Chapter-7

System of Particles and Rotational Motion

कणों के निकाय तथा घूर्णी गति

प्रश्नावली

प्रश्न 1. एकसमान द्रव्यमान घनत्व के निम्नलिखित पिण्डों में प्रत्येक के द्रव्यमान केन्द्र की अवस्थिति लिखिए—

(a) गोला, (b) सिलेण्डर, (c) छल्ला तथा (d) घन

(e) क्या किसी पिण्ड का द्रव्यमान केन्द्र आवश्यक रूप से उस पिण्ड के भीतर स्थिति होता है?

हल (a) द्रव्यमान केन्द्र गोले की ज्यामितीय केन्द्र पर रहता है।

(b) बेलन का द्रव्यमान केन्द्र इसके ज्यामितय केन्द्र पर रहता है अर्थात् केवल समानित अक्ष के मध्य बिन्दु पर रहता है।

(c) छल्ले का द्रव्यमान केन्द्र इसकी ज्यामितीय केन्द्र पर रहता है।

(d) घन का द्रव्यमान केन्द्र इसके ज्यामितीय केन्द्र पर रहता है जहाँ इसके विकर्ण एक दूसरे को काटते हैं।

(e) यह आवश्यक नहीं कि वस्तु का द्रव्यमान केन्द्र वस्तु के अन्दर स्थित रहे क्योंकि छल्ला, खोखला बेलन तथा खोखला घन आदि का द्रव्यमान केन्द्र इनसे बाहर होता है।

प्रश्न 2. HCl अणु में दो परमाणुओं के नाभिकों के बीच पृथकन लगभग 1.27 Å (1 Å $= 10^{-10}$ m) है। इस अणु के द्रव्यमान केन्द्र की लगभग अवस्थिति ज्ञात कीजिए। यह ज्ञात है कि क्लोरीन का परमाणु हाइड्रोजन के परमाणु की तुलना में 35.5 गुना भारी होता है तथा किसी परमाणु का समस्त द्रव्यमान उसके नाभिक पर केन्द्रित होता है।

यदि द्रव्यमान m_1 तथा m_2 के स्थिति सदिश क्रमशः $\mathbf{r}_1$ तथा $\mathbf{r}_2$ हैं, तब निकाय के द्रव्यमान केन्द्र का स्थिति सदिश निम्न सूत्र द्वारा दिया जाता है

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$$

हल दिया है, H तथा Cl के नाभिक के बीच दूरी = 1.27Å $= 1.27 \times 10^{-10}$ m

हाइड्रोजन के अणु का द्रव्यमान $= m$

$\therefore$ क्लोरीन के अणु का द्रव्यमान $= 35.5m$

माना हाइड्रोजन अणु मूल बिन्दु पर स्थित है अर्थात् इसका स्थिति सदिश $r_1 = 0$

$\therefore$ क्लोरीन अणु का स्थित सदिश $r_2 = 1.27 \times 10^{-10}$ m

द्रव्यमान केन्द का स्थित सदिश

$$r_{CM} = \frac{m_1r_1 + m_2r_2}{m_1 + m_2} \quad \frac{m \times 0 + 35.5m \times 1.27 \times 10^{-10}}{m + 35.5m}$$

$$= \frac{35.5 \times 1.27 \times 10^{-10}}{36.5}$$

$$= 1.235 \times 10^{-10} \text{ m} = 1.24 \text{ Å}$$

प्रश्न 3. कोई बच्चा किसी चिकने क्षैतिज फर्श पर एकसमान चाल v से गतिमान किसी लम्बी ट्रॉली के एक सिरे पर बैठा है। यदि बच्चा खड़ा होकर ट्रॉली पर किसी भी प्रकार से दौड़ने लगता है, तब निकाय (ट्रॉली + बच्चा) के द्रव्यमान केन्द्र की चाल क्या है?

हल निकाय (ट्रॉली + बच्चे) के द्रव्यमान केन्द्र की चाल नियत रहती है अर्थात् v, क्योंकि किसी निकाय की स्थितिज केवल बाह्य बल द्वारा परिवर्तित की जा सकती है तथा दोड़ने में ट्रॉली पर आरोपित बल आन्तरिक बल है।

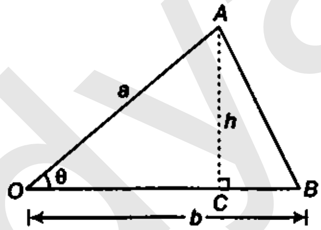
प्रश्न 4. दर्शाइये कि $\mathbf{a}$ एवं $\mathbf{b}$ के बीच बने त्रिभुज का क्षेत्रफल $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ के परिणाम का आधा है।

हल माना सदिश a तथा b त्रिभुज की दो संलग्न भुजाओं को प्रदर्शित करते हैं तथा इनके बीच का कोण θ है। त्रिभुज की ऊँचाई h है।

$\therefore$ $OA = a, OB = b, AC = h$ तथा $\angle AOB = \theta$

ΔOCA में, $\sin\theta = \dfrac{AC}{OA}$ या $AC = OA\sin\theta$

$h = a\sin\theta$



$$\Delta OAB \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}$$

$$= \frac{1}{2} \times OB \times AC$$

$$= \frac{1}{2} \times b \times a\sin\theta = \frac{1}{2} ab\sin\theta \quad \ldots(i)$$

दो सदिशों के सदिश गुणन के अनुसार

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = ab\sin\theta\,\hat{\mathbf{n}}$$

जहाँ $\hat{\mathbf{n}}$ एकांक वेक्टर तल के लम्बवत् है।

$\therefore$ $$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |ab\sin\theta\,\hat{\mathbf{n}}| = ab\sin\theta \qquad (\because |\hat{\mathbf{n}}| = 1) \quad \ldots(ii)$$

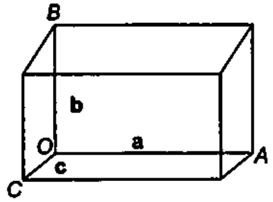
समी (i) व (ii) से,

$$\Delta OAB \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$$

$$= \frac{1}{2} |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \text{ का परिमाण}|$$

प्रश्न 5. दर्शाइये कि $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ का परिमाण तीन सदिशों $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ एवं $\mathbf{c}$ से बने समान्तर षट्फलक के आयतन के बराबर है।

हल माना षट्फलक तीन सदिश से बना है जहाँ, $\mathbf{OA}=\mathbf{a}$, $\mathbf{OB}=\mathbf{b}$ और $\mathbf{OC}=\mathbf{c}$



$\mathbf{b}$ तथा $\mathbf{c}$ का सदिश गुणन निम्न प्रकार होगा।

$$(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = bc\sin 90^\circ\cdot\hat{\mathbf{n}} = bc\,\hat{\mathbf{n}}$$

जहाँ $\hat{\mathbf{n}}$, $\mathbf{OA}$ के अनुदिश एकांक सदिश है

$\therefore$
$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot(bc\,\hat{\mathbf{n}})$$
$$= a(bc)\cos 0^\circ$$
$$= abc$$

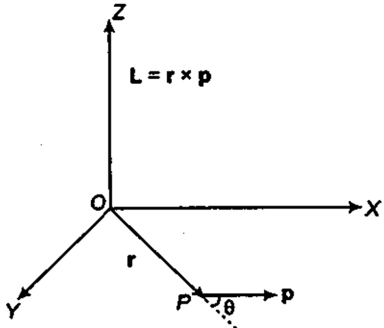
जो समान्तर षट्फलक के आयतन के बराबर है।

प्रश्न 6. एक कण, जिसके स्थिति सदिश $\mathbf{r}$ के x, y, z अक्षों के अनुदिश अवयव क्रमशः x, y, z हैं, और रेखीय संवेग सदिश $\mathbf{p}$ के अवयव p_x, p_y, p_z हैं, कोणीय संवेग L के अक्षों के अनुदिश अवयव ज्ञात कीजिए। दर्शाइये, कि यदि कण केवल x-y तल में ही गतिमान हो तो कोणीय संवेग का केवल z-अवयव ही होता है।

हल (a) माना कण बिन्दु P पर स्थित है इसका स्थिति सदिश $\mathbf{r}$ तथा रेखीय संवेग $\mathbf{p}$ है।

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{p} = p_x\hat{\mathbf{i}} + p_y\hat{\mathbf{j}} + p_z\hat{\mathbf{k}}$$



सदिश का काणीय संवेग $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$

$$= (x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}) \times (p_x\hat{\mathbf{i}} + p_y\hat{\mathbf{j}} + p_z\hat{\mathbf{k}})$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$$

यदि X, Y तथा Z के अनुदिश L के अवयव क्रमश L_x, L_y तथा L_z हैं तब

$$L_x\hat{\mathbf{i}} + L_y\hat{\mathbf{j}} + L_z\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}}(yp_z - zp_y) + \hat{\mathbf{j}}(zp_x - xp_z) + \hat{\mathbf{k}}(xp_y - yp_x)$$

दोनों पक्षों की तुलना करने पर,

$$L_x = yp_z - zp_y$$
$$L_y = zp_x - xp_z$$
$$L_z = xp_y - yp_x$$

(b) प्रश्नानुसार, कण X-Y तल में गति कर रहा है।

$\therefore$ X-Y तल में गतिमान कण द्वारा बल आघूर्ण

$$\tau_z = \tau F_y - \tau F_x \qquad \ldots(i)$$

जहाँ, τ_z X-Y तल में गतिमान कण पर Z-अक्ष के अनुदिश बल आघूर्ण का अवयव है।

माना X-Y तल में m द्रव्यमान के कण का वेग v है तथा v_x तथा v_y इसके X तथा Y अक्ष के अनुदिश वेग है।

न्यूटन के द्वितीय नियम से,

$$F_x = \frac{d}{dt}(p_x) = \frac{d}{dx}(mv_x) = m\frac{dv_x}{dt}$$

तथा $$F_y = \frac{d}{dt}(p_y) = m\frac{dv_y}{dt}$$

यह मान समी (i) में रखने पर

$$\tau_z = xm\frac{d}{dt}(v_x) - ym\frac{d}{dt}(y_y)$$

$$= m\left[x\frac{dv_y}{dt} - \frac{dv_x}{dt}y\right] \qquad \ldots(ii)$$

अब, $$\frac{d}{dt}(xv_y - yv_x) = \frac{d}{dt}(xv_y) - \frac{d}{dt}(yv_x)$$

$$= \left[x\frac{d}{dt}v_y + v_y\frac{d}{dt}x\right] - \left[y\frac{d}{dt}v_x + v_x\frac{d}{dt}y\right]$$

$$= x\frac{d}{dt}v_y + v_xv_y - y\frac{d}{dt}v_x - v_xv_y$$

$$= x\frac{d}{dt}v_y - y\frac{d}{dt}v_x \qquad \ldots(iii)$$

समी (i) व (iii) से

$$\tau_z = m\frac{d}{dt}(xv_y - yv_x)$$

$$= \frac{d}{dt}(xmv_y - ymv_x) \quad \ldots(iv)$$

$\because$ $p_y = mv_y$ तथा $p_x = mv_x$ ($\because$ संवेग $p = mv$)

$\therefore$ $\tau_z = \frac{d}{dt}(xp_y - yp_x)$

$$\tau_z = \frac{d}{dt}\tau_z$$ [समी (ii) के भाग (a) से]

उपरोक्त सम्बन्ध से हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं यदि कण X - Y तल में गतिमान हो तो कोणीय संवेग (L) का केवल Z अवयव ही होता है।

प्रश्न 7. दो कण जिनमें से प्रत्येक का द्रव्यमान m एवं चाल v है d दूरी पर, समान्तर रेखाओं के अनुदिश, विपरीत दिशाओं में चल रहे हैं। दर्शाइये कि इस द्विकण निकाय का सदिश कोणीय संवेग समान रहता है, चाहे हम जिस बिन्दु के परितः कोणीय संवेग लें।

हल प्रत्येक कण का द्रव्यमान $= m$

प्रत्येक कण का वेग $= v$

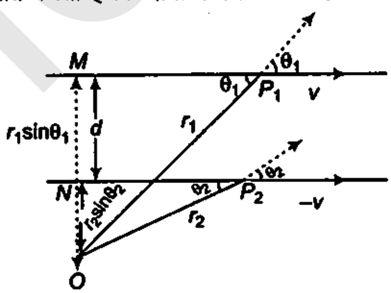
कण d दूरी पर, दो समान्तर रेखाओं के अनुदिश विपरीत दिशाओं में चल रहे हैं।

माना किसी क्षण t पर कणों की स्थितियाँ p_1 व p_2 हैं।

माना बिन्दु O के परितः किसी क्षण कणों के कोणीय संवेग तथा स्थिति सदिश क्रमशः L_1 व L_2 तथा r_1 व r_2 हैं $\mathbf{L}_1 = \mathbf{r}_1 \times m\mathbf{v}$ और $\mathbf{L}_2 = \mathbf{r}_2 \times m\mathbf{v}$

यदि निकाय का परिणामी कोणीय संवेग L है, तब $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 = \mathbf{r}_1 \times m\mathbf{v} + (-\mathbf{r}_2 \times m\mathbf{v})$

ऋणात्मक चिह्न यह प्रदर्शित करता है कि दोनों कण विपरीत दिशाओं में हैं।



$\therefore$ $|\mathbf{L}| = |\mathbf{L}_1| - |\mathbf{L}_2|$

$$= mvr_1\sin\theta_1 - mvr_2\sin\theta_2$$

$$= mv(r_1\sin\theta_1 - r_2\sin\theta_2) \quad \ldots(i)$$

जहाँ θ_1 तथा θ_2 क्रमशः $\mathbf{r}_1$, तथा $\mathbf{v}$ और $\mathbf{r}_2$ तथा $\mathbf{v}$ के बीच के कोण हैं।

जब कण समय के साथ अपनी स्थिति परिवर्तित करता है तब उनकी गति की दिशा अपरिवर्तित रहती है तथा उनकी दूरियाँ

$$OM = r_1 \sin\theta_1 \text{ और } ON = r_2 \sin\theta_2 \text{ एक समान}$$

लेकिन $$OM - ON = MN = d$$ (दिया है)

$\therefore$ $$r_1 \sin\theta_1 - r_2 \sin\theta_2 = d \quad \ldots(ii)$$

समी (i) तथा (ii) से

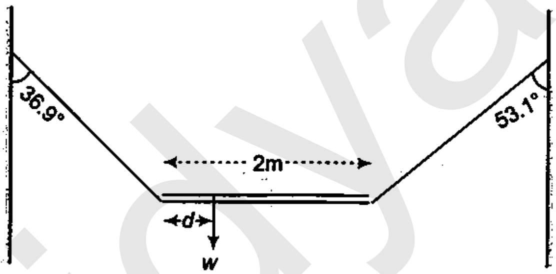
$$|\mathbf{L}| = mvd$$

यह समय के साथ नियत है।

$\mathbf{L}$ की दिशा r तथा v तल के लम्बवत तथा कागज के तल के अन्दर की ओर है जो समय के साथ अपरिवर्तित रहती है।

अतः द्विकण निकाय का सदिश कोणीय संवेग समान रहता है।

प्रश्न 8. *W* **भार की एक असमांन छड़ को, उपेक्षणीय भार वाली दो डोरियों से चित्र में दर्शाये अनुसार लटका कर विरामावस्था में रखा गया है। डोरियों द्वारा ऊर्ध्वाधर से बने कोण क्रमशः 36.9° एवं 53.1° हैं। छड़ 2m लम्बाई की है। छड़ के बाएँ सिरे से इसके गुरुत्व केन्द्र की दूरी** d **ज्ञात कीजिए।**



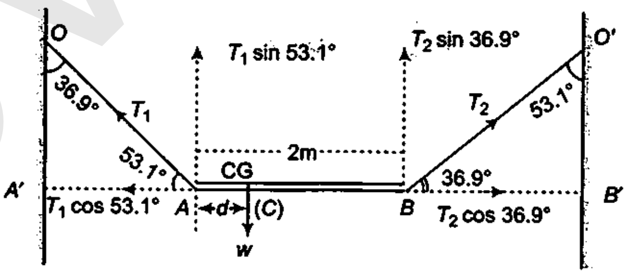
हल छड़ का भार $= w$

छड़ की लम्बाई $= 2$ m

माना AB की असमान छड़ जो डोरियों OA तथा OB से लटकी है स्थिर अवस्था में है।

दिया है, $\angle AOA' = 36.9° \Rightarrow \angle OAA' = 90° - 36.9° = 53.1°$

$\angle BO'B' = 53.1° \Rightarrow \angle O'BB' = 90° - 53.1° = 36.9°$



माना T_1 तथा T_2 डोरियों OA तथा OB के तनाव हैं। छड़ के बाँये सिरे A से इसके गुरुत्व केन्द्र की दूरी d है।

इस निकाय पर विभिन्न बल आरोपित होते हैं

(i) पहली डोरी में तनाव T_1 डोरी के अनुदिश ऊपर की ओर कार्य करता है।
(∵ छड़ डोरी को नीचे की ओर दबाती है इसलिये तनाव ऊपर की ओर कार्य करता है।) तनाव को इसके क्षैतिज अवयव $T_1 \cos 53.1°$ तथा ऊर्ध्वाधर अवयव $T_1 \sin 53.1°$ में विभाजित किया जा सकता है।

(ii) दूसरी डोरी में तनाव T_2 के क्षैतिज अवयव तथा ऊर्ध्वाधर अवयव क्रमशः $T_2 \cos 36.9°$ तथा $T_2 \sin 36.9°$ हैं।

(iii) छड़ का भार w नीचे को ओर कार्य करता है।
निकाय साम्यावस्था में है अर्थात् निकाय पर कुल बल शून्य है। इसका अर्थ है विभिन्न बल एक-दूसरे को सन्तुलित करते है। इसलिए क्षैतिज बल तथा ऊर्ध्वाधर बल एक दूसरे को सन्तुलित करते हैं।

$$T_1 \cos 53.1° = T_2 \cos 36.9° \quad \ldots(i)$$

इसी प्रकार ऊर्ध्वाधर बल एक-दूसरे को सन्तुलित करते हैं।

ऊपर की ओर लगे कुल बल = नीचे की ओर लगे कुल बल

$$\therefore \quad T_1 \sin 53.1° + T_2 \sin 36.9° = w \quad \ldots(ii)$$

A के परितः बल आघूर्ण

$$T_2 \sin 36.9° \times 2 = w \times d$$

अथवा
$$T_2 = \frac{wd}{2\sin 36.9°} \quad \ldots(iii)$$

समी (ii) व (iii) से

$$T_1 \sin 53.1° = w - T_2 \sin 36.9°$$
$$= w - \frac{wd}{2}$$

अथवा
$$T_1 = \frac{w}{\sin 53.1°}\left(1 - \frac{d}{2}\right) \quad \ldots(iv)$$

समी (iii) व (iv) से T_1 तथा T_2 का मान समी (i) में रखने पर

$$\frac{w\left(1-\frac{d}{2}\right)}{\sin 53.1°}\cos 53.1° = \frac{wd}{2\sin 36.9°}\cdot\cos 36.9°$$

$$\frac{\left(1-\frac{d}{2}\right)}{\tan 53.1°} = \frac{d}{2\tan 36.9°}$$

$$\frac{\left(1-\frac{d}{2}\right)}{1.3319} = \frac{d}{2 \times 0.7508}$$

$$1 - \frac{d}{2} = \frac{d}{2} \times \frac{1.3319}{0.7508} = \frac{d}{2} \times 1.7740$$

$$1 - 0.5d = 0.8870d$$

या $$1 = 1.3870d$$

या $$d = \frac{1}{1.3870}$$

$$= 0.721\,m$$

$$= 72.1\,cm$$

प्रश्न 9. एक कार का भार 1800 kg है। इसकी अगली और पिछली धुरियों के बीच की दूरी 1.8 m है। इसका गुरुत्व केन्द्र अगली धुरी से 1.05 m पीछे है। समतल धरती द्वारा इसके प्रत्येक अगले और पिछले पहियों पर लगने वाले बल की गणना कीजिए।

गुरुत्व केन्द्र के परितः आघूर्ण शून्य होता है।

हल कार का कुल द्रव्यमान = 1800 kg

माना m तथा $(900 - m)$ आगे तथा पीछे के पहियों का द्रव्यमान है

अगली दूरी से गुरुत्व केन्द्र की दूरी = 1.05 m

∴ पिछली धुरी से गुरुत्व केन्द्र की दूरी = 1.80 − 1.05 = 0.75 m

गुरुत्व केन्द्र के परितः बल आघूर्ण लेने पर

$$m \times 1.05 = (900 - m) \times 0.75$$

या $$1.05m + 0.75m = 900 \times 0.75$$

या $$1.80m = 900 \times 0.75$$

या $$m = \frac{900 \times 0.75}{1.80}$$

$$= 375\,kg$$

∴ $$(900 - m) = 900 - 375 = 525\,kg$$

∴ प्रत्येक अगले पहिये का भार $(w_1) = m_1 g$

$$w_1 = 375 \times 9.8$$

$$= 3675\,N$$

प्रत्येक अगले पहिये पर समतल धरती द्वारा लगाया गया बल

= प्रत्येक अगले पहिये द्वारा समतल धरती पर लगाया गया बल (w_1)

= 3675 N

प्रत्येक पिछले पहिये का भार $(w_2) = m_2 g$

$$w_2 = 525 \times 9.8$$

$$= 5145\,N$$

∴ प्रत्येक पिछले पहिये पर समतल धरती द्वारा लगाया गया बल

= प्रत्येक पिछले पहिये द्वारा समतल धरती पर लगाया गया बल (w_2)

= 5145 N

प्रश्न 10.

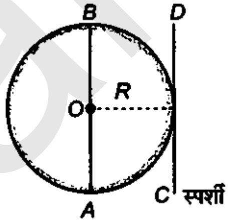
(a) किसी गोले का, इसके किसी व्यास के परितः जड़त्व आघूर्ण $2MR^2/5$ है, जहाँ M गोले का द्रव्यमान एवं R इसकी त्रिज्या है। गोले पर खींची गई स्पर्श रेखा के परितः इसका जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिए।

(b) M द्रव्यमान एवं R त्रिज्या वाली किसी डिस्क का इसके किसी व्यास के परितः जड़त्व आघूर्ण $MR^2/4$ है। डिस्क के लम्बवत् इसकी कोर से गुजरने वाली अक्ष के परितः इस चकती का जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिए।

समान्तर अक्षों की प्रमेय के अनुसार किसी पिण्ड का किसी दिये गये अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण I उस पिण्ड के द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाले अक्ष तथा दिये गये अक्ष के समान्तर किसी अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण I_{CM} व पिण्ड के द्रव्यमान M व दोनों अक्ष के मध्य लम्बवत् दूरी R के वर्ग के गुणनफल के योग के तुल्य होता है

$$I = I_{CM} + MR^2$$

हल (a) माना AB दिये गये गोले का व्यास है



$\therefore$ व्यास AB के परितः जड़त्व आघूर्ण

$$I_{AB} = \frac{2}{5}mR^2$$

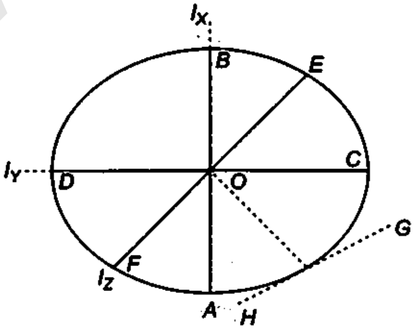
समान्तर अक्षों की प्रमेय से,

$$I_{CD} = I_{AB} + mR^2$$
$$= \frac{2}{5}mR^2 + mR^2$$
$$= \frac{7}{5}mR^2$$

लम्बवत् अक्षों की प्रमेय किसी समतल पटल का उसके तल के लम्बवत् किसी अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण उसके तल में स्थित दो परस्पर लम्बवत् अक्षों (जिनके कटान बिन्दु से प्रथम अक्ष गुजरता है) के परितः जड़त्व आघूर्ण के तुल्य होता है

$$I_X + I_Y = I_Z$$

(b) व्यास AB के परितः जड़त्व आघूर्ण



$$I_X = \frac{1}{4}mR^2$$

इसी प्रकार व्यास *CD* के परितः जड़त्व आघूर्ण

$$I_Y = \frac{1}{4}mR^2$$

लम्बवत् अक्षों की प्रमेय के अनुसार केन्द्र से गुजरने वाली तथा तल के लम्बवत् अक्ष *EF* के परितः जड़त्व आघूर्ण

$$I_Z = I_X + I_Y$$

$$= \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{4}mR^2$$

$$= \frac{1}{2}mR^2$$

GH अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण

(समान्तर अक्षों की प्रमेय से)

$$I_{GH} = I_Z + mR^2$$

$$= \frac{1}{2}mR^2 + mR^2$$

$$= \frac{3}{2}mR^2$$

प्रश्न 11. समान द्रव्यमान और त्रिज्या के एक खोखले बेलन और एक ठोस गोले पर समान परिमाण के बल आघूर्ण लगाये गये हैं। बेलन अपनी सामान्य सममित अक्ष के परितः घूम सकता है और गोला अपने केन्द्र से गुजरने वाली किसी अक्ष के परितः एक दिये गये समय के बाद दोनों में कौन अधिक कोणीय चाल प्राप्त कर लेगा?

हल माना ठोस गोले तथा खोखले गोले का द्रव्यमान *M* तथा त्रिज्या *R* हैं

ऊपरी अक्ष के परितः खोखले गोले का द्रव्यमान

$$I_1 = MR^2$$

ठोस गोले का व्यास के परितः जड़त्व आघूर्ण

$$I_2 = \frac{2}{5}MR^2$$

माना खोखले तथा ठोस गोले का बल आघूर्ण τ समान है।

∴ $$\tau = I_1\alpha_1$$

तथा $$\tau = I_2\alpha_2$$

अतः $$I_1\alpha_1 = I_2\alpha_2$$

या $$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{\frac{2}{5}MR^2}{MR^2} = \frac{2}{5}$$

या

$$\alpha_2 = \frac{5}{2}\alpha_1$$

$$= 2.5\alpha_1 \quad \ldots(i)$$

माना t समय बाद खोखले तथा ठोस गोले की कोणीय चाल क्रमशः ω_1 तथा ω_2 हैं।

$\therefore$

$$\omega_1 = \omega_0 + \alpha_1 t \quad \ldots(ii)$$

तथा

$$\omega_2 = \omega_0 + \alpha_2 t$$

$$= \omega_0 + 2.5\alpha_1 t \quad \ldots(iii)$$

समी (ii) तथा (iii) से

$$\omega_2 > \omega_1$$

अतः दिये गये समय में ठोस गोला अधिकतम कोणीय चाल प्राप्त कर लेगा।

प्रश्न 12. 20 kg द्रव्यमान का कोई ठोस सिलिंडर अपने अक्ष के परितः 100 rad s^{-1} की कोणीय चाल से घूर्णन कर रहा है। सिलिंडर की त्रिज्या 0.25 m है। सिलिंडर के घूर्णन से संबद्ध गतिज ऊर्जा क्या है? सिलिंडर का अपने अक्ष के परितः कोणीय संवेग का परिमाण क्या है?

हल दिया है,

$$M = 20\,\text{kg}$$

$$\omega = 100\,\text{rad/s}$$

$$R = 0.25\,\text{m}$$

ठोस बेलन का अपने सममित अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 20 \times (0.25)^2$$

$$= 10 \times 0.0625$$

$$= 0.625\,\text{kg-m}^2$$

बेलन की घूर्णन त्रिज्या

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 0.625 \times (100)^2$$

$$= 0.3125 \times 10000 = 3125\,\text{J}$$

कोणीय संवेग $L = I\omega$

$$= 0.625 \times 100 = 62.5\,\text{J-s}$$

प्रश्न 13. (a) कोई बच्चा किसी घूर्णिका (घूर्णीमंच) पर अपनी दोनों भुजाओं को बाहर की और फैलाकर खड़ा है। घूर्णिका को 40 rev/min की कोणीय चाल से घूर्णन कराया जाता है। यदि बच्चा अपने हाथों को वापस सिकोड़ कर अपना जड़त्व आघूर्ण अपने आंरभिक जड़त्व आघूर्ण का 2/5 गुना कर लेता है, तो इस स्थिति में उसकी कोणीय चाल क्या होगी? यह मानिए कि घूर्णिका की घूर्णन गति घर्षणरहित है।

(b) यह दर्शाइए कि बच्चे की घूर्णन की नयी गतिज ऊर्जा उसकी आरंभिक घूर्णन की गतिज ऊर्जा से अधिक है। आप गतिज ऊर्जा में हुई इस वृद्धि की व्याख्या किस प्रकार करेंगे?

कोणीय संवेग संरक्षण के नियमानुसार, किसी निकाय पर कार्यरत कुल बल आघूर्ण शून्य है तो निकाय का कोणीय संवेग संरक्षित रहता है अतः $L = I\omega =$ नियतांक।

हल (a) दिया है $\omega_1 = 40$ rev/min

माना बच्चे का जड़त्व आघूर्ण I है।

$$\therefore \quad I_1 = I \text{ तथा } I_2 = \frac{2}{5}I$$

कोणीय संवेग संरक्षण के नियमानुसार

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

$$\therefore \quad \omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1 = \frac{I}{\frac{2}{5}I} \times 40$$

$$= \frac{5}{2} \times 40 = 100 \text{ rad/s}$$

(b) $$\frac{\text{अंतिम घूर्णन गतिज ऊर्जा}}{\text{प्रारम्भिक घूर्णन गतिज ऊर्जा}} = \frac{\frac{1}{2}I_2\omega_2^2}{\frac{1}{2}I_1\omega_1^2} = \frac{\left(\frac{2}{5}I\right)(100)^2}{I \times (40)^2}$$

$$= \frac{2}{5} \times \frac{10000}{1600} = \frac{5}{2}$$

$$\therefore \quad \text{अंतिम घूर्णन ऊर्जा} = \frac{5}{2} \text{ (प्रारम्भिक घूर्णन ऊर्जा)}$$

अतः बच्चे की घूर्णन की नयी गतिज ऊर्जा उसकी आरम्भिक गतिज ऊर्जा से अधिक होती है तथा यह ऊर्जा बच्चे की पेशीय ऊर्जा से प्राप्त होती है जब वह हाथ सिकोड़ता है।

प्रश्न 14. 3 kg द्रव्यमान तथा 40 cm त्रिज्या के किसी खोखले सिलिंडर पर कोई नगण्य द्रव्यमान की रस्सी लपेटी गई है। यदि रस्सी को 30 N बल से खींचा जाए तो सिलिंडर का कोणीय त्वरण क्या होगा? रस्सी का रैखिक त्वरण क्या है? यह मानिए कि इस प्रकरण में कोई फिसलन नहीं है।

हल दिया है, $M = 3$ kg

$R = 40$ cm $= 0.40$ m

$F = 30$ N

खोखले बेलन का अपनी सममित अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण

$$I = MR^2 = 3 \times (0.40)^2 = 0.48 \text{ kg-m}^2$$

बेलन का बल आघूर्ण

$$\tau = F \times R$$
$$= 30 \times 0.40 = 12 \text{ N-m}$$

बेलन में उत्पन्न कोणीय त्वरण

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{12}{0.48} = 25 \text{ rad/s}^2$$

रेखीय त्वरण $a = R\alpha$

$$= 0.40 \times 25$$
$$= 10.0 \text{ m/s}^2$$

प्रश्न 15. किसी घूर्णक (रोटर) की 200 rad/s, की एकसमान कोणीय चाल बनाए रखने के लिए एक इंजन द्वार 180 N-m का बल आघूर्ण प्रेषित करना आवश्यक होता है। इंजन के लिए आवश्यक शक्ति ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $\omega = 200 \text{ rad/s}$

$$\tau = 180 \text{ N-m}$$

इंजन के लिये आवश्यक शक्ति $(P) = \tau\omega$

$$= 180 \times 200$$
$$= 36000 \text{W}$$
$$= 36 \text{kW}$$

प्रश्न 16. R त्रिज्या वाली समान डिस्क से $\frac{R}{2}$ त्रिज्या का एक वृत्ताकार भाग काट कर निकाल दिया गया है। इस प्रकार बने वृत्ताकार सुराख का केन्द्र मूल डिस्क के केन्द्र से $\frac{R}{2}$ दूरी पर है। अवशिष्ट डिस्क के गुरुत्व केन्द्र की स्थिति ज्ञात कीजिए।

हल माना डिस्क का प्रति क्षेत्रफल द्रव्यमान m है

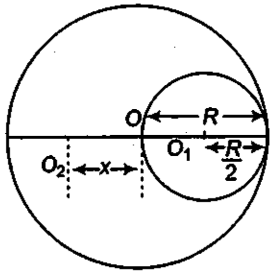
$\therefore$ डिस्क का द्रव्यमान (M) = डिस्क का कुल क्षेत्रफल $\times$ प्रति क्षेत्रफल द्रव्यमान $= \pi R^2 m$

काट कार निकाले गये भाग का द्रव्यमान (M')

$$= \pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 m$$
$$= \frac{\pi R^2}{4} m = \frac{M}{4}$$

सम्पूर्ण डिस्क का द्रव्यमान केन्द्र O है तथा काटकर निकाले गये भाग का द्रव्यमान केन्द्र O_1 है तथा बचे भाग का द्रव्यमान O_2 है।

प्रश्नानुसार, चित्र को इस प्रकार प्रदर्शित किया गया है।



यहाँ, $$OO_1 = \frac{R}{2}$$

डिस्क का बचा भाग निकाय के दो द्रव्यमानों जैसे बिन्दु O पर M तथा बिन्दु O_1 पर $-\frac{M}{4}$ में मान लिया जाता है।

यदि बचे भाग के द्रव्यमान केन्द्र की O बिन्दु से दूरी x है। तब

$$x = \frac{M \times 0 - M' \times \frac{R}{2}}{M - M'}$$

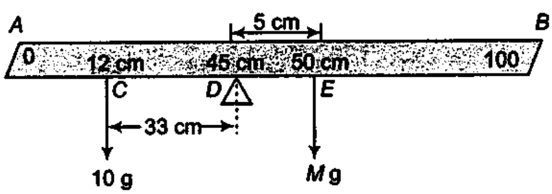
$$= \frac{-\frac{M}{4} \times \frac{R}{2}}{M - \frac{M}{4}}$$

$$= -\frac{MR}{8} \times \frac{4}{3M} = -\frac{R}{6}$$

अतः अवशिष्ट का द्रव्यमान केन्द्र O से बायी ओर $\frac{R}{6}$ दूरी पर होगा।

प्रश्न 17. एक मीटर छड़ के केन्द्र के नीचे क्षुर-धार रखने पर वह इस पर संतुलित हो जाती है जब दो सिक्के, जिनमें प्रत्येक का द्रव्यमान 5 g है, 12.0 cm के चिह्न पर एक के ऊपर एक रखे जाते हैं तो छड़ 45.0 cm चिह्न पर संतुलित हो जाती है। मीटर छड़ का द्रव्यमान क्या है?

हल माना मीटर छड़ का कुल द्रव्यमान M kg है।



मध्य बिन्दु E तथा नये द्रव्यमान के बीच की दूरी $(DE) = 50 - 45 = 5$ cm

चिह्नित 12 cm तथा नये द्रव्यमान केन्द्र के बीच की दूरी $(CD) = 45 - 12 = 33\,cm$

आघूर्णो के सिद्धान्त से

$$Mg \times DE = (2 \times 5g) \times CD$$
$$M \times 5 = 10 \times 33$$

या
$$M = 66\,g$$

∴ मीटर छड़ का द्रव्यमान 66 ग्राम है।

प्रश्न 18. एक ठोस गोला, भिन्न नति के दो आनत तलों पर एक ही ऊँचाई से लुढ़कने दिया जाता है।

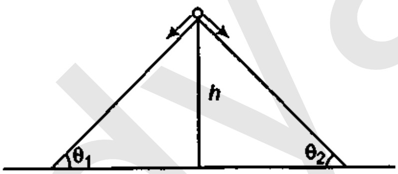
(a) क्या वह दोनों बार समान चाल से तली में पहुँचेगा?

(b) क्या उसको एक तल पर लुढ़कने में दूसरे से अधिक समय लगेगा?

(c) यदि हाँ, तो किस पर और क्यों?

हल (a) माना ठोस गोले का द्रव्यमान M तथा त्रिज्या R है।

माना दोनों आनत तल h ऊँचाई तक डबे हैं।



यदि आनत के तल पर गोले की रेखीय चाल v तथा कोणीय चाल ω है।

तब ऊर्जा संरक्षण के नियमानुसार

गतिज ऊर्जा में वृद्धि = स्थितिज ऊर्जा मे कमी

$$\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = Mgh$$

लेकिन ठोस गोले के लिये,

ठोस गोले का उसके व्यास के परित: जड़त्व आघूर्ण

$$I = \frac{2}{5}MR^2 \text{ तथा कोणीय वेग } \omega = \frac{v}{R}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}MR^2\right) \times \frac{v^2}{R^2} = Mgh$$

$$\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{5}Mv^2 = Mgh$$

या
$$\frac{7}{10}Mv^2 = Mgh$$

$$v = \sqrt{\frac{10gh}{7}}$$

अत: प्रत्येक स्थिति में ठोस गोला आनत तलों की तली पर समान वेग से पहुँचेगा।

(b) हाँ, कम आनत कोण वाले तल पर लुढ़कने में अधिक समय होगा।

(c) माना आनत तल 1 तथा 2 पर लुढ़कने में गोले द्वारा लिया समय क्रमशः t_1 तथा t_2 हैं।

आनत तल पर गोले का त्वरण $a = \dfrac{g\sin\theta}{\left(1+\dfrac{K^2}{R^2}\right)}$

जहाँ K = घूर्णन त्रिज्या है।

ठोस गोले के लिए $1+\dfrac{K^2}{R^2} = 1+\dfrac{\frac{2}{5}R^2}{R^2}$

$$= \frac{7}{5}$$

∴ पहले आनत तल पर गोले का त्वरण

$$a_1 = \frac{5}{7}g\sin\theta_1$$

दूसरे आनत तल पर गोले का त्वरण

$$a_2 = \frac{5}{7}g\sin\theta_2$$

माना l_1, तथा l_2 आनत तलों की लम्बाईयाँ हैं तथा तली तक पहुँचने में लिया गया समय t_1 तथा t_2 है।

गति की समीकरण से $v = u + at$

$$v = 0 + at$$

या $$t = \frac{v}{a}$$

लेकिन तली पर चाल समान है

∴ $$t \propto \frac{1}{a}$$

या $$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}$$

As $\theta_2 > \theta_1$,

∴ $$\sin\theta_2 > \sin\theta_1$$

⇒ $$\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} > 1$$

या $$\frac{t_1}{t_2} > 1$$

या $$t_1 > t_2$$

अतः गोला कम कोण के आनत तल पर लुढ़कने में अधिक समय लेता है।

प्रश्न 19. 2 m त्रिज्या के एक वलय (छल्ले) का भार 100 kg है। यह एक क्षैतिज फर्श पर इस प्रकार लोटनिक गति करता है कि इसके द्रव्यमान केन्द्र की चाल 20 cm/s हो। इसको रोकने के लिए कितना कार्य करना होगा?

हल दिया है, त्रिज्या $R = 2$ m

तथा द्रव्यमान $M = 100$ kg

द्रव्यमान केन्द्र की चाल $(v) = 20$ cm/s $= 0.20$ m/s

वलय को रोकने में किया गया कार्य = वलय की कुल गतिज ऊर्जा

$$W = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

जड़त्व आघूर्ण $I = Mr^2$ तथा कोणीय वेग $\omega = \frac{v}{R}$

$$\therefore \quad W = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}(Mr^2) \times \left(\frac{v^2}{R^2}\right)$$

$$\therefore \quad = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}Mv^2 = Mv^2$$

$$= 100 \times (0.20)^2$$

$$= (100 \times 0.04) \text{ J} = 4.0 \text{ J}$$

प्रश्न 20. ऑक्सीजन अणु का द्रव्यमान 5.30×10^{-26} kg है तथा इसके केन्द्र से होकर गुजरने वाली और इसके दोनों परमाणुओं को मिलाने वाली रेखा के लम्बवत् अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण 1.94×10^{-46} kg-m^2 है। मान लीजिए कि गैस के ऐसे अणु की औसत चाल 500 m/s है और इसके घूर्णन की गतिज ऊर्जा स्थानान्तरण की गतिज ऊर्जा की दो-तिहाई है। अणु का औसत कोणीय वेग ज्ञात कीजिए।

हल ऑक्सीजन के अणुओं का द्रव्यमान $(M) = 5.30 \times 10^{-26}$ kg

जड़त्व आघूर्ण $I = 1.94 \times 10^{-46}$ kg-m^2

अणुओं की औसत चाल $(v) = 500$ m/s

दिया है, घूर्णन ऊर्जा $= \frac{2}{3} \times$ स्थानांतरीय गतिज ऊर्जा

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}Mv^2$$

या
$$\omega = \sqrt{\frac{2Mv^2}{I}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \times 5.30 \times 10^{-26} \times (500)^2}{1.94 \times 10^{-46}}}$$

$$= 1.35 \times 10^{10} \times 500$$

$$= 6.75 \times 10^{12} \text{ rad/s}$$

प्रश्न 21. एक बेलन 30° कोण बनाते आनत तल पर लुढ़कता हुआ ऊपर चढ़ता है। आनत तल की तली में बेलन के द्रव्यमान केन्द्र की चाल 5 m/s है।

(a) आनत तल पर बेलन कितना ऊपर जायेगा?

(b) वापस तली तक लौट आने में इसे कितना समय लगेगा?

हल कोण $(\theta) = 30°$

द्रव्यमान केन्द्र की चाल $(v) = 5\,m/s$

(a) आनत तल पर लुढ़ककर ऊपर चढ़ते हुऐ बेलन का त्वरण

$$a = -\left(\frac{g\sin\theta}{1+\frac{K^2}{R^2}}\right)$$

जहाँ, K = बेलन की घूर्णन त्रिज्या है।

बेलन के लिये, जड़त्व आघूर्ण $I = mK^2 = \frac{1}{2}mR^2$

या $$K^2 = \frac{R^2}{2}$$

∴ $$a = -\frac{9.8\times\sin 30°}{\left(1+\frac{R^2/2}{R^2}\right)}$$

$$= -\frac{9.8\times 1/2}{3/2} = -\frac{9.8}{3}\,m/s^2$$

गति के समीकरण से, $$v^2 = u^2 + 2as$$

$$0 = (5)^2 + 2\left(-\frac{9.8}{3}\right)\times s$$

या $$s = \frac{25\times 3}{2\times 9.8} = 3.83\,m$$

वैकल्पिक विधि

ऊर्जा संरक्षण के नियम से

गतिज ऊर्जा में कमी = स्थितिज ऊर्जा में वृद्धि

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = mgh$$

बेलन का सममित अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण

$$I = \frac{1}{2}mR^2$$

कोणीय वेग, $\omega = \frac{v}{R}$

$\therefore \quad \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right) \times \frac{v^2}{R^2} = mgh$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4}mv^2 = mgh$$

$$\frac{3}{4}v^2 = gh$$

या $\quad h = \frac{3v^2}{4g}$

$\therefore \quad h = \frac{3 \times (5)^2}{4 \times 9.8} = \frac{3 \times 25}{4 \times 9.8}$

$$= 1.913 \text{ m}$$

यदि आनत तल पर चली गयी दूरी s है तब

$$\sin\theta = \frac{h}{s}$$

या $\quad s = \frac{h}{\sin\theta} = \frac{1.913}{\sin 30^\circ}$

$$= \frac{1.913}{(1/2)} = 3.826 \text{ m} \approx 3.83 \text{ m}$$

(b) अवमंदित त्वरण $\quad a = \frac{g\sin\theta}{\left(1 + \frac{K^2}{R^2}\right)} = \frac{9.8}{3} \text{ m/s}^2$

प्रारम्भिक वेग $(u) = 0$

गति की समीकरण से, $\quad s = ut + \frac{1}{2}at^2$

$$s = 0 \cdot t + \frac{1}{2}at^2$$

$$\text{समय } t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \times \left(\frac{25 \times 3}{2 \times 9.8}\right)}{(9.8/3)}}$$

$$= \sqrt{\frac{25 \times 3 \times 3}{9.8 \times 9.8}}$$

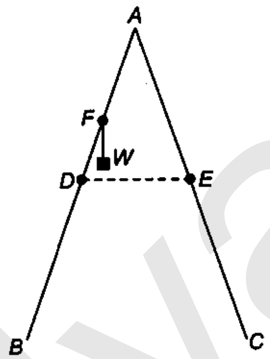
$$= \frac{5 \times 3}{9.8} = 1.53 \text{ s}$$

ऊपर चढ़ने में लगा समय = नीचे आने में लगा समय

$\because$ नीचे आने में लगा कुल समय

$$T = 2t = 2 \times 1.53 = 3.06 \text{ s}$$

प्रश्न 22. जैसा चित्र में दिखाया गया है, एक खड़ी होने वाली सीढ़ी के दो पक्षों BA और CA की लम्बाई 1.6 m है और इनको A पर कब्जा लगा कर जोड़ा गया है। इन्हें ठीक बीच में, 0.5 m लम्बी रस्सी DE द्वारा बांधा गया है। सीढ़ी BA के अनुदिश B से 1.2 m की दूरी पर स्थित बिन्दु F से 40 kg का एक भार लटकाया गया है। यह मानते हुए कि फर्श घर्षणरहित है और सीढ़ी का भार उपेक्षणीय है, रस्सी में तनाव और सीढ़ी पर फर्श द्वारा लगाया गया बल ज्ञात कीजिए।
($g = 9.8\ m/s^2$ लीजिए)
(संकेत सीढ़ी के दोनों ओर के संतुलन पर अलग-अलग विचार कीजिए)



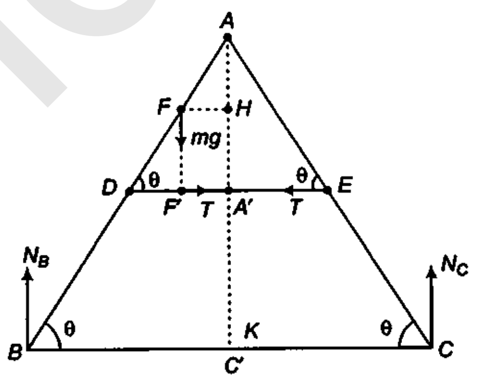
हल विभिन्न बल निकाय पर आरोपित होते हैं

(i) B बिन्दु पर फर्श की अभिलम्ब प्रतिक्रिया N_B ऊपर की दिशा में कार्य करती है।

(ii) बिन्दु C पर फर्श की अभिलम्ब प्रतिक्रिया ऊर्ध्वाधरत: ऊपर की ओर कार्य करती है।

(iii) बिन्दु F पर भार ऊर्ध्वाधरत: नीचे की ओर कार्य करता है।

(iv)



दिया है प्रत्येक तरफ की सीढ़ी की लम्बाई है

$$AB = AC = 1.6\ m$$

माना सीढ़ी की भुजायें क्षैतिक से θ कोण पर झुकी है तथा सीढ़ी के दो बिन्दुओं B तथा C पर फर्श द्वारा लगाया बल क्रमशः N_B तथा N_C हैं।

रस्सी की लम्बाई $(DE) = 0.5 \text{ m}$

$$\text{लटकाया गया भाग } (w) = 40 \text{ kg-f}$$
$$= 40 \times 9.8 = 392 \text{ N}$$
$$\text{दूरी } (BF) = 1.2 \text{ m}$$

$\therefore$ $$\text{दूरी } (AF) = AB - BF = 1.6 - 1.2 = 0.4 \text{ m}$$

$\therefore$ $$\angle ABC = \angle ADE = \angle ACB = \angle AED = \theta$$

माना रस्सी का मध्य बिन्दु A' है

$\therefore$ $$DA' = \frac{0.5}{2} = 0.25 \text{ m}$$

$\therefore$ $$DF' = F'A' = \frac{1}{2}DA' = \frac{1}{2} \times 0.25 = 0.125 \text{ m}$$

सीढ़ी की स्थानान्तरीय साम्यावस्था के लिये

$$N_B + N_C = W$$
$$N_B + N_C = 392 \text{ N} \quad \ldots(i)$$

AB भुजा की तरफ बिन्दु A परितः बल का आघूर्ण लेने पर

$$N_B \times BC' = W \times F'A' + T \times AA'$$

लेकिन $$BC' = AB\cos\theta$$

और $$AA' = AD\sin\theta$$

$\therefore$ $$N_B \times AB\cos\theta = W \times 0.125 + T \times AD\sin\theta \quad \ldots(ii)$$

$\Delta DFF'$, से

$$\cos\theta = \frac{DF'}{DF}$$
$$= \frac{0.125}{0.4} = 0.3125$$
$$= \cos 72.8^\circ$$

$\therefore$ $$\theta = 72.8^\circ$$

$\therefore$ $$\cos\theta = \cos 72.8^\circ = 0.3125$$
$$\sin\theta = \sin 72.8^\circ = 0.9553$$
$$\tan\theta = 72.8^\circ = 3.2350$$

समी (ii) में यह मान रखने पर

$$N_B \times 1.6 \times 0.3125 = (392 \times 0.125) + (T \times 0.8 \times 0.9553)$$

या $$0.5N_B = 0.764T + 49 \quad \ldots(iii)$$

अब बिन्दु A के परितः AC की तरफ बलों का आघूर्ण लेने पर

$$N_C \times CC' = T \times AA'$$

लेकिन $$CC' = AC\cos\theta$$

तथा $$AA' = AE\sin\theta$$

$\therefore$ $$N_C \times AC\cos\theta = T \times AE\sin\theta$$

$$N_C \times 1.6 \times 0.3125 = T \times 0.8 \times 0.9553$$

$$0.5N_C = 0.764T \quad \text{...(iv)}$$

यह मान समी (iii) में रखने पर

$$0.5N_B = 0.5N_C + 49$$

$$0.5(N_B - N_C) = 49$$

$$\frac{1}{2}(N_B - N_C) = 49$$

या $$N_B - N_C = 98 \quad \text{...(v)}$$

समी (i) व (v) को जोड़ने पर

$$2N_B = 392 + 98 = 490$$

या $$N_B = 245\text{ N}$$

समी (i) से $$N_C = 392 - 245\text{ N} = 147\text{ N}$$

समी (iv) से

$$T = \frac{0.5 \times 1.47}{0.764}$$

$$= 96.7\text{ N}$$

प्रश्न 23. कोई व्यक्ति एक घूमते हुए प्लेटफॉर्म पर खड़ा है। उसने अपनी दोनों बाहें फैला रखी हैं और उनमें से प्रत्येक में 5 kg भार पकड़ रखा है। प्लेटफॉर्म की कोणीय चाल 30 rev/min है। फिर वह व्यक्ति बाहों को अपने शरीर के पास ले आता है जिससे घूर्णन अक्ष से प्रत्येक भार की दूरी 90 cm से बदल कर 20 cm हो जाती है। प्लेटफार्म सहित व्यक्ति के जड़त्व आघूर्ण का मान, 7.6 kg-m^2 ले सकते हैं।

(a) उसका नया कोणीय वेग क्या है? (घर्षण की उपेक्षा कीजिए)

(b) क्या इस प्रक्रिया में गतिज ऊर्जा संरक्षित होती है? यदि नहीं, तो इसमें परिवर्तन का स्त्रोत क्या है?

कोणीय संवेग संरक्षण के नियमानुसार, किसी निकाय पर कार्यरत् कुल बल आघूर्ण शून्य है तो निकाय का कोणीय संवेग संरक्षित रहता है। अतः

$$I\omega = \text{नियतांक}$$

हल दिया है, प्रत्येक द्रव्यमान का भार $(m) = 5$ kg

प्रारम्भिक कोणीय वेग $(\omega_1) = 30$ rpm

$$r_1 = 90\text{ cm} = 0.90\text{ m}$$

$$r_2 = 20\text{ cm} = 0.20\text{ m}$$

व्यक्ति तथा प्लेटफार्म का जड़त्व आघूर्ण $(I) = 7.6$ kg-m^2

दोनों भारों का जड़त्व आघूर्ण $(I_1) = mr_1^2 + mr_1^2$

$$= 2 \times mr_1^2 = 2 \times 5 \times (0.90)^2 = 8.1\,\text{kg-m}^2$$

जब व्यक्ति अपने हाथ सिकोड़ लेता है तो दो भारों का जड़त्व आघूर्ण

$$I_2 = mr_2^2 + mr_2^2 = 2 \times 5 \times (0.20)^2$$

$$= 0.4\,\text{kg-m}^2$$

कोणीय संवेग संरक्षण के नियम से

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

∴ $$(I + I_1) \times \omega_1 = (I + I_2) \times \omega_2$$

$$(7.6 + 8.1) \times 30 = (7.6 + 0.4) \times \omega_2$$

या $$\omega_2 = \frac{15.7 \times 30}{8.0} = 58.88\,\text{rpm} = 58.9\,\text{rpm}$$

यहाँ, $$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

या $$I_1^2\omega_1^2 = I_2^2\omega_2^2$$

या $$\frac{1}{2}I_1(I_1\omega_1^2) = \frac{1}{2}I_2(I_2\omega_2^2)$$

या $$\frac{\frac{1}{2}I_2\omega_2^2}{\frac{1}{2}I_1\omega_1^2} = \frac{I_1}{I_2}$$

यहाँ $I_1 > I_2$

∴ $$\frac{I_1}{I_2} > 1$$

और $$\frac{\frac{1}{2}I_2\omega_2^2}{\frac{1}{2}I_1\omega_1^2} > 1$$

या $$\frac{1}{2}I_2\omega_2^2 > \frac{1}{2}I_1\omega_1^2$$

अत: इस प्रक्रिया में गतिज ऊर्जा नियत नहीं रहती है जैसे-जैसे जड़त्व आघूर्ण कम होता जाता है। वैसे-वैसे घूर्णन गतिज ऊर्जा बढ़ती जाती है गतिज ऊर्जा में यह वृद्धि व्यक्ति के हाथ सिकोड़ने में किये गये कार्य से उत्पन्न होती है

प्रश्न 24. 10 g द्रव्यमान और 500 m/s चाल वाली बन्दूक की गोली एक दरवाजे के ठीक केन्द्र में टकराकर उसमें अतंत: स्थापित हो जाती है। दरवाजा 1.0 m चौड़ा है और इसका द्रव्यमान 12 kg है। इसके एक सिरे पर कब्जे लगे हैं और यह इनसे गुजरती एक ऊर्ध्वाधर अक्ष के परित: लगभग बिना घर्षण के घूम सकता है। गोली के दरवाजे में अंतत: स्थापना के ठीक बाद इसका कोणीय वेग ज्ञात कीजिए।

(संकेत एक सिरे से गुजरती ऊर्ध्वाधर अक्ष के परित: दरवाजे का जड़त्व-आघूर्ण $\frac{ML^2}{3}$ है)

हल दिया है, गोली का द्रव्यमान $(m) = 10\,g = 0.01\,kg$

गोली की चाल $(v) = 500\,m/s$

दरवाजे की चौड़ाई $(l) = 1.0\,m$

दरवाजे का द्रव्यमान $(M) = 12\,kg$

गोली दरवाजे से टकराकर उसमें स्थापित हो जाती है तब दरवाजे के कब्जे से इसकी दूरी

$$r = \frac{l}{2} = \frac{1}{2}\,m$$

गोली के द्वारा स्थानान्तरित कोणीय संवेग

$$L = mv \times r$$
$$= 0.01 \times 500 \times \frac{1}{2}$$
$$= 2.5\,J\text{-}s$$

दरवाजे के अपने एक सिरे के ऊर्ध्वाधर अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण

$$I = \frac{Ml^2}{3} = \frac{12 \times (1)^2}{3} = 4\,kg\text{-}m^2$$

कोणीय संवेग $(L) = I\omega$

$\therefore$ $$2.5 = 4 \times \omega$$

या $$\omega = \frac{2.5}{4}$$

$$\omega = 0.625\ rad/s$$

प्रश्न 25. दो चक्रिकाएँ जिनके अपने-अपने अक्षों (चक्रिका के अभिलम्बवत् तथा चक्रिका के केन्द्र से गुजरने वाले) के परितः जड़त्व आघूर्ण I_1 तथा I_2 हैं और जो ω_1 तथा ω_2 कोणीय चालों से घूर्णन कर रही हैं, को उनके घूर्णन अक्ष संपाती करके आमने-सामने लाया जाता है। (a) इस दो चक्रिका निकाय की कोणीय चाल क्या है? (b) यह दर्शाइए कि इस संयोजित निकाय की गतिज ऊर्जा दोनों चक्रिकाओं की आरम्भिक गतिज ऊर्जाओं के योग से कम है। ऊर्जा में हुई इस हानि की आप कैसे व्याख्या करेंगे? $\omega_1 \neq \omega_2$ लीजिए।

हल (a) दोनों डिस्कों का कुल कोणीय संवेग

$$L = L_1 + L_2$$
$$L = I_1\omega_1 + I_2\omega_2 \quad \ldots(i)$$

जब दोनों डिस्कों को संपर्क में लाया जाता है तब दोनों डिस्कों का जड़त्व आघूर्ण

$$= (I_1 + I_2)$$

माना दो डिस्कों के निकाय का कोणीय वेग ω है।

$\therefore$ निकाय का कुल कोणीय संवेग, $L' = (I_1 + I_2) \times \omega$

कोई बाह्य बल निकाय पर कार्य नहीं करता है अतः कोणीय संवेग संरक्षण के नियमानुसार,

$$L = L'$$

या $$(I_1\omega_1 + I_2\omega_2) = (I_1 + I_2) \times \omega$$

या $$\omega = \frac{I_1\omega_1 + I_2\omega_2}{I_1 + I_2}$$

(b) डिस्कों की प्रारम्भिक कुल गतिज ऊर्जा $(E_1) = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2$

निकाय की अन्तिम कुल गतिज ऊर्जा $(E_2) = \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\cdot\omega^2$

$$= \frac{1}{2}(I_1 + I_2) \times \frac{(I_1\omega_1 + I_2\omega_2)^2}{(I_1 + I_2)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(I_1\omega_1 + I_2\omega_2)^2}{(I_1 + I_2)}$$

अब $$E_1 - E_2 = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 - \frac{1}{2}\frac{(I_1\omega_1 + I_2\omega_2)^2}{(I_1 + I_2)}$$

$$= \frac{(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2)(I_1 + I_2) - (I_1\omega_1 + I_2\omega_2)^2}{2(I_1 + I_2)}$$

$$= \frac{(I_1^2\omega_1^2 + I_1I_2\omega_2^2 + I_1I_2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2) - (I_1^2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2 + 2I_1I_2\omega_1\omega_2)}{2(I_1 + I_2)}$$

$$= \frac{I_1I_2(\omega_1^2 + \omega_2^2 - 2\omega_1\omega_2)}{2(I_1 + I_2)} = \frac{1}{2}\frac{I_1I_2}{(I_1 + I_2)}(\omega_1 - \omega_2)^2$$

जो एक धनात्मक राशि है।

अतः संयोजित निकाय की गतिज ऊर्जा दोनों चक्रिकाओं की आरम्भिक गतिज ऊर्जाओं के योग से कम है। गतिज ऊर्जा में यह हानि डिस्कों के बीच लगे घर्षण बलों के कारण होती है। घर्षण बलों के द्वारा उत्पन्न बल आघूर्ण केवल आन्तरिक है। अतः कोणीय संवेग नियत रहता है।

प्रश्न 26.

(a) लम्बवत् अक्षों के प्रमेय की उत्पत्ति करें संकेतः (x, y) तल के लम्बवत् मूल बिन्दु से गुजरती अक्ष से किसी बिन्दु x-y की दूरी का वर्ग $(x^2 + y^2)$ है।]

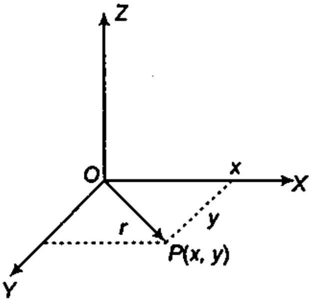
(b) समान्तर अक्षों के प्रमेय की उपपत्ति करें (संकेतः यदि द्रव्यमान केन्द्र को मूल बिन्दु ले लिया जाय तो $\Sigma m_i r_i = 0$)

हल (a) लम्बवत् अक्षों की प्रमेय किसी समतल पटल का उसके तल के लम्बवत् किसी अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण उसके तल में स्थित दो परस्पर लम्बवत् अक्षों (जिनके कटान बिन्दु से प्रथम अक्ष गुजरता है) के परितः जड़त्व आघूर्ण के योग के तुल्य होता है।

समतल पटल के लिये इसे गणितीय रूप में इस प्रकार दिया जा सकता है।

उत्पत्ति $$I_Z = I_X + I_Y$$

माना पटल अनेक कणों के द्वारा बना है जिसमें प्रत्येक कण का द्रव्यमान m है। माना m द्रव्यमान के कण P के निर्देशांक x तथा y हैं तथा x-y तल से इसकी दूरी r है।



$\therefore$ $$r^2 = x^2 + y^2 \quad \ldots(i)$$

$\therefore$ इस कण का अक्ष OZ के परितः जड़त्व आघूर्ण $= mr^2$

यदि Z अक्ष के परितः सम्पूर्ण पटल का जड़त्व आघूर्ण I_2 है, तब

$$I_Z = \Sigma mr^2 = \Sigma m(x^2 + y^2)$$

$$= \Sigma mx^2 + \Sigma my^2 \quad \ldots(ii)$$

अक्ष X तथा अक्ष Y के परितः सम्पूर्ण पटल का जड़त्व आघूर्ण I_X तथा I_Y है।

$\therefore$ $$I_X = \Sigma my^2 \quad \ldots(iii)$$

$$I_Y = \Sigma mx^2 \quad \ldots(iv)$$

$\therefore$ समीकरण (ii), (iii) तथा (iv) से, हम प्राप्त करते हैं

$$I_Z = I_Y + I_X = I_X + I_Y$$

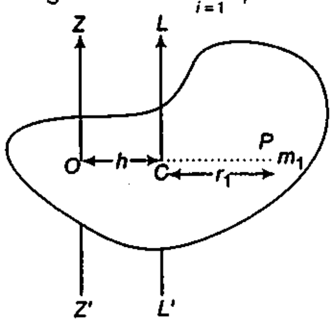
(b) **समान्तर अक्षों की प्रमेय** इसके अनुसार किसी पिण्ड का किसी दिये गये अक्षः के परितः जड़त्व आघूर्ण I उस पिण्ड के द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाले तथा दिये गये अक्ष के समान्तर किसी अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण I_c व पिण्ड के द्रव्यमान M व दोनों अक्षों के मध्य लम्बवत् दूरी h के वर्ग के गुणनफल के योग के तुल्य होता है।

$$I = I_c + mh^2$$

जहाँ I_c = द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाली अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण है।

अक्ष LL' के समान्तर तथा इससे लम्बवत् दूरी h पर अक्ष ZZ' के परितः जड़त्व आघूर्ण है।

$M = n$ कणों की बनी वस्तु का द्रव्यमान $= \sum_{i=1}^{n} m_i$



उत्पत्ति

मान लीजिये गुरुत्व केन्द्र से गुजरने वाली LL' अक्ष से r_i दूरी पर कण को P बिन्दु पर (वस्तु के अन्दर) स्थित किया गया है।

$\therefore$ ZZ' अक्ष से कण की दूरी $= OP = OC + CP = h + r_i$

यदि I_c = अक्ष LL' के परितः सम्पूर्ण वस्तु का जड़त्व आघूर्ण है।

तब, $$I_c = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \quad \ldots(i)$$

माना यदि अक्ष ZZ' के परितः जड़त्व आघूर्ण I_i है, तब

$$I_i = m_i(OP)^2$$
$$= m_i(r_i + h)^2$$

यदि सम्पूर्ण वस्तु का अक्ष ZZ' के परितः जड़त्व आघूर्ण I है,

तब, $$I = \sum_{i=1}^{n} I_i = \sum_{i=1}^{n} m_i(r_i + h)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i(r_i^2 + h^2 + 2m_i r_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i h^2 + \sum_{i=1}^{n} 2m_i r_i$$

$$= I_c + \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)h^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} m_i r_i\right)$$

$$= I_c + Mh^2 + 0$$
$$= I_c + Mh^2$$

जहाँ, $\sum_{i=1}^{n} m_i r_i$ = वस्तु के सभी कणों का द्रव्यमान केन्द्र के परितः जड़त्व आघूर्णों का योग है।

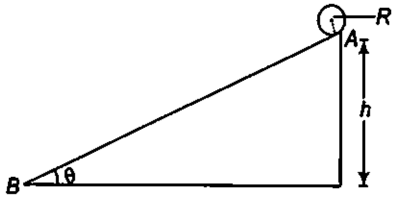
तो $$\sum_{i=1}^{n} m_i r_i = 0$$

यदि द्रव्यमान केन्द्र का मूल बिन्दु ले लिया जाये

$\therefore$ $$I = I_c + Mh^2$$

प्रश्न 27. सूत्र $v^2 = \dfrac{2gh}{\left(1 + \dfrac{K^2}{R^2}\right)}$ को गतिकीय दृष्टि (अर्थात् बलों तथा बल आघूर्णों के विचार) से व्युत्पन्न कीजिए। जहाँ v लोटनिक गति करते पिण्ड (वलय, डिस्क, बेलन या गोला) का आनत तल की तली में वेग है। आनत तल पर h वह ऊँचाई है जहाँ से पिण्ड गति प्रारम्भ करता है। k सममित अक्ष के परितः पिण्ड की घूर्णन त्रिज्या है और R पिण्ड की त्रिज्या है।

हल माना h ऊँचाई के आनत तल पर लुढ़कते हुये वस्तु के द्रव्यमान, त्रिज्या तथा घूर्णन त्रिज्या क्रमशः m, R तथा K हैं।



जब वस्तु आनत तल की सर्वोच्चतम ऊँचाई पर है तब वस्तु में केवल स्थितिज ऊर्जा होगी जो इसकी कुल ऊर्जा के बराबर है।

$\therefore \qquad E_A = mgh \qquad \ldots(i)$

माना आनत तल की तली पर वस्तु का रेखीय तथा कोणीय वेग क्रमशः v तथा ω हैं।
ऊर्जा संरक्षण के नियमानुसार,

$$E_A = E_B$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

(लेकिन वस्तु का जड़त्व आघूर्ण $I = mK^2$ तथा कोणीय वेग $\omega = v/R$ है)

$$\therefore \qquad mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}(mK^2)\times\left(\frac{v^2}{R^2}\right)$$

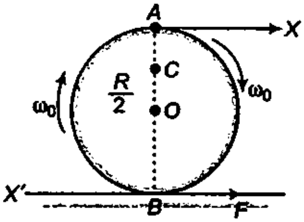
$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\frac{K^2}{R^2}v^2$$

$$= \frac{1}{2}mv^2\left(1+\frac{K^2}{R^2}\right)$$

या

$$v^2 = \frac{2hg}{\left(1+\frac{K^2}{R^2}\right)}$$

प्रश्न 28. अपने अक्ष पर ω_0 कोणीय चाल से घूर्णन करने वाली किसी चक्रिका को धीरे से (स्थानान्तरीय धक्का दिए बिना) किसी पूर्णतः घर्षणरहित मेज पर रखा जाता है। चक्रिका की त्रिज्या R है। चित्र में दर्शाई चक्रिका के बिन्दुओं A, B तथा C पर रैखिक वेग क्या हैं? क्या यह चक्रिका चित्र में दर्शाई दिशा में लोटनिक गति करेगी?



हल रेखीय वेग $v = r\omega$

A बिन्दु के लिए,	$v_A = R\omega_0$	AX के अनुदिश
B बिन्दु के लिए,	$v_B = R\omega_0$	BX के अनुदिश
C बिन्दु के लिए,	$v_C = \frac{R}{2}\omega_0$	AX के समान्तर

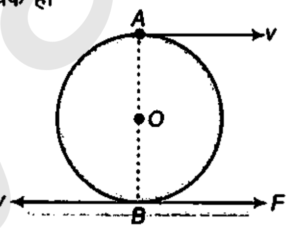
डिस्क घूर्णन गति नहीं करेगी, क्योंकि यह पूर्णतः घर्षणरहित मेज पर रखी है तथा बिना घर्षण के घूर्णन करना सम्भव नहीं है।

प्रश्न 29. स्पष्ट कीजिए कि प्रश्न 28 के चित्र में अंकित दिशा में चक्रिका की लोटनिक गति के लिए घर्षण होना आवश्यक क्यों है?

(a) **B पर घर्षण बल की दिशा तथा परिशुद्ध लुढ़कन आरम्भ होने से पूर्व घर्षण बल आघूर्ण की दिशा क्या है?**

(b) **परिशुद्ध लोटनिक गति आरम्भ होने के पश्चात् घर्षण बल क्या है?**

हल चक्रिका की लोटनिक गति के लिए, बल आघूर्ण की आवश्यकता होती है जो केवल स्पर्शीय बल द्वारा प्राप्त कराया जा सकता है। घर्षण बल चक्रिका पर कार्य करने वाला स्पर्श रेखीय बल है। अतः चक्रिका की लोटनिक गति के लिए घर्षण होना आवश्यक है।



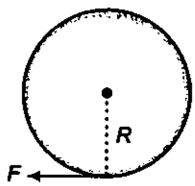
(a) बिन्दु B पर कार्य करने वाला घर्षण बल बिन्दु B पर वेग के विपरीत कार्य करता है अतः बिन्दु B पर घर्षण बल की दिशा दाँयी तरफ है।

घर्षण बल आघूर्ण की दिशा कोणीय गति ω_0 के विपरीत है (जिसकी दिशा कागज के तल के लम्बवत् अन्दर की ओर है।)

अतः घर्षण बल आघूर्ण की दिशा कागज के तल के लम्बवत् बाहर की ओर होगी।

(b) परिशुद्ध लोटनिक गति आरम्भ होने पर B बिन्दु पर वेग शून्य हो जाता है और इसलिए घर्षण बल शून्य होगा।

प्रश्न 30. 10 cm त्रिज्या की कोई ठोस चक्रिका तथा इतनी ही त्रिज्या का कोई छल्ला किसी क्षैतिज मेज पर एक ही क्षण 10π rad s^{-1} की कोणीय चाल से रखे जाते हैं। इनमें से कौन पहले लोटनिक गति आरम्भ कर देगा? गतिज घर्षण गुणांक $\mu_k = 0.2$।



हल ठोस चक्रिका तथा छल्ले की त्रिज्या $(R) = 10\,\text{cm} = 0.10\,\text{m}$

प्रारम्भिक कोणीय वेग $(\omega_0) = 10\pi$ rad/s

गतिज घर्षण गुणांक $(\mu_k) = 0.2$

छल्ले का जड़त्व आघूर्ण $(I_1) = MR^2$

चक्रिका का जड़त्व आघूर्ण $(I_2) = \frac{1}{2}MR^2$

घर्षण गति के लिए उत्तरदायी है। घर्षण बल गति के लिये उत्तरदायी होता है तथा घर्षण प्रारम्भिक रेखीय वेग से वलय तथा डिस्क के द्रव्यमान केन्द्र को त्वरित कर देता है।

माना घर्षण बल आघूर्ण प्रारम्भिक वेग को कम कर देता है।

अब $$F = \mu_k N = ma \quad \ldots(i)$$
या $$\mu_k mg = ma \quad \ldots(ii)$$
या $$a = \mu_k g \quad \ldots(iii)$$
यदि α कोणीय त्वरण है तब बल आघूर्ण $\tau = -I\alpha$

बल आघूर्ण $\tau = FR$

अतः $$\tau = -I\alpha = FR = \mu_k mgR \quad \ldots(iv)$$
जहाँ, R = चक्रिका या छल्ले की त्रिज्या है।

यहाँ $u = 0$, गति की समीकरण से $v = u + at$
$$v = at$$
या $$a = \frac{v}{t}$$
समी (iii) से, $$a = \mu_k g$$
या $$\frac{v}{t} = \mu_k g$$
या $$v = \mu_k gt \quad \text{(छल्ले के लिये)}$$
तथा $$v = \mu_k gt' \quad \text{(चक्रिका के लिए)} \ldots(v)$$
समी (iv) से $$\alpha = -\frac{\mu_k mgR}{I} = -\frac{\mu_k mgR}{MR^2}$$
या $$\alpha = -\frac{\mu_k g}{R} \quad \text{(छल्ले के लिए)} \ldots(vi)$$
तथा $$\alpha = -\frac{m_k mgR}{\frac{1}{2}mR^2}$$
$$= -\frac{2\ \mu_k g}{R} \quad \text{(चक्रिका के लिए)} \ldots(vii)$$
माना $\omega = t$ समय बाद छल्ले की तथा t' समय बाद चक्रिका का कोणीय वेग है।

∴ हम जानते हैं $$\omega = \omega_0 + \alpha t$$
छल्ले के लिए $$\omega = \omega_0 - \frac{\mu_k gt}{R} \quad \ldots(viii)$$
डिस्क के लिए $$\omega = \omega_0 - \frac{2\mu_k gt'}{R} \quad \ldots(ix)$$
लुढ़कने की स्थिति के लिए $v = R\omega$
$$\mu_k gt = R\left(\omega_0 - \frac{\mu_k gt}{R}\right)$$
$$= R\omega_0 - \mu_k gt$$
या $$2\mu_k gt = R\omega_0$$
या $$t = \frac{R\omega_0}{2\mu_k g} \quad \ldots(x)$$

चक्रिका के लिए
$$\mu_k g t' = R\left(\omega_0 - \frac{2\mu_k g t'}{R}\right)$$
$$= R\omega_0 - 2\mu_k g t'$$

या
$$t' = \frac{R\omega_0}{3\mu_k g} \quad \ldots(xi)$$

यह मान $R = 0.1\,m, \omega = 10\pi$ rad/s, $\mu = 0.2, g = 9.8\,m/s^2$

समी (x) तथा (xi) में रखने पर
$$t = \frac{0.1 \times 10\pi}{2 \times 0.2 \times 9.8} = 0.8\,s \quad \ldots(xii)$$

तथा
$$t' = \frac{0.1 \times 10\pi}{3 \times 0.2 \times 9.8} = 0.53\,s \quad \ldots(xiii)$$

समी (xii) तथा (xiii) से यह स्पष्ट होता है कि $t' < t$ अतः चक्रिका पहले लोटनिक गति आरम्भ करेगी।

प्रश्न 31. 10 kg द्रव्यमान तथा 15 cm त्रिज्या का कोई सिलिंडर किसी 30° झुकाव के समतल पर परिशुद्धतः लोटनिक गति कर रहा है। स्थैतिक घर्षण गुणांक $\mu_s = 0.25$ है।

(a) सिलिंडर पर कितना घर्षण बल कार्यरत है?

(b) लोटन की अवधि में घर्षण के विरुद्ध कितना कार्य किया जाता है?

(c) यदि समतल के झुकाव θ में वृद्धि कर दी जाए तो θ के किस मान पर सिलिंडर परिशुद्धतः लोटनिक गति करने की बजाय फिसलना आरम्भ कर देगा?

हल बेलन का द्रव्यमान $m = 10\,kg$

बेलन की त्रिज्या $r = 15\,cm = 0.15\,m$

आनत कोण $\theta = 30°$

स्थैतिक घर्षण गुणांक $\mu_s = 0.25$

(a) आनत तल पर गति कर रहे बेलन पर लगने वाला घर्षण बल
$$F = \frac{1}{3} mg \sin\theta$$
$$= \frac{1}{3} \times 10 \times 9.8 \times \sin 30°$$
$$= \frac{1}{3} \times 10 \times 9.8 \times \frac{1}{2}$$
$$= 16.3\,N$$

(b) घर्षण बल की दिशा विस्थापन के लम्बवत् है

∴ लुढ़कने में घर्षण के विरुद्ध किया गया कार्य
$$W = F s \cos 90° = 0$$

(c) बिना फिसलन के लोटनिक गति के लिए

$$\mu = \frac{1}{3}\tan\theta$$

या $\tan\theta = 3\mu$

$$= 3 \times 0.25 = 0.75$$

$$= \tan 36°54'$$

या $\theta = 36°54' \simeq 37°$

प्रश्न 32. नीचे दिए गए प्रत्येक प्रकथन को ध्यानपूर्वक पढ़िए तथा कारण सहित उत्तर दीजिए कि इनमें से कौन-सा सत्य है और कौन-सा असत्य है?

(a) लोटनिक गति करते समय घर्षण बल उसी दिशा में कार्यरत होता है जिस दिशा में पिण्ड का द्रव्यमान केन्द्र गति करता है।

(b) लोटनिक गति करते समय सम्पर्क बिन्दु की तात्क्षणिक चाल शून्य होती है।

(c) लोटनिक गति करते समय सम्पर्क बिन्दु का तात्क्षणिक त्वरण शून्य होता है।

(d) परिशुद्ध लोटनिक गति के लिए घर्षण के विरुद्ध किया गया कार्य शून्य होता है।

(e) किसी पूर्णतः घर्षणरहित आनत समतल पर नीचे की ओर गति करते पहिए की गति फिसलन गति (लोटनिक गति नहीं) होगी।

हल (a) सत्य, लोटनिक गति के दौरान, वस्तु के संपर्क बिन्दु की दिशा वस्तु के द्रव्यमान केन्द्र की दिशा के विपरीत है अतः लोटनिक गति करते समय घर्षण बल जो सापेक्ष गति के विपरीत उसी दिशा में कार्यरत होता है जिस दिशा में पिण्ड का द्रव्यमान केन्द्र गति करता है।

(b) सत्य, क्योंकि परिशुद्ध लोटनिक गति के दौरान, यह कल्पना की जा सकती है कि वस्तु सतह के सम्पर्क में आने वाले बिन्दु से जाने वाली अक्षः के परितः लोटनिक गति कर रही है अर्थात् लोटनिक गति करते समय सम्पूर्ण बिन्दु की तात्क्षणिक चाल शून्य होती है।

(c) असत्य, लोटनिक गति करते समय सम्पर्क बिन्दु का तात्क्षणिक त्वरण शून्य नहीं होता है।

(d) सत्य, क्योंकि परिशुद्ध लोटनिक गति में घर्षण शून्य हो जाता है अतः घर्षण के विरुद्ध किया गया कार्य शून्य होता है।

(e) सत्य, क्योंकि लोटनिक गति स्पर्शीय घर्षण बल द्वारा उत्पन्न बल आघूर्ण द्वारा उत्पन्न होती है क्योंकि घर्षण शून्य है इसलिए पहिये की गति फिसलन गति होगी।