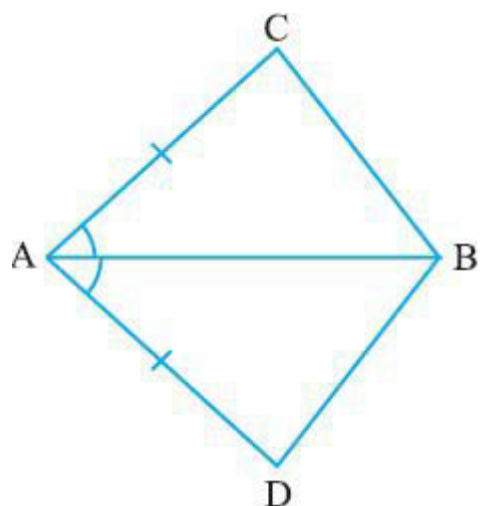


7. त्रिभुज

प्रश्नावली 7.1

Q1. चतुर्भुज ACBD में, $AC = AD$ है और AB, $\angle A$ को समद्विभाजित करता है | (see Fig. 7.16).
दर्शाइए $\triangle ABC \cong \triangle ABD$ है |

हल:



दिया है : $AC = AD$ और AB $\angle A$ को समद्विभाजित करता है |

सिद्ध करना : $\triangle ABC \cong \triangle ABD$.

प्रमाण :

$\triangle ABC$ तथा $\triangle ABD$ में,

$$AC = AD \quad [\text{दिया है}]$$

$$\angle CAB = \angle BAD \quad [AB \angle A \text{ समद्विभाजित करता है}]$$

$$AB = AB \quad [\text{उभयनिष्ठ}]$$

SAS सर्वांगसमता नियम से

$$\triangle ABC \cong \triangle ABD$$

$$BC = BD \quad [\text{CPCT}]$$

Q2. ABCD एक चतुर्भुज है जिसमें $AD = BC$ है और $\angle DAB = \angle CBA$ (see Fig.7.17) है | सिद्ध कीजिए कि :

(i) $\triangle ABD \cong \triangle BAC$

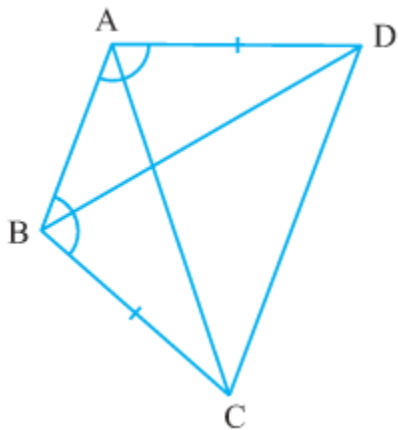
(ii) $BD = AC$

(iii) $\angle ABD = \angle BAC$

हल :

दिया है : ABCD एक चतुर्भुज है जिसमें $AD = BC$ और $\angle DAB = \angle CBA$ है।

सिद्ध करना है :



(i) $\triangle ABD \cong \triangle BAC$

(ii) $BD = AC$

(iii) $\angle ABD = \angle BAC$

प्रमाण :

(i) $\triangle ABD$ तथा $\triangle BAC$ में,

$$AD = BC \quad [\text{दिया है}]$$

$$\angle DAB = \angle CBA \quad [\text{दिया है}]$$

$$AB = AB \quad [\text{उभयनिष्ठ}]$$

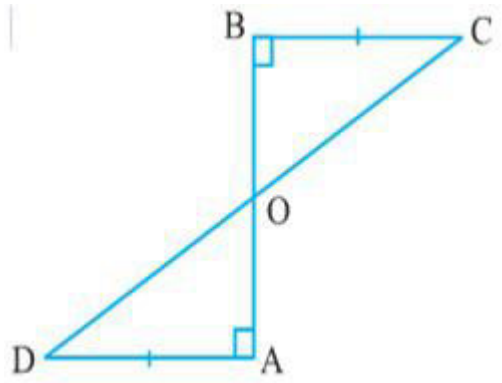
SAS सर्वांगसमता नियम से

$$\triangle ABD \cong \triangle BAC$$

(ii) $BD = AC$ [By CPCT]

(iii) $\angle ABD = \angle BAC$ [By CPCT]

Q3. एक रेखाखंड AB पर AD और BC दो बराबर लंब रेखाखंड हैं (देखिये आकृति 7.18) | दर्शाइए कि CD, AB रेखाखंड को समद्विभाजित करता है |



हल :

दिया है : $AD \perp AB$ और $BC \perp AB$ है और $AD = BC$ है |

सिद्ध करना है :

$AO = BO$ अर्थात् CD, AB रेखाखंड को समद्विभाजित करता है |

प्रमाण :

$\triangle AOD$ तथा $\triangle BOC$

$\angle AOD = \angle BOC$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$\angle DAO = \angle CBO$ (प्रत्येक 90°)

$BC = AD$ (दिया है)

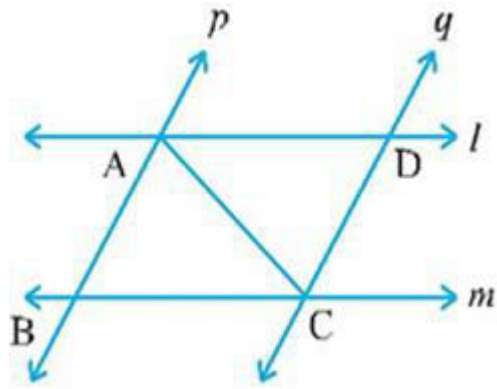
ASA सर्वांगसमता नियम से

$\triangle AOD \cong \triangle BOC$

$\therefore AO = BO$ (By CPCT)

अतः CD, AB रेखाखंड को समद्विभाजित करता है |

Q4. l और m दो समांतर रेखाएँ हैं जिन्हें समांतर रेखाओं p और q का एक अन्य युग्म प्रतिच्छेद करता है | दर्शाइए कि $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ है |



हल :

दिया है : $l \parallel m$ और $p \parallel q$ हैं जो एक दुसरे को A, B, C तथा D पर प्रतिच्छेद करते हैं।

सिद्ध करना है : $\triangle ABC \cong \triangle CDA$

प्रमाण :

$l \parallel m$ (1) दिया है।

$p \parallel q$ (2) दिया है।

समी० (1) तथा (2) से

ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।

अब, $\triangle ABC$ तथा $\triangle CDA$ में,

$BC = AD$ [समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजा]

$\angle B = \angle D$ [समांतर चतुर्भुज की सम्मुख कोण]

$AC = AC$ [दिया है]

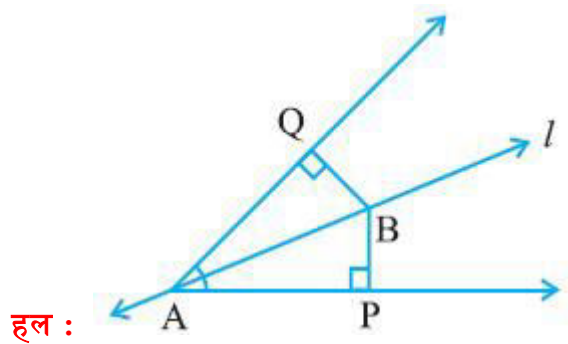
SAS सर्वांगसमता नियम से

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle CDA$ **Proved**

Q5. रेखा l कोण A को समद्विभाजित करती है और B रेखा l पर स्थित कोई बिंदु है। BP और BQ कोण A की भुजाओं पर B से डाले गए लम्ब हैं (देखिये आकृति 7.20) दर्शाइए कि :

(i) $\triangle APB \cong \triangle AQB$

(ii) $BP = BQ$ हैं, अर्थात् बिंदु B कोण की भुजाओं से समदूरस्थ है



हल :

दिया है : $\angle PAQ$ को रेखा l समद्विभाजित करती है और BP तथा BQ , AP तथा AQ पर क्रमशः लंब है।

सिद्ध करना है :

- (i) $\triangle APB \cong \triangle AQB$
- (ii) $BP = BQ$

प्रमाण :

- (i) $\triangle APB$ तथा $\triangle AQB$ में,

$$\angle APB = \angle AQB \text{ (90}^\circ \text{ प्रत्येक)}$$

$$\angle PAB = \angle QAB \text{ (दिया है)}$$

$$AB = AB \text{ (उभयनिष्ठ)}$$

ASA सर्वांगसमता नियम से

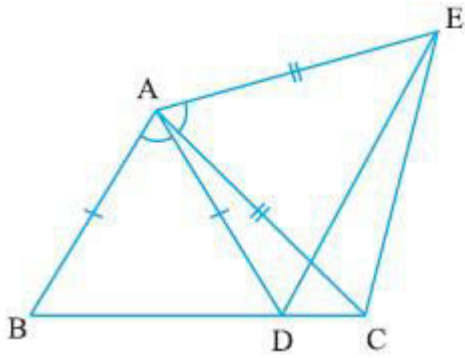
$$\triangle APB \cong \triangle AQB$$

$$\therefore \text{(ii) } BP = BQ \text{ (By CPCT)}$$

Q6. आकृति 7.21 में, $AC = AE$, $AB = AD$ और $\angle BAD = \angle EAC$ है। दर्शाइए कि $BC = DE$ है

हल :

दिया है : $AC = AE$, $AB = AD$ और $\angle BAD = \angle EAC$ है।



सिद्ध करना है : $BC = DE$

प्रमाण :

$\angle BAD = \angle EAC$ (1) दिया है

समी० के दोनों पक्षों में $\angle CAD$ जोड़ने पर

$$\angle BAD + \angle CAD = \angle EAC + \angle CAD$$

या $\angle BAC = \angle EAD$ (2)

$\triangle BAC$ तथा $\triangle DAE$ में

$$AC = AE \quad (\text{दिया है})$$

$$AB = AD \quad (\text{दिया है})$$

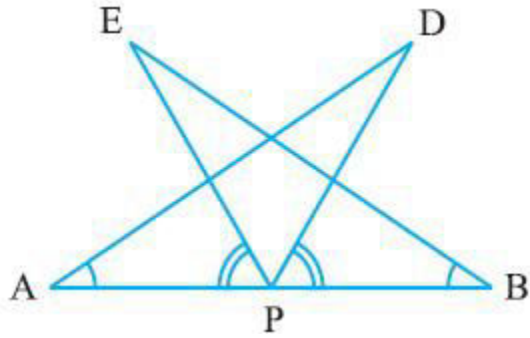
$$\angle BAC = \angle EAD \quad \text{.....समी० (2) से}$$

SAS सर्वांगसमता नियम से

$$\triangle BAC \cong \triangle DAE$$

$\therefore BC = DE$ (By CPCT) **Proved**

Q7. AB एक रेखाखंड है और P इसका मध्य-बिंदु है | D और E रेखाखंड AB के एक ही ओर स्थित दो बिंदु इस प्रकार हैं कि $\angle BAD = \angle ABE$ और $\angle EPA = \angle DPB$ है | (देखिए आकृति 7.22) |



दर्शाइए कि :

- (i) $\triangle DAP \cong \triangle EBP$
- (ii) $AD = BE$

दिया है : AB एक रेखाखंड है और P इसका मध्य-बिंदु है | $\angle BAD = \angle ABE$ और $\angle EPA = \angle DPB$ है |

सिद्ध करना है :

- (i) $\triangle DAP \cong \triangle EBP$
- (ii) $AD = BE$

प्रमाण :

$$\angle EPA = \angle DPB \quad \dots(1) \text{ दिया है } |$$

समी० (1) के दोनों पक्षों में $\angle EPD$ जोड़ने पर

$$\angle EPA + \angle EPD = \angle DPB + \angle EPD$$

$$\text{या } \angle DPA = \angle EPB \quad \dots\dots\dots (2)$$

(1) $\triangle DAP$ तथा $\triangle EBP$ में

$$AP = BP \quad \dots\dots\dots (\text{दिया है })$$

$$\angle BAD = \angle ABE \quad ..(\text{दिया है })$$

$$\angle DPA = \angle EPB \quad\text{समी० (2) से}$$

ASA सर्वांगसमता नियम से

$$\triangle DAP \cong \triangle EBP$$

(ii) $AD = BE$ **(BY CPCT)**

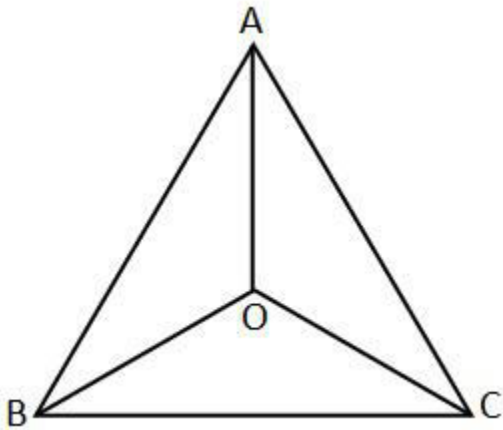
अध्याय 7. त्रिभुज

अभ्यास 7.2

Q1. एक समबाहु त्रिभुज ABC में जिसमें $AB = AC$ है, $\angle B$ और $\angle C$ के समद्विभाजक परस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं | A और O को जोड़िए | दर्शाइए कि :

(i) $OB = OC$

(ii) AO कोण $\angle A$ को समद्विभाजित करता है |



हल:

दिया है: समद्विबाहु त्रिभुज ABC में, जिसमें $AB = AC$, और $\angle B$ और $\angle C$ कोण समद्विभाजक O पर मिलते हैं |

सिद्ध करना है :

(i) $OB = OC$

(ii) AO कोण $\angle A$ को समद्विभाजित करता है |

प्रमाण: $\triangle ABC$ में हमें प्राप्त है:

$$AB = AC$$

$$\angle B = \angle C \text{ [बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं] }$$

$$\text{अथवा } \frac{1}{2}\angle B = \frac{1}{2}\angle C$$

$$\text{इसलिए, } \angle OBC = \angle OCB \text{ [...1]}$$

$\triangle ABO$ and $\triangle ACO$ में

$$AB = AC \quad [\text{दिया है}]$$

$$\angle OBC = \angle OCB \quad [\text{समी 1 से}]$$

$$AO = AO \quad [\text{उभयनिष्ठ}]$$

SAS सर्वांगसमता नियम से

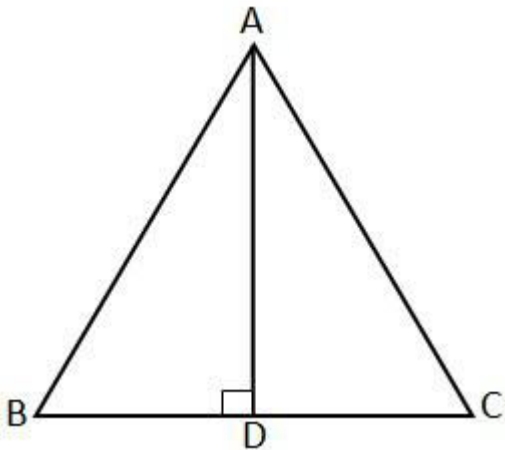
$$\triangle ABO \cong \triangle ACO$$

$$OB = OC \quad [\text{By CPCT}]$$

$$\angle BAO = \angle CAO \quad [\text{By CPCT}]$$

अतः AO कोण $\angle A$ को समद्विभाजित करता है।

Q2. $\triangle ABC$ में, AD भुजा BC का लम्ब समद्विभाजक है (देखिये आकृति 7.30). दर्शाइए कि $\triangle ABC$ एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें $AB = AC$ है।



हल:

दिया है : $\triangle ABC$ में, AD, BC का लंब समद्विभाजक है।

सिद्ध करना है : $\triangle ABC$ एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $AB = AC$ है.

प्रमाण: $\triangle ABD$ तथा $\triangle ACD$ में,

$$DB = DC \quad [\text{चूँकि D BC को समद्विभाजित करता है}]$$

$$\angle BDA = \angle CDA \quad [90^\circ \text{ प्रत्येक}].$$

$$AD = AD \quad [\text{उभयनिष्ठ}]$$

SAS सर्वांगसमता नियम से

$$\triangle ABD \cong \triangle ACD$$

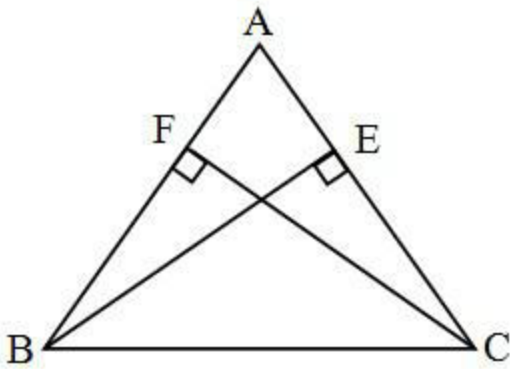
$$AB = AC \text{ [by CPCT]}$$

अतः, $\triangle ABC$ समद्विबाहु त्रिभुज है

Q3. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें बराबर भुजाओं BE और CF पर क्रमशः शीर्षलम्ब AC और AB खींचे गए हैं (देखिए आकृति 7.31)। दर्शाइए कि ये शीर्षलम्ब बराबर हैं।

हल :

दिया है : ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $BE \perp AC$ और $CF \perp AB$ जहाँ $AB = AC$ है।



सिद्ध करना है : $BE = CF$.

प्रमाण : यहाँ, $BE \perp AC$ और $CF \perp AB$ (दिया है)

$\triangle ABE$ और $\triangle ACF$ में

$$\angle AEB = \angle AFC \text{ (90}^\circ \text{ प्रत्येक)}$$

$$\angle A = \angle A \text{ (उभयनिष्ठ)}$$

$$AB = AC \text{ (दिया है)}$$

ASA सर्वांगसमता कसौटी नियम से

$$\triangle ABE \cong \triangle ACF$$

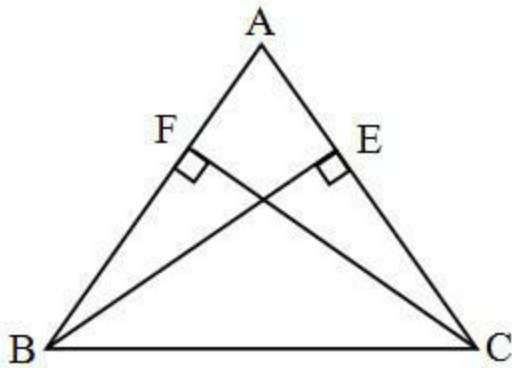
$$\therefore BE = CF \text{ [By CPCT]}$$

Proved

Q4. ABC एक त्रिभुज है जिसमें AC और AB पर खींचे गए शीर्षलम्ब BE और CF बराबर हैं (देखिए आकृति. 7.32). दर्शाइए कि

(i) $\triangle ABE \cong \triangle ACF$

(ii) $AB = AC$, अर्थात्, $\triangle ABC$ एक समद्विबाहु त्रिभुज है।



हल :

दिया है : ABC एक त्रिभुज है जिसमें

$BE \perp AC$ और $CF \perp AB$ है और $BE = CF$ है।

सिद्ध करना है :

(i) $\triangle ABE \cong \triangle ACF$

(ii) $AB = AC$, अर्थात्, $\triangle ABC$ एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

प्रमाण :

(i) $\triangle ABE$ तथा $\triangle ACF$ में

$BE = CF$ (दिया है)

$\angle AEB = \angle AFC$ (90° प्रत्येक)

$\angle A = \angle A$ (उभयनिष्ठ)

ASA सर्वांगसमता नियम के उपयोग से

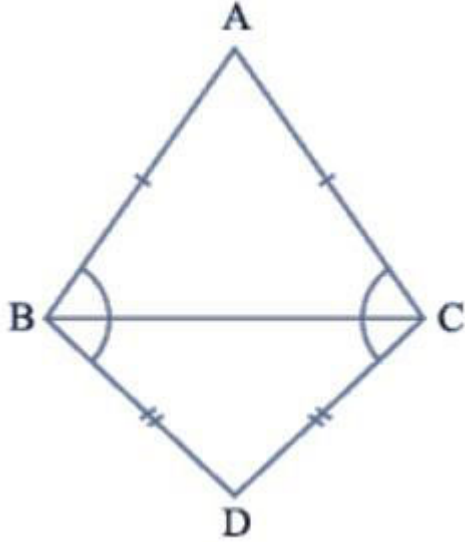
$\triangle ABE \cong \triangle ACF$ सत्यापित -I

(ii) $AB = AC$ [By CPCT]

इसलिए, ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

Q5. ABC और DBC सामान आधार BC पर स्थित दो समद्विबाहु त्रिभुज हैं (देखिए आकृति 7.33). दर्शाइए कि $\angle ABD = \angle ACD$ है।

हल :



दिया है : ABC और DBC सामान आधार BC पर बने दो

समद्विबाहु त्रिभुज हैं।

सिद्ध करना है : $\angle ABD = \angle ACD$

प्रमाण: ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

$$AB = AC \quad (\text{दिया है})$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB \quad \dots\dots\dots (1)$$

(बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं)

इसीप्रकार,

BCD भी एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

$$BD = CD \quad (\text{दिया है})$$

$$\therefore \angle DBC = \angle DCB \quad \dots\dots\dots (2)$$

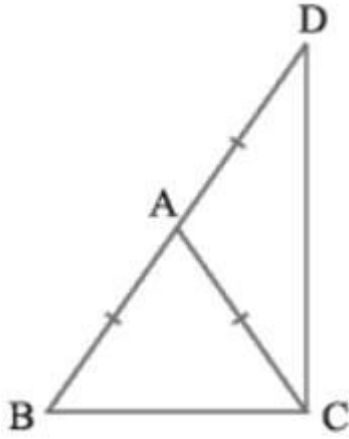
(बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं)

समीकरण (1) तथा (2) को जोड़ने पर

$$\angle ABC + \angle DBC = \angle ACB + \angle DCB$$

Or, $\angle ABD = \angle ACD$ **Proved**

Q6. $\triangle ABC$ एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $AB = AC$ है। भुजा BA बिंदु D तक इस प्रकार बढ़ाया गया है कि $AD = AB$ है (देखिए आकृति. 7.34)। दर्शाइए कि $\angle BCD$ एक समकोण है।



हल :

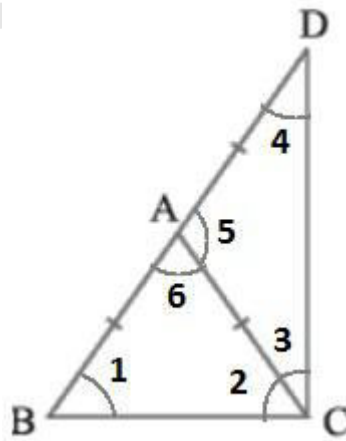
दिया है : $\triangle ABC$ समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $AB = AC$ है।

भुजा BA को बिंदु D तक बढ़ाई गयी है जिससे $AD = AB$ है।

सिद्ध करना है : $\angle BCD = 90^\circ$

प्रमाण:

$AB = AC$ (1) (दिया है)



और $AB = AD$ (2) (दिया है)

समीकरण (1) तथा (2) से हमें प्राप्त होता है।

$AC = AD$ (3)

$\therefore \angle 3 = \angle 4$ (4) (बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण ..)

अब, $AB = AC$ समी० (1) से

$\therefore \angle 1 = \angle 2$ (5) (बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण ..)

$\triangle ABC$ में

बहिष्कोण $\angle 5 = \angle 1 + \angle 2$ (बहिष्कोण अतः अभिमुख कोणों के योग के बराबर होता है)

अथवा, $\angle 5 = \angle 2 + \angle 2$ समी० (5) से

अथवा, $\angle 5 = 2\angle 2$ (6)

इसीप्रकार,

बहिष्कोण $\angle 6 = \angle 3 + \angle 4$

अथवा, $\angle 6 = 2\angle 3$ समी० (7) से

समीकरण (6) तथा (7) को जोड़ने पर

$$\angle 5 + \angle 6 = 2\angle 2 + 2\angle 3$$

$$\angle 5 + \angle 6 = 2(\angle 2 + \angle 3)$$

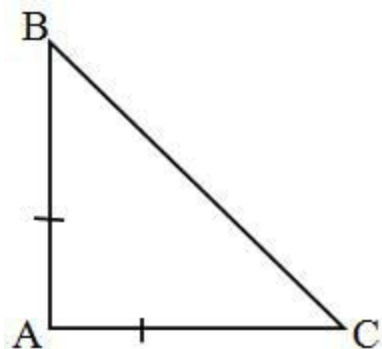
अथवा, $180^\circ = 2(\angle 2 + \angle 3)$ [$\because \angle BAC + \angle DAC = 180^\circ$]

अथवा, $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ / 2$

अथवा, $\angle BCD = 90^\circ$ **Proved**

Q7. ABC एक समकोण त्रिभुज है जिसमें $\angle A = 90^\circ$ और $AB = AC$. तो $\angle B$ और $\angle C$ ज्ञात कीजिए |

हल :



दिया है : ABC एक समकोण त्रिभुज है जिसमें

$\angle A = 90^\circ$ और $AB = AC$ है |

ज्ञात करना है : $\angle B$ and $\angle C$

$$AB = AC \quad (\text{दिया है})$$

$$\therefore \angle B = \angle C \quad \dots\dots\dots(1)$$

(बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण)

त्रिभुज ABC में,

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \quad (\text{त्रिभुज के तीनों कोणों का योग})$$

$$90^\circ + \angle B + \angle B = 180^\circ \quad \text{समीकरण (1) के प्रयोग से}$$

$$2 \angle B = 180^\circ - 90^\circ$$

$$2 \angle B = 90^\circ$$

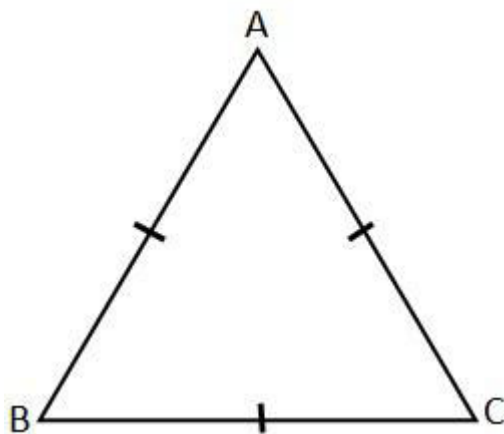
$$\angle B = 90^\circ / 2$$

$$\angle B = 45^\circ$$

$$\therefore \angle B = 45^\circ \text{ and } \angle C = 45^\circ$$

Q8. दर्शाइए कि समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण 60° का होता है।

हल :



दिया है : ABC एक समबाहु त्रिभुज है जिसमें

$$AB = BC = AC$$

सिद्ध करना है :

$$\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$$

प्रमाण :

$$AB = AC \quad (\text{दिया है})$$

$$\angle B = \angle C \quad \dots\dots\dots (1) \quad [\text{बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण}]$$

$$AB = BC \quad (\text{दिया है})$$

$$\angle A = \angle C \quad \dots\dots\dots (2) \quad [\text{बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण}]$$

$$AC = BC \quad (\text{दिया है})$$

$$\angle A = \angle B \quad \dots\dots\dots (3) \quad [\text{बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण}]$$

समीकरण (1), (2) और (3) से हमें प्राप्त होता है |

$$\angle A = \angle B = \angle C \quad \dots\dots\dots (4)$$

त्रिभुज ABC में

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle A + \angle A + \angle A = 180^\circ$$

$$3 \angle A = 180^\circ$$

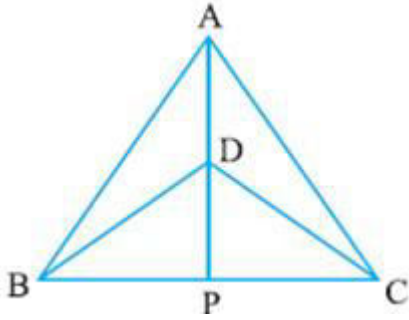
$$\angle A = 180^\circ/3$$

$$\angle A = 60^\circ$$

$$\therefore \angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$$

प्रश्नावली 7.3

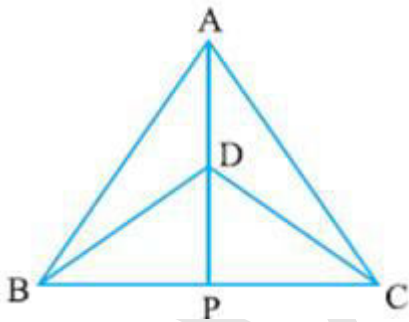
Q1. $\triangle ABC$ और $\triangle DBC$ एक ही आधार BC पर बने दो समबाहु त्रिभुज इस प्रकार हैं कि A और D भुजा BC के एक ही ओर स्थित हैं (देखिए आकृति 7.39) | यदि AD बढ़ाने पर BC को P पर प्रतिच्छेद करे, तो दर्शाइए कि



- (i) $\triangle ABD \cong \triangle ACD$
- (ii) $\triangle ABP \cong \triangle ACP$
- (iii) AP कोण A और कोण D दोनों को समद्विभाजित करता है ।
- (iv) AP रेखाखंड BC का लम्ब समद्विभाजक है ।

हल :

दिया है : $\triangle ABC$ और $\triangle DBC$ दो समबाहु त्रिभुज हैं और AD को बढ़ाने पर BC को P पर प्रतिच्छेद करता है ।



सिद्ध करना है :

- (i) $\triangle ABD \cong \triangle ACD$
- (ii) $\triangle ABP \cong \triangle ACP$
- (iii) AP कोण A और कोण D दोनों को समद्विभाजित करता है ।
- (iv) AP रेखाखंड BC का लम्ब समद्विभाजक है ।

प्रमाण : ABC आधार BC पर बना समद्विबाहु त्रिभुज है ।

इसलिए, $AB = AC$ (i)

इसी प्रकार, DBC भी एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

इसलिए, $BD = CD$ (ii)

(I) $\triangle ABD$ और $\triangle ACD$ में

$AB = AC$... (i) से

$BD = CD$... (ii) से

$AD = AD$ (उभयनिष्ठ)

SSS सर्वांगसमता नियम से

$\triangle ABD \cong \triangle ACD$ Proved (I)

$\therefore \angle BAD = \angle CAD$ (iii) BY (CPCT)

(II) अब, $\triangle ABP$ और $\triangle ACP$ में

$AB = AC$... (i) से

$\angle BAD = \angle CAD$ समी० (iii) से

$AP = AP$ (उभयनिष्ठ)

SAS सर्वांगसमता नियम से

$\triangle ABP \cong \triangle ACP$ Proved (ii)

(III) अब, $\triangle BDP$ और $\triangle CDP$ में

$BD = CD$ (ii) से

$\angle DBP = \angle DCP$ बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण

$DP = DP$ (उभयनिष्ठ)

SAS सर्वांगसमता नियम से

$$\triangle BDP \cong \triangle CDP$$

$\therefore \angle BDP = \angle CDP$ (iv) BY (CPCT)

और $\angle DPB = \angle DPC$ (v) BY (CPCT)

और $BP = CP$ (vi) BY (CPCT)

समीकरण (iii) और (iv) से स्पष्ट है कि AP कोण A और कोण D दोनों को समद्विभाजित करता है।
Proved (III)

(IV) $\angle DPB + \angle DPC = 180^\circ$ रैखिक युग्म

या $\angle DPB + \angle DPB = 180^\circ$ समी० (v) से

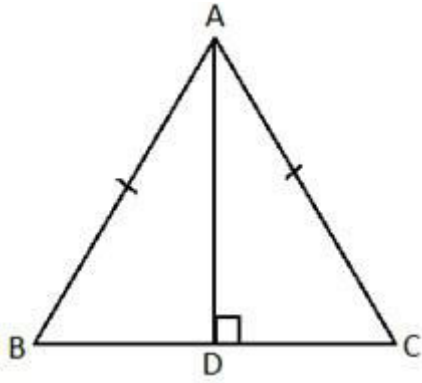
या $2\angle DPB = 180^\circ$

या $\angle DPB = \frac{180^\circ}{2}$

या $\angle DPB = 90^\circ$

चूँकि $\angle DPB = 90^\circ$ हैं और $BP = CP$ समी० (vi) से यह सिद्ध होता है कि AP रेखाखंड BC का लम्ब समद्विभाजक है। **Proved (IV)**

Q2. AD एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC का एक शीर्षलम्ब है, जिसमें $AB = AC$ है। दर्शाइए कि



(i) AD रेखाखंड BC को समद्विभाजित करता है।

(ii) AD कोण A को समद्विभाजित करता है।

हल :

दिया है : AD एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC का एक शीर्षलम्ब है, जिसमें $AB = AC$ है।

सिद्ध करना है :

(i) AD रेखाखंड BC को समद्विभाजित करता है।

(ii) AD कोण A को समद्विभाजित करता है।

प्रमाण :

$\triangle ABD$ और $\triangle ACD$ में

$AB = AC$ (कर्ण) दिया है

$AD = AD$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$\angle ADB = \angle ADC$ (प्रत्येक कोण 90°)

RHS सर्वांगसमता नियम से

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD$

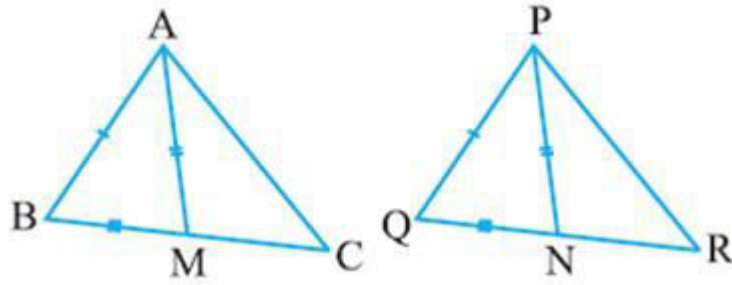
अतः $BD = CD$ (i) By CPCT

और $\angle BAD = \angle CAD$ (ii) By CPCT

समीकरण (i) से सिद्ध होता है कि AD रेखाखंड BC को समद्विभाजित करता है।

और समीकरण (ii) से यह सिद्ध होता है कि AD कोण A को समद्विभाजित करता है।

Q3. एक त्रिभुज ABC की दो भुजाएँ AB और BC तथा माध्यिका AM क्रमशः एक दूसरे त्रिभुज की भुजाओं PQ और QR तथा माध्यिका PN के बराबर हैं (देखिए आकृति 7.40)। दर्शाइए कि



(i) $\triangle ABM \cong \triangle PQN$

(ii) $\triangle ABC \cong \triangle PQR$

हल :

दिया है : त्रिभुज ABC की दो भुजाएँ AB और BC तथा माध्यिका AM क्रमशः एक दूसरे त्रिभुज की भुजाओं PQ और QR तथा माध्यिका PN के बराबर हैं।

सिद्ध करना है :

(i) $\triangle ABM \cong \triangle PQN$

(ii) $\triangle ABC \cong \triangle PQR$

प्रमाण :

(i) $\triangle ABM$ और $\triangle PQN$ में

$$AB = PQ \text{ (दिया है)}$$

$$BM = QN \text{ (दिया है)}$$

$$AM = PN \text{ (दिया है)}$$

SSS सर्वांगसमता नियम से

$$\triangle ABM \cong \triangle PQN \quad \text{Proved}$$

$$\angle B = \angle Q \quad \dots (i) \text{ By CPCT}$$

(ii) $BM = QN$ दिया है

या $\frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} QR$ (चूँकि AM और PN माध्यिका है इसलिए
माध्यिका सम्मुख भुजा को समद्विभाजित करती है)

या $BC = QR$ (ii)

$\triangle ABC$ और $\triangle PQR$ में

$AB = PQ$ (दिया है)

$\angle B = \angle Q$ समीकरण (i) से

$BC = QR$ समीकरण (ii) से

SAS सर्वांगसमता नियम से

$\triangle ABC \cong \triangle PQR$ Proved

Q4. BE और CF एक त्रिभुज ABC के दो बराबर शीर्षलंब हैं | RHS सर्वांगसमता नियम का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि DABC एक समद्विबाहु त्रिभुज हैं |

हल :

दिया है : त्रिभुज ABC में दो बराबर शीर्षलंब BE और CF हैं |

अतः $BE = CF$ है, $BE \perp AC$ और $CF \perp AB$ है |

सिद्ध करना है :

$$AB = AC$$

प्रमाण : $\triangle BCF$ और $\triangle CBE$ में

$$CF = BE \text{ (भुजा दिया है)}$$

$$BC = BC \text{ (उभयनिष्ठ कर्ण)}$$

$$\angle BFC = \angle CEB \text{ (प्रत्येक } 90^\circ)$$

RHS सर्वांगसमता नियम से

$$\triangle BCF \cong \triangle CBE$$

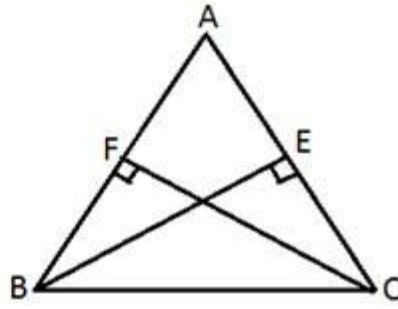
$$\text{अतः } \angle B = \angle C \text{ BY CPCT}$$

इसलिए, $AB = AC$ (बराबर कोणों के सम्मुख भुजा बराबर होते हैं)

Q5. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $AB = AC$ है | $AP \perp BC$ खींच कर दर्शाइए कि $\angle B = \angle C$ है |

हल :

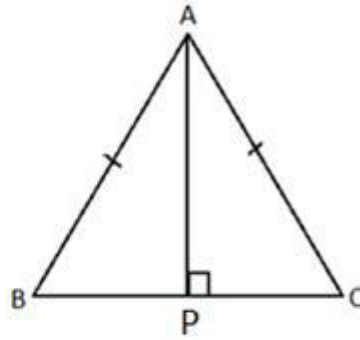
दिया है : ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $AB = AC$ है | जिसमें $AP \perp BC$ हैं |



सिद्ध करना है :

$$\angle B = \angle C$$

प्रमाण : $\triangle ABP$ और $\triangle ACP$ में



$$AB = AC \text{ (कर्ण दिया है)}$$

$$AP = AP \text{ (उभयनिष्ठ भुजा)}$$

$$\angle APB = \angle APC \text{ (प्रत्येक } 90^\circ)$$

RHS सर्वांगसमता नियम से

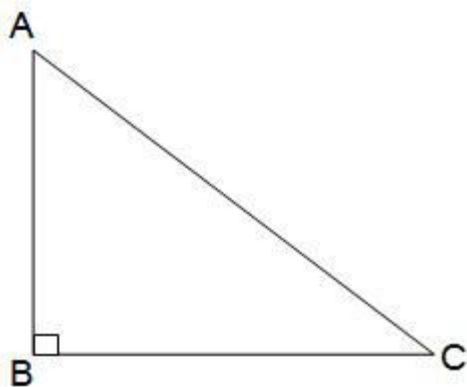
$$\triangle ABP \cong \triangle ACP$$

अतः $\angle B = \angle C$ BY CPCT

प्रश्नावली 7.4

Q1. दर्शाइए कि समकोण त्रिभुज में कर्ण सबसे लंबी भुजा होती है।

हल :



दिया है : ABC एक समकोण त्रिभुज है जिसका

कोण B समकोण है और AC कर्ण है।

सिद्ध करना है :

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i) } AC > AB \\ \text{(ii) } AC > BC \end{array} \right\} \text{ अर्थात् } AC \text{ सबसे लंबी भुजा है।}$$

प्रमाण : $\triangle ABC$ का $\angle B$ समकोण है।

अतः $\angle A$ और $\angle C$ न्यूनकोण हैं।

इसलिए, $\angle B > \angle C$ [क्योंकि B समकोण है और C न्यूनकोण है]

$\therefore AC > AB$ (i) (बड़े कोण की सम्मुख भुजा बड़ी होती है)

पुनः $\angle B$ समकोण है और $\angle A$ न्यूनकोण है।

इसलिए, $\angle B > \angle A$ [क्योंकि B समकोण है और C न्यूनकोण है]

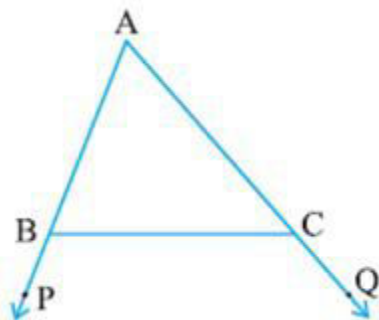
$\therefore AC > BC$ (ii) (बड़े कोण की सम्मुख भुजा बड़ी होती है)

समी० (i) तथा (ii) से कर्ण AC सबसे बड़ी भुजा है।

Proved

Q2. आकृति 7.48 में, $\triangle ABC$ की भुजाओं AB और AC को क्रमशः बिन्दुओं P तथा Q तक बढ़ाया गया है। साथ ही, $\angle PBC < \angle QCB$ है। दर्शाइए कि $AC > AB$ है।

हल :



दिया है : $\triangle ABC$ की भुजाओं AB और AC को क्रमशः बिन्दुओं P तथा Q तक बढ़ाया गया है जिसमें, $\angle PBC < \angle QCB$ है।

सिद्ध करना है : $AC > AB$

प्रमाण : AB और AC को क्रमशः बिन्दुओं P तथा Q तक बढ़ाया गया है,

इसलिए, $\angle ABC + \angle PBC = 180^\circ$ (1) रैखिक युग्म

और $\angle ACB + \angle QCB = 180^\circ$ (2) रैखिक युग्म

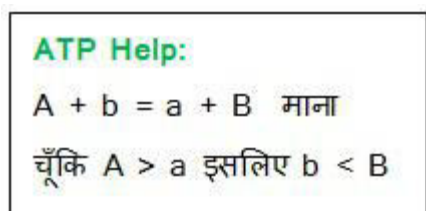
समीकरण (1) तथा (2) से

$\angle ABC + \angle PBC = \angle ACB + \angle QCB$ (चूँकि दोनों समी० का मान समान है)

जबकि $\angle PBC < \angle QCB$ (दिया है)

अतः स्पष्ट है कि

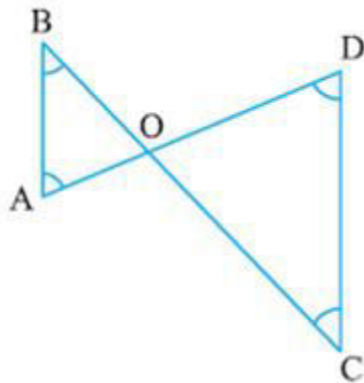
$\angle ABC > \angle ACB$ Proved



Q3. आकृति 7.49 में, $\angle B < \angle A$ और $\angle C < \angle D$ है।

दर्शाइए कि $AD < BC$ है।

हल :



दिया है : $\triangle AOB$ और $\triangle COD$ में $\angle B < \angle A$ और $\angle C < \angle D$ है।

सिद्ध करना है : $AD < BC$

प्रमाण : $\triangle AOB$ में,

$\angle B < \angle A$ (दिया है)

$\therefore AO < BO$ (1) (बड़े कोण की सम्मुख भुजा बड़ी होती है)

अब, ΔCOD में,

$$\angle C < \angle D \text{ (दिया है)}$$

$\therefore DO < CO$ (2) (बड़े कोण की सम्मुख भुजा बड़ी होती है)

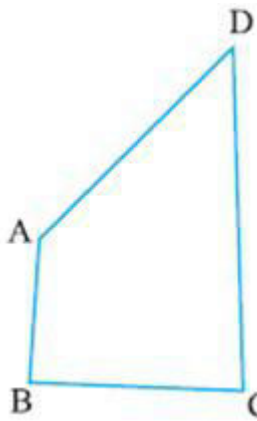
समीकरण (1) तथा (2) को जोड़ने पर

$$AO + DO < BO + CO$$

या $AD < BC$ **Proved**

Q4. AB और CD क्रमशः एक चतुर्भुज ABCD की सबसे छोटी और सबसे बड़ी भुजा हैं (देखिये आकृति 7.50) | दर्शाइए कि $\angle A > \angle C$ और $\angle B > \angle D$ है |

हल :



दिया है : AB और CD क्रमशः एक चतुर्भुज ABCD की

सबसे छोटी और सबसे बड़ी भुजा हैं |

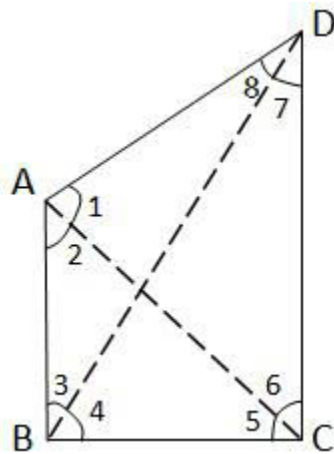
सिद्ध करना है :

(i) $\angle A > \angle C$

(ii) $\angle B > \angle D$

रचना : A को C से और B को D से मिलाया |

प्रमाण : (i) ΔABC में,



AB सबसे छोटी भुजा है, (दिया है)

अतः, $BC > AB$

$\therefore \angle 2 > \angle 5$ (1) (बड़े भुजा की सम्मुख कोण बड़ी होती है)

अब, $\triangle ACD$ में,

CD सबसे बड़ी भुजा है, (दिया है)

अतः, $CD > AD$

$\therefore \angle 1 > \angle 6$ (2) (बड़े भुजा की सम्मुख कोण बड़ी होती है)

समी० (1) तथा (2) को जोड़ने पर

$$\angle 1 + \angle 2 > \angle 5 + \angle 6$$

या $\angle A > \angle C$ **Proved,**

(ii) इसी प्रकार $\triangle ABD$ में,

$AD > AB$ (क्योंकि AB सबसे छोटी भुजा है)

$\therefore \angle 3 > \angle 8$ (3)

और $\triangle BCD$ में,

$CD > BC$ (क्योंकि CD सबसे बड़ी भुजा है)

$\therefore \angle 4 > \angle 7$ (4)

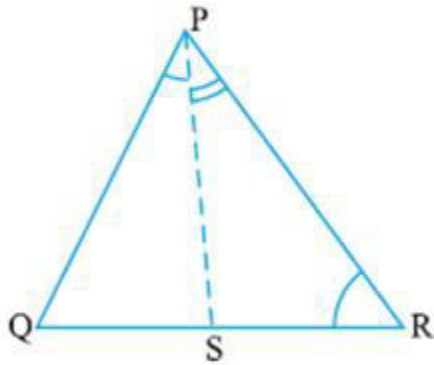
समी० (3) तथा (4) को जोड़ने पर

$$\angle 3 + \angle 4 > \angle 7 + \angle 8$$

या $\angle B > \angle D$ Proved,

Q5. आकृति 7.51 में $PR > PQ$ है और PS कोण QPR समद्विभाजित करता है। सिद्ध कीजिए कि $\angle PSR > \angle PSQ$ है।

हल :



दिया है : $PR > PQ$ और PS कोण QPR समद्विभाजित करता है।

सिद्ध करना है : $\angle PSR > \angle PSQ$

प्रमाण : PS कोण QPR समद्विभाजित करता है। (दिया है)

$$\therefore \angle QPS = \angle RPS \quad \dots\dots (1)$$

और, $PR > PQ$ (दिया है)

$$\therefore \angle PQS > \angle PRS \quad \dots\dots(2)$$

ΔPQS में,

$$\angle QPS + \angle PQS + \angle PSQ = 180^\circ \quad \dots\dots (3) \text{ (}\Delta \text{ के तीनों कोणों का योग)}$$

इसीप्रकार, ΔPRS में,

$$\angle PRS + \angle RPS + \angle PSR = 180^\circ \quad \dots\dots (4) \text{ (}\Delta \text{ के तीनों कोणों का योग)}$$

समीकरण (3) और (4) से हम पाते हैं कि ..

$$\angle QPS + \angle PQS + \angle PSQ = \angle PRS + \angle RPS + \angle PSR$$

$$\text{या } \cancel{\angle QPS} + \angle PQS + \angle PSQ = \angle PRS + \cancel{\angle RPS} + \angle PSR \quad \text{समी० (1) से}$$

$$\text{या } \angle PQS + \angle PSQ = \angle PRS + \angle PSR$$

जबकि $\angle PQS > \angle PRS$ समी० (2) से

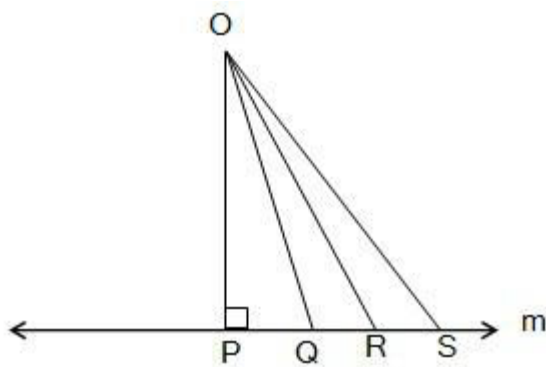
अतः स्पष्ट है कि $\angle PSQ < \angle PSR$ **Proved**

ATP Help:

$A + b = a + B$ माना

चूँकि $A > a$ इसलिए $b < B$

Q6. दर्शाइए कि एक रेखा पर एक दिए हुए बिंदु से, जो उस रेखा पर स्थित नहीं है, जितने रेखाखंड खींचे जा सकते हैं उनमें लम्ब रेखाखंड सबसे छोटा होता है।



हल :

दिया है : m एक रेखा है और O एक बिंदु है

जो m पर स्थित नहीं है | $OP \perp m$

सिद्ध करना है : $OP < OQ < OR < OS$

प्रमाण : $OP \perp m$ दिया है |

$\therefore \angle OPQ = 90^\circ$ और $\angle OQP, \angle ORP, \angle OSP$ न्यूनकोण हैं |

अतः $\angle OQP < \angle OPQ$

$\therefore OP < OQ$ (1) (बड़े कोण की सम्मुख भुजा बड़ी होती है)

इसीप्रकार, $\angle ORP < \angle OPQ$

$\therefore OP < OR$ (2) (बड़े कोण की सम्मुख भुजा बड़ी होती है)

समी० (1) तथा (2) से

$$OP < OQ < OR$$

OP जो लंब है सबसे छोटी भुजा है।

eVidyaVarthi

गणित

(अध्याय - 7) (त्रिभुज)

(कक्षा - 9)

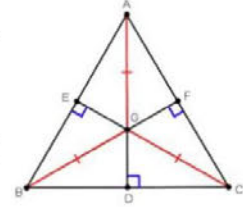
प्रश्नावली 7.5 (ऐच्छिक)*

प्रश्न 1:

ABC एक त्रिभुज है। इसके अन्तर्गत में एक ऐसा बिंदु ज्ञात कीजिए जो $\triangle ABC$ के तीनों शीर्षों से समदूरस्थ है।

उत्तर 1:

भुजा AB, BC और AC के लंबसमद्विभाजक खींचे जो एक दूसरे को बिंदु G पर काटते हैं। बिंदु G, $\triangle ABC$ के तीनों शीर्षों से समदूरस्थ है।

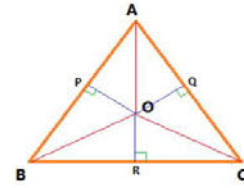


प्रश्न 2:

किसी त्रिभुज के अन्तर्गत में एक ऐसा बिंदु ज्ञात कीजिए जो त्रिभुज की सभी भुजाओं से समदूरस्थ है।

उत्तर 2:

$\angle A$, $\angle B$ और $\angle C$ के समद्विभाजक खींचे जो एक दूसरे को बिंदु O पर काटते हैं। बिंदु O, $\triangle ABC$ की तीनों भुजाओं से समदूरस्थ है। अर्थात् $OP = OQ = OR$ है।



प्रश्न 3:

एक बड़े पार्क में, लोग तीन बिंदुओं (स्थानों) पर केन्द्रित हैं (देखिए आकृति):

A: जहाँ बच्चों के लिए फिसल पट्टी और झूले हैं।

B: जिसके पास मानव-निर्मित एक झील है।

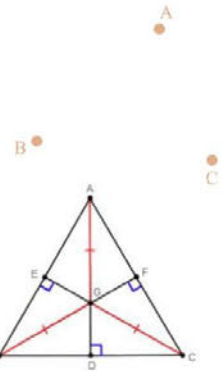
C: जो एक बड़े पार्किंग स्थल और बाहर निकलने के रास्ते के निकट है।

एक आइसक्रीम का स्टॉल कहाँ लगाना चाहिए ताकि वहाँ लोगों की अधिकतम संख्या पहुँच सके? (संकेत: स्टॉल को A, B और C से समदूरस्थ होना चाहिए।)

उत्तर 3:

बिंदुओं A को B से, B को C से तथा C को A से मिलाया।

भुजा AB, BC और AC के लंबसमद्विभाजक खींचे जो एक दूसरे को बिंदु G पर काटते हैं। बिंदु G, $\triangle ABC$ के तीनों बिंदुओं से समदूरस्थ है। अतः, आइसक्रीम का स्टॉल बिंदु G पर लगाना चाहिए ताकि वहाँ लोगों की अधिकतम संख्या पहुँच सके।

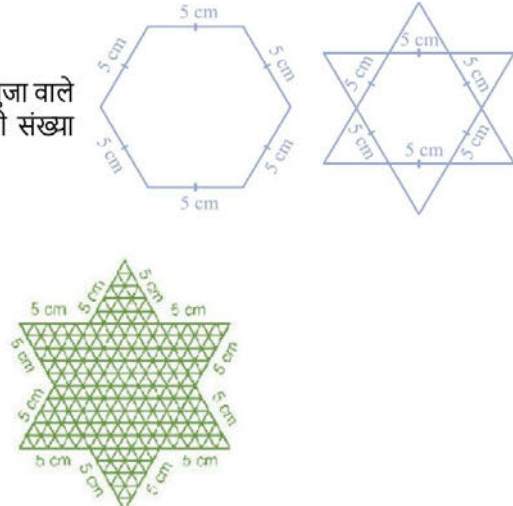
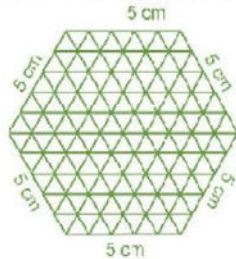


प्रश्न 4:

षडभुजीय और तारे के आकार की रंगोलियों [देखिए आकृति] को 1 cm भुजा वाले समबाहु त्रिभुजों से भर कर पूरा कीजिए। प्रत्येक स्थिति में, त्रिभुजों की संख्या गिनिए। किसमें अधिक त्रिभुज हैं?

उत्तर 4:

षडभुजीय के आकार की रंगोली में समबाहु त्रिभुजों की संख्या = 150



तारे के आकार की रंगोली में समबाहु त्रिभुजों की संख्या = 298

तारे के आकार की रंगोली में समबाहु त्रिभुजों की संख्या अधिक है।