2$, x एक वास्तविक संख्या है।

(iii) $f(x) = x$, x एक वास्तविक संख्या है।

परिसर के लिए $f(x) = y$ रखते हैं और फलन को $x = f(y)$ रूप में परिवर्तित कर लेते हैं।

हल

(i) माना $y = f(x) = 2 - 3x$

$$\Rightarrow \quad y = 2 - 3x$$

$$\Rightarrow \quad 3x = 2 - y \Rightarrow x = \frac{2 - y}{3} \quad \ldots(i)$$

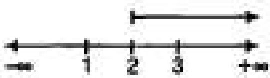
दिया है, $x > 0$

समी (i) से, x का मान रखने पर,

$$\frac{2 - y}{3} > 0 \Rightarrow 2 - y > 0$$

$$\Rightarrow \quad y - 2 < 0 \Rightarrow y < 2$$

$\therefore$ परिसर $= (-\infty, 2)$ या $\{y : y \in R$ तथा $y < 2\}$



(ii) माना $y = f(x) = x^2 + 2$

$$\Rightarrow \quad y = x^2 + 2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = y - 2$$

$$\because \quad x^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad y - 2 \geq 0 \Rightarrow y \geq 2$$

$\therefore$ परिसर $= [2, \infty)$ या $\{y : y \in R$ तथा $y \geq 2\}$

(iii) माना $y = f(x) = x$

$$\Rightarrow \quad y = x \Rightarrow x = y$$

$$\because \quad x \in R \quad \text{(दिया है)}$$

$$\Rightarrow \quad y \in R$$

$\therefore$ परिसर $= \{y : y \in R\}$

विविध प्रश्नावली

प्रश्न 1. संबंध f, $f(x) = \begin{cases} x^2, 0 \le x \le 3 \\ 3x, 3 \le x \le 10 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित है।

संबंध g, $g(x) = \begin{cases} x^2, 0 \le x \le 2 \\ 3x, 2 \le x \le 10 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित है।

दर्शाइए कि क्यों f एक फलन है और g फलन नहीं है?

हल

(i) दिया है, $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 3 \\ 3x, & 3 \le x \le 10 \end{cases}$

$\because$ फलन $f(x) = x^2$ अंतराल $0 \le x \le 3$ में परिभाषित है

और फलन $f(x) = 3x$ भी अंतराल $3 \le x \le 10$ में परिभाषित है।

$x = 3$ पर, $f(x) = x^2 \Rightarrow f(3) = 3^2 = 9$

$x = 3$ पर, $f(x) = 3x \Rightarrow f(3) = 3 \times 3 = 9$

$\Rightarrow$ $f(x)$, $x = 3$ पर परिभाषित है

अतः f एक फलन है।

(ii) $g(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 2 \\ 3x, & 2 \le x \le 10 \end{cases}$

$\because$ $g(x) = x^2$ अंतराल $0 \le x \le 2$ में परिभाषित है।

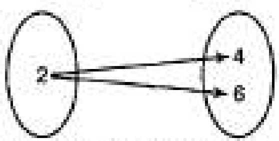
और $g(x) = 3x$ भी अंतराल $2 \le x \le 10$ में परिभाषित है।

परंतु $x = 2$ पर,

$$g(x) = x^2 \Rightarrow g(2) = 2^2 = 4$$

$x = 2$ पर,

$$g(x) = 3x \Rightarrow g(2) = 3 \times 2 = 6$$



इसलिए, $g(x)$, $x = 2$ पर परिभाषित नहीं है। अतः g एक फलन नहीं है।

प्रश्न 2. यदि $f(x) = x^2$, तो $\dfrac{f(1.1) - f(1)}{1.1 - 1}$ ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $f(x) = x^2$

$x = 1.1$ रखने पर, $f(1.1) = (1.1)^2 = 1.21$

$x = 1$ रखने पर, $f(1) = 1^2 = 1$

$$\therefore \quad \frac{f(1.1) - f(1)}{1.1 - 1} = \frac{1.21 - 1}{1.1 - 1} = \frac{0.21}{0.1} = \frac{21}{10} = 2.1$$

प्रश्न 3. फलन $f(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x^2-8x+12}$ का प्रांत ज्ञात कीजिए।

यदि फलन $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ के रूप का है, तब फलन को परिभाषित करने के लिए $q(x) \neq 0$ रखते हैं।

हल दिया है, $f(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x^2-8x+12}$

फलन $f(x)$ को परिभाषित करने के लिए,

$$x^2 - 8x + 12 \neq 0$$
$$\Rightarrow \quad x^2 - 6x - 2x + 12 \neq 0$$
$$\Rightarrow \quad x(x-6) - 2(x-6) \neq 0$$
$$\Rightarrow \quad (x-2)(x-6) \neq 0$$
$$\Rightarrow \quad x \neq 2 \text{ तथा } x \neq 6$$
$$\therefore \quad \text{प्रांत} = R - \{2, 6\}$$

प्रश्न 4. $f(x) = \sqrt{(x-1)}$ द्वारा परिभाषित वास्तविक फलन f का प्रांत तथा परिसर ज्ञात कीजिए।

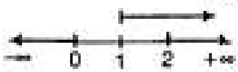
हल दिया है, $f(x) = \sqrt{x-1}$

फलन को परिभाषित करने के लिए वर्गमूल के अंदर का मान हमेशा धनात्मक होना चाहिए।

अर्थात् $\quad x - 1 \geq 0 \quad$ ...(i)

$\Rightarrow \quad x \geq 1$

प्रांत $= [1, \infty)$ या $\{x : x \in R$ तथा $x \geq 1\}$



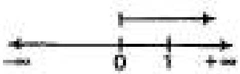
परिसर, $f(x) = \sqrt{x-1}$

या $\quad y = \sqrt{x-1} \Rightarrow y^2 = x - 1 \Rightarrow x = y^2 + 1$

x का मान समी (i) में रखने पर,

$\Rightarrow \quad y^2 + 1 - 1 \geq 0$

$\Rightarrow \quad -\infty < y < \infty$



किंतु y कभी भी ऋणात्मक नहीं हो सकता क्योंकि फलन $f(x) = \sqrt{x-1}$ कभी भी ऋणात्मक मान नहीं रखता है।

$$y^2 \geq 0$$
$$\therefore \quad y \geq 0$$
$$\therefore \quad \text{परिसर} = [0, \infty) \text{ या } \{y : y \in R \text{ तथा } y \geq 0\}$$

प्रश्न 5. $f(x) = |x-1|$ द्वारा परिभाषित वास्तविक फलन f का प्रांत तथा परिसर ज्ञात कीजिए।

हल हम जानते हैं कि निरपेक्ष या मापांक फलन सभी वास्तविक मान के लिए परिभाषित होते हैं।

$\Rightarrow$ प्रांत $= R$

अब, $f(x) = |x-1|$ केवल धनात्मक मान देता है।

$\therefore$ परिसर $= \{y : y \geq 0\} = R^+ \cup \{0\}$

प्रश्न 6. मान लीजिए कि $f = \left\{\left(x, \frac{x^2}{1+x^2}\right) : x \in R\right\}$ R से R में एक फलन है। f का परिसर निर्धारित कीजिए।

हल दिया है, $f = \left\{\left(x, \frac{x^2}{1+x^2}\right) : x \in R\right\}$ तथा $f : R \to R$

माना $$y = \frac{x^2}{1+x^2}$$

$\because$ x के सभी मान के लिए $f(x)$ या y धनात्मक है।

तथा $$1 + x^2 > x^2$$

$\Rightarrow$ $$0 \le y < 1$$

$\therefore$ f का परिसर $= \{y : y \in R$ तथा $y \in [0, 1)\}$

प्रश्न 7. मान लीजिए कि $f, g : R \to R$ क्रमशः $f(x) = x + 1$, $g(x) = 2x - 3$ द्वारा परिभाषित है। $f + g$, $f - g$ और $\frac{f}{g}$ ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $f : R \to R$

तथा $$f(x) = x + 1$$

तथा $$g : R \to R$$
$$g(x) = 2x - 3$$

(i) $f + g = f(x) + g(x) = x + 1 + 2x - 3 = 3x - 2$

(ii) $f - g = f(x) - g(x) = (x + 1) - (2x - 3) = x + 1 - 2x + 3 = 4 - x$

(iii) $\frac{f}{g} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x+1}{2x-3}$, जहाँ $x \ne \frac{3}{2}$

> **नोट** *विद्यार्थियों को $f + g = f(x) + g(x)$ से भ्रमित नहीं होना चाहिए क्योंकि f और g, x के फलन हैं।*

प्रश्न 8. मान लीजिए कि $f = \{(1, 1), (2, 3), (0, -1), (-1, -3)\}$, Z से Z में, $f(x) = ax + b$, द्वारा परिभाषित एक फलन है, जहाँ a, b कोई पूर्णांक हैं। a, b को निर्धारित कीजिए।

हल दिया है, $f = \{(1, 1), (2, 3), (0, -1), (-1, -3)\}$

तथा $$f(x) = ax + b$$

या $$y = ax + b \qquad [\because y = f(x)]$$

$x = 1$ तथा $y = 1$ पर,

$\Rightarrow$ $$1 = a + b \qquad \ldots(i)$$

$x = 2$ तथा $y = 3$ पर,

$\Rightarrow$ $$3 = 2a + b \qquad \ldots(ii)$$

समी (i) को समी (ii) में से घटाने पर,

$$a = 2$$

a का मान समी (i) में रखने पर,

$$b = 1-2 \Rightarrow b = -1$$

अतः $f(x) = ax + b = 2x - 1$

प्रश्न 9. $R = \{(a, b) : a, b \in N$ तथा $a = b^2\}$ द्वारा परिभाषित N से N में, एक संबंध R है। क्या निम्नलिखित कथन सत्य हैं?

(i) $(a, a) \in R$, सभी $a \in N$

(ii) $(a, b) \in R$ का तात्पर्य है कि $(b, a) \in R$

(iii) $(a, b) \in R, (b, c) \in R$ का तात्पर्य है कि $(a, c) \in R$?

प्रत्येक दशा में अपने उत्तर का औचित्य भी बताइए।

हल दिया है, $R : N \to N$

$R = \{(a, b) : a, b \in N$ तथा $a = b^2\}$ द्वारा परिभाषित है।

(i) $(a, a) \in R$ सभी $a \in N$

यह असत्य है क्योंकि $a = a^2$ केवल $a = 1$ के लिए सत्य है न की सभी प्राकृत संख्या N के लिए। किंतु दिया है सभी $a \in N$ के लिए, अतः यह एक संबंध नहीं है।

(ii) $(a, b) \in R$ का तात्पर्य है कि $(b, a) \in R$

यह असत्य है क्योंकि यदि $a = b^2$, तब $b = a^2$ सत्य नहीं है।

उदाहरण के लिए, $4 = 2^2$, तब $2 = 4^2$ सत्य नहीं है।

अतः यह संबंध नहीं है।

(iii) $(a, b) \in R$, $(b, c) \in R$ का तात्पर्य है कि $(a, c) \in R$

यह असत्य है, क्योंकि $a = b^2$ तथा $b = c^2$

$\Rightarrow \quad a = (c^2)^2 = c^4 \Rightarrow a \neq c^2$

अतः यह संबंध नहीं है।

प्रश्न 10. मान लीजिए कि $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{1, 5, 9, 11, 15, 16\}$

और $f = \{(1, 5), (2, 9), (3, 1), (4, 5), (2, 11)\}$

क्या निम्नलिखित कथन सत्य हैं?

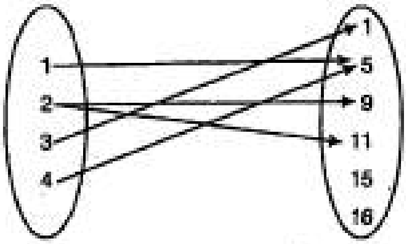
(i) f, A से B में एक संबंध है।

(ii) f, A से B में एक फलन है।

प्रत्येक दशा में अपने उत्तर का औचित्य बताइए।

हल दिया है, $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{1, 5, 9, 11, 15, 16\}$

तथा $f = \{(1, 5), (2, 9), (3, 1), (4, 5), (2, 11)\}$



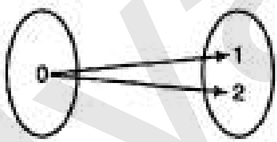
(i) $\because f$, $A \times B$ का एक उपसमुच्चय है। अत: यह एक संबंध है।

(ii) क्रमित युग्मों (2, 9) तथा (2, 11) के प्रथम घटक समान हैं। अत: यह एक फलन है।

प्रश्न 11. मान लीजिए कि f, $f = \{(ab, a+b) : a, b \in Z\}$ द्वारा परिभाषित $Z \times Z$ का एक उपसमुच्चय है। क्या f, Z से Z में एक फलन है? अपने उत्तर का औचित्य भी स्पष्ट कीजिए।

हल दिया है, $f = \{(ab, a+b) : a, b \in Z\}$

यदि हम $a = 0$ तथा $b = 1$ लेते हैं, तब $ab = 0$ और $a + b = 0 + 1 = 1 \Rightarrow (0, 1) \in f$ और यदि हम $a = 0$ तथा $b = 2$ लेते हैं, तब $ab = 0$ और $a + b = 0 + 2 \Rightarrow (0, 2) \in f$ संभव नहीं है।



अत: यह एक फलन नहीं है।

प्रश्न 12. मान लीजिए कि $A = \{9, 10, 11, 12, 13\}$ तथा $f : A \to N$, $f(n) = n$ का महत्तम अभाज्य गुणक द्वारा, परिभाषित है। f का परिसर ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $A = \{9, 10, 11, 12, 13\}$ तथा $f : A \to N$

दिए हुए समुच्चय के सभी अवयवों के महत्तम अभाज्य गुणक अभाज्य गुणनखंड द्वारा निकालेंगे।

$n = 9$ के लिए, $\quad 9 = 1 \times 3 \times 3$

$\Rightarrow$ 9 का महत्तम अभाज्य गुणक = 3

$n = 10$ के लिए, $\quad 10 = 1 \times 2 \times 5$

$\Rightarrow$ 10 का महत्तम अभाज्य गुणक = 5

$n = 11$ के लिए, $\quad 11 = 1 \times 11$

$\Rightarrow$ 11 का महत्तम अभाज्य गुणक = 11

$n = 12$ के लिए, $\quad 12 = 1 \times 2 \times 2 \times 3$

$\Rightarrow$ 12 का महत्तम अभाज्य गुणक = 3

$n = 13$ के लिए, $\quad 13 = 1 \times 13$

$\Rightarrow$ 13 का महत्तम अभाज्य गुणक = 13

$\therefore \quad f = \{(9, 3), (10, 5), (11, 11), (12, 3), (13, 13)\}$

$\Rightarrow$ परिसर = $\{3, 5, 11, 13\}$