

अध्याय **5**

सम्मिश्र संख्याएँ और द्विघातीय समीकरण

Complex Numbers and
Quadratic Equations

प्रश्नावली 5.1

निर्देश (प्र. सं. 1 - 10) सम्मिक्र संख्याओं में प्रत्येक को $a + bi$ के रूप में व्यक्त कीजिए।

(प्र. सं. 1 - 3) विनालिखित प्रश्नों में $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$ का प्रयोग करेंगे।

यदि 2 या 4 से अलग i की घात अधिक है, तब हम i की घात को 2 या 4 के गुणक के रूप में परिवर्तन करने का प्रयास करेंगे।

प्रश्न 1. $(5i)\left(-\frac{3}{5}i\right)$

हल $5\left(-\frac{3}{5}i\right)i^2 = (-3)(-1) = 3 = 3 + 0i$ $(\because i^2 = -1)$

प्रश्न 2. $i^9 + i^{19}$

हल $i^9 + i^{19} = i^9(1 + i^{10}) = i^9[1 + (i^2)^5]$ $(i^9$ उभयनिष्ठ लेने पर)
 $= i^9[1 + (-1)^5] = i^9[1 - 1] = 0 = 0 + 0i$

प्रश्न 3. i^{-20}

हल $i^{-20} = \frac{1}{i^{20}}$

अंश तथा हर में i से गुणा करने पर,

$$\begin{aligned} &= \frac{i}{i^{20}} = \frac{i}{(i^4)^5} \\ &= \frac{i}{(1)^5} = \frac{i}{1} = i = 0 + i \end{aligned} \quad (\text{हर में } i \text{ की घात } 4 \text{ का गुणक है})$$

प्रश्न 4. $3(7 + i7) + i(7 + i7)$

(प्र. सं. 4 - 7) प्रत्येक प्रश्न में सर्वप्रथम सम्मिक्र संख्या में से वास्तविक तथा काल्पनिक भागों को पृथक करेंगे, तत्परतात् इसे सरल करेंगे।

हल दिया है, $3(7+i7)+i(7+i7) = 21+21i+7i+i^27 = 21+28i-7 \quad (\because i^2 = -1)$
 $= 14+28i$

नोट विद्यार्थी हमें याद रखें कि सापेक्षिक, गालतविक तथा काल्पनिक भाग ही जुड़ते या घटते हैं।

प्रश्न 5. $(1-i) - (-1+6i)$

हल $1-i+1-6i = (1+1) - (i+6i) = 2-7i$

प्रश्न 6. $\left(\frac{1}{5} + i\frac{2}{5}\right) - \left(4 + i\frac{5}{2}\right)$

हल $\frac{1}{5} + i\frac{2}{5} - 4 - i\frac{5}{2} = \left(\frac{1}{5} - \frac{4}{1}\right) + i\left(\frac{2}{5} - \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{1-20}{5}\right) + i\left(\frac{4-25}{10}\right) = -\frac{19}{5} - \frac{21i}{10}$

प्रश्न 7. $\left[\left(\frac{1}{3} + i\frac{7}{3}\right) + \left(4 + i\frac{1}{3}\right)\right] - \left(-\frac{4}{3} + i\right)$

हल $\left(\frac{1}{3} + i\frac{7}{3} + 4 + i\frac{1}{3}\right) + \frac{4}{3} - i$
 $= \left(\frac{1}{3} + 4 + \frac{4}{3}\right) + i\left(\frac{7}{3} + \frac{1}{3} - 1\right) = \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{1} + \frac{4}{3}\right) + i\left(\frac{7}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{1}\right)$
 $= \frac{(1+12+4)}{3} + i\left(\frac{7+1-3}{3}\right) = \frac{17}{3} + i\frac{5}{3}$

प्रश्न 8. $(1-i)^4$

हल $(1-i)^4 = [(1-i)^2]^2 = (1+i^2-2i)^2 \quad [(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \text{ का प्रयोग करने पर}]$
 $= (1-1-2i)^2 \quad (\because i^2 = -1)$
 $= (-2i)^2 = (-2)^2 i^2 = 4(-1) = -4 + 0i$

प्रश्न 9. $\left(\frac{1}{3} + 3i\right)^3$

यहाँ पर हम, सूत्र $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$ का प्रयोग करेंगे, तत्प्रचाल इसे सरस करेंगे।

हल $\left(\frac{1}{3} + 3i\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + (3i)^3 + 3 \times \frac{1}{3} \times 3i \left(\frac{1}{3} + 3i\right)$
 $= \frac{1}{27} + 27i^3 + 3i \left(\frac{1}{3} + 3i\right)$
 $= \frac{1}{27} - 27i + 3i \times \frac{1}{3} + 3i \times 3i \quad (\because i^3 = -i)$
 $= \frac{1}{27} - 27i + i + 9i^2$
 $= \frac{1}{27} - 27i + i - 9 \quad (\because i^2 = -1)$

$$= \left(\frac{1}{27} - \frac{9}{1} \right) - i(27 - 1) = \left(\frac{1 - 243}{27} \right) - 26i$$

$$= \frac{-242}{27} - 26i$$

प्रश्न 10. $\left(-2 - \frac{1}{3}i\right)^3$

सर्वाप्रथम गणितीक रूप से उभयनिषेध लेने तथा अवधारणा सुन।

$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$ का प्रयोग करके हल करेंगे।

हल

$$\begin{aligned} (-1)^3 \left(2 + \frac{1}{3}i\right)^3 &= - \left[(2)^3 + \left(\frac{1}{3}i\right)^3 + 3 \times 2 \times \frac{1}{3}i \left(2 + \frac{1}{3}i\right) \right] \\ &= - \left[8 + \frac{1}{27}i^3 + 2i \left(2 + \frac{1}{3}i\right) \right] \\ &= - \left[8 - \frac{1}{27}i + 4i + \frac{2}{3}i^2 \right] \quad (\because i^3 = -i) \\ &= - \left[8 - \frac{1}{27}i + 4i - \frac{2}{3} \right] \quad (\because i^2 = -1) \\ &= - \left[\left(\frac{8}{1} - \frac{2}{3}\right) + i \left(\frac{4}{1} - \frac{1}{27}\right) \right] \\ &= - \left[\left(\frac{24 - 2}{3}\right) + i \left(\frac{108 - 1}{27}\right) \right] = - \left[\frac{22}{3} + i \frac{107}{27} \right] \end{aligned}$$

निर्देश (प्र. सं. 11 - 13) सम्मिक्षा संख्याओं में प्रत्येक का गुणात्मक प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

(प्र. सं. 11 - 13) यदि सम्मिक्षा संख्या z है, तब उसका गुणात्मक प्रतिलोम $\frac{1}{z}$ होगा। अब $\frac{1}{z}$ में z के संपूर्णी (\bar{z}) से अंश तथा हर में गुणा करेंगे, इसे हम तब तक हल करेंगे जब तक $\frac{1}{z}, (a + bi)$ के रूप में परिवर्तित नहीं होता है।

प्रश्न 11. $4 - 3i$

हल भाजा $z = 4 - 3i$

तब इसका गुणात्मक प्रतिलोम है

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{4 - 3i} \\ &= \frac{1}{4 - 3i} \times \frac{4 + 3i}{4 + 3i} = \frac{4 + 3i}{16 - 9i^2} \end{aligned}$$

$[(a - b)(a + b) = a^2 - b^2]$ का प्रयोग करने पर]

$$\begin{aligned} &= \frac{4 + 3i}{16 + 9} \\ &= \frac{4 + 3i}{25} = \frac{4}{25} + \frac{3i}{25} \quad (\because i^2 = -1) \end{aligned}$$

प्रश्न 12. $\sqrt{5} + 3i$

हल माना $z = \sqrt{5} + 3i$

तब इसका गुणात्मक प्रतिलोम है

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{\sqrt{5} + 3i} = \frac{1}{\sqrt{5} + 3i} \times \frac{\sqrt{5} - 3i}{\sqrt{5} - 3i} \\ &= \frac{\sqrt{5} - 3i}{5 - 9i^2} \quad [(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \text{ का प्रयोग करने पर}] \\ &= \frac{\sqrt{5} - 3i}{5 + 9} = \frac{\sqrt{5} - 3i}{14} = \frac{\sqrt{5}}{14} - \frac{3i}{14} \quad (\because i^2 = -1) \end{aligned}$$

प्रश्न 13. $-i$

हल माना $z = -i$

तब इसका गुणात्मक प्रतिलोम है

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= -\frac{1}{i} = -\frac{1}{i} \times \frac{i}{i} = \frac{-i}{i^2} = \frac{-i}{-1} \\ &= 0 + i \quad (\because i^2 = -1) \end{aligned}$$

प्रश्न 14. निम्नलिखित अंशक को $a + bi$ के रूप में व्यक्त कीजिए।

$$\frac{(3+i\sqrt{5})(3-i\sqrt{5})}{(\sqrt{3}+i\sqrt{2})-(\sqrt{3}-i\sqrt{2})}$$

$$\begin{aligned} \text{हल माना } z &= \frac{(3+i\sqrt{5})(3-i\sqrt{5})}{(\sqrt{3}+i\sqrt{2})-(\sqrt{3}-i\sqrt{2})} = \frac{(3)^2 - (i\sqrt{5})^2}{\sqrt{3}+i\sqrt{2}-\sqrt{3}+i\sqrt{2}} \\ &\quad [\because (a+b)(a-b) = a^2 - b^2] \\ &= \frac{9-i^2 \cdot 5}{2\sqrt{2}i} = \frac{9+5}{2\sqrt{2}i} \quad (\because i^2 = -1) \\ &= \frac{14}{2\sqrt{2}i} = \frac{7}{\sqrt{2}i} \times \frac{i}{i} = \frac{7i}{\sqrt{2}i^2} = -\frac{7i}{\sqrt{2}} = 0 - i\left(\frac{7}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

प्रश्नावली 5.2

निर्देश (प्र. सं. 1 - 2) समिक्षण संख्याओं में प्रत्येक का मापांक और कोणांक ज्ञात कीजिए।

यदि समिक्षण संख्या $z = a + bi$ के रूप की है, तब z का मापांक

$$|z| = +\sqrt{a^2 + b^2} = +\sqrt{(\text{वास्तविक भाग})^2 + (\text{विचलित भाग})^2}$$

तथा z का कोणांक, $\tan \theta = \left| \frac{b}{a} \right|$ के द्वारा प्राप्त होता है। (अर्थात् विचलित भाग को वास्तविक भाग से विभाजित करते हैं) हम θ का मान दृष्ट प्रकार से लेंगे कि वह अंतराल $-\pi < \theta \leq \pi$ में ही हो। (केवल मुख्य मान)

प्रश्न 1. $z = -1 - i\sqrt{3}$

हल $|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

तथा $\tan \theta = \left| \frac{-\sqrt{3}}{-1} \right| = \sqrt{3} = \tan \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

परन्तु बिंदु आर्गेंड तल के तृतीय चतुर्थांश में स्थित है, जोकि z का वास्तविक तथा काल्पनिक दोनों भाग ऋणात्मक हैं।

$\therefore \arg(z) = -\pi + \theta = -\pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}$

प्रश्न 2. $z = -\sqrt{3} + i$

हल $|z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

$\tan \theta = \left| \frac{1}{-\sqrt{3}} \right| = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan \frac{\pi}{6} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$

चैकि z का वास्तविक भाग ऋणात्मक तथा काल्पनिक भाग घनात्मक है। अतः बिंदु तृतीय चतुर्थांश में स्थित होगा।

$\therefore \arg(z) = \pi - \theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

जौट जब हम z का कोणांक ज्ञात करते हैं, तब हमें यह अच्छी तरह से निश्चित कर सका चाहिए कि बिंदु कौन-से चतुर्थांश में स्थित है।

निर्देश (प्र. सं. 3-8) सम्मिक्र संख्याओं में प्रत्येक को मूलीय रूप में रूपांतरित कीजिए।

(प्र. सं. 3-8) किसी सम्मिक्र संख्या को मूलीय रूप में परिवर्तन करने के लिए, हम सम्मिक्र संख्या z को $r \cos \theta + ir \sin \theta$ के बाबर रख देते हैं, तत्परताहूँ दोनों पक्षों में वास्तविक तथा काल्पनिक भागों की तुलना करते हैं और r तथा θ के मानों के लिए सरल करते हैं।

प्रश्न 3. $1 - i$

हल नाम $z = 1 - i$

तब $1 - i = r \cos \theta + ir \sin \theta$ रखने पर,

अब, दोनों पक्षों में वास्तविक तथा काल्पनिक भागों की तुलना करने पर,

$$1 = r \cos \theta \quad \dots(i)$$

$$-1 = r \sin \theta \quad \dots(ii)$$

अब, समी (i) तथा (ii) का वर्ग करके जोड़ने पर,

$$(1)^2 + (-1)^2 = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta$$

$$\Rightarrow r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 1 + 1 \quad (\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1)$$

$$\Rightarrow r^2 = 2 \Rightarrow r = \sqrt{2}$$

अब, समी (ii) को समी (i) से भाग देने पर,

$$\frac{r \sin \theta}{r \cos \theta} = \frac{-1}{1} \Rightarrow \tan \theta = |-1| = 1$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \tan \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

चूंकि z का वास्तविक भाग धनात्मक तथा काल्पनिक भाग ऋणात्मक है, अतः शिरु चतुर्थ छतुर्थशंका में स्थित है।

$$\therefore \arg(z) = -\theta = \left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{अंततः } z = 1 - i = \sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right]$$

जोड़कि $(1 - i)$ का आवश्यक प्राचीय रूप है।

प्रश्न 4. $-1+i$

हल माना $z = -1+i$

तब, $-1+i = r \cos \theta + i \sin \theta$ रखने पर,

अब, दोनों ओर में वास्तविक तथा काल्पनिक भागों की तुलना करने पर,

$$-1 = r \cos \theta \quad \dots(i)$$

$$\text{तथा} \quad 1 = r \sin \theta \quad \dots(ii)$$

अब, समी (i) तथा (ii) का वर्ग करके जोड़ने पर,

$$(-1)^2 + (1)^2 = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta$$

$$\Rightarrow r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 1+1$$

$$\Rightarrow r^2 = 2 \quad (\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1)$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{2}$$

अब, समी (ii) को समी (i) से भाग देने पर,

$$\frac{r \sin \theta}{r \cos \theta} = \left| \frac{-1}{-1} \right| = 1 \Rightarrow \tan \theta = 1 = \tan \frac{\pi}{4}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

चूंकि z का वास्तविक भाग ऋणात्मक तथा काल्पनिक भाग धनात्मक है, अतः शिरु द्वितीय छतुर्थशंका में स्थित है।

$$\therefore \arg(z) = \pi - \theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{अंततः } z = -1+i = \sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right]$$

जोड़कि $(-1+i)$ का आवश्यक प्राचीय रूप है।

प्रश्न 5. $-1-i$

हल माना $z = -1-i$

तथा $-1-i = r \cos \theta + i \sin \theta$ रखने पर,

अब, दोनों ओर में वास्तविक तथा काल्पनिक भागों की तुलना करने पर,

$$-1 = r \cos \theta \quad \dots(i)$$

$$\text{तथा} \quad -1 = r \sin \theta \quad \dots(ii)$$

अब, समी (i) तथा (ii) का वर्ग करके जोड़ने पर,

$$r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = (-1)^2 + (-1)^2$$

$$\Rightarrow r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 1 + 1$$

$$\Rightarrow r^2 = 2$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{2}$$

अब, समी (ii) को समी (i) से भाग देने पर,

$$\frac{r \sin \theta}{r \cos \theta} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$\Rightarrow \tan \theta = 1$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \tan \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

जैसे कि z का वास्तविक तथा काल्पनिक भाग दोनों ऋणात्मक हैं, अतः विंदु त्रिवीय चतुर्थीश में स्थित है।

$$\therefore \arg(z) = -\pi + \theta = -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$$

$$\text{अंततः: } z = -1 - i = \sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \right]$$

जैसे कि $(-1 - i)$ का आवश्यक ध्रुवीय रूप है।

प्र० 6. -3

हल माना $z = -3 + 0i$

तथा $-3 + 0i = r \cos \theta + ir \sin \theta$ रखने पर,

अब, दोनों पक्षों में वास्तविक तथा काल्पनिक भागों की तुलना करने पर,

$$r \cos \theta = -3$$

$$r \sin \theta = 0$$

... (i)

... (ii)

अब, समी (i) तथा (ii) का वर्ग करके जोड़ने पर,

$$r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = (-3)^2 + (0)^2$$

$$\Rightarrow r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 9$$

$$\Rightarrow r^2 = 9$$

($\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$)

$$\Rightarrow r = 3$$

अब, समी (ii) को समी (i) से भाग देने पर,

$$\frac{r \sin \theta}{r \cos \theta} = \frac{0}{-3}$$

$$\Rightarrow \tan \theta = 0 = \tan 0^\circ \Rightarrow \theta = 0^\circ$$

जैसे कि z का वास्तविक भाग ऋणात्मक तथा काल्पनिक भाग घनात्मक है, अतः विंदु द्वितीय चतुर्थीश में स्थित है।

$$\therefore \arg(z) = \pi - \theta = \pi - 0 = \pi$$

$$\text{अंततः: } z = -3 + 0i = 3 [\cos \pi + i \sin \pi]$$

जैसे कि (-3) का आवश्यक ध्रुवीय रूप है।

प्रश्न 7. $\sqrt{3} + i$

हल माना $z = \sqrt{3} + i$

तथा $\sqrt{3} + i = r \cos \theta + i \sin \theta$ रखने पर,

अब, दोनों पक्षों में वास्तविक तथा काल्पनिक भागों की तुलना करने पर, हम पाते हैं कि

$$r \cos \theta = \sqrt{3} \quad \dots(i)$$

$$r \sin \theta = 1 \quad \dots(ii)$$

अब, सभी (i) तथा (ii) का वर्ग करके जोड़ने पर,

$$r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = (\sqrt{3})^2 + (1)^2$$

$$\Rightarrow r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 3 + 1 = 4$$

$$\Rightarrow r^2 = 4$$

$$\Rightarrow r = 2$$

अब, सभी (ii) को सभी (i) से भाग देने पर,

$$\frac{r \sin \theta}{r \cos \theta} = \left| \frac{1}{\sqrt{3}} \right| \Rightarrow \tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

इसीके ज्ञान के वास्तविक तथा काल्पनिक भाग दोनों घनात्मक हैं, अतः विद्यु प्रदर्शन एवं अनुरूपीय में स्थित है।

$$\therefore \arg(z) = \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{अतः: } z = \sqrt{3} + i = 2 \left[\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right]$$

जोकि $(\sqrt{3} + i)$ का ज्ञानशक्ति घुणीय रूप है।

प्रश्न 8. i

हल माना $z = i = 0 + i$ तथा $0 + i = r \cos \theta + i \sin \theta$ रखने पर,

अब, दोनों पक्षों में वास्तविक तथा काल्पनिक भागों की तुलना करने पर,

$$r \cos \theta = 0 \quad \dots(i)$$

$$\text{तथा} \quad r \sin \theta = 1 \quad \dots(ii)$$

अब, सभी (i) तथा (ii) का वर्ग करके जोड़ने पर,

$$r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = (0)^2 + (1)^2$$

$$\Rightarrow r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 1$$

$$\Rightarrow r^2 = 1$$

$$\Rightarrow r = 1$$

अब, सभी (ii) को सभी (i) से भाग देने पर,

$$\frac{r \sin \theta}{r \cos \theta} = \left| \frac{1}{0} \right|$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \infty = \tan \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

चूंकि z का वास्तविक तथा काल्पनिक भाग दोनों अवश्यक हैं, अतः विन्दु प्रथम चतुर्थांश में स्थित है।

$$\therefore \arg(z) = \theta = \frac{\pi}{2}$$

अतः

$$z = 0 + i = 1 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

जोकि i का आवश्यक छुटीय रूप है।

जोट (प्र. सं. 3 - 8) उपरोक्त प्रश्नों में विद्यार्थी कोणाक का मान अंतराल $-\pi < \theta \leq \pi$ (लंबाई 2π) में लेना न मूले अर्थात् प्रथम, द्वितीय, तृतीय तथा चतुर्थ चतुर्थांश के लिए
क्रमशः $\theta, \pi - \theta, -\pi + \theta$ तथा $-\theta$ मुख्य मान होंगे।

प्रश्नावली 5.3

निर्देश (प्र. सं. 1 - 10) निम्नलिखित समीकरणों में से प्रत्येक को हल कीजिए।

(प्र. सं. 1 - 10) यदि द्विपाल समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ वास्तविक गुणाकों a, b, c के साथ तथा $a \neq 0$ है। तब,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{यदि } b^2 - 4ac > 0$$

$$\text{तथा} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2} \pm i}{2a} \quad \text{यदि } b^2 - 4ac < 0 \text{ का प्रयोग करेंगे।}$$

प्रश्न 1. $x^2 + 3 = 0$

हल दिया है, $x^2 + 3 = 0$

$$\therefore x^2 = -3 \Rightarrow x = \pm \sqrt{-3} = \pm i\sqrt{3}$$

प्रश्न 2. $2x^2 + x + 1 = 0$

हल दिया है, $2x^2 + x + 1 = 0$

उपरोक्त समीकरण की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 2, b = 1, c = 1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 1 - 8 = -7 < 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2 \times 2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{4} \quad (\because \sqrt{-1} = i)$$

प्रश्न 3. $x^2 + 3x + 9 = 0$

हल दिया है, $x^2 + 3x + 9 = 0$

उपरोक्त समीकरण की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 1, b = 3, c = 9$$

अब, $D = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4 \times 1 \times 9 = 9 - 36 = -27 < 0$

$$\Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{-27}}{2 \times 1}, \quad x = \frac{-3 \pm i\sqrt{27}}{2} \\ = \frac{-3 \pm i\sqrt{9 \times 3}}{2} = \frac{-3 \pm i3\sqrt{3}}{2}$$

($\because \sqrt{-1} = i$)

प्रश्न 4. $-x^2 + x - 2 = 0$

हल दिया है, $-x^2 + x - 2 = 0$

उपरोक्त समीकरण की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = -1, b = 1, c = -2$$

अब, $D = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times (-1) \times (-2) = 1 - 4 \times 1 \times 2 = 1 - 8 = -7 < 0$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2 \times (-1)} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{-2}$$

($\because \sqrt{-1} = i$)

प्रश्न 5. $x^2 + 3x + 5 = 0$

हल दिया है, $x^2 + 3x + 5 = 0$

उपरोक्त समीकरण की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 1, b = 3, c = 5$$

अब, $D = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 9 - 20 = -11 < 0$

$$\Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{-11}}{2 \times 1} \\ x = \frac{-3 \pm i\sqrt{11}}{2}$$

($\because \sqrt{-1} = i$)

प्रश्न 6. $x^2 - x + 2 = 0$

हल दिया है, $x^2 - x + 2 = 0$

उपरोक्त समीकरण की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 1, b = -1, c = 2$$

अब, $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1 - 8 = -7 < 0$

$$\Rightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{-7}}{2 \times 1} = \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}$$

($\because \sqrt{-1} = i$)

प्रश्न 7. $\sqrt{2}x^2 + x + \sqrt{2} = 0$

हल दिया है, $\sqrt{2}x^2 + x + \sqrt{2} = 0$

उपरोक्त समीकरण की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = \sqrt{2}, b = 1, c = \sqrt{2}$$

$\therefore D = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 1 - 4 \times 2 = 1 - 8 = -7 < 0$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2 \times \sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$$

($\because \sqrt{-1} = i$)

प्रश्न 8. $\sqrt{3}x^2 - \sqrt{2}x + 3\sqrt{3} = 0$

हल दिया है, $\sqrt{3}x^2 - \sqrt{2}x + 3\sqrt{3} = 0$

उपरोक्त समीकरण की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = \sqrt{3}, b = -\sqrt{2}, c = 3\sqrt{3}$$

अब, $D = b^2 - 4ac = (-\sqrt{2})^2 - 4 \times (\sqrt{3}) \times 3\sqrt{3}$

$$= 2 - 4 \times 3 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 2 - 12 \times 3 = 2 - 36 = -34 < 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-(-\sqrt{2}) \pm \sqrt{-34}}{2 \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} \pm i\sqrt{34}}{2\sqrt{3}} \quad (\because \sqrt{-1} = i)$$

प्रश्न 9. $x^2 + x + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$

हल दिया है, $x^2 + x + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$

उपरोक्त समीकरण की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 1, b = 1, c = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

अब, $D = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{4}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$$= 1 - \frac{4\sqrt{2}}{2} = 1 - 2\sqrt{2} < 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-2\sqrt{2}}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-1 \pm i\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2} \quad (\because \sqrt{-1} = i)$$

प्रश्न 10. $x^2 + \frac{x}{\sqrt{2}} + 1 = 0$

हल दिया है, $x^2 + \frac{x}{\sqrt{2}} + 1 = 0$

उपरोक्त समीकरण में दोनों पक्षों में $\sqrt{2}$ से गुणा करने पर,

$$\sqrt{2}x^2 + x + \sqrt{2} = 0$$

समीकरण की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = \sqrt{2}, b = 1, c = \sqrt{2}$$

अब, $D = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 1 - 4 \times 2 = 1 - 8 = -7 < 0$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2 \times \sqrt{2}}$$

$$= \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} \quad (\because \sqrt{-1} = i)$$

विविध प्रश्नावली

प्रश्न 1. $\left[i^{18} + \left(\frac{1}{i}\right)^{25}\right]^3$ का मान ज्ञात कीजिए।

सर्वधम इसे हल करने के लिए, हम i की घात को 2 या 4 के गुणक रूप में बदलेंगे तथा $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$ का प्रयोग करके इसे हल करेंगे। तत्पश्चात् तूरं $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$ का प्रयोग करेंगे।

$$\begin{aligned}
 \text{हल} \quad & \left[i^{18} + \left(\frac{1}{i}\right)^{25}\right]^3 = \left[\left(i^2\right)^9 + \frac{1}{i^{25}}\right]^3 = \left[\left(i^2\right)^9 + \frac{1}{i \cdot i^{24}}\right]^3 \\
 & = \left[(-1)^9 + \frac{1}{i \cdot (i^4)^6}\right]^3 \quad (\because i^2 = -1) \\
 & = \left[-1 + \frac{1}{i}\right]^3 \quad (\because i^4 = 1) \\
 & = \left[-1 + \frac{1}{i} \times \frac{i}{i}\right]^3 = \left[-1 + \frac{i}{i^2}\right]^3 \\
 & = [-1 - i]^3 \quad (\because i^2 = -1) \\
 & = (-1)^3 [1+i]^3 \\
 & = -[(1)^3 + i^3 + 3 \times 1 \times i(1+i)] \quad [\because (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)] \\
 & = -(1 - i + 3i + 3i^2) \quad (\because i^3 = -i) \\
 & = -(1 - i + 3i - 3) \quad (\because i^2 = -1) \\
 & = -(-2 + 2i) = 2 - 2i
 \end{aligned}$$

नोट: विद्यार्थियों से आश्रह किया जाता है कि व्यंजक का शुल्कात में यह न करें अर्थात् शुल्कात में तूरं $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$ का प्रयोग न करें, ऐसा करने से गणना फटिल हो जाती है।

प्रश्न 2. किन्हीं दो सम्प्रक्ष संख्याओं z_1 और z_2 के लिए, सिद्ध कीजिए

$$\operatorname{Re}(z_1 z_2) = \operatorname{Re}(z_1) \operatorname{Re}(z_2) - \operatorname{Im}(z_1) \operatorname{Im}(z_2)$$

हल माना $z_1 = a + ib$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(z_1) = a \text{ तथा } \operatorname{Im}(z_1) = b \quad \dots (i)$$

$$\text{तथा } z_2 = c + id \quad \dots (ii)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(z_2) = c \text{ तथा } \operatorname{Im}(z_2) = d$$

$$\begin{aligned}
 \text{अब, } z_1 z_2 &= (a+ib)(c+id) = ac + iad + ibc + i^2 bd \\
 &= ac + i(ad+bc) - bd \quad (\because i^2 = -1)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow z_1 z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(z_1 z_2) = ac - bd$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(z_1 z_2) = \operatorname{Re}(z_1) \operatorname{Re}(z_2) - \operatorname{Im}(z_1) \operatorname{Im}(z_2) \quad [\text{सभी (i) तथा (ii) से}]$$

यहाँ में Re कास्तविक भाग तथा Im काल्पनिक भाग को निरूपित करता है।

प्रश्न 3. $\left(\frac{1}{1-4i} - \frac{2}{1+i}\right)\left(\frac{3-4i}{5+i}\right)$ को मानक रूप में परिवर्तित कीजिए।

सर्वप्रथम हम व्यंजक का लघुतम समाप्तकार्ड लेंगे तत्पदात् व्यंजक के हर को शुद्ध वास्तविक संख्या के रूप में परिवर्तित करेंगे।

$$\begin{aligned} \text{हल } & \left(\frac{1}{1-4i} - \frac{2}{1+i}\right)\left(\frac{3-4i}{5+i}\right) = \frac{\{1+i-2(1-4i)\}}{(1-4i)(1+i)} \times \left(\frac{3-4i}{5+i}\right) \\ & = \frac{1+i-2+8i}{1+i-4i-4i^2} \times \frac{3-4i}{5+i} \\ & = \frac{(1-2)+i(1+8)}{1+i(1-4)-4(-1)} \times \frac{3-4i}{5+i} \quad (\because i^2 = -1) \\ & = \frac{-1+9i}{5-3i} \times \frac{3-4i}{5+i} = \frac{-3+4i+27i-36i^2}{25+5i-15i-3i^2} \\ & = \frac{-3+i(4+27)-36(-1)}{25+(5-15)i-3(-1)} \quad (\because i^2 = -1) \\ & = \frac{-3+31i+36}{25-10i+3} = \frac{33+31i}{28-10i} \times \frac{28+10i}{28+10i} \\ & = \frac{924+330i+868i+310i^2}{784-100i^2} \quad [\because (a+b)(a-b)=a^2-b^2] \\ & = \frac{924+(330+868)i-310}{784+100} \quad (\because i^2 = -1) \\ & = \frac{614+1196i}{884} = \frac{307+i599}{442} \end{aligned}$$

प्रश्न 4. यदि $z - iy = \sqrt{\frac{a-ib}{c-id}}$, तो सिद्ध कीजिए कि $(x^2 + y^2) = \frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}$

आवश्यक व्यंजक को सिद्ध करने के लिए, सर्वप्रथम हम दिए गए व्यंजक के दोनों पक्षों का मापांक लेंगे, तत्पदात् निम्न गुण का प्रयोग करेंगे।

$$|z|^2 = |z^2| \quad \text{तथा} \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$\begin{aligned} \text{हल } & \text{दिया है, } z - iy = \sqrt{\frac{a-ib}{c-id}} \\ \Rightarrow & z + i(-y) = \left(\frac{a-ib}{c-id}\right)^{1/2} \end{aligned}$$

दोनों पक्षों का मापांक लेने पर,

$$|x + i(-y)| = \left| \left(\frac{a - ib}{c - id} \right)^{\frac{1}{2}} \right|$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \left| \frac{a - ib}{c - id} \right|^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\because |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} \right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \left| \frac{a - ib}{c - id} \right|^{\frac{1}{2}}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$$x^2 + y^2 = \left| \frac{a - ib}{c - id} \right|$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = \left| \frac{a - ib}{c - id} \right|$$

$$\left(\because \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \left| z_1 \right| \right)$$

$$\Rightarrow (x^2 + y^2) = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{c^2 + d^2}}$$

$$(x^2 + y^2)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}$$

$$\left(\because |x - iy| = \sqrt{x^2 + y^2} \right)$$

नोट कृत्या साधानी रखें कि, दिए हुए व्यजक में दोनों पक्षों का वर्ग करके वास्तविक तथा कल्पनिक भाग तुलना के द्वारा x व y के पृथक्-पृथक् भागों को ज्ञात करने की विधि बहुत जटिल व समय लेने वाली है, इसलिए विद्यार्थियों को सलाह दी जाती है कि इस विधि का प्रयोग करें।

प्रस्तुति 5. निम्नलिखित को धूम्रधूम रूप में परिवर्तित कीजिए।

$$(i) \frac{1+7i}{(2-i)^2} \quad (ii) \frac{1+3i}{1-2i}$$

सर्वप्रथम दिए गए व्यजक को $a + ib$ के रूप में बदलेंगे, तत्परतात् प्राप्त $a + ib$ को धूम्रधूम रूप में परिवर्तित करेंगे।

हल (i) माना $z = \frac{1+7i}{(2-i)^2} = \frac{1+7i}{4+i^2-4i} = \frac{1+7i}{4-1-4i}$ $\left[\because (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \right]$

$$= \frac{1+7i}{3-4i} \times \frac{3+4i}{3+4i} = \frac{3+4i+21i+28i^2}{(3)^2-(4i)^2} \quad \left[\because (a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \right]$$

$$= \frac{3+i(4+21)-28}{9-16i^2} = \frac{-25+25i}{9+16} \quad \left(\because i^2 = -1 \right)$$

$$z = \frac{-25 + 25i}{25} = -1 + i$$

अब, माना $-1 + i = r \cos \theta + ir \sin \theta$

अब, दोनों पक्षों में वास्तविक व काल्पनिक भागों की तुलना करने पर,

$$r \cos \theta = -1 \quad \dots(i)$$

तथा

$$r \sin \theta = 1 \quad \dots(ii)$$

सभी (i) तथा (ii) का वर्ग करके जोड़ने पर,

$$r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = (-1)^2 + (1)^2$$

$$r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 1 + 1$$

$$\Rightarrow r^2 = 2 \quad (\because \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1)$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{2}$$

सभी (ii) को सभी (i) से भाग देने पर,

$$\frac{r \sin \theta}{r \cos \theta} = \left| \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right| \Rightarrow \tan \theta = 1 = \tan \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

धैर्यक 2 का वास्तविक भाग घणात्मक तथा काल्पनिक भाग घणात्मक है। अतः विटु द्वितीय चतुर्थांश में स्थित है।

$$\therefore \operatorname{arg}(z) = \pi - \theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$\therefore z = -1 + i = \sqrt{2} \left[\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right]$$

जोकि $\frac{1+7i}{(2-i)^2}$ का आपरयक ध्रुवीय रूप है।

$$(ii) \text{माना } z = \frac{1+3i}{1-2i} \times \frac{1+2i}{1+2i} = \frac{1+2i+3i+3i \times 2i}{1^2 - (2i)^2} \quad [\because (a+b)(a-b) = a^2 - b^2]$$

$$= \frac{1+5i+6i^2}{1-4i^2} \quad (\because i^2 = -1)$$

$$= \frac{1+5i-6}{1+4} = \frac{-5+5i}{5} = -1+i$$

अब, आगे प्रथम भाग की भौति करें।

निर्देश (प्र. सं. 6 - 9) दिए गए प्रत्येक समीकरण को हल करें।

(प्र. सं. 6 - 9) यदि दिशात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ वास्तविक गुणांकों a, b, c के साथ तथा $a \neq 0$ है। तब,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \text{यदि } b^2 - 4ac > 0$$

$$\text{तथा } x = \frac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2} - i}{2a}, \quad \text{यदि } b^2 - 4ac < 0 \text{ का प्रयोग करेंगे।}$$

प्रश्न 6. $3x^2 - 4x + \frac{20}{3} = 0$

हल दिया है, $3x^2 - 4x + \frac{20}{3} = 0$

उपरोक्त समीकरण की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 3, b = -4, c = \frac{20}{3}$$

$$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 3 \times \frac{20}{3} = 16 - 80 = -64 < 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{-64}}{2 \times 3} = \frac{4 \pm 8i}{2 \times 3} = \frac{2(2 \pm 4i)}{2 \times 3} = \frac{2 \pm 4i}{3} = \frac{2}{3} \pm \frac{4}{3}i$$

प्रश्न 7. $x^2 - 2x + \frac{3}{2} = 0$

हल दिया है, $x^2 - 2x + \frac{3}{2} = 0$

उपरोक्त समीकरण की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 1, b = -2, c = \frac{3}{2}$$

$$\therefore D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times \frac{3}{2} = 4 - 6 = -2 < 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{-2}}{2 \times 1} = \frac{2 \pm i\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \frac{i\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

प्रश्न 8. $27x^2 - 10x + 1 = 0$

हल दिया है, $27x^2 - 10x + 1 = 0$

उपरोक्त समीकरण की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 27, b = -10, c = 1$$

$$\therefore D = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \times 27 \times 1 = 100 - 108 = -8 < 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{-8}}{2 \times 27} = \frac{10 \pm 2\sqrt{2}i}{2 \times 27} = \frac{2(5 \pm \sqrt{2}i)}{2 \times 27} = \frac{5}{27} \pm \frac{\sqrt{2}i}{27}$$

प्रश्न 9. $21x^2 - 28x + 10 = 0$

हल दिया है, $21x^2 - 28x + 10 = 0$

उपरोक्त समीकरण की तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 21, b = -28, c = 10$$

$$\therefore D = b^2 - 4ac = (-28)^2 - 4 \times 21 \times 10 = 784 - 840 = -56 < 0$$

$$x = \frac{-(-28) \pm \sqrt{-56}}{2 \times 21} = \frac{28 \pm \sqrt{14 \times 4i}}{2 \times 21}$$

$$= \frac{28}{2 \times 21} \pm \frac{2\sqrt{14}i}{2 \times 21} = \frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{14}i}{21}$$

प्रस्तुति 10. यदि $z_1 = 2 - i$, $z_2 = 1 + i$, तब $\left| \frac{z_1 + z_2 + 1}{z_1 - z_2 + 1} \right|$ का मान ज्ञात कीजिए।

सर्वप्रथम हम दिए गए व्यंजक में, z_1 तथा z_2 के मान रखेंगे, तत्परचाल व्यंजक को $a + ib$ के रूप में परिवर्तित करेंगे तथा आवश्यक मापांक के गुणों का प्रयोग करके इसे हल करेंगे।

$$\begin{aligned}\text{हल } \left| \frac{z_1 + z_2 + 1}{z_1 - z_2 + 1} \right| &= \left| \frac{2 - i + 1 + i + 1}{2 - i - (1 + i) + 1} \right| && (\because z_1 = 2 - i, z_2 = 1 + i) \\ &= \left| \frac{4}{2 - 2i} \right| = \left| \frac{2}{1 - i} \right| = \frac{2}{|1 - i|} && \left[\because \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \right] \\ &= \frac{2}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}} && (\because |z| = \sqrt{a^2 + b^2}) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\end{aligned}$$

प्रस्तुति 11. यदि $a + ib = \frac{(x+i)^2}{2x^2+1}$, तो सिद्ध कीजिए कि $a^2 + b^2 = \frac{(x^2+1)^2}{(2x^2+1)^2}$

$$\text{हल } \text{दिया है, } a + ib = \frac{(x+i)^2}{2x^2+1}$$

दोनों ओर मापांक लेने पर,

$$\begin{aligned}|a + ib| &= \left| \frac{(x+i)^2}{2x^2+1} \right| \\ \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} &= \frac{|(x+i)^2|}{|2x^2+1|} = \frac{|x+i|^2}{2x^2+1} \\ &\quad \left[\because \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, |z^n| = |z|^n \text{ तथा } \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z) \right] \\ \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} &= \frac{\sqrt{x^2+1}^2}{2x^2+1}\end{aligned}$$

दोनों ओर वर्ग करने पर,

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = \frac{(x^2+1)^2}{(2x^2+1)^2}$$

नोट: विद्यार्थी कृपया ध्यान रखें कि दिए हुए व्यंजक के दोनों पक्षों के वास्तविक तथा काल्पनिक भागों की तुलना के द्वारा x व y के पृथक्-पृथक् मान ज्ञात करने की विधि बहुत जटिल व लंबी होगी तथा इसमें बहुत समय व्यर्थ होगा। अतः विद्यार्थियों को सलाह दी जाती है कि इस विधि का प्रयोग कम-से-कम करें।

प्रश्न 12. माना $z_1 = 2 - i$, $z_2 = -2 + i$, विन्म का मान निकालिए।

$$(i) \operatorname{Re}\left(\frac{z_1 z_2}{\bar{z}_1}\right)$$

$$(ii) \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z_1 \bar{z}_2}\right)$$

- (i) सर्वप्रथम दिए गए व्यंजक में z_1 व z_2 तथा z_1 के संयुग्मी का मान रखकर हसे $a + ib$ के रूप में सरल करेंगे, तत्पश्चात् प्राप्त $a + ib$ का काल्पनिक भाग ज्ञात करेंगे।
- (ii) सर्वप्रथम हम मापांक के गुण $z\bar{z} = |z|^2$ का प्रयोग करके व्यंजक को $a + ib$ के रूप में परिवर्तित करेंगे, तत्पश्चात् $a + ib$ का काल्पनिक भाग ज्ञात करेंगे।

हल

$$\begin{aligned} (i) \quad \frac{z_1 z_2}{\bar{z}_1} &= \frac{(2-i)(-2+i)}{(2-i)} = \frac{-(2-i)(2-i)}{(2+i)} \quad (\because z_1 = 2-i, z_2 = -2+i) \\ &= \frac{-(2-i)^2}{2+i} = \frac{-(4+i^2-4i)}{2+i} = \frac{-(4-1-4i)}{2+i} \quad (\because z = a+ib \Rightarrow \bar{z} = a-ib) \\ &= \frac{-(3-4i)}{2+i} \times \frac{2-i}{2-i} \quad (\because i^2 = -1) \\ &= \frac{-(6-3i-8i+4i^2)}{(2)^2 - (i)^2} \quad [(\because (a+b)(a-b) = (a^2 - b^2))] \\ &= \frac{-(6-11i-4)}{4-i^2} \quad (\because i^2 = -1) \\ &= \frac{-(2-11i)}{4+1} \quad (\because i^2 = -1) \\ &= -\left(\frac{2}{5} - \frac{11}{5}i\right) = -\frac{2}{5} + \frac{11}{5}i \\ \therefore \operatorname{Re}\left(\frac{z_1 z_2}{\bar{z}_1}\right) &= -\frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$(ii) \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z_1 \bar{z}_2}\right)$$

\therefore

\Rightarrow

\therefore

$$z\bar{z} = |z|^2 \Rightarrow z_1 \bar{z}_1 = |z_1|^2$$

$$z_1 \bar{z}_1 = |-2+i|^2 = (\sqrt{4+1})^2 = 5 + 0i$$

$$\frac{1}{z_1 \bar{z}_1} = \frac{1}{5} + 0i$$

\Rightarrow

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z_1 \bar{z}_2}\right) = 0$$

प्रश्न 13. सम्मिश्र संख्या $\frac{1+2i}{1-3i}$ का मापांक और कोणांक ज्ञात कीजिए।

सर्वप्रथम हम दिए व्यंजक को $a+ib$ के रूप में परिवर्तित करेंगे, तत्पश्चात् प्राप्त $a+ib$ का मापांक व कोणांक ज्ञात करेंगे।

हल माना $z = \frac{1+2i}{1-3i}$

$$\therefore z = \frac{1+2i}{1-3i} \times \frac{1+3i}{1+3i} = \frac{1+3i+2i+6i^2}{1^2 - (3i)^2} \quad [\because (a+b)(a-b) = a^2 - b^2]$$

$$= \frac{1+5i+6(-1)}{1-9i^2} \quad (\because i^2 = -1)$$

$$= \frac{1+5i-6}{1+9} = \frac{-5+5i}{10} = \frac{-1+i}{2} \Rightarrow z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$\therefore |z| = \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \quad (\because |a+bi| = \sqrt{a^2 + b^2})$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

अब, $\tan \theta = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{vmatrix} \quad \left[\because \theta = \tan^{-1} \left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)} \right) \right]$

$$\Rightarrow \tan \theta = 1 = \tan \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

चूंकि z का वास्तविक भाग ऋणात्मक तथा काल्पनिक भाग धनात्मक है, अतः बिंदु द्वितीय चतुर्थांश में स्थित है।

$$\therefore \arg(z) = \pi - \theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

अंततः मापांक $= \frac{1}{\sqrt{2}}$ तथा कोणांक $(z) = \frac{3\pi}{4}$

प्रश्न 14. यदि $(x-iy)(3+5i), (-6-24i)$ की संयुगमी है, तो वास्तविक संख्याएँ x और y ज्ञात कीजिए।

बर्जक $(x-iy)(3+5i)$ तथा $(-6-24i)$ के संयुगमी में वास्तविक तथा काल्पनिक भागों की तुलना करके, हम x तथा y के मान ज्ञात करेंगे।

हल $(x-iy)(3+5i) = 3x + 5xi - 3yi - 5y^2$

$$= 3x + (5x - 3y)i + 5y \quad (\because i^2 = -1) \\ = (3x + 5y) + i(5x - 3y) \quad \dots (i)$$

दिया है, $(x-iy)(3+5i) = \overline{(-6-24i)}$

$$\Rightarrow (3x + 5y) + i(5x - 3y) = -6 + 24i$$

[सभी (i) तथा $z = (a+bi) \Rightarrow \bar{z} = (a-bi)$ का प्रयोग करने पर]

अब, दोनों पहली में वास्तविक तथा काल्पनिक भागों की तुलना करने पर,

$$3x + 5y = -6$$

तथा $5x - 3y = 24$

अब, प्रतिस्पर्शपन या विलोपन विधि के द्वारा उपरोक्त समीकरणों को हल करने पर,

$$x = 3 \text{ तथा } y = -3$$

प्रश्न 15. $\frac{1+i}{1-i} - \frac{1-i}{1+i}$ का मापांक ज्ञात कीजिए।

सर्वप्रथम हम दिए गए व्यंजक को इसके मानक रूप $a+ib$ में परिवर्तित करेंगे, तत्परतात् हम इसका मापांक ज्ञात करेंगे।

$$\text{हल} \quad \text{माना} \quad z = \frac{1+i}{1-i} - \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1+i)^2 - (1-i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{(1+i^2 + 2i) - (1+i^2 - 2i)}{1-i^2} \\ = \frac{4i}{2} = 2i = 0+2i \quad \left[\because (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \right] \\ \therefore |z| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2 \quad \left[\text{तथा } (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \right]$$

प्रश्न 16. यदि $(x+iy)^2 = u+iv$, तो दर्शाइए कि $\frac{u}{x} + \frac{v}{y} = 4(x^2 - y^2)$

सर्वप्रथम हम दिए गए व्यंजक के कार्य पक्ष में सूत्र $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab(a+b)$ का प्रयोग करेंगे, तत्परतात् दोनों पक्षों में वास्तविक तथा काल्पनिक भागों की तुलना करेंगे।

$$\text{हल} \quad (x+iy)^2 = u+iv \Rightarrow x^2 + (iy)^2 + 3x\bar{y}(x+iy) = u+iv \\ \Rightarrow x^2 + i^2 y^2 + 3x^2 y + 3xy^2 i^2 = u+iv \\ \Rightarrow x^2 - iy^2 + 3x^2 y - 3xy^2 = u+iv \quad (\because i^2 = -1, i^3 = -i) \\ \Rightarrow (x^2 - 3xy^2) + i(3x^2 y - y^2) = u+iv$$

अब, वास्तविक तथा काल्पनिक भागों की तुलना करने पर,

$$x^2 - 3xy^2 = u \quad \text{तथा} \quad 3x^2 y - y^2 = v \\ \therefore \frac{u}{x} + \frac{v}{y} = \frac{x^2 - 3xy^2}{x} + \frac{3x^2 y - y^2}{y} \\ = x^2 - 3y^2 + 3x^2 y - y^2 = 4x^2 - 4y^2 = 4(x^2 - y^2) \text{ इसी सिद्धम्}$$

प्रश्न 17. यदि α और β दिन सम्मत संख्याएँ हैं, जहाँ $|\beta| = 1$, तब $\left| \frac{\beta - \alpha}{1 - \bar{\alpha}\beta} \right|$ का मान ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल} \quad \left| \frac{\beta - \alpha}{1 - \bar{\alpha}\beta} \right| = \left| \frac{(\beta - \alpha)\bar{\beta}}{(1 - \bar{\alpha}\beta)\bar{\beta}} \right| = \left| \frac{(\beta - \alpha)\bar{\beta}}{\beta - \bar{\alpha}\beta\bar{\beta}} \right| \quad (\text{अंश तथा हर में } \bar{\beta} \text{ से गुणा करने पर}) \\ = \left| \frac{(\beta - \alpha)\bar{\beta}}{\beta - \bar{\alpha}} \right| \quad (\because \beta\bar{\beta} = |\beta|^2 = 1^2 = 1) \\ = \frac{|(\beta - \alpha)\bar{\beta}|}{|\beta - \bar{\alpha}|} \quad \left(\because \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \right) \\ = \frac{|\beta - \alpha||\bar{\beta}|}{|\beta - \bar{\alpha}|} \quad (\because |z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \text{ तथा } |\bar{z}_1 - \bar{z}_2| = |\overline{z_1 - z_2}|) \\ = \frac{|\beta - \alpha||\beta|}{|\beta - \bar{\alpha}|} \quad (\because |\bar{z}| = |z|) \\ = |\beta| = 1$$

नोट विद्यार्थियों को सलाह दी जाती है कि यहाँ पर व्यंजक में a तथा b के मान सम्मिलित संख्या के रूप में मानकर न रखें क्योंकि यह विधि बहुत लंबी व जटिल तथा अधिक समय लगने वाली होगी।

प्रश्न 18. समीकरण $|1-i|^x = 2^x$ के शून्येतर पूर्णक मूलों की संख्या ज्ञात कीजिए।

सर्वप्रथम हम दिए गए व्यंजक के बारे पक्ष का मापांक लेंगे, तत्परतात् दोनों पक्षों में घातों की तुलना करेंगे।

हल दिया है, $|1-i|^x = 2^x$

$$\Rightarrow (\sqrt{1^2 + (-1)^2})^x = 2^x \quad (\because |a+ib| = \sqrt{a^2 + b^2})$$

$$\Rightarrow (\sqrt{1+1})^x = 2^x$$

$$\Rightarrow (\sqrt{2})^x = 2^x \Rightarrow 2^{\frac{x}{2}} = 2^x$$

दोनों पक्षों में 2 की घात की तुलना करने पर,

$$\Rightarrow \frac{x}{2} = x \Rightarrow x = 2x \Rightarrow 2x - x = 0 \\ x = 0$$

परंतु हमें अशून्य हल की आवश्यकता है। अतः हलों की संख्या शून्य है।

नोट यहाँ, $x = 0$ एक हल को निस्त्रिप्त करता है। विद्यार्थियों को यहाँ शब्द 'हल' तथा 'हलों' की संख्या' के मध्य अंतर समझना अनिवार्य है।

प्रश्न 19. यदि $(a+ib)(c+id)(e+if)(g+ih) = A+iB$, तब सिद्ध कीजिए

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)(e^2 + f^2)(g^2 + h^2) = A^2 + B^2$$

दिए गए व्यंजक में सर्वप्रथम हम दोनों पक्षों का मापांक लेंगे, तत्परतात् मापांक के गुण का प्रयोग करेंगे।

हल $(a+ib)(c+id)(e+if)(g+ih) = A+iB$

दोनों पक्षों का मापांक लेने पर,

$$|(a+ib)(c+id)(e+if)(g+ih)| = |A+iB|$$

$$\Rightarrow |a+ib||c+id||e+if||g+ih| = |A+iB|$$

$$(\because |z_1 z_2 \dots z_n| = |z_1| |z_2| |z_3| \dots |z_n|)$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2} \sqrt{e^2 + f^2} \sqrt{g^2 + h^2} = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$(\because \text{यदि } z = a+ib, \text{ तब } |z| = \sqrt{a^2 + b^2})$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)(e^2 + f^2)(g^2 + h^2) = A^2 + B^2$$

प्रस्तुति 20. यदि $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^m = 1$, तब m का न्यूनतम घनात्मक पूर्णांक मान ज्ञात कीजिए।

सर्वप्रथम हम व्यजाक के बारे पढ़ा को देखके मानक रूप अर्थात् $a + bi$ में बदलेंगे, तत्परतात् दोनों पक्षों में यदि आधार समान है, तब उनकी घातों की तुलना करेंगे।

$$\begin{aligned}
 \text{हल} \quad & \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^m = 1 \Rightarrow \left[\frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i}\right]^m = 1 \\
 \Rightarrow & \left[\frac{(1+i)^2}{1-i^2}\right]^m = 1 \Rightarrow \left[\frac{1+i^2+2i}{1+1}\right]^m = 1 \\
 & [\because (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \text{ तथा } i^2 = -1] \\
 \Rightarrow & \left[\frac{1-1+2i}{2}\right]^m = 1 \\
 \Rightarrow & i^m = 1 \\
 \Rightarrow & (\sqrt{-1})^m = 1 \quad (\because i^2 = -1 \Rightarrow i = \sqrt{-1}) \\
 \Rightarrow & (-1)^{\frac{m}{2}} = (-1)^2
 \end{aligned}$$

दोनों पक्षों में घातों की तुलना करने पर, $\frac{m}{2} = 2 \Rightarrow m = 4$

अतः m का न्यूनतम घनात्मक पूर्णांक मान 4 है।

नोट 1 को हम $(-1)^2, (-1)^4, (-1)^6, \dots$ जादि के रूप में लिख सकते हैं यरेतु न्यूनतम मान हमें हम $(-1)^2$ लेंगे।